UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS
E DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA

LUCAS PAULO ALMEIDA OLIVEIRA

RELAÇÕES ENTRE O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA DE EINSTEIN E AS ELABORAÇÕES PRECURSORAS DE LEIBNIZ

RIO DE JANEIRO
2024

LUCAS PAULO ALMEIDA OLIVEIRA

RELAÇÕES ENTRE O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA DE EINSTEIN E AS ELABORAÇÕES PRECURSORAS DE G. LEIBNIZ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Lyra de Oliveira
Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Mattos Antunes

RIO DE JANEIRO

2024

CIP - Catalogação na Publicação

A933r

Almeida Oliveira, Lucas Paulo
RELAÇÕES ENTRE O PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA DE EINSTEIN E AS ELABORAÇÕES PRECURSORAS DE G. LEIBNIZ / Lucas Paulo Almeida Oliveira. -- Rio de Janeiro, 2024.
67 f.

Orientador: Alexandre Lyra de Oliveira.
Coorientador: Marcelo Mattos Antunes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Decania do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2024.

1. Princípio da Equivalência. 2. Leibniz. 3. Einstein. 4. Relatividade. 5. Princípio da Identidade dos Indiscerníveis. I. Lyra de Oliveira, Alexandre , orient. II. Mattos Antunes, Marcelo , coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Dedico esta dissertação a quem me
ensinou o gosto pela História, professora
Janaína Vieira, minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao orientador Pr. Dr. Alexandre Lyra pela dedicada orientação, pelos muitos ensinamentos, por estar presente durante toda a construção deste trabalho e nunca me deixar desamparado. Agradeço ao coorientador Pr. Dr Marcelo Mattos, pois sem ele, sem seu detalhismo e sem todo o seu conhecimento em Leibniz, o trabalho não seria possível. Agradeço à minha esposa, Júlia Santiago, por toda a paciência, companheirismo e incentivo ao longo desses mais de dois anos de pesquisa, e ainda pela sua dedicada revisão ortográfica do texto final. Agradeço ao meu pai, Paulo César, pelas palavras de incentivo e por me acalmar nos momentos de ansiedade. Agradeço ainda minha irmã, Laura Maria, por seu meu exemplo de conquista.

Se o senhor quer estudar em qualquer
dos físicos teóricos os métodos que emprega,
sugiro-lhe firmar-se neste princípio básico:
não dê crédito algum ao que ele diz, mas
julgue aquilo que produziu! Porque o criador
tem esta característica: as produções de sua
imaginação se impõem a ele, tão
indispensáveis, tão naturais, que não pode
considerá-las como imagem do espírito, mas
as conhece como realidades evidentes.

Albert Einstein

RESUMO

Faremos neste trabalho uma comparação entre Princípios e Conceitos de Leibniz com o tratamento utilizado na Teoria da Relatividade Geral de Einstein. O nosso foco é no Princípio da Equivalência, na sua forma infinitesimal. Abordaremos o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis de Leibniz e também seus conceitos de continuidade e de infinitesimais. Já na Teoria da Relatividade Geral exemplificaremos seu formalismo com a famosa Escada de Schild para o transporte paralelo de vetores no espaço-tempo relativista. Veremos que nestes conceitos e formulações estão explicitamente ou mesmo implicitamente ideias precursoras de Leibniz, com cerca de dois séculos de antecedência. Antes de abordar nosso tema principal, faremos uma contextualização histórica do Princípio da Equivalência de Einstein, inclusive com suas diferentes formulações. Buscaremos abordar estes temas privilegiando a forma epistêmica e histórica.

Palavras-chave: princípio da equivalência; Leibniz; Einstein; relatividade; princípio da identidade dos indiscerníveis.

ABSTRACT

In this work, we will make a comparison between Leibniz's Principles and Concepts with the treatment used in Einstein's Theory of General Relativity. Our focus is on the Principle of Equivalence, in its infinitesimal form. We will address Leibniz's Principle of the Identity of Indiscernibles and also his concepts of continuity and infinitesimals. In the Theory of General Relativity, we will exemplify its formalism with the famous Schild Ladder for the parallel transport of vectors in relativistic space-time. We will see that in these concepts and formulations there are explicitly or even implicitly precursor ideas of Leibniz, about two centuries in advance. Before addressing our main topic, we will provide a historical contextualization of Einstein's Equivalence Principle, including its different formulations. We will seek to approach these themes adopting the epistemic and historical way.

Keywords: equivalence principle; Leibniz; Einstein; relativity; principle of the identity of indiscernibles.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PE – Princípio da Equivalência

PII – Princípio da Identidade dos Indiscerníveis

TRE – Teoria da Relatividade Especial

TRG – Teoria da Relatividade Geral

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Após formular a Teoria da Relatividade Especial em 1905, Albert Einstein iniciou um processo que o levaria à formulação do Princípio da Equivalência (PE) e à Teoria da Relatividade Geral (TRG). Entretanto, somente nos anos 1911-1912 é que teve elementos para a formulação deste princípio. Este processo se iniciou com o que ele considerou inicialmente como "inexplicável" coincidência empírica de igualdade entre as massas inercial e gravitacional (NORTON, 1985). Einstein afirmou que o Princípio da Equivalência "[...]foi o pensamento mais feliz de [sua] vida" (SMEENK, MARTIN, 2007). Investigações deste princípio podem nos trazer importantes conhecimentos históricos e epistemológicos sobre a física. Temos uma utilização deste Princípio na formulação feita por Weinberg (1972, p.7-8) em seu conhecido livro de Gravitação e Cosmologia, onde ao fazer sua elaboração da Teoria da Gravitação, desenvolve uma formulação diferente da de Einstein. Seu ponto de partida, apesar de ser pelo Princípio da Equivalência, não assume como base fundamental da teoria o fato do espaço-tempo ter uma geometria com curvatura, pseudo-Riemanniana. Assim, encontramos muitas formulações do PE e muitas versões deste Princípio serão citadas ao longo deste trabalho, assim como também encontramos uma discussão compacta do Princípio, no contexto geral de Teorias de Gravitação (THORNE, LEE, LIGHTMAN, 1973, p.3570-3572).

Dentre as várias abordagens do Princípio da Equivalência, em nosso contexto é importante destacar a denominada *formulação infinitesimal,* proposta por W. Pauli inicialmente em 1921, a qual foi uma tentativa para resolver o problema da não homogeneidade do campo gravitacional (PAULI, 1958, p.145). Ressaltamos que o desenvolvimento realizado por E. Prugovečki (1995, p.202), onde partindo da formulação infinitesimal do Princípio da Equivalência, assume um papel físico-matemático fundamental na estrutura dos espaços fibrados de sua elaboração da gravitação clássica e quântica, ao desenvolver a formulação realizada inicialmente por M. Friedman (1983). Outros autores como Knox (2013), propõem a formulação denominada de formulação pontual, ou seja, que a relatividade vale de forma restrita num ponto arbitrário do espaço-tempo.

Devemos lembrar que historicamente, o que viria a ser futuramente a denominada formulação fraca o Princípio da Equivalência (PE), encontramos já em Newton, a igualdade entre massa inercial (m_I que aparece na 2ª. lei de Newton)[1], e massa gravitacional (m_G que aparece na lei da gravitação universal de Newton)[2]. A proposta Newtoniana visava responder a proposição de Universalidade de Queda Livre feita por Galileu, porém a partir de sua Teoria de Gravitação. Há vários experimentos que comprovaram esta igualdade, como o de Eötvös, iniciado em 1885 e melhorado entre 1906 e 1909 (DICKE, 1961), que obteve o resultado de uma parte em 10^9. Tais experimentos foram fundamentais para Einstein. Atualmente, este resultado foi confirmado (TOUBOUL et al., 2022) e atingiu uma precisão de uma parte em 10^{15}. Partindo-se da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional até chegar a denominada Hipótese de Equivalência, entre gravitação e inércia, feita por Einstein, foi uma longa trajetória. Esta hipótese é que depois, também por Einstein, foi "elevada'' à categoria de um Princípio, no qual um sistema de referenciais acelerado é equivalente a um campo gravitacional homogêneo. Este é o cerne de sua Teoria da Relatividade Geral (TRG) na formulação de Einstein. As várias formulações para o Princípio da Equivalência, incluindo os infinitesimais, compõem o objetivo de pesquisa deste trabalho. Frisamos que a importância atual deste Princípio, além de ser histórica por sua relevância na TRG, fundamenta teorias de Gravitação Quântica, área tão importante para a ciência atual.

Sob o ponto de vista epistêmico, Friedman (1983), em sua abordagem sobre os fundamentos da TRG, assinala a pertinência do Racionalismo de Leibniz[3]. Aprofundaremos alguns aspectos dessas relações ainda não descritos pelos autores citados, e enfatizaremos a relação entre o Princípio da Equivalência no que diz respeito às relações entre a Teoria da Relatividade Restrita e a Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Neste âmbito verificaremos que o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis está implícito na TRG, isso porque, pudemos verificar que o PII é interpretado por autores como Lee Smolin (2019, p.4) como um princípio físico. Destacaremos também o vínculo entre o Princípio dos Indiscerníveis e o Princípio da Razão Suficiente, que serviram a Leibniz, em suas discussões com Samuel Clarke, como um contraponto ao espaço e tempo absolutos de Newton. Inicialmente faremos uma abordagem da história do Princípio da Equivalência, de algumas das formulações que interessam ao nosso objetivo, até chegar a sua formulação infinitesimal. Em seguida abordaremos algumas questões da filosofia de Leibniz e nela discutiremos

[1] $F = m \cdot a$, sendo F a força aplicada ao corpo, m a massa do corpo e a sua aceleração.

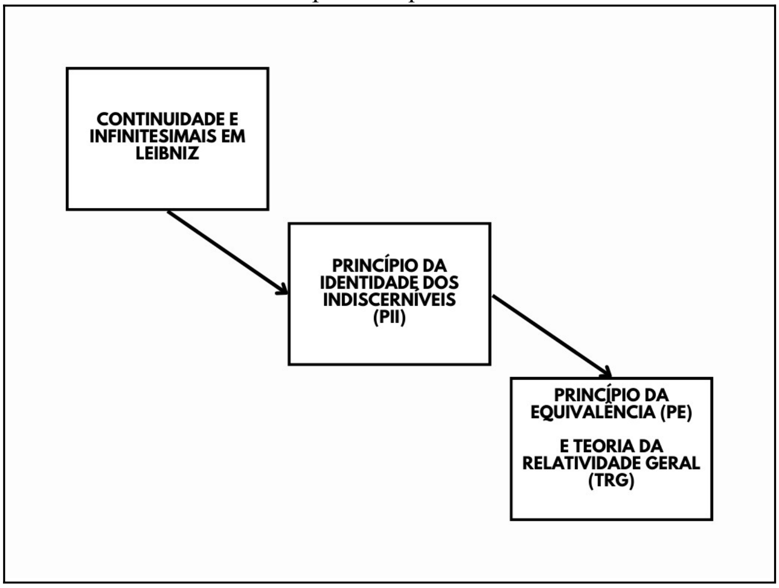
[2] $F = G\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ onde G é a constante gravitacional, F é a força gravitacional, m_1 e m_2 são as massas gravitacionais e r é a distância entre elas.

[3] Anteriormente, nosso grupo de pesquisa já havia investigado relações da obra de Leibniz com teorias físicas (MATTOS, 2019). Aqui faremos uma continuidade deste estudo, abordando especificamente o Princípio da Equivalência.

conceitos sobre o espaço e o tempo. O Princípio dos Indiscerníveis será abordado com mais detalhes. Ao final, faremos uma discussão dos dois princípios, o da Equivalência, sob o ponto de vista de Friedman, e o dos Indiscerníveis de Leibniz, no sentido de que suas ideias quanto a indiscernibilidade se fazem presentes mesmo nas formulações modernas no âmbito da TRG. O enfoque do trabalho, como mencionado, é epistemológico e não ontológico.[4]

Na Figura 1, apresenta-se o esquema ilustrativo de como nosso trabalho se organiza, ou ainda de como procuraremos relacionar Leibniz ao Princípio da Equivalência. A Lei de Continuidade de Leibniz e a sua noção de infinitesimais se associam ao seu Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII), e este princípio por sua vez pode ser percebido na formulação infinitesimal do Princípio da Equivalência (PE) presente na Teoria da Relatividade Geral (TRG).

Figura 1 – Ilustração esquemática da relação entre o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis e o Princípio da Equivalência.



Fonte: Elaborada pelo autor.

De início, no próximo capítulo, apresentaremos os antecedentes ao Princípio da Equivalência (PE), para que o leitor se situe historicamente e para que tenha consciência da relevância de tal princípio para o desenvolvimento da Relatividade Geral. Por uma questão cronológica, será apresentada a divergência de Leibniz à noção de espaço Newtoniano, e no entanto, as demais considerações quanto as ideias de Leibniz serão feitas quando já estivermos familiarizados com a formulação de Einstein para o Princípio de Equivalência.

[4] Para uma discussão ontológica que relaciona o Princípio da Equivalência de Einstein com a Identidade dos Indiscerníveis de Leibniz, ver em French (1995) e Spekkens (2019).

2 ANTECEDENTES HISTÓRICOS AO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

Há um longo caminho entre as primeiras noções de movimento de Aristóteles, os primeiros estudos de queda livre dos corpos por Galileu, a formulação da primeira teoria de gravitação proposta por Newton, até chegarmos na Teoria da Relatividade Geral (TRG) proposta por Einstein. Deste modo, faz-se necessário uma descrição de todo esse empreendimento científico anterior ao Princípio da Equivalência na TRG. Para isso, faremos uma breve consideração das evoluções do conceito de movimento, espaço e tempo, a partir da antiguidade, com as primeiras noções de movimento de Aristóteles, e em seguida, já na idade média, traremos a visão de dois importantes filósofos árabes, Averróis e Avicena.

Ao fim, serão apresentadas as noções de movimento e espaço de Galileu, e na modernidade, traremos a divergência entre Leibniz e Newton.

2.1 ARISTÓTELES, AVICENA E AVERRÓIS

2.1.1 Aristóteles

Aristóteles (384 a.C - 322 a.C) pensava o movimento de uma forma muito ampla, ou seja, buscava explicar o desabrochar de uma flor com o mesmo empreendimento que buscava explicar a queda de um corpo ao solo. No que diz respeito ao segundo caso, a explicação se dá pelo seguinte: Os corpos, em sua filosofia, possuem um lugar natural, uma pedra em repouso sobre o solo está em seu lugar natural, arremessá-la é portanto um movimento violento (antinatural) e por isso ela cairá novamente como uma tendência a buscar o seu lugar natural. O movimento é portanto, para Aristóteles, um movimento com respeito a um lugar:

> Por outro lado, todo movimento é por violência ou por natureza. Mas se há um movimento violento, então deve haver também um movimento natural (porque o movimento violento é contrário ao natural, e o movimento contrário ao natural é posterior ao que é segundo natural, de modo que, se não houvesse movimento de acordo com o natural em cada um dos corpos naturais, não haveria nenhum dos outros movimentos) (ARISTÓTELES, 1995, p.139. Tradução nossa).

O espaço para Aristóteles, é consequentemente, um lugar onde o corpo ocupa, e este lugar não é forma nem tampouco matéria, e sim um limite. No entanto, o espaço em Aristóteles não pode ser vazio, pois um espaço vazio seria incompatível com sua física (SIMON, REZENDE, 2018, p.11), isso porque como o movimento é uma mudança de posição relativa, o espaço não ser preenchido por matéria, implica que não há referência para que este movimento do corpo ocorra. O espaço aqui não é uma forma geométrica, é um *Locus*[5].

