AS LIÇÕES DE GASPARD MONGE E O ENSINO SUBSEQÜENTE
DA GEOMETRIA DESCRITIVA

Danusa Chini Gani

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA.

Aprovada por:

____
Prof. Ricardo Silva Kubrusly, Ph.D.

____
Prof. Luiz Carlos Guimarães, Ph.D.

____
Prof. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, Ph.D.

____
Prof. Maria Helena Wyllie Lacerda Rodrigues, D.Sc

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 2004

GANI, DANUSA CHINI

As lições de Gaspard Monge e o ensino subseqüente da Geometria descritiva [Rio de Janeiro] 2004

VI, 149 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Geometria Descritiva. 2. História da Ciência. 3. Educação.

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

AS LIÇÕES DE GASPARD MONGE E O ENSINO SUBSEQÜENTE
DA GEOMETRIA DESCRITIVA

Danusa Chini Gani

Dezembro / 2004

Orientadores: Ricardo Silva Kubrusly
Luiz Carlos Guimarães

Programa: História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia

Pesquisa histórica sobre a concepção da Geometria descritiva, na sua função de ciência aplicada às artes e engenharias, e questionamento do modo tal qual vem sendo divulgada como disciplina escolar. O estudo dos antigos tratados de Estereotomia, que culminaram na sistematização de uma linguagem da representação gráfica, revelam as reais contribuições do método mongeano, em comparação com os recursos que os autores possuíam até então e com as enormes dificuldades enfrentadas pelos construtores, anteriormente ao método. Algumas análises dos primeiros anos do ensino da Geometria descritiva em instituições francesas – através do estudo, tanto de documentos elaborados com o intuito de introduzir a disciplina quanto de avaliação dos resultados iniciais - servem de base para o encaminhamento de sugestões para a atualização do seu programa corrente. Estas análises são complementadas pela comparação entre as lições ministradas por Gaspard Monge e o conteúdo de um livro didático, de considerável divulgação, em que são evidenciadas diferenças relevantes na maneira de abordar a disciplina.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

GASPARD MONGE'S LECTURES AND THE SUBSEQUENT TEACHING OF DESCRIPTIVE GEOMETRY

Danusa Chini Gani

December/2004

Advisors: Ricardo Silva Kubrusly
Luiz Carlos Guimarães

Department: History of Sciences and Techniques and Epistemology

Historical research about the conception of descriptive geometry as an applied science for the arts and engineering, and an inquiry into its guise as a scholar subject. The study of old Stereotomy treatises, that gave rise to a graphic representation language, reveals the real contributions of the Mongean method compared with the resources the authors had before. An analysis of the initial teaching years of descriptive geometry, in French institutions - using documents written either to introduce the discipline or to evaluate the first results – is complemented with the comparison of Gaspard Monge's lessons with the text of a well known schoolbook. The many significant diversities in tackling the topic which surface in this study lead in turn to suggestions for a possible update in our current syllabus.

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO

Françoise Arago[1] (1786-1853) conta que, quando Gaspard Monge (1746-1818) apresentou a Geometria descritiva aos franceses, as autoridades do país decidiram mantê-la em segredo. Conforme seu depoimento, esse silêncio foi imposto para que os engenheiros e construtores, dos países inimigos, não desfrutassem dos benefícios proporcionados por essa proficiência. Tal determinação teria durado aproximadamente quinze anos.

Diante deste relato nos parece intrigante o fato de que uma ciência, causadora de tanto impacto, hoje se encontre, praticamente, na memória daqueles que um dia penaram com suas épuras. É igualmente curioso aperceber-se de que o conjunto de conhecimentos que servem de fundamento aos diversos tipos de representação visual do espaço tridimensional têm tido seu ensino reduzido, inclusive, nos cursos que lidam essencialmente com a forma espacial.

No intuito de entender a desvalorização sofrida por essa disciplina no currículo escolar, procedemos à presente pesquisa. Partimos da suposição de que o conceito peculiar à Geometria descritiva perdeu-se entre as diversas aplicações do método, separando, literalmente, os fundamentos dos seus respectivos produtos. Procuramos, portanto, resgatar a essência desse saber que encontra-se igualmente em sua definição e seus objetivos.

Pensar na definição dessa ciência nos levou a uma tomada de decisão sobre que grafia utilizar. No decorrer da investigação, encontramos todas as possíveis representações em relação ao emprego das iniciais. Optamos pela adoção da forma ‘Geometria descritiva’, salvo quando o termo foi transcrito em uma citação (neste caso respeitamos a opção do autor do texto).

Nossa escolha teve como premissa manter a função de adjetivo da palavra ‘descritiva’, para dar ênfase à proposta da disciplina. A decisão surgiu a partir da leitura de um manuscrito de Monge, em que este apresentou suas idéias sobre essa nova matéria: “*... sur une géométrie purement descriptive, mais rigoureuse, ...*” (MONGE, 1793 *apud* TATON, 1992, p. 579). Segundo Taton (ibid., p.578), esta foi a primeira aparição do termo