Como a bibliografia da filosofia grega é bastante conhecida, faremos menção ao desenvolvimento da noção de movimento durante a idade média, trazida pelos árabes Avicena e Averróis.

2.1.2 Avicena e Averróis

Avicena (980 d.C-1037 d.C) foi um intelectual persa que diferia em alguns aspectos da física de Aristóteles. Considerava que um corpo possui um agente e um fim. O agente é esse que imprime forma a matéria e o fim é aquele pelo qual essas formas são impressas na matéria. (AVICENNA, 2009, p. 16)

A mudança é um importante elemento que se observa nas substâncias naturais. É explicada a partir da privação ou da ausência de uma forma particular, ou seja, o que é privado não se altera e o que não possui forma particular se altera. Na natureza de Avicena, certas substâncias se movem automaticamente.

Avicena identifica a natureza especificamente com o movimento ou tendência natural de corpos se moverem em direções definidas e retilíneas, e argumenta que a natureza reivindica a direção dos movimentos dos corpos, ou seja, de que não há como conceber direções no vazio. Portanto, sobre a perspectiva de Avicena, a queda dos corpos pode ser entendida como um movimento natural e seu conceito de lugar é aquilo no qual se sucede o movimento. Um corpo solto de determinada altura em direção ao chão, cairia por um agente da natureza e não do corpo em si, isso pois a natureza reivindica a direção pela qual o corpo se movimenta.

Averróis (1126 d.C-1198 d.C) por sua vez, acreditava que as coisas são conhecidas pelos sentidos, que mudam por si mesmas e possuem o princípio de movimento e repouso. Para Averróis a natureza é composta de matéria e forma, e afirma, como Aristóteles, que a

[5] O espaço aqui é uma relação concreta e não uma abstração geométrica, por isso está associado em sua filosofia, à noção de lugar.

forma é mais digna de ser chamada de natureza do que a matéria, já que a matéria é passiva enquanto a forma é ativa (BELO, 2015, pp.53-55). Sob a luz da filosofia de Averróis, a queda de um corpo se explicaria com a noção de que as coisas possuem um princípio de movimento, não muito diferente da noção de Aristóteles.

2.2 GALILEU E A UNIVERSALIDADE DA QUEDA LIVRE

Daqui em diante, é preciso ter em mente que estamos aqui evoluindo conceitualmente nas noções de espaço ao longo da história. É importante notar que as ideias Galileanas e as do século XVII, de Newton e de Leibniz foram fundamentais para o desenvolvimento Einsteiniano. Galileu Galilei (1564-1642) em seu *"Diálogos sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano"* (GALILEU, 2011) traz importantes contribuições que serviram a Newton como pano de fundo de sua mecânica. Dessas contribuições, vale ressaltar a noção de inércia trazida por Galileu, a partir das experiências com o plano inclinado, como é possível ver em um trecho da conversa entre Salviati e Simplício[6], sobre uma esfera que rola sobre uma rampa:

> SIMPLÍCIO: Aqui preciso pensar um instante sobre a resposta. Não havendo declive, não pode haver tendência natural ao movimento; e, não havendo aclive, não pode haver resistência ao movimento. Parece-me portanto que o corpo deveria naturalmente permanecer em repouso. Mas eu me esqueci; faz pouco tempo que Sagredo me deu a entender que isto é o que aconteceria.
> SALVIATI: Acredito que aconteceria se colocássemos a bola firmemente num lugar. Mas o que aconteceria se lhe déssemos um impulso em alguma direção?
> SIMPLÍCIO: Ela teria que se mover nessa direção.
> SALVIATI: Mas com que tipo de movimento? Seria continuamente acelerado, como no declive, ou continuamente retardado, como no aclive?
> SIMPLÍCIO: Não posso ver nenhuma causa de aceleração, uma vez que não há aclive nem declive.
> SALVIATI: Exatamente. Mas se não há razão para que o movimento da bola se retarde, ainda menos há razão para que ele pare; por conseguinte, por quanto tempo você acha que a bola continuaria se movendo?
> SIMPLÍCIO: Tão longe quanto a superfície se estendesse sem subir nem descer.
> SALVIATI: Então, se este espaço fosse ilimitado, o movimento sobre ele seria também ilimitado? Ou seja, perpétuo?
> SIMPLÍCIO: Parece-me que sim, desde que o corpo móvel fosse feito de material durável (GALILEU, 2011, pp.227-228).

[6] Salviati era o que defendia os conceitos Galileanos, enquanto Simplício defendia conceitos Aristotélicos.

Daqui, vê-se que num plano inclinado sem atrito, uma esfera posta a deslizar estaria em um movimento acelerado. O mesmo ocorre, portanto, com um corpo solto verticalmente de uma altura qualquer em direção ao solo, pois o declive da rampa concede ao corpo altura para que ele caia acelerado, assim como na queda livre de um corpo.

Galileu, diante das conclusões anteriores, fez experimentos de queda dos corpos, o que o levou a propor que corpos distintos cairiam de uma mesma altura em tempos iguais independente de suas massas, o que ficou conhecido como "a universalidade de queda livre". Como não conseguiu observar a desintegração do corpo, ou seja, o surgimento de tensões internas neste corpo em queda, concluiu que não havia acelerações diferentes em suas partes, e postula portanto que corpos distintos caem da mesma altura em tempos iguais. Segundo Acevedo, Morais e Pimentel (2019), o problema da queda livre proposto por Galileu, quando ainda não havia noção Newtoniana da gravitação, é que as dimensões dos corpos deveriam ser tratadas como desprezíveis.

2.3 NEWTON E A IGUALDADE ENTRE MASSA INERCIAL E MASSA GRAVITACIONAL

Newton, algumas décadas depois de Galileu, propôs a sua revolucionária Teoria da Gravitação, que engloba a "universalidade de queda livre" ao definir que a queda dos corpos em tempos iguais pode ser demonstrada por uma igualdade entre a massa inercial de um corpo e a massa gravitacional deste. Newton sugere que um corpo ao gravitar em direção a um planeta, tem seu peso proporcional à quantidade de matéria que este contém. Portanto todos os corpos, desde que caindo de igual distância com relação ao centro do planeta, caem em tempos iguais.

O conceito de massa inercial na obra de Newton aparece como uma magnitude referente a quantidade de matéria de um corpo, ou seja, uma relação entre a densidade e o volume. A Segunda Lei de Newton, afirma: "A mudança do movimento é proporcional à força motriz impressa, e se faz segundo a linha reta pela qual se imprime essa força" (NEWTON, 1974, p.20). Sendo assim, a massa inercial, m_I, indica a resistência de um corpo a uma força tendo como resposta a aceleração, que da Segunda Lei de Newton, nos fornece $m_I = \frac{F}{a}$, e analogamente, a massa gravitacional, m_G, consiste na resistência do corpo sujeito à interação de um campo gravitacional, que da Lei de Gravitação Newtoniana nos fornece $m_G = \frac{F \cdot r^2}{G \cdot M}$ m_G

$m_G = \dfrac{F \cdot r^2}{G \cdot M}$ sendo que m_G é a massa gravitacional do corpo sujeito à força gravitacional de sua interação, por exemplo, com a Terra, de massa gravitacional M e G é a constante de gravitação universal.[7]

Essa formulação ganhou em generalidade, porque a Lei de Gravitação Newtoniana engloba a queda livre, ou seja, corpos distintos caem ao mesmo tempo por estarem sujeitos a uma mesma ação gravitacional. Essa é também uma formulação definida por meio de grandezas físicas mensuráveis, o que a torna bem consistente. A proporção entre o peso de um corpo em queda livre e sua quantidade de matéria, foi feita experimentalmente por Newton através de pêndulos:

> Tem sido observado por outros por um longo tempo que todos os tipos de corpos pesados (levando em conta a desigualdade de retardação que eles sofrem devido a um pequeno poder de resistência do ar) descem para a terra de alturas iguais em tempos iguais. E podemos determinar esta igualdade dos tempos com grande precisão com a ajuda de pêndulos. Fiz experiências com ouro, prata, chumbo, vidro, areia, sal comum, madeira, água e trigo [...] Por esses experimentos feitos sobre corpos com o mesmo peso, poderia ter descoberto uma diferença de matéria menor do que uma parte em mil, se assim tivesse sido (NEWTON, 2012, p.200).

No entanto, apesar do sucesso experimental[8] para explicar a queda livre dos corpos, a teoria Newtoniana da gravitação só é válida para referenciais inerciais absolutos, não podendo portanto, ser vista do ponto de vista de um referencial não inercial. Contemporâneo de Newton, Leibniz, autor cujas ideias são ponto chave dessa dissertação, percebia tanto espaço quanto tempo de forma relativa, contrariamente à ideia Newtoniana[9]. Como veremos, a noção de espaço em Leibniz está atrelada aos seus princípios de Razão Suficiente e Identidade dos Indiscerníveis.

---

[7] A constante de gravitação universal estabelece a correção da lei física em questão com as unidades e à análise dimensional. A primeira medição do seu valor foi efetuada por Henry Cavendish, na sua obra *Philosophical Translations*, de 1798. O valor atualmente aceito é de $G = 6,674184 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$(COHEN, TAYLOR, 1987).

[8] Ver Apêndice A, onde há uma explicação dos experimentos pós Newton para o Princípio da Equivalência.

[9] O relativismo de Leibniz que o possibilita formular seus princípios de Razão Suficiente, Identidade dos Indiscerníveis, será visto adiante.

2.4 LEIBNIZ E ALGUMAS NOÇÕES SOBRE O CONCEITO DE ESPAÇO

Leibniz nasceu em 1646 na cidade de Leipzig, Alemanha, e ingressou na Universidade Leipzig em 1661 onde obteve os graus de bacharel e mestre em filosofia, respectivamente em 1663 e 1664. Em 1666, com vinte anos de idade, ele tentou obter o grau de doutor em direito pela Universidade de Leipzig, mas esse lhe foi negado por causa da sua pouca idade. Logo após esse acontecimento, dirigiu-se à Universidade de Altdorf, em Nuremberg também na Alemanha, onde foi formalmente aceito, recebendo o grau de doutor em 22 de fevereiro de 1667. Nessa mesma universidade lhe foi oferecido um cargo de professor em direito, que ele recusou. Dois anos mais tarde ocupou um cargo político na Corte de Mainz e, em 1672, viajou a Paris cumprindo uma missão diplomática. Nessa viagem ele teve tempo suficiente para se dedicar a vários estudos, dentre estes, o de matemática. Ele encontrou com um dos maiores cientistas da Europa, o holandês Christiaan Huygens, que naquela ocasião prestava seus serviços para a Real Academia de Paris.

Tempos depois, já na sua fase madura, Leibniz ao estudar aspectos físicos da natureza, promove uma discussão evidente com Samuel Clarke, cinco dessas correspondências tratam de um embate em torno dos conceitos de espaço e tempo. Seguindo os passos de seu mestre Newton, Clarke (1974) defendeu a ideia de um espaço e tempo absolutos, sobretudo a Lei da Gravitação Universal, que só seria possível considerando que “o tempo absoluto, flui sempre igual por si mesmo e por sua natureza, sem relação com qualquer coisa externa. [...] O espaço absoluto, por sua natureza, sem nenhuma relação com algo externo, permanece sempre semelhante e imóvel.” (NEWTON,1974, p.8). Além disso, Newton (1974, p.16) afirmou “que as partes do espaço não podem ser vistas e distinguidas umas das outras”.

O mundo ideal de Newton, onde o espaço absoluto serve como um referencial fixo, torna-se conveniente para as leis do movimento que são concebidas uniformemente. A esse espaço ele atribui as propriedades geométricas que, 2000 anos antes, Euclides (cerca de 325 a.C a 265 a.C), já havia derivado dos seus axiomas fundamentais. Mas a geometria Euclidiana não era suficiente para Leibniz (1995, p.51) que sustentava a ideia de que não há nada na natureza com partes perfeitamente uniformes e por isso vislumbrou a necessidade de uma nova geometria que desse conta da ‘não-uniformidade do espaço e da matéria. Para ele, essa geometria seria diferente daquela encontrada nos Elementos de Euclides que não era a mais apropriada para representar as diversas deformações e curvaturas do espaço. Já na TRG de Einstein, também é necessário o uso de uma nova geometria que dê conta de explicar a curvatura do espaço-tempo, geometrias não-Euclidianas que tinham sido recentemente estabelecidas no século XVIII, em particular, a Riemanniana.

Diferentemente de Newton, Leibniz concebia o espaço de forma não absoluta. Em virtude das variações insensíveis, duas coisas individuais não podem ser completamente semelhantes, devendo sempre diferenciar uma da outra além de um simples número. Como consequência, ele nega a indivisibilidade da matéria e por, conseguinte, a existência do átomo. Sobretudo ele nega a possibilidade da uniformidade completa do espaço, do lugar ou da matéria, dos globos perfeitos e uma infinidade de outras ficções ou abstrações que são incompatíveis com a natureza das coisas. Leibniz (1974, p.413) ainda afirma que "se o espaço é algo absolutamente uniforme e independente da ordem ou da relação entre os corpos, não faz diferença trocar o Oriente pelo Ocidente, pois seriam absolutamente indiscerníveis e, por conseguinte, não se poderá perguntar a razão de se preferir um ao outro". Nessa passagem ele manifesta seu pensamento relativista e a não uniformidade do espaço, tomando como base um princípio que está muito presente em seu sistema filosófico, isto é o Princípio da Razão Suficiente, que junto ao Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII) que veremos posteriormente, garantem a ordem e uma harmônia preestabelecida aos elementos da natureza. Sendo assim, o espaço em Leibniz (1974) é concebido pela distribuição ordenada dos corpos e pelas relações entre eles e, desse modo, o universo jamais poderia ser admitido de qualquer forma ou sem uma razão suficiente que garantisse tanto a ordem como a relação entre os corpos.

Podemos dizer que Leibniz concebe o espaço e o tempo a partir da noção de ordem, pois o espaço nos permite perceber as coisas que existem ao mesmo tempo, enquanto o tempo nos permite ver a sucessão do acontecimento das coisas. Pelo (PII) fica garantido que não há na natureza dois seres que sejam indiscerníveis. Tal Princípio será abordado posteriormente, já que antes apresentaremos as formulações pós Newton, para o PE.

3 AS FORMULAÇÕES DO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

3.1 A FORMULAÇÃO DE EINSTEIN DO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

Uma importante crítica da mecânica Newtoniana foi feita pelo físico e filósofo alemão, Ernst Mach, na primeira versão de seu livro *A Ciência da Mecânica* no ano de 1893 (MACH, 2013). Mach não aceitava o espaço e o tempo absolutos da teoria Newtoniana por se tratarem de obscuridades metafísicas. Metafísica, na perspectiva de Ernst Mach, pode ser entendida como aquilo que não temos acesso, como o caso do espaço absoluto, pois não sabemos nossa posição ou velocidade com relação a ele. Mach buscava portanto demarcar os limites da ciência e da ontologia, reinterpretando a física livre de definições inacessíveis. Posteriormente em nosso trabalho, ao relacionarmos a Relatividade Geral com a filosofia de Leibniz, nos apoiaremos na perspectiva deste, onde a física não despreza as leis metafísicas, ou seja, não despreza as leis e conceitos que não dependem de nenhuma experiência ou que fogem aos nossos sentidos: "E na verdade vemos que no mundo tudo se faz segundo as leis das eternas verdades, não só geométricas, mas também metafísicas" (LEIBNIZ, 1974, p.396).

Em Mach, o tempo, era na verdade, uma medida da mudança da configuração relativa entre diversos corpos, e o espaço absoluto e vazio não existia, já que tanto do ponto de vista prático quanto filosófico, só existiam as distâncias entre corpos materiais. O conceito de massa para Mach era bem diferente do conceito Newtoniano. Ele considerou que, a massa inercial (m_I) era definida como a medida da ação do restante da matéria do universo sobre o corpo em questão, e a isso se chama *Princípio de Mach* (JAMMER, 1993, p.109).

Tal princípio sugeriu a Einstein que a geometria do espaço-tempo deveria ser um elemento dinâmico em todas as teorias físicas. Como veremos nesta seção, o Princípio da Equivalência de Einstein sugere que a geometria do espaço-tempo (que para Einstein é uma geometria não-Euclideana) e a gravitação se equivalem, ou seja, que é possível descrever a gravitação a partir da curvatura do espaço-tempo. Pode se dizer que na Gravitação de Einstein, a curvatura do espaço-tempo é uma manifestação da gravidade (BROWN, 2002, p.16).

Einstein diz: "Mas, em segundo lugar, a teoria da relatividade faz parecer provável que Mach estava no caminho certo ao pensar que a inércia depende de uma ação mútua da matéria." (EINSTEIN, 1955, p.110).

Com a descrença no éter[10], a Teoria da Relatividade Especial foi formalizada no famoso artigo de Einstein, originalmente publicado em 1905, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (EINSTEIN et al, 1923), onde propõe que a velocidade da luz se propaga no espaço vazio com velocidade constante (a maior velocidade de propagação no universo) e independente do estado de movimento do corpo que a emitiu. Outro fato é que a teoria de gravitação Newtoniana, cuja gravitação age instantaneamente à distância, precisou ser substituída posteriormente por uma nova noção de campo gravitacional onde *espaço-tempo* passam a ser tratados como uma entidade física unificada. A atração gravitacional por um corpo torna-se, portanto, a distorção que o corpo provoca no *espaço-tempo* ao seu redor, tendo o campo uma velocidade de propagação e não sendo mais instantâneo.

A relatividade Galileana determina que é impossível detectar um movimento retilíneo em relação a outro por qualquer efeito sobre as leis da dinâmica. No entanto, isso só é válido para referenciais inerciais. Mach, por sua vez, apontava uma "falha epistemológica" (SMEENK, MARTIN, 2007, p.624) na mecânica clássica já que a distinção entre um referencial inercial e um não inercial teria sido feita sem uma observação apropriada. Isso significa que havia, portanto, uma necessidade de generalizar a Relatividade Restrita, ou seja, fazer com que esta fosse válida para todo referencial, inclusive referenciais acelerados, o que acabando levando à formulação da Teoria da Relatividade Geral por Einstein.

Só em 1915, 10 anos após a Teoria da Relatividade Restrita, é que Einstein conseguiu completar sua Teoria da Relatividade Geral, "combinando a ideia de Mach da relatividade de movimento com a teoria da relatividade especial em uma teoria da gravitação completamente nova, trazendo assim uma conclusão magnífica para a física clássica" (REICHENBACH, 1942, p.85). A base da Relatividade Geral foi a hipótese de equivalência entre um referencial acelerado e um campo gravitacional homogêneo que estende o Princípio da Relatividade que até então não englobava referenciais não-inerciais. Posteriormente, chamou tal hipótese de Princípio da Equivalência, e segundo ele próprio foi "a ideia mais afortunada de sua vida" (SMEENK, MARTIN, 2007, p.623), pois resolveu o problema do Princípio da Relatividade e ainda propôs um novo entendimento da gravitação ao relacioná-la com a aceleração.

---

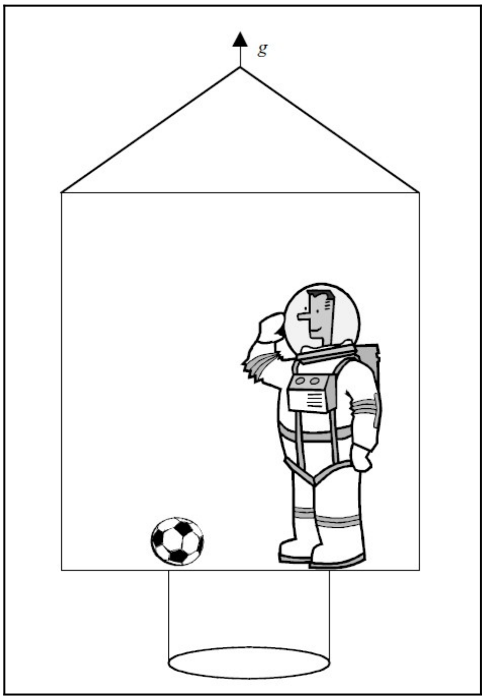
[10] Acreditava-se desde a antiguidade, passando pelo renascimento até o século XX, na existência de uma substância massiva que permeia o espaço, capaz de conduzir a luz. O próprio Newton, apesar de construir uma teoria de gravitação sem a necessidade do éter, acreditava em sua existência. Com as teorias ondulatórias da luz e o famoso experimento de Millikan, a teoria do éter caiu em descrédito (PIRES, 2011). No entanto, existem estudos recentes que tornaram a tratar o éter em nova abordagem a partir da mecânica quântica (CARVALHO, OLIVEIRA, 2003).

O Princípio da Equivalência, que está na base da Relatividade Geral, é apresentado por Einstein:

> Admitimos que os sistemas K e K' se equivalem completamente do ponto de vista físico. [...] Essa equivalência só atinge um significado de maior profundidade se a admitirmos para todos os fenômenos físicos, isto é, se as leis da Natureza referidas a K coincidirem inteiramente com as leis referidas a K' (EINSTEIN, 1955, p.59).

A proposta de Einstein para o Princípio da Equivalência é de que um referencial acelerado (K) atua como um campo gravitacional homogêneo (K') sobre um corpo sem que haja diferença entre as duas ações. Um exemplo, é o de uma pessoa que dentro de um elevador acelerado no espaço, distante de qualquer campo gravitacional, sente a pressão sobre os pés tal qual estivesse sobre a ação de um campo gravitacional a exemplo de uma pessoa na Terra. A Figura 2 representa uma nave espacial, distante de campos gravitacionais, em aceleração. Quando o astronauta solta a bola, ela cai direto no chão assim como cairia caso o astronauta estivesse sobre o solo terrestre e soltasse uma bola de suas mãos.

Figura 2 – Elevador de Einstein.



Fonte: McMAHON, 2006, p. 128.

Einstein afirma que caso essa pessoa solte uma bola ao chão de dentro do elevador, o efeito será o mesmo de uma queda livre. De uma outra forma ele diz que nenhum laboratório (desde que não seja rotativo) em queda livre, pode detectar localmente a presença de campos gravitacionais. Conforme apresentado no início deste capítulo, é possível equivaler a gravitação por uma geometria do espaço-tempo, onde a queda da bola rumo ao chão do elevador se explique pela curvatura do espaço-tempo já que não há efeitos gravitacionais.

Entretanto, este Princípio foi alvo de intensa discussão e há autores que não concordam com ele, por exemplo, Eddington (1930, p.41) que havia questionado o PE ao dizer que “O Princípio da Equivalência desempenhou um grande papel como guia na construção original da teoria da relatividade geral; mas agora que alcançamos a nova visão da natureza do mundo, ele torna-se menos necessário”.

Synge, tempos depois, também faz críticas quanto a homogeneidade do espaço-tempo de Einstein:

> Eu nunca fui capaz de entender este princípio […]. Isso significa que os efeitos de um campo gravitacional são indistinguíveis dos efeitos da aceleração de um observador? Se sim, é falso. Na teoria de Einstein, ou existe um campo gravitacional ou não existe, segundo tensor de Riemann ser nulo ou não […] (SYNGE, 1971, p.9, tradução nossa).

Para elucidar tais críticas, imaginemos uma gota d'água que flutua no interior de uma nave espacial orbitando a Terra, ou seja, em queda livre no campo gravitacional terrestre. A gota de água flutuando nesta espaçonave é distorcida pela força gravitacional da Terra. Ocorre que a gravidade no interior da nave não é homogênea, existem forças de maré atuando sobre a gota de modo que haverá um achatamento desta. Isso contraria a ideia de campo gravitacional homogêneo e sua equivalência a um sistema acelerado. Ohanian e Ruffini (2013, p.29, tradução nossa) explicam:

> [...] Se os astronautas colocarem uma gota de líquido no centro de sua espaçonave, eles descobrirão que essa gota não é exatamente esférica, mas tem duas protuberâncias. Uma protuberância aponta para a Terra, outra para longe. Uma vez que, na ausência de forças externas, a tensão superficial tornaria a gota esférica, o desvio na esfera indica a existência de um campo gravitacional. As protuberâncias resultam da heterogeneidade do campo gravitacional: A extremidade da gota mais próxima da Terra é puxada muito pela gravitação, e a outra extremidade não é puxada o suficiente. A força que produz as protuberâncias é chamada de força de maré.

Isso significa que é necessário uma formulação que considere os efeitos de maré para o Princípio, ou seja, uma formulação infinitesimal do Princípio da Equivalência (PE), em que o elevador de Einstein se torne cada vez menor. É necessário então uma formulação que indique a equivalência dos referenciais inerciais acelerados com os campos gravitacionais, em regiões infinitesimais do espaço-tempo.

As regiões infinitesimais do espaço-tempo foram mencionadas pelo próprio Einstein em formulações do PE, veja, por exemplo em seu trabalho de 1916, ou seja, após formular a TRG afirmou: "Para regiões quadridimensionais infinitamente pequenas, a teoria da relatividade no sentido restrito é apropriada, se as coordenadas forem escolhidas adequadamente"[11](EINSTEIN,1997, pp.33,79).

Note-se que a restrição, "a teoria da relatividade no sentido restrito é apropriada"[12] pode ser interpretada no sentido da formulação descrita em Friedman (1983) e Norton (1985) que veremos adiante.

3.2 A FORMULAÇÃO INFINITESIMAL DO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

Como visto no tópico anterior, muitos autores notaram que há problemas com a formulação de Einstein para o Princípio da Equivalência (PE). Por exemplo, o campo gravitacional homogêneo descrito por Einstein não é viável, pois em um espaço qualquer existem vários gradientes de campo gravitacional que podem afetar um observador em queda livre. Desta forma, vemos como bastante importante a formulação infinitesimal do PE, que foi proposta por Pauli em 1921:

> Originalmente, o princípio da equivalência só havia sido postulado para campos gravitacionais homogêneos. Para o caso geral, pode ser formulado da seguinte maneira: para cada região do mundo infinitamente pequena (isto é, uma região do mundo que é tão pequena que a variação espacial e temporal da gravidade pode ser desprezada nela) sempre existe um sistema de coordenadas [...] em que a gravitação não tem influência no movimento das partículas [...] em uma região do mundo infinitamente pequena todo campo gravitacional pode ser transformado (PAULI, 1958, p.145, tradução nossa).

---

[11] "For infinitely small four-dimensional regions the theory of relativity in the restricted sense is appropriate, if coordinates are suitably chosen.".

[12] "[…] the theory of relativity in the restricted sense is appropriate".

Autores como J. Norton (1985, p.203), citam Pauli: “Para Pauli, o Princípio afirma que sempre se pode transformar um campo gravitacional arbitrário em uma região infinitamente pequena do espaço-tempo, transformando em um sistema de coordenadas apropriado”. Outras formulações partiram da formulação infinitesimal, como vemos em E. Prugovečki (1995, p.5) que cita Friedman (1983, p.188): “O que o Princípio da Equivalência afirma é que a relatividade especial e a relatividade geral tem a mesma estrutura infinitesimal e não a mesma estrutura local”. Utilizando esta formulação, Prugovečki, constrói a sua Teoria Clássica da Gravitação, utilizando os espaços fibrados, onde em cada ponto temos a equivalência da estrutura de Teoria da Relatividade Especial com a Teoria da Relatividade Geral.

Mais detalhes sobre como se dá a equivalência destas duas teorias estão no livro de Friedman (1983). A estrutura de primeira ordem determina a estrutura do espaço tangente em cada ponto, e a estrutura de segunda ordem determina como os espaços tangentes em diferentes pontos estão relacionados. Dessa forma, terá que levar em consideração a curvatura do espaço-tempo, já a de primeira ordem, nos informa sobre o espaço tangente no ponto em questão, daí a estrutura do espaço tangente no ponto, ou seja, da fibra. Dois cones de luz, tomando-os simplesmente como eventos, em pontos vizinhos podem ser diferentes nos espaços-tempo da Relatividade Geral (FRIEDMAN, 1983, p.186). Esta diferença seria evidente no caso de dois pontos da gota d'água em queda livre no campo gravitacional terrestre. Estes dois pontos “vizinhos” na gota d’água podem estar sujeitos, no caso geral, a campos gravitacionais diferentes. Por exemplo, a gota d'água, no campo gravitacional terrestre, o qual depende da distância ao centro da Terra, r, está submetida a valores diferentes do campo em lados opostos da mesma. Mesmo que pequena, existe uma “força de maré” que pode deformá-la.

No formalismo físico-matemático da Relatividade, podemos ver esta questão de outra forma. O espaço-tempo da Teoria da Relatividade Geral (TRG), tem a mesma estrutura de primeira ordem que o espaço-tempo da Teoria da Relatividade Especial (TRE), mas não tem, de uma forma geral, a mesma estrutura de segunda ordem. Pois a estrutura de segunda ordem, através do operador de derivação, ao escolher vetores paralelos em pontos próximos do espaço-tempo, ou seja, na vizinhança de um ponto, tem que levar em conta a curvatura do espaço-tempo, ou seja, do tensor de Riemann (FRIEDMAN, 1983, pp.188-202). Esta forma de colocar o problema se deve ao fato de que na estrutura infinitesimal há esta equivalência das duas teorias (a Relatividade Especial e a Relatividade Geral), sendo essa equivalência em primeira ordem, mas em termos locais, isto é, nos pontos da vizinhança do ponto escolhido, não se equivalem, já que são exigidas leis de segunda ordem, que envolvem as derivadas de segunda ordem do tensor métrico, ou seja, a curvatura do espaço-tempo como em Friedman (1983) e Prugovečki (1995).

Considerando esta formulação infinitesimal do PE, é possível fazer a generalização pretendida por Einstein ao formular a TRG: Construir uma teoria válida para quaisquer referenciais, englobando, na sua teoria, de forma bastante revolucionária, a gravitação. No entanto, há autores como Ohanian (1977), que defendem que não há nenhuma formulação do Princípio tal que ofereça a possibilidade de se desprezar os efeitos de maré mesmo que para regiões infinitesimais, como será visto adiante.

3.3 A FORMULAÇÃO PONTUAL DO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

Essa versão apareceu bem posteriormente à versão de Pauli, versão esta que decorre de uma resposta natural à preocupação de que os efeitos de marés não desaparecem realmente em uma escala particular. Estas versões, denominadas "pontuais", segundo E. Knox (2013, p.351) surgiram inicialmente em 1977, com Hans Ohanian (1977, p.905), sendo que este discutiu o que pode ser chamado formulação forte do PE, por considerar regiões infinitesimais e buscar considerar os efeitos de maré, e ainda abordou relevantes questões de Mecânica Quântica relacionadas.

Ohanian (1977) ainda defendia que qualquer versão estendida do Princípio não poderia estar certa porque as forças de marés das quais todos os corpos podem estar sujeitos, são da mesma ordem que a dimensão do sistema, a forma e as deformações permanecem as mesmas à medida que a escala se torna menor. Obviamente, nenhuma transformação coordenada eliminará tal efeito. Portanto, Ohanian sugere que não pode haver justificativa para supor que os efeitos gravitacionais possam ser transformados em regiões infinitamente pequenas. Para não tomar o domínio do espaço infinitamente pequeno em que se despreze os efeitos gravitacionais, Ohanian propõe reduzir o domínio de validade do PE a um ponto do espacial.

O trabalho de M. Ghins e T. Budden define explicitamente[13] o que talvez Einstein quis dizer em 1916 por "teoria da relatividade no sentido restrito"[14]:

[13] Ver no apêndice B a definição de carta em uma variedade.
[14] Conforme visto na seção 3.1 em Einstein (1997, pp.33,79).

> A relatividade especial é valida em p: existe uma carta local x^{μ} de uma vizinhança de p de tal forma que as leis relativísticas especiais fundamentais, dinâmicas e livres de curvatura, se mantêm em sua forma vetorial padrão x^{μ} em p (GHINS, BUDDEN, 2001, p.43).

Em seguida, definem o PE pontual: Para todo $p \in M$ a relatividade especial é válida em p no sentido restrito dado acima". A formulação pontual reduz o domínio da validade do PE para um único ponto da carta (não nos demais pontos da carta) já que os efeitos de marés nunca desaparecem realmente em uma escala específica, em outras palavras, nenhuma região estendida do espaço-tempo curvo é realmente plana.

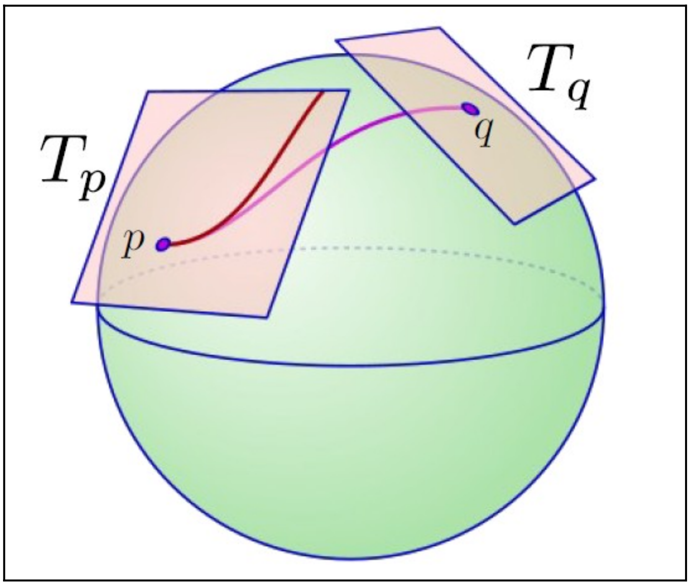
Ainda sobre estas formulações, encontramos discussões, por exemplo, em E. Knox, que também formulou o que chamou de "Effective Strong Equivalence Principle" (KNOX, 2013, p.353), no âmbito de teorias *emergentes.* Sabemos que E. Verlinde (2011), na *teoria emergente de gravitação*, considera que o sentido do PE é tal que a aceleração e a gravidade são fenômenos emergentes, onde a gravitação é identificada com uma força entrópica causada por mudanças nas informações associadas às posições dos corpos materiais.

No entanto, nosso enfoque daqui em diante, não será na formulação pontual, pois segundo Friedman:

> Formulações padrão do princípio da equivalência caracteristicamente obscurecem esta distinção crucial entre leis de primeira ordem e leis de segunda ordem, obscurecendo a distinção entre leis "infinitesimais", válidas em um único ponto, e leis locais, válidas na vizinhança de um ponto. Eles perdem a distinção entre a estrutura do espaço tangente T_p e a configuração dos espaços tangentes T_q para q em uma vizinhança de p (FRIEDMAN, 1983, p. 202).

A Figura 3 a seguir serve para ilustrar melhor a crítica de Friedman às formulações padrões do PE. Pois essas formulações não levam em conta a possibilidade de curvatura existente numa variedade, como por exemplo, entre os pontos p e q. Nesta figura temos uma variedade curva. T_p e T_q representam os espaços tangentes nos respectivos pontos.

Figura 3 – Pontos distintos numa variedade.



Fonte: Adaptado de Conexão afim – Wikipédia[15].

Portanto, buscaremos estabelecer relação entre os princípios da filosofia de Leibniz com a TRG, mais precisamente com a formulação de Friedman, em que se leva em consideração as estruturas de primeira e segunda ordem.

[15] Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Conex%C3%A3o_afim. Acesso em maio de 2024.

4 OS PRINCÍPIOS DE LEIBNIZ

Antes de ingressarmos definitivamente na relação entre PE e o PII, achamos conveniente fornecer algumas noções sobre os infinitesimais em Leibniz por questões didáticas, pois acreditamos que pode nos acrescentar quanto ao entendimento dos infinitesimais na TRG.

4.1 LEIBNIZ E OS INFINITESIMAIS

A noção de infinitesimal na concepção matemática de Leibniz, tem como um dos seus fundamentos a Lei da Continuidade que, por si só, requer uma ampla abordagem devido a sua complexidade e por isso, seria motivo para um outro trabalho. Para o nosso propósito, o Princípio da Continuidade será apresentado de forma concisa apenas como uma noção introdutória dos infinitesimais Leibnizianos.

Na visão de Leibniz, a Lei da Continuidade é a lei que possibilita conciliar a relação entre o micro e o macro. Mais precisamente, ele estabelece seu princípio da continuidade da seguinte forma:

> Nada se faz de repente, e uma das minhas grandes máximas, e das mais comprovadas, é que a natureza nunca faz saltos: o que eu denominei Lei da Continuidade [...]. O uso dessa lei é muito considerável na física: ela significa que se passa sempre do pequeno ao grande, e vice-versa, através do médio, tanto nos graus como nas partes, e que jamais um movimento nasce imediatamente do repouso nem se reduz, a não ser por um movimento menor, assim como não se chega jamais a percorrer nenhuma linha ou comprimento antes de ter percorrido uma linha menor (LEIBNIZ, 1970, p.120).

Como se vê na passagem acima, a importância da Lei da Continuidade não está restrita somente aos problemas físicos mas também matemáticos, por exemplo na passagem em que ele afirma que jamais se percorre uma linha ou comprimento antes de ter percorrido uma linha menor. Nessa passagem ele praticamente expressa a essência do cálculo infinitesimal. Em outra passagem, Leibniz (1858, p.391) deixa claro toda versatilidade do seu cálculo indicando sua aplicação ao tratamento do movimento dos planetas: “Dei uma nova amostra do meu cálculo, aplicando-o ao movimento dos planetas, e mostrei o uso de infinitesimais de segundo grau". [16][17]

A Lei da Continuidade é particularmente relevante para o conceito infinitesimal de Leibniz, como já mencionado anteriormente, pois permeia tanto o contexto físico quanto matemático. Todavia, o próprio Leibniz (1989, pp.542-543) em sua resposta à crítica do físico Varignon, declara que "sua intenção foi apontar que é desnecessário fazer a análise matemática dependendo de controvérsias metafísicas".

De posse dos conceitos de continuidade e infinitesimais, passaremos agora ao Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII), que é de suma importância para o presente trabalho.

4.2 LEIBNIZ E O PRINCÍPIO DA IDENTIDADE DOS INDISCERNÍVEIS

Iniciando a nossa abordagem aos infinitesimais, partiremos da ideia de dois pontos bem próximos um do outro, separados por uma distância infinitamente pequena. Nesse sentido podemos nos aproximar de um ponto (P_2) para outro (P_1) o quanto desejarmos ou, de outra forma, temos uma aproximação infinitesimal. Contudo, a distância entre P_1 e P_2 não desaparece, ela se torna cada vez menor e, sendo assim, sempre haverá uma distância infinitesimal entre esses dois pontos. Se há distância, ainda há uma possível aproximação que pode ser reduzida tantas vezes quanto se queira. Todavia, não conseguimos perceber essa distância com clareza devido às limitações dos nossos sentidos.

Sabemos da inseparabilidade entre a filosofia e a ciência de Leibniz, portanto, os infinitesimais se aplicam tanto às questões matemáticas quanto físicas, como ocorre na divisibilidade infinita da matéria. Cada porção da matéria não só é divisível infinitamente em partes cada vez menores, sendo que cada uma dessas partes diferencia uma das outras em seus pormenores ou detalhes que garantem a identidade e variedade das coisas. Assim fica estabelecido, pelo *Princípio da Identidade dos Indiscerníveis*, que nunca há na natureza dois seres perfeitamente idênticos, onde não seja possível encontrar uma diferença interna por mais ínfima que seja, lembrando ainda que para Leibniz não se acharão duas gotas de água

[16] Je donnai un échantillon nouveau de mon calcul, en L'appliquant au mouvement des plaètes, et j'y fis voir l'usage des infitesimales du seconde degré.
[17] O que hoje entendemos como derivada segunda. O conceito não existia em Leibniz e só surgiu a partir de D'Lambert entre outros já no século XVIII (BARON, 1969).

perfeitamente semelhantes pois, vistas ao microscópio, mostrar-se-ão discerníveis (LEIBNIZ,1974, pp.432-433).

Notamos que Leibniz usou diferentes versões para descrever a indiscernibilidade, descreveremos sucintamente a seguir:[18]

> 1- por duas coisas indiscerníveis é admitir a mesma coisa sob dois nomes (LEIBNIZ, 1974, p. 419).
> 2- [...] nas coisas sensíveis não se encontram nunca dois indiscerníveis, por exemplo, não se acharão duas folhas num jardim nem duas gotas de água perfeitamente semelhantes (LEIBNIZ, 1974, p.433).
> 3- [...] não existem na natureza dois seres reais absolutos que sejam indiscerníveis [...] nem duas porções da matéria perfeitamente iguais e semelhantes (LEIBNIZ, 1974, p.432).
> 4- Confesso que se existissem duas coisas perfeitamente indiscerníveis, seriam duas. Mas a suposição é falsa, e contrária ao grande princípio da razão (LEIBNIZ, 1974, p.433).

Em Leibniz não há caos nem indiferenças, ou seja, tudo é infinitamente discernível. Assim fica estabelecido, pelo princípio dos indiscerníveis, que "nunca há na natureza dois seres perfeitamente idênticos, onde não seja possível encontrar uma diferença interna" por mais ínfima que seja. Duas coisas perfeitamente semelhantes só é concebível em termos abstratos, como ocorre por exemplo na geometria onde é possível encontrar dois triângulos congruentes quanto aos seus lados e aos seus ângulos.

Agora que já mostramos as noções de continuidade e indiscerníveis, falaremos a relação entre esses dois conceitos, onde alguns autores apontam um paradoxo. Segundo Deleuze, a complexa relação entre o Princípio dos Indiscerníveis e o Princípio da Continuidade foi alvo de algumas controvérsias. Deleuze (1991, p.36) destaca que autores como Gueroult e Kant, por exemplo, apontavam para uma suposta contradição entre esses dois princípios. Por outro lado, autores como o próprio Deleuze (1991) e ainda Belaval (1969, p.252) que enfatizaram bastante as ligações entre PII e a Lei da Continuidade. Deleuze, por exemplo, nega radicalmente qualquer oposição entre PII e a Lei da Continuidade, e procurou ratificar ainda mais o elo entre esses princípios, com observações interessantes sobre essa questão:

> Procuramos em vão a menor oposição entre o princípio dos indiscerníveis e a lei da continuidade. [...] O princípio dos indiscerníveis é um princípio de individuação de acordo com a qual não há dois indivíduos semelhantes que se distinguiriam somente de fora, por número, espaço ou tempo [...] O

[18] Lembramos que estamos fazendo essas considerações no ponto de vista Leibniziano (LEIBNIZ, 1974, p.70).

> princípio dos indiscerníveis estabelece cortes; mas os cortes não são lacunas ou rupturas de continuidade; ao contrário, eles repartem o contínuo de tal maneira que nele não haja lacuna, isto é, eles o repartem da “melhor” maneira (por exemplo, o número irracional). Para opor os indiscerníveis à continuidade é preciso ater-se a uma formulação demasiado apressada dos dois princípios [...] (DELEUZE, 1991, p.102).

O uso simultâneo da Lei da Continuidade e do Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII) é um dos pontos mais delicados da filosofia de Leibniz. Esses princípios aparentemente se contradizem se for considerado apenas uma visão elementar da geometria, quando se pretende em vão compor a continuidade de uma linha a partir de partículas pontuais descontínuas e idênticas. Devemos considerar o ponto, não como o menor elemento da curva mas, segundo a própria origem do cálculo infinitesimal de Leibniz, como decorrente de uma diferenciação que envolve uma região infinitesimal onde se encontra o ponto de contato da curva com uma respectiva tangente. E, pelo PII, a cada tangente corresponde um único ponto. No entanto, essa ainda é apenas uma abordagem preliminar para esse problema, visto que ele pode ser justificado pelo algoritmo do cálculo diferencial de Leibniz.

O Princípio da Equivalência (PE) de Einstein, por sua vez, está intimamente relacionado com a geometria do espaço-tempo, descrita em termos de equações diferenciais que envolvem a curvatura do espaço-tempo. A curvatura do espaço-tempo é uma medida da intensidade do campo gravitacional, e é causada pela presença de massa e energia. Se considerarmos um observador em queda livre em um campo gravitacional uniforme, o movimento do observador em queda livre pode ser descrito em termos de infinitésimos, ou seja, a cada instante de tempo, a posição e a velocidade do observador mudam de forma suave e gradual, sem saltos ou descontinuidades abruptas.

Essa suavidade e continuidade do movimento são fundamentais para que o observador não seja capaz de distinguir sua experiência da experiência de um observador em um referencial inercial com a mesma aceleração. Em outras palavras, o Princípio da Continuidade de Leibniz garante que a aceleração do observador em queda livre seja uniforme, permitindo que seja equiparada à força gravitacional descrita pelo Princípio da Equivalência de Einstein.

Portanto, a relação entre a Lei da Continuidade de Leibniz e o Princípio da Equivalência (PE) de Einstein pode ser entendida em termos de infinitesimais, que permitem a descrição de processos contínuos de mudança em termos de equações diferenciais, tornando possível a compreensão da geometria do espaço-tempo e da relação entre a gravidade e a aceleração. No entanto, o exemplo do elevador, como já visto, por se tratar de um campo gravitacional homogêneo, e com isto trazer uma série de dificuldades como já mencionada anteriormente, não será mais mencionada e daqui em diante trataremos de formulações posteriores a esta, que partiram da formulação infinitesimal do PE de Pauli, e que nos levará às relações entre os indiscerníveis de Leibniz e a TRG.

5 A IDENTIDADE DOS INDISCERNÍVEIS E A RELATIVIDADE GERAL

No caso de Friedman, encontramos a discussão sobre o problema da indiscernibilidade e de suas implicações para o Princípio da Equivalência (PE). Em sua obra, aparecem tanto os termos indiscernibilidade quanto indistinguibilidade com o mesmo sentido. "Na teoria da gravitação newtoniana tradicional, descobrimos que os referenciais galileanos são observacionalmente indistinguíveis, embora teoricamente distintos […]" (FRIEDMAN, 1983, p.29).

Como se vê na passagem acima, Friedman analisou um conceito que está diretamente relacionado com o problema da indiscernibilidade, que é a identidade, e o abordou com frequência, como será visto. Em outros termos, a questão é como alcançar a identidade das coisas tendo em vista que podem ser aparentemente indiscerníveis umas das outras.

Segundo Friedman

> Na tradicional cinemática Newtoniana os referenciais inerciais são observacionalmente indistinguíveis, embora teoricamente distintos [...]; eliminando o espaço absoluto, obtemos uma nova teoria mais parcimoniosa. [...] Portanto, tanto o princípio da relatividade especial quanto o princípio da equivalência envolvem a identidade dos indiscerníveis […] (FRIEDMAN, 1983, p.29).

Um paralelo pode ser feito com o seguinte pensamento de Leibniz:

> As percepções dos nossos sentidos, mesmo quando sejam claras, devem conter necessariamente algum sentimento confuso, [...] devido à variedade infinita de informações. É quase como o murmúrio confuso ouvido por quem se aproxima da beira do mar e proveniente da reunião das repercussões de vagas inumeráveis. No meio de uma infinidade de percepções, existem aquelas que nos são insensíveis (LEIBNIZ, 1974, p.106).

Podemos dizer que aquilo que percebemos pelos sentidos, nos dão somente uma ideia vaga daquilo que constitui o objeto como um todo e, por conseguinte, nos leva à indistinguibilidade das coisas. Logo, a diferença não é quantitativa, ou seja, pelo simples fato de serem dois objetos não justifica a diferença. A diferença é qualitativa ou de essência, tudo isso é consequência da nossa ignorância ou da nossa pouca atenção ao que é nos é insensível. Leibniz acrescenta que uma abstração não é um erro, desde que se tenha consciência de que aquilo que se esconde não deixa de existir por isso. Essa última afirmação de Leibniz nos aproxima bastante da afirmação de Friedman de que os referenciais inerciais são observacionalmente indistinguíveis, embora teoricamente distintos.

Sabemos que em Leibniz já existia a concepção de certos conceitos não absolutos para o espaço e para o tempo, mesmo que ele não estivesse falando em relação ao espaço-tempo Einsteiniano, e sim dentro de sua própria concepção de espaço e de tempo, conforme discutimos anteriormente aqui (seção 2.4).

Estabeleceremos agora algumas relações entre o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII) de Leibniz e a formulação Infinitesimal do Princípio da Equivalência (PE). Sabe-se que ao nos referirmos ao ponto e à sua vizinhança, no espaço-tempo da Teoria da Relatividade Geral (TRG), temos que este ponto e os pontos vizinhos podem estar submetidos a campos gravitacionais diferentes. Para fixação de ideias, demos o exemplo da deformação da gota d'água em queda livre no campo gravitacional terrestre. Neste caso, ocorre na gota o efeito de uma "força de maré" que pode deformá-la, mesmo que estes dois pontos sejam separados, na gota, por uma pequena distância "Δs". Quanto mais não-homogêneo for o campo, mais evidente será esta força de maré que a deformará.

Interpretamos aqui estas questões sob o ponto de vista da filosofia de Leibniz, onde seu PII estabelece que nada é igual na Natureza. Levando esta ideia de forma metodológica, no caso geral, ao comparar pontos diferentes do espaço-tempo, temos que considerar uma possível curvatura. Ao considerar o formalismo de Friedman (1983) e também de Prugovečki (1995), onde a abordagem é feita através das equações de primeira e de segunda ordem, sabemos, da Teoria da Relatividade, que os pontos do espaço-tempo podem diferir dos pontos "vizinhos" devido à curvatura. Sabemos que a curvatura considerada aparece através da derivada em segunda ordem do tensor métrico (ver Apêndice B).

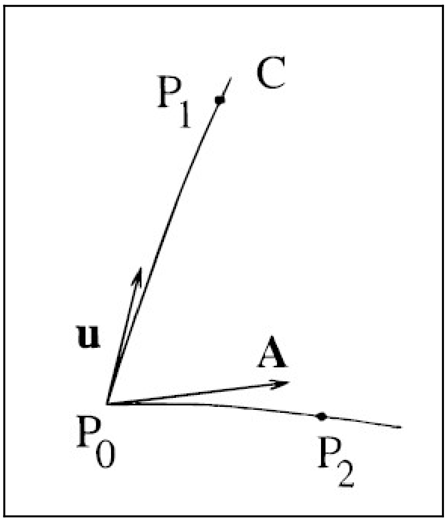
O Princípio da Equivalência em sua formulação infinitesimal mostra que numa região infinitesimal do espaço-tempo, a Relatividade Especial se equivale à Relatividade Geral, ou seja, as equações destas se equivalem apenas em primeira ordem (na estrutura do espaço-tangente naquele ponto). Ou de outra forma, na nossa abordagem do PE, o que é estabelecido é que a TRE e a TRG têm a mesma estrutura infinitesimal, mas não a mesma estrutura local (esta se refere à topologia da variedade).[19]

Como consequência da abordagem que acabamos de fazer, podemos analisar um procedimento técnico utilizado na Relatividade Geral que é a famosa Escada de Schild

[19] Apesar de ser em um outro contexto, tal ideia já se encontrava em Leibniz (1858, pp.325-326) como na seguinte afirmação: As quantidades de primeira ordem estão relacionadas às tangentes ou às direções das linhas, já as quantidades de segunda ordem ou superiores, estão relacionadas às curvaturas das linhas ou as "osculações".

(KHEYFETS, 2000).[20] Nesta técnica se faz o transporte paralelo de vetores entre dois pontos, ditos P_0 e P_1, infinitesimalmente próximos (ver figura 3) no espaço-tempo com curvatura. Entretanto, fazendo valer o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis, temos que, por mais semelhante que um vetor ao ser transladado entre dois pontos diferentes, possa parecer, se diferencia por ser transladado em uma região infinitesimal. Ou seja, o vetor no ponto P_0 quando transladado ao ponto P_1, muda devido à curvatura do espaço-tempo, ainda que essa curvatura seja aparentemente imperceptível.

Figura 4 – Translação a ser feita pela técnica da escada de Schild



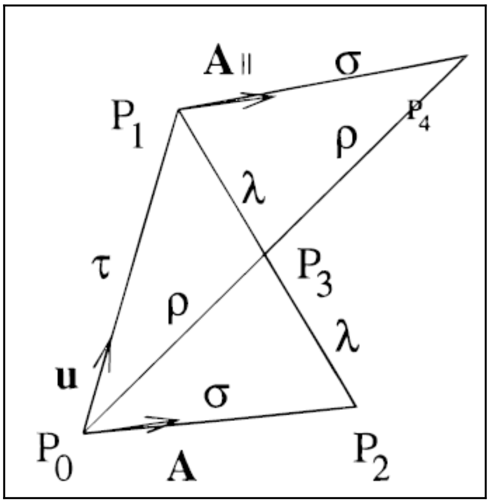
Legenda: O vetor A deve ser transportado paralelamente ao longo da curva C do ponto P_0 ao ponto P_1.

Fonte: KHEIFETS, 2000, p. 2893.

[20] Sobre a Escada de Schild: Uma modificação do algoritmo da Escada de Schild se mostrou que pode ser aplicado com sucesso ao problema clínico da medição da progressão da atrofia longitudinal no cérebro para um grupo de pacientes afetados pela doença de Alzheimer (MARCO, PENNEC, 2013, p. 68).

O transporte ocorre como descrito na figura abaixo

Figura 5 – Técnica de Schild, o vetor transladado paralelamente à curva.



Legenda: As seções das curvas envolvidas no procedimento da escada de Schild são infinitesimais e, portanto, são representadas como retas. Fonte: KHEIFETS, 2000, p. 2893.

Escolhe-se uma curva na variedade que passa pelo ponto P_0 na direção A, parametrizada por um parâmetro σ de tal forma que, em P_0, $d/d\sigma = A$. Depois disso, escolhe-se um ponto P_2 nesta curva, separado do ponto P_0 pelo valor infinitesimal do parâmetro σ. Tanto τ quanto σ podem ser considerados pequenos o suficientes para que toda a construção da Escada de Schild possa ser colocada dentro de uma vizinhança coordenada.

Em seguida os pontos P_2 e P_1, são conectados, por uma geodésica parametrizada pelo parâmetro λ de tal forma que o ponto P_2 corresponde ao valor zero deste parâmetro e P_1 corresponde ao valor do parâmetro 2λ. O ponto P_3 nesta geodésica é o "ponto médio" determinado pelo valor do parâmetro λ. Depois disso, o ponto P_0 é conectado ao ponto P_3 pela geodésica parametrizada pelo parâmetro ρ de tal forma que este parâmetro assume valor zero em P_0 e valor ρ em P_3. A geodésica continua além do ponto P_3 até que chegue ao ponto P_4 determinado pelo valor do parâmetro 2ρ.

Uma curva conectando os pontos P_1 e P_4 é parametrizada de tal forma que P_1 corresponde ao valor zero do parâmetro e P_4 corresponde para o valor do parâmetro σ. Essa curva pode ser considerada como a curva conectando P_0 e P_1 paralelamente transladados de P_0 para P_1 ao longo da curva C. O vetor $A \parallel = (d/d\sigma)$ é considerado o vetor paralelo a A transladado ao longo de C de P_0 para P_1.

Como P_0 e P_1 são dois pontos diferentes, temos um espaço tangente em P_0 e outro em P_1. Leibniz diria que podemos nos aproximar de P_0 para P_1 o quanto desejarmos, em sua abordagem infinitesimal. Pelo Princípio da Equivalência em cada ponto do espaço tangente, temos como válidas as leis de primeira ordem. Todos estes fatos nos permitem executar o método de Schild descrito acima, para variedades com conexão simétrica (KHEIFETS, 2000, p.2897).

O Princípio da Equivalência está presente na técnica de Schild, pois sabemos que a Teoria da Relatividade Geral admite localmente, em primeira ordem, a Teoria da Relatividade Especial. Admitindo-se o PII, de Leibniz, diremos que um vetor ao ser transladado para um ponto infinitesimalmente próximo, apesar de parecer idêntico a ele mesmo, não é pela presença da curvatura não nula da variedade. Imaginemos um vetor estando num ponto do espaço-tempo enquanto uma cópia deste vetor é transladada neste espaço-tempo curvo, e em seguida volte para o ponto inicial. Se for feita a comparação entre o vetor e sua cópia que retornou ao ponto, veremos que esses vetores neste ponto serão diferentes, ou seja, a cada escolha do caminho de ida e volta para o vetor cópia, estes retornarão de formas diferentes, mesmo que por distâncias infinitesimais, o caminho dita o quão diferente será o vetor cópia do seu vetor original ao voltar para o mesmo ponto.

Finalmente afirmamos que o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII) foi uma ideia bastante premonitória de Leibniz para futuros princípios da própria Física Moderna. Além disto, Leibniz havia, com Newton, elaborado o Cálculo Infinitesimal e a sua noção de espaço relativo foi fundamental para a Ciência Moderna.

6 CONCLUSÃO

Conclui-se diante do que foi aqui apresentado, que diretamente ou indiretamente, podemos afirmar com segurança que muitos dos conceitos estabelecidos por Leibniz, cerca de dois séculos antes de Einstein, foram precursores de certas ideias contidas na Teoria da Relatividade Geral. Vários autores já haviam mencionado estas relações, conforme citamos ao longo dessa dissertação. Enfatizamos alguns destes temas como no caso do Princípio da Equivalência (PE) e o caso particular da "Escada de Schild". Esta última sendo pouco referida na literatura pertinente. Além disto, mostramos também as questões que envolvem as formulações da equivalência da TRE com a TRG nas equações de primeira ordem como em Friedman (1983) e Prugovečki (1995), onde fizemos uma abordagem mais detalhada. Neste tratamento enfatizamos o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis e a formulação dos conceitos dos infinitesimais de Leibniz.

A Lei da Continuidade e o infinitesimal de Leibniz, estão presentes em muitos aspectos da física e da matemática, como o cálculo diferencial e integral. No entanto, percebe-se o papel da noção de infinitesimal de Leibniz na formulação infinitesimal do Princípio da Equivalência (PE). Outra conclusão que se faz presente neste trabalho, é o fato de que o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII) quando visto do ponto de vista do Princípio da Equivalência (PE), também é válido, pois mesmo que se considere que a estrutura infinitesimal da equivalência entre a TRE e a TRG se dê em equações de primeira ordem, se diferem em segunda ordem, já que não se pode igualar um espaço plano a um espaço curvo.

É interessante notar que ainda há muito o que pesquisar, pois estudos recentes de Mecânica Quântica como por exemplo *"Uncertainty limits of the information exchange between a quantum system and an external meter"* (MATSUSHITA, HOFMANN, 2021), onde a medição quântica altera o estado do sistema. Resultados experimentais modernos como este, nos mostram que um mesmo sistema pode ser "observado" de formas diferentes e o resultado depende da própria observação. Tal fato nos remete às ideias de Leibniz, pois exemplificou que "o universo, seja ele qual for, é todo de uma só peça, como um oceano: o menor movimento estende seu efeito a qualquer distância, mesmo que este efeito se torne menos perceptível em proporção à distância" (LEIBNIZ, 2007, p.131). Neste caso típico macroscópico e contínuo, vemos uma aproximação, pois hoje sabemos que também se verifica nas escalas quânticas, microscópicas e discretas, onde um observável afeta a medida.

Finalmente, no que diz respeito ao Princípio da Equivalência há também muito o que estudar, pois sabemos que há sempre trabalhos que investigam os limites de validade do Princípio da Equivalência e consequentemente as possíveis violações. Aspectos ontológicos do espaço-tempo ou ainda da Teoria da Relatividade Geral são temas que poderão ser investigados futuramente.

REFERÊNCIAS

ACEVEDO, O.A; DE MORAIS, E. M.; PIMENTEL, B.M. **O Princípio de Equivalência.** Revista Brasileira de Ensino de Física. v. 41, n. 3. 2019. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/DgpZPgsqXkFb6ySWwVDZb6r/abstract/?format=html&lang=pt. Acesso em: 13 jan. 2024.

ARISTÓTELES. **Física.** 1.ed, Barcelona: Editorial Gredos, 1995.

AVICENNA. **The Physics of the Healing.** 1.ed, Provo: Brigham Young University Press, 2009.

BARON, M. **The Origins of the Infinitesimal Calculus.** 1. ed, New York: Dover Publications, 1969.

BELAVAL, Y. **Leibniz, Initiation a Sa Philosophie.** 3.ed, Paris: Librairie Philosophique, 1969.

BELO, C. The Concept of 'Nature' in Aristotle, Avicenna and Averroes. **Kriterion,** Brazil, v.56, n. 131.2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/kr/a/c4QfPP4DrgbFZsKms4VRbmB/?lang=en. Acesso em: 10 jan. 2024.

BLASONE, M. Non-relativistic neutrinos and the weak equivalence principle apparent violation. **Physics Letters B.** v. 811. 2020. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269320306869. Acesso em: 15 jan. 2024.

BROWN, P. Einstein's gravitational field. **Arxiv.** v.2. 2002. Disponível em: https://arxiv.org/abs/physics/0204044. Acesso em: 10 jan. 2024.

CARVALHO, M; OLIVEIRA, A. L. A New version of the Dirac's æther and its cosmological applications. **Foundations of Physics Letters.** v.16, n.3. 2003. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1023/A:1025919310001. Acesso em: 10 jan. 2024.

COHEN, E. R.; TAYLOR, B. N. The 1986 CODATA Recommended Valeus of the Fundamental Physical Constants. **Journal of Research of the National Bureau of Standards.** v. 92, n.2. 1987. Disponível em: https://goldbook.iupac.org/terms/view/G02695. Acesso em: 14 jan. 2024.

DELEUZE, G. **A Dobra: Leibniz e o Barroco.** Tradução de: Luiz B. L. Orlandi. Campinas: Papirus Editora, 1991.

DICKE, R. H. The Eötvös Experiment. **Scientific American,** USA, v.205, n.6.1961. Disponível em: https://www.scientificamerican.com/article/the-etvs-experiment/. Acesso em: 9 dez. 2023.

EDDINGTON, A.S. **The Mathematical Theory of Relativity.** 2. ed, London: Cambridge University Press, 1930.

EINSTEIN, A. **The Formal Foundations of the General Theory of Relativity.** In: The Collected Papers of Albert Einstein, v.6. Engelbert Schucking, New Jersey, 1997.

EINSTEIN, A. **The Meaning of Relativity.** 6. ed, Princeton: Princeton University Press, 1955.

EINSTEIN, A et al. **The Principle of Relativity.** 1. ed, USA: Dover Publication, 1923.

FRENCH, S. Hacking Away at the Identity of Indiscernibles: Possible Worlds and Einstein's Principle of Equivalence. **Journal of Philosophy.** v. 92, n. 9. 2012. Disponível em: https://philpapers.org/rec/FREHAA. Acesso em: 13 jan. 2024.

FRIEDMAN, M. **Foundations of Space-Time Theories.** 1.ed. New Jersey: Princenton University Press, 1983.

GALILEI, G. **Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano.** Tradução de: Pablo Rubén Mariconda. São Paulo: Editora 34, 2011.

GHINS, M; BUDDEN, T. The Principle of Equivalence. **Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics.** v.32, n. 1. 2001. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1355219800000381. Acesso em: 13 jan. 2024.

GREENBERGER, D. M. Conceptual Problems Related to Time and Mass in Quantum Theory. **Arxiv.** v.1. 2010. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1011.3709. Acesso em: 15 jan. 2024.

HAWKING, S.W.; KING, A.R.; McCARTHY, P. J. A new topology for curved space-time which incorporates the casual, differential, and conformal structures. **Journal of Mathematical Physics.** v.17, n.2. 1976. Disponível em: https://pubs.aip.org/aip/jmp/article-abstract/17/2/174/224641/A-new-topology-for-curved-space-time-which redirectedFrom=fulltext. Acesso em 15 jan. 2024.

HAWKING, S.W.; PENROSE, R. The Nature of Space and Time. **Scientific American Magazine.** v.275, n.1. 1996. Disponível em: https://www.scientificamerican.com/article/the-nature-of-space-and-time/. Acesso em: 15 jan. 2024.

JAMMER, M. **Concepts of Space The History of Theories of Space in Physics.** 3.ed. Mineola: Dover Publications, 1993.

KHEYFETS, A; WARNER A. MILLER; NEWTON, G.A. Schild's Ladder Parallel Transpot Procedure for an Arbitrary Connection. **International Journal of Theoretical Physics.** v. 39, n.12. 2000. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1023/A:1026473418439. Acesso em: 13 jan. 2024.

KNOX, Eleanor. Effective Spacetime Geometry. **Studies in History and Philosophy of Modern Physics.** v.44, n.3. 2013. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1355219813000373. Acesso em: 9 dez. 2023.

LEIBNIZ., G.W. **Correspondência com Clarke.** In: Pensadores, Victor Civita, São Paulo, 1974.

LEIBNIZ., G.W. **La caractéristique géométrique.** 6. ed, Paris: Librairie Philosophique, 1995.

LEIBNIZ., G.W. **Letter to Varignon, with a note on the 'justification of the infinitesimal calculus by that of ordinary algebra'.** In: Philosophical Papers and Letters, Leroy E. Loemker, Dordrecht, 1989.

LEIBNIZ., G.W. **Monadologia.** In: Pensadores, Victor Civita, São Paulo, 1974.

LEIBNIZ., G.W. **Remarques de Mr. Leibniz sur L'Art. V. Des Nouvelles de la République des Lettres du mois de Février 1706.** In: Mathematische Scriften, C. Gerhardt, band I, pp. 389- 392, Halle, Druck und Verlag von H. W.Schmidt,1858.

LEIBNIZ., G.W. **Reponse a Quelques Difficultes provoquées par Maitre Bernard Nieuwentyt à l'égard de la Méthode Différentielle.** In: Mathematische Scriften, C. Gerhardt, band I, pp. 325-326, Halle, Druck und Verlag von H. W.Schmidt,1858.

LEIBNIZ., G.W. **Theodicy: Essays on the Goodness of God, the Freedom of Man and the Origin of Evil.** 1. ed, Oxford: BiblioBazaar, 2007.

MACH, E. **The Science of Mechanics: A Critical and Historical Exposition of Its Principles.** 1.ed, Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

MARCO, L; PENNEC, X. Parallel Transport with Pole Ladder: Application to Deformations of Time Series of Images. **Geometric Science of Information.** v.8085. 2013. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-40020-9_6. Acesso em: 13 jan. 2024.

MATSUSHITA, T.; HOFMANN, H. F. Uncertainty of the information exchange between a quantum system and an external meter. **Physical Review A.** v. 104. 2021. Disponível em: https://journals.aps.org/pra/abstract/10.1103/PhysRevA.104.012219. Acesso em: 13 jan. 2024.

MATTOS, M. **Algumas Questões Epistemológicas do Princípio da Máxima Entropia.** Rio de Janeiro, 2019. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) - Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

McMAHON, D. **Relativity Demystified.** 1.ed, New York: The McGraw-Hill Companies, 2006.

NAKAHARA, M. **Geometry, Topology and Physics.** 1. ed. New York: Adam Hilger, 1990.

NEWTON, I. **Principia - Livros II e III: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural / O Sistema do Mundo.** Tradução de: André Koch Torres Assis. São Paulo: EDUSP, 2012.

NEWTON, I. **Princípios matemáticos: O peso e o equilíbrio dos fluidos.** In: Pensadores, Victor Civita, São Paulo, 1974.

NORTON, John.What was Einstein's Principle of Equivalence?. **Studies in History and Philosophy of Science.** v.16, n. 3, 1985. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0039368185900020. Acesso em: 8 dez. 2023.

OHANIAN, H. C. What is the principle of equivalence? **American Journal of Physics.** v.45, n. 10 1977. Disponível em: https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-abstract/45/10/903/1039263/What-is-the-principle-of-equivalence?redirectedFrom=PDF. Acesso em: 13 jan. 2024.

OHANIAN, H. C.; RUFFINI, R. **Gravitation and Spacetime.** 3. ed, New York: Cambridge University Press, 2013.

OLIVEIRA, A. L. **Campo Magnético em uma Triesfera e Introdução às Trivariedades.** Rio de Janeiro, 1993. Tese (Mestrado em Física) - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

PAULI, W. **Theory of Relativity.** 1.ed. London: Pergamon Press, 1958.

PIRES, A. Evolução das ideias da física. 2. ed, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

PRUGOVEČKI, E. **Principles of Quantum General Relativity.** 1.ed. Singapore: World Scientific, 1995.

REICHENBACH, H. **From Copernicus to Einstein.** 1. ed, New York: Philosophical Library, 1942.

SMEENK C. **Mie's Theories of Matter and Gravitation.** In: The Genesis of General Relativity, Jürgen Renn, Boston, 2007.

SMOLIN, LEE. The Dynamics of difference. Arxiv. 2019. Disponível em:

https://arxiv.org/abs/1712.04799. Acesso em: 13 jan. 2024.

SPEKKENS, R. W. The ontological identity of empirical indiscernibles: Leibniz's methodological principle and its significance in the work of Einstein. **Arxiv.** 2019. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1909.04628. Acesso em: 13 jan. 2024.

SYNGE, J. L. **General Relativity.** 1. ed, London: Oxford University Press, 1972.

THORNE, K. S.; LEE, D. L.; LIGHTMAN, A. L. Foundations for Theory of Gravitation Theories. **Physical Review D.** v. 7, n. 12. 1973. Disponível em: https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.7.3563. Acesso em: 13 jan. 2024.

TOUBOUL, P et al. MICROSCOPE mission: final results of the test of the Equivalence Principle. **Physical Review Letters.** v. 129, n.121102. 2022. Disponível em: https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.129.121102. Acesso em: 15 jan. 2024.

VERLINDE, E. On the origin gravity and the laws of Newton. J**ournal of High Energy Physics.** v.2011, n.29. 2011. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP04(2011)029. Acesso em: 13 jan. 2024.

VON WESTENHOLZ, C. **Diferential Forms in Mathematical Physics.** 1.ed. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1978.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.** 1.ed. New York: John Wiley & Sons. 1972.

ZEEMAN, E. C. The Topology of Minkowski Space. **Pergamon Press.** v.6. 1967. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004093836790033X. Acesso em: 15 jan. 2024.

APÊNDICE A – EXPERIMENTOS DO PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

1. A consistência experimental da igualdade entre as massas inercial e gravitacional no pêndulo usado por Newton

A igualdade entre as massas inercial e gravitacional para a queda livre explica o que foi verificado experimentalmente por Newton através do pêndulo simples, e com isso mostraremos as relações matemáticas que explicam o experimento de Newton.

Vamos supor que uma mesma força F, anteriormente medida, seja aplicada a duas massas distintas (m_1 e m_2). Medindo-se as acelerações resultantes, a_1 e a_2, temos a partir da Segunda Lei de Newton, condições de relacionar as massas:

Como $F = m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2$, então $m_1/m_2 = a_1/a_2$. Definindo m_2 como um padrão de massa, m_1 pode ser determinado por comparação, já que o valor da força F é conhecido, assim como o das acelerações. A massa m_1 é um exemplo de massa inercial m_I, ou seja, a massa que resiste a aceleração ou a mudança no estado de movimento.

Para saber com qual aceleração um corpo cai sob efeito da atração gravitacional terrestre, usa-se novamente a 2ª Lei de Newton escrita para a força peso $P = m_G \cdot g$, em que m_G é massa gravitacional do corpo e g a aceleração da gravidade. Para um corpo em queda livre, temos que o peso é igual a força resultante, ou seja:

$$m_G \cdot g = m_I \cdot a$$

Se o valor dos dois conceitos de massa coincidirem, ou seja $m_I = m_G$, há um cancelamento, e $a = g$ para todos os corpos. Isto é, todos os objetos caem com a mesma aceleração em virtude da igualdade entre as massas m_I e m_G.

Sabe-se que a relação entre o período de oscilação de um pêndulo e a aceleração da gravidade se dá por $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$, no entanto, a aceleração da gravidade g só será a mesma para todos os corpos em queda livre em direção a Terra, se a razão entre a massa inercial m_I e massa gravitacional m_G desses corpos for igual a 1, o que leva a conclusão de que o período de oscilação do pêndulo para o caso em que $m_I \neq m_G$ (ACEVEDO, MORAIS, PIMENTEL, 2019) é:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g} \cdot \frac{m_I}{m_G}}$$

E Newton em seus experimentos encontrou uma igualdade entre as massas com uma sensibilidade de 10^{-3}.

2. O experimento de Eötvös e a determinação do parâmetro

Tempos depois de Newton, um brilhante experimento usando uma balança de torção, feito pelo físico húngaro Loránd Eötvös (1848-1919), verificou uma igualdade entre as massas com uma precisão de 10^{-8}. Tamanho o sucesso experimental, fez com que houvesse um parâmetro que serviu para testar a sensibilidade dos demais experimentos, inclusive do experimento com pêndulo feito por Newton, o parâmetro de Eötvös.

Medir a relação m_G/m_I de um corpo em queda livre sobre o efeito da aceleração gravitacional, é possível através do tempo que este leva para cair de uma determinada altura, pois da Segunda Lei de Newton, será dada por:

$$\frac{m_G}{m_I} = \frac{2h}{gt^2}$$

Em experimentos de queda livre, tomando dois corpos, o parâmetro de Eötvös será:

$$|\eta| \sim 2\frac{|\Delta t|}{t} \sim \sqrt{\frac{2g}{h}}\,|\Delta t|,$$

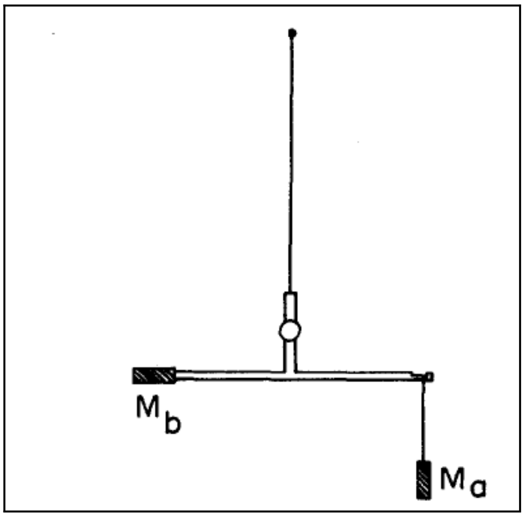
em que t é a queda referente a um corpo, e Δt a diferença de tempo entre um corpo e outro. Para um pêndulo simples, tal qual as experiências de Newton, esse parâmetro toma a forma

$$|\eta| \sim 2\left|\frac{\Delta t}{t}\right| \sim \left|\frac{\Delta t}{N\sqrt{l}}\right|$$

Sendo l o comprimento do pêndulo e N o número de oscilações, o que leva para o experimento de Newton uma precisão $|\eta| \leq 10^{-3}$.

Vamos agora apresentar esquematicamente, como mostra a Figura 6, o experimento da balança de torção onde qualquer diferença mensurável entre as massas, gerará um torque que torcerá o fio.

Figura 6 – Balança de Eötvös.



Fonte: OHANIAN, 1977, p. 906.

A balança pode ser entendida como uma barra rígida pendida por um fio de torção, na qual dois corpos são presos em suas extremidades. A diferença entre as razões da massa inercial e gravitacional para os dois corpos, sob efeito da gravidade da Terra e da aceleração circular, produz um torque sobre a fibra que produz um desvio angular permitindo encontrar a diferença entre as razões.

O Princípio de Equivalência será válido somente se a fibra não for tensionada, ou seja, não houver diferença entre as razões de massas. O parâmetro de Eötvös para a balança de torção, se torna:

$$\eta \sim \frac{\tau}{gmlsin\beta}$$

Sendo τ o torque e β o desvio angular. Eötvös encontrou com sua balança de torção, uma sensibilidade de uma parte para 20 milhões, o padrão encontrado foi

$$\eta \leq 5 \times 10^{-8}$$

De outra forma, vamos estabelecer L e W como os braços de alavanca da balança de torção e do peso gerado pela força gravitacional no corpo

$$\tau = LW\eta$$

O parâmetro de Eötvös, por sua vez, é definido a partir da aceleração da gravidade local

$$\eta(A,B) = \frac{(a_A - a_B)\cdot n}{|g|}$$

Em que $a_{A,B}$ são as acelerações dos corpos sujeitos ao campo gravitacional e n é um vetor unitário, o Princípio da Equivalência implica $a_A = a_B = g$.

3. O experimento “Microscope”

Estudos recentes feitos pelo projeto MICROSCOPE (TOUBOUL et al, 2022) buscou melhorar os resultados experimentais para o Princípio da Equivalência. A motivação consiste em eliminar instabilidades produzidas pelos efeitos de maré, ou seja, as flutuações do campo gravitacional terrestre. Para isso é preciso que o teste de universalidade de queda livre seja feito no espaço, ou seja, um laboratório feito em um satélite geoestacionário. Colocando dois acelerômetros diferenciais eletrostáticos em órbita, no interior do satélite, por um longo período de queda livre, sendo cada um dos acelerômetros composto por duas massas-teste. Se cada acelerômetro experimentar o mesmo campo gravitacional, caso o Princípio de Equivalência fosse violado, as massas tenderiam a cair com acelerações distintas.

Mais precisamente, o experimento do satélite MICROSCOPE utilizou dois cilindros compostos por ligas de platina e titânio, os quais foram colocados em queda livre dentro do satélite, mantendo seus centros de massa alinhados. Tal alinhamento era mantido por força eletrostática, uma vez que tais ligas possuem forte condutividade elétrica. Durante a órbita da Terra, os cilindros estavam em um ambiente de microgravidade, de tal modo que a força eletrostática necessária para manter constante entre eles podia ser medida com alta precisão. A medida, então, que o satélite orbita, a precisão do experimento dependia da capacidade de medir a diferença nas forças eletrostáticas necessárias para sustentar os dois cilindros em queda livre, uma vez que a gravidade estava sendo anulada pelas forças elétricas. Se ambos os cilindros estivessem sujeitos à mesma aceleração, as forças eletrostáticas necessárias para sustentá-los seriam iguais. Qualquer diferença nas forças indicaria uma possível violação do Princípio da Equivalência.

Não foi detectado diferença de aceleração entre as quedas das massas-teste numa sensibilidade que levou o parâmetro de Eötvös ao valor de

$$\eta = (-1 \pm 27) \times 10^{-15}$$

O que confirma a previsão de Hawking e Penrose (1966, p.62) que a Teoria da Relatividade Geral (TRG) seria válida até a uma sensibilidade de 10^{-14}. Apesar deste ser um valor preliminar, já é o valor mais preciso até agora, e aposta-se que será possível encontrar uma sensibilidade em torno de 10^{-17}. Discute-se uma violação ao Princípio da Equivalência para parâmetros ainda mais sensíveis, devido às interações fracas da estrutura elementar da matéria.

4. Possíveis violações ao Princípio da Equivalência

Aqui apontaremos brevemente as discussões referentes as violações ao Princípio da Equivalência, de modo que o leitor possa compreender do que se trata. No entanto, para um maior aprofundamento da discussão será necessário buscar pelas referências citadas já que as possíveis violações envolvem assuntos como gravitação quântica ou ainda limite não relativístico da equação de Dirac, que fogem ao escopo deste trabalho.

Na sua ausência de campos gravitacionais, os pequenos componentes das funções de onda induzem uma redefinição da massa inercial. Este comportamento é uma consequência do fato de que, quando há neutrinos mistos, na equação de Dirac lidamos simultaneamente com componentes grandes e pequenos que são comparativamente importantes no regime não relativístico. O fato de termos que redefinir a massa inercial nos leva a uma possível violação ao Princípio da Equivalência Fraco (nome que se dá a igualdade de massas inercial e gravitacional discutidos na seção 2.3), isso porque a massa gravitacional quando sujeita a um campo gravitacional externo é considerada aproximando-se de um campo fraco, e não sofre a mesma redefinição que a inercial, surgindo portanto uma violação ao Princípio da Equivalência Fraco. Consequentemente, um limite não relativístico fornece condições adequadas para testar a violação ao Princípio da Equivalência (PE) na física dos neutrinos, também à luz da nova interpretação que trata tais partículas como se fossem instáveis (BLASONE, 2020).

Outra possível violação ao PE surge, igualmente, em sua formulação fraca (igualdade das massas inercial e gravitacional). Pois, se de um lado podemos descrever os caminhos das partículas em queda livre em termos das trajetórias, onde massa e momento são irrelevantes e somente posição e velocidade importam. Por outro, em uma análise quântica, não apenas a massa entra na descrição do movimento, já que a trajetória da partícula passa a ser vista como uma propagação de onda, como essa massa pode mudar a depender da mudança no comprimento de onda da função de onda. Isso sugere que a formulação fraca, que engloba a queda livre de partículas sujeitas ou não a campos gravitacionais, precisa ser revista do ponto de vista de uma teoria de Gravitação Quântica (GREENBERGER, 2010).

APÊNDICE B – GEOMETRIA DIFERENCIAL E O ESPAÇO-TEMPO

Neste apêndice faremos uma breve síntese do que consiste o espaço topológico para que possamos definir variedades e variedades diferenciáveis, o que nos levará a uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos utilizados ao longo deste trabalho. Na literatura encontramos discussões sobre topologias do espaço-tempo, porém esta discussão vai além dos estudos desta dissertação. Apenas pontuamos que vários autores discutiram essas questões, por exemplo, em Zeeman (1967), denominando por M o espaço de Minkowski da Teoria da Relatividade Especial (TRE), inicia o tema com o fato que “[...] A topologia euclidiana quadridimensional é localmente homogênea, enquanto M não; cada ponto tem associado a ele um cone de luz que separa os vetores espaciais dos vetores do tipo tempo.”. Assim vemos que há outras vertentes para o estudo topológico diferentes da usual como a “topologia de variedades”. Porém este é apenas um dos fatores que levaram vários outros autores a proporem topologias não Euclideanas para o espaço-tempo relativista. Nos ateremos aqui à questões menos complexas, no âmbito geral de variedades. Os interessados podem ver uma discussão interessante deste tema em Hawking (1976). Entretanto, sabemos que também se argumenta que na teoria das variedades, a topologia do seu espaço é definida antes de você colocar um tensor métrico no espaço. Portanto, a topologia do espaço de Minkowski é a topologia usual em R^4.

Começaremos por definir espaços topológicos (OLIVEIRA, 1993).

Define-se um espaço topológico $E = (X, \tau)$ como um conjunto X, não vazio, com uma família de τ que satisfaçam as seguintes propriedades:

i) $X \in \tau, \phi \in \tau$

ii) a interseção de um número finito de elementos de τ também pertence à família τ:

$U_i \cap ... \cap U_n \in \tau;$

iii) a união de qualquer número de elementos de τ pertence a τ:

$\cup U_i \in \tau$

Os elementos de τ são chamados conjuntos abertos, ou simplesmente *abertos.* Diz-se que a família de subconjuntos τ dá uma topologia em X. Um espaço topológico pode ser tanto discreto como contínuo. Um espaço topológico é, portanto, um conjunto X que contém uma família de subconjuntos, aos quais pertencem o próprio X e o conjunto vazio; além disso, essa família deve ser tal que a união de um número finito ou infinito de conjuntos abertos, bem como a interseção de qualquer número finito de conjuntos abertos, seja novamente um conjunto aberto, ou seja, pertence à família.

Se o conjunto $X = R$, pode-se definir nele uma topologia τ em que os abertos são intervalos abertos (a, b) e todas as suas possíveis uniões disjuntas (a intersecção de dois intervalos quaisquer é o vazio); a reta real R agora dotada desta topologia, chamada *topologia usual* da reta real, este espaço topológico geralmente denotado também R. Para o caso $R^n = R \times R \times \ldots \times R$ (R cartesiano R, n vezes) faz-se n vezes a topologia usual da reta real, e obtém-se então uma família de abertos formada pelo produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, onde cada U_i é um aberto da reta R. Convém enfatizarmos que a topologia usual de qualquer R^n ($n > 0$) não é uma topologia discreta.

Vejamos uma topologia discreta:

Seja o conjunto formado pelos elementos de a, b, c isto é, $X = \{a, b, c\}$

Exemplos de topologia discreta em X: $\tau = \{X, \phi, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ ou

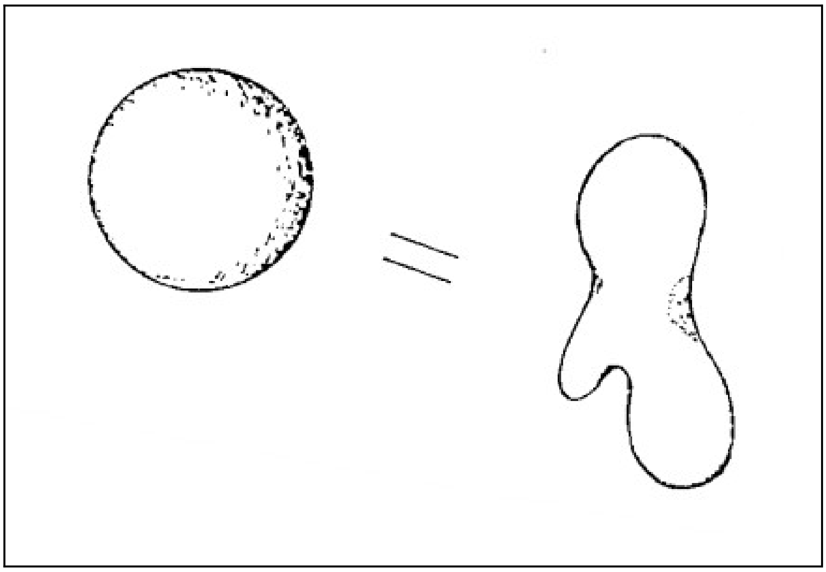
$\tau' = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Estes dois exemplos atendem aos requisitos de um espaço topológico.

É possível denotar um espaço topológico (X, τ) pelo mesmo símbolo X. Todo espaço métrico, ou seja, conjuntos não-vazios onde as distâncias entre seus elementos são definidas, é portanto um espaço topológico.

Um espaço topológico $E = (X, \tau)$ pode gerar outro espaço topológico $E' = (X', \tau')$, bastando que X' seja um subconjunto de X. Para um X' fixado, cada aberto do respectivo τ' é definido como interseção de X'.

Um outro aspecto importante da topologia é a noção de igualdade topológica, que se baseia no conceito de homeomorfismo, que é a propriedade que permite que os espaços topológicos sejam deformados continuamente um no outro, os chamados espaços homeomorfos.

Figura 7 – Duas superfícies topologicamente indistinguíveis.



Fonte: OLIVEIRA, 1993, p. 17.

O homeomorfismo pode ser visto como uma elasticidade do espaço topológico, pois tal espaço pode ser "esticado" ou "encolhido" sem que a topologia se altere (sem rupturas, cortes ou colagens), pois os pontos infinitamente próximos permanecem infinitamente próximos e pontos finitamente separados permanecem separados.

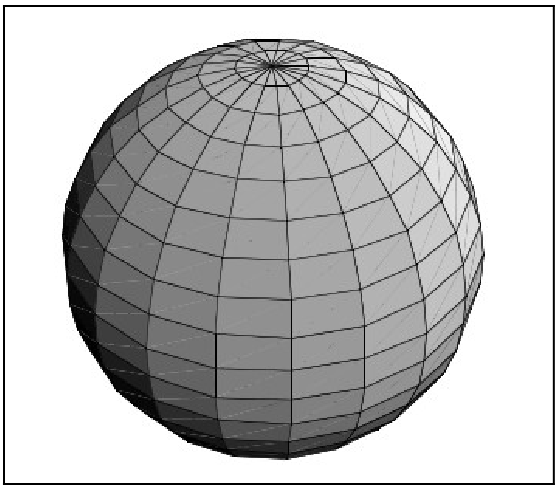
Já o difeomorfismo é uma aplicação suave de duas variedades diferenciáveis, 1-1, diferenciável em todas as ordens, com sua inversa também diferenciáveis em todas as ordens. Por exemplo, a esfera S^2 e a superfície de um cone são ditas difeomorfas. Difeomorfismo também é uma transformação (diferenciável) geral de coordenadas da variedade nela própria; isto é, uma aplicação interna que obedece às regras acima definidas.

Para descrever matematicamente o espaço curvo[21], usaremos um conceito matemático conhecido como variedade. Basicamente falando, uma variedade nada mais é do que um espaço contínuo de pontos que podem ser curvos (e complicados de outras maneiras) globalmente, mas localmente parece um espaço plano e antigo. Então, em um tamanho pequeno o suficiente, aplica-se a geometria euclidiana de vizinhança. Pense na superfície de uma esfera ou na superfície da Terra como exemplo.

Globalmente, é claro, a Terra é uma curva superfície. Imagine desenhar um triângulo com lados que vão do equador até o Polo Norte. Para esse tipo de triângulo, as fórmulas familiares da Euclidiana geometria não se aplicam. Mas localmente é plano, a geometria euclidiana se aplica.

[21] Para a descrição do espaço-tempo curvo é requerido uma complexidade que não será abordada neste apêndice.

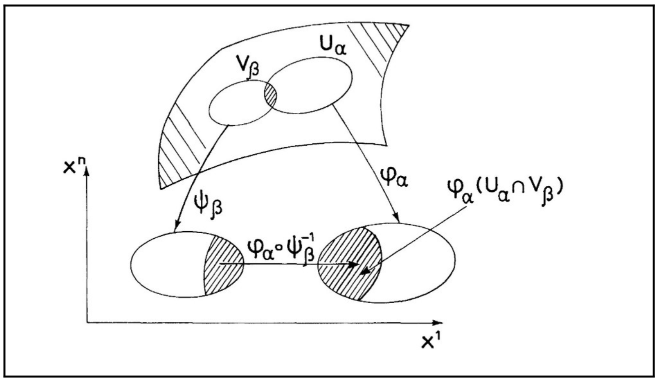
Figura 8 – Esfera como exemplo de uma variedade.



Legenda: A superfície de uma esfera é um exemplo de variedade. Escolha um pequeno fragmento, e o espaço nesse fragmento é euclidiano (plano). Fonte: MC MAHON, 2006, p. 48.

Uma variedade diferenciável é um espaço contínuo e diferenciável. Devemos descrever o espaço-tempo por uma variedade diferenciável. No entanto, algumas variedades não podem ser completamente cobertas por um único sistema de coordenadas e sim por um grupo de conjuntos abertos que são fragmentos de coordenadas. Cada fragmento de coordenadas pode ser mapeado para um plano, ou seja, um espaço euclidiano. A figura abaixo mostra o caso de n dimensões, e assim, uma carta é, portanto, o par ordenado (V_β, Ψ_β) ou ainda $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ que leva os abertos de uma variedade ao R^n, que por simplicidade está representada no plano cartesiano R^2.

Figura 9 – Duas cartas numa variedade.



Legenda: Aqui vemos um exemplo de duas cartas numa variedade. Os pares ordenados são compostos por um aberto da variedade e a função que leva o aberto no R^n. Os pares são (V_β, Ψ_β) e $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Já $\varphi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}$ é o caminho mapeado de uma carta a outra, e $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)$ a interseção das variedades na carta φ_α.

Fonte: VON WESTENHOLZ, 1978, p.60.

Na figura acima a aplicação $\varphi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}$ é do R^n no próprio R^n, pois nesta aplicação composta ($\circ$) primeiramente se aplica Ψ_β^{-1} e em seguida φ_α.

Para a relatividade é mais útil pensar em curvas em termos de parametrização, um ponto que se move através do espaço, traça a curva. O parâmetro da curva, que denotamos por λ, é um número real. A descrição de uma curva por um conjunto de equações paramétricos que fornecem as coordenadas ao longo desta, pode ser escrita como:

$$x^a = x^a(\lambda)$$

Um espaço curvo é aquele que muda de um lugar para outro, como é o caso do espaço-tempo. Como tal, num espaço-tempo curvo, não se pode falar de um vetor que se estende de ponto a ponto. Em vez disso, devemos definir todas as quantidades como vetores e uma forma localmente (1-forma).

Sendo $x^a(\lambda)$ uma curva parametrizada, as componentes do vetor tangente para a curva são dados por

$$\frac{dx^a}{d\lambda}$$

Agora precisamos definir um tensor métrico, pois esse desempenha papel central no estudo da gravidade, e portanto da descrição do espaço-tempo, as quantidades apresentadas a seguir são de suma importância para as equações de Einstein.

Um vetor dual é um objeto linear que mapeia vetores em escalares. Isso pode ser generalizado para objetos multilineares chamados tensores, que mapeiam vários vetores e vetores duais em escalares. Um tensor T do tipo (p, q) é uma aplicação multilinear que mapeia p vetores duais e q vetores nos números reais R:

$$T : \otimes^p V^* \otimes^q V \rightarrow R$$

Por exemplo, um tensor do tipo (0, 1) mapeia um vetor para um número real e é identificado com um vetor dual. Da mesma forma, um tensor do tipo (1, 0) é um vetor. Se ω mapeia um vetor dual e dois vetores escalares, $\omega : V^* \times V \times V \rightarrow R$, é do tipo (1,2).

O conjunto de todos os tensores do tipo (p, q) é chamado de espaço tensorial do tipo (p, q) e denotado por T_q^p. O produto tensorial $\tau = \mu \otimes \nu \in T_q^p \otimes T_{q'}^{p'}$ é um elemento de $T_{q+q'}^{p+p'}$ definido por

$$\tau(\omega_1, ..., \omega_p, \xi_1, ..., \xi_{p'}; u_q, \upsilon_1, ..., \upsilon_{q'})$$
$$=\mu(\omega_1, ..., \omega_p; u_1, ..., u_q)\nu(\xi_1, ..., \xi_{p'}; \upsilon_1, ..., \upsilon_{q'})$$

Outra operação em um campo tensorial é a contração, que é um mapa de um espaço tensorial do tipo (p, q) para o tipo $(p-1, q-1)$ definido por onde $\{e_i\}$ e $\{e^*\}$ são as bases duais.

Outro aspecto de suma importância nos estudos de variedades, são os vetores em uma variedade, e esses são definidos como tangentes às curvas $c(t)$ da variedade. Dada uma curva, um vetor é um operador de derivação, pois uma função f em cada ponto da curva $c(t)$, ou seja, $f(c(t))$, o vetor tangente à variedade no ponto P, onde se faz $t = 0$, temos a operação

$$\frac{df(c(t))}{dt}\ |_{t=0}$$

que em termos de uma base de coordenadas locais $\{x^\mu\}$ se escreve

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}\ |_{t=0}$$

Assim, a derivada de uma função no ponto P é obtida através do vetor X na forma (NAKAHARA, 1990, p.144)

$$X = X^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\mu}) \equiv X[f]$$

Se em uma variedade M temos vetores diferenciáveis em cada ponto, dizemos que temos um *campo vetorial*. O conjunto de campos vetoriais em M é denotado por $\Xi(M)$. Já o conjunto de vetores tangentes à variedade em um ponto P constitui o espaço vetorial tangente à variedade em P e é denotado por $T_P M$.

Na geometria elementar, o produto interno entre dois vetores U e V é definido por

$$U = \sum_{i=1}^{m} U_i V_i$$

Onde U_i e V_i são os componentes dos vetores em R^m. Em uma variedade, um produto interno é definido em cada espaço tangente $T_P M$.

Sendo M uma variedade diferenciável, uma métrica Riemanniana g em M, é um campo tensorial do tipo $(0, 2)$ em M, que satisfaz os axiomas abaixo, em cada ponto $p \in M$:

(i) $g_p(U, V) = g_p(V, U)$,

(ii) $g_p(U, U) \geq 0$, onde a igualdade é válida quando $U = 0$.

Aqui $U, V \in T_p M$ e $g_p = g \mid_p$. Portanto, g_p é uma forma bilinear simétrica positiva definida.

Vejamos agora para o caso do espaço-tempo, isto é, para a Teoria da Relatividade. Um campo tensorial g do tipo $(0, 2)$ é uma métrica pseudo-Riemanniana se satisfaz

(i') também satisfaz o item (i) acima, porém,

(ii') se $g_p(U, V) = 0$ para qualquer $U \in T_p M$, então $V = 0$.

Representando a matriz com elementos $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ por $(\mathrm{g}_{\mu\nu})$, e sua inversa por $(\mathrm{g}^{\mu\nu})$, com a propriedade dos seus elementos, $\mathrm{g}_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = g^{\lambda\nu} g_{\nu\mu} = \delta_\mu^\lambda$, sendo que o determinante $det(\mathrm{g}_{\mu\nu})$ é representado por g e $det(\mathrm{g}^{\mu\nu}) = g^{-1}$. Com isto, temos o isomorfismo entre $T_P M$ e $\mathrm{T}_P^* M$, assim podemos escrever

$$w_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$$

Assim como

$$U^\mu = g^{\mu\nu} w_\nu$$

Estamos aqui seguindo a convenção de Einstein de soma embutida, que é quando dois índices estão repetidos, isto é

$$\mathrm{V}^\mu W_\mu = V^\alpha W_\alpha = \sum_\mu V^\mu W_\mu = \sum_\alpha V^\alpha W_\alpha$$

O que na linguagem heurística dizemos que "a métrica sobe e abaixa os índices dos tensores".

Retornamos agora ao transporte de vetores, porém em um espaço (ou espaço-tempo) com curvatura diferente de zero. Ou seja, levaremos o vetor definido no x, isto é, no espaço tangente ao ponto x, para o ponto $x + \Delta x$ e teremos o vetor $(x + \Delta x)$, o que fizemos sem alteração de suas componentes. Este transporte de um vetor é chamado de *transporte paralelo.* Portanto, assumimos que o vetor em x, ou $V\ |_{x'}$, ao ser transportado paralelamente para $x + \Delta x$, tem as mesmas componentes que $V^{\mu}(x)$. No entanto, não existe uma maneira natural de transportar paralelamente um vetor em uma variedade, devemos especificar como ele é transportado paralelamente de um ponto para o outro. Denominaremos $\tilde{V}\ |_{x+\Delta x}$ o transporte paralelo do vetor $V\ |_{x}$ para o ponto $x + \Delta x$. Tal transporte satisfaz:

$$\tilde{V}(x + \Delta x) - V(x) \propto \Delta x$$
$$(V^{\mu} + W^{\mu})(x + \Delta x) = \tilde{V}^{\mu}(x + \Delta x) + \tilde{W}^{\mu}(x + \Delta x),$$

O que significa que o transporte paralelo depende de quanto vale Δx e que ele se distribui linearmente na soma dos vetores. Estas condições podem ser provadas se podemos escrever (NAKAHARA, 1990, p.208)

$$\tilde{V}(x + \Delta x) = V(x) - V^{\lambda}(x)\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\Delta x^{\nu}.$$

A partir destes fatos da geometria diferencial, notemos que do lado esquerdo o vetor $\tilde{V}$ está escrito no ponto $x + \Delta x$, e no lado direito o vetor V está no ponto x. Para compararmos estes vetores, temos que fazer tudo em um mesmo ponto, isto é, transportar o vetor V paralelamente até o ponto $x + \Delta x$. Esta operação, também denominada de *derivada covariante* pois será invariante perante transformações gerais de coordenadas, é definida como

$$\lim_{\Delta x^{\nu} \to 0} \frac{V^{\mu}(x+\Delta x) - \tilde{V}^{\mu}(x+\Delta x)}{\Delta x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + V^{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

Assim vemos que há uma quantidade definida no ponto infinitesimalmente próximo de x, em $x + \Delta x$. Há diferentes regras para este transporte paralelo, cada uma delas dependerá da escolha dos $\Gamma(s)$. Nas variedades com métrica, uma escolha de Γ é denominada conexão de *Levi-Civita,* que é uma conexão simétrica, isto é, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$.

Uma conexão afim $\bigtriangledown$ é definida como uma aplicação $\bigtriangledown : \Xi(M) \times \Xi(M) \to \Xi(M)$, ou seja, que leva campos vetoriais X e Y, ou $(X,Y) \to \bigtriangledown_X Y$ que satisfazendo

$$\begin{gathered}\nabla_X(X+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \\ \nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\ \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \\ \nabla_X (fY) = X[f] Y + f \nabla_X Y \ .\end{gathered}$$

Onde f é uma função com valores reais definida na variedade, e $X, Y, Z \in \Xi(M)$ e $X[f]$ é um campo vetorial X aplicado à função f, conforme definido acima.

Detalharemos melhor as conexões afins. Dada uma carta (U, ϕ) com coordenadas $X = \phi(P)$ na variedade M, com m dimensões, definem-se m^3 funções $\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$, denominamos *coeficientes da conexão* por

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_\mu e_\nu = e_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \ ,$$

onde $\{e_\mu\} = \{\partial / \partial x^\mu\}$ é a base coordenada no espaço tangente à variedade M no ponto P, ou $T_P M$. Os coeficientes da conexão especificam como os vetores da base mudam ponto a ponto, com isto definido, podemos calcular ação de ∇ em qualquer vetor. $\nabla_\mu W^\lambda$, é a componente λ do vetor $\nabla_= \nabla_\mu W^\lambda e_\lambda$.

Caso a métrica da variedade seja *covariante* e constante, o que significa que o produto escalar de vetores V e W, ou $V^\mu W^\nu g_{\mu\nu}$ seja constante ao serem paralelamente transportados na variedade, temos que $\nabla g = 0$ (NAKAHARA, 1990, pp.213-214).

$$(\nabla_\kappa g)_{\mu\nu} = 0 \ .$$

Podemos definir os s*ímbolos de Cristoffel* que são os coeficientes da conexão afim na Teoria da Relatividade Geral de Einstein,

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \ .$$

Já o *tensor de Riemann*, ou *tensor de curvatura* é uma aplicação

$$T : \Xi(M) \otimes \Xi(M) \otimes \Xi(M) \to \otimes\Xi(M) \ .$$

Isto é, mapeia três campos vetoriais em um campo vetorial, ou seja

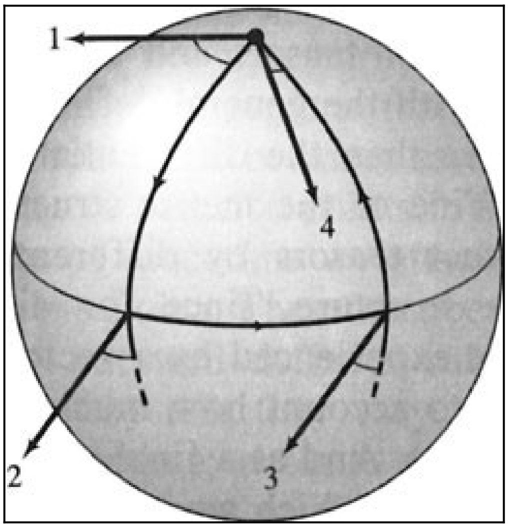
$$R(X, Y, Z) \equiv \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[x,y]} Z \ .$$

Com referência a uma base coordenada $\{e_\mu\}$ pode ser escrito como

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\kappa_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\kappa_{\nu\eta} \ .$$

Vejamos o significado do transporte paralelo. Na figura abaixo vemos o transporte paralelo de um vetor. Começamos no polo norte (1) e transportamos paralelamente o vetor ao longo de um meridiano até o equador (2), então alguma distância ao longo do equador (3) e depois retornamos ao polo norte (4) ao longo de outro meridiano. (Para visualizar a orientação dos vetores 1, 2, 3 e 4, tenha em mente que as caudas desses vetores são tangentes à esfera).

Figura 10 – Transporte paralelo numa esfera.



Fonte: OHANIAN, RUFFINI, 2013, p. 222.

A maneira mais simples de detectar curvatura em uma geometria é realizar transporte paralelo de um vetor em torno de um caminho fechado, como na Figura 10. Alternativamente, podemos transportar o vetor do ponto inicial P até um ponto final P' ao longo de dois caminhos alternativos 1 e 2 conectando P e P'. A diferença entre os dois vetores resultantes em P é então a mesma que a diferença para o transporte em torno do caminho fechado que consiste no caminho 1 seguido pelo caminho 2 ao contrário.

Num espaço-tempo plano, o resultado do transporte paralelo não depende do caminho percorrido; portanto, em um espaço-tempo plano, temos necessariamente $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$. Em um espaço-tempo curvo, o resultado do transporte paralelo depende do caminho percorrido. O tensor $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ caracteriza a dependência do caminho no transporte paralelo e serve como uma medida quantitativa da curvatura do espaço-tempo. Se $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \neq 0$, o espaço-tempo é curvo, isto é, se alguma das 256 componentes do *tensor de Riemann* for diferente de zero, o espaço-tempo é curvo.[22]

Podemos assim, definir (SYNGE, 1971, p.17), o *tensor de Ricci*, simétrico, por

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} R^{\alpha}_{.\mu\alpha\nu} = R_{\nu\mu} \ ,$$

ou seja, é uma *contração* do *tensor de Riemann,* e o escalar de curvatura, uma *contração* do *tensor de Ricci*,

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = R \ .$$

Assim, as equações de Einstein nas coordenadas $\{x^{\mu}\}$ (OHANIAN, RUFFINI, 2013, p.285) são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, c é a velocidade da luz e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum (OHANIAN, RUFFINI, 2013, p.64).

[22] Assim podemos entender melhor, agora a argumentação que J.L. Synge faz em seu livro da Teoria da Relatividade Geral, citado aqui, sobre suas divergências com o Princípio da Equivalência na formulação Einsteiniana (ver na p.9 do Prefácio de seu livro “Relativity: The General Theory”, North-Holland, Amsterdam, 1960).

Em uma teoria relativística da gravitação, a densidade de energia ($\rho = E/V$, por exemplo E_{rgs}/cm^3, isto é, energia por unidade de volume) tem um importante papel. Entretanto, não se pode considerar a densidade de energia isoladamente, pois o que é densidade de energia para um determinado observador, poderá não ser para outro observador. Devemos considerar as quantidades, densidade de energia, fluxo de densidade de energia e fluxo de densidade de momentum em conjunto. Por exemplo:

$T^{00} \Rightarrow$ densidade de energia
$T^{\kappa 0} = T^{0\kappa} \Rightarrow$ fluxo densidade de energia na direção $\kappa =$ densidade de momentum-κ
$T^{\kappa l} \Rightarrow$ fluxo da densidade de momentum-κ na direção l.

Sendo assim, $T^{\mu\nu}$ define os diferentes fluxos de densidade de energia e momentum. Logo, $T^{\mu\nu}$ (com os índices em cima) é definido de forma que suas componentes representam estas diferentes quantidades, ou seja, densidade de energia, densidade e momentum e fluxo da densidade de momentum nas diferentes direções. Com as equações de Einstein para a Relatividade Geral, temos uma descrição de como massa, momentum, energia e pressão modificam a geometria do universo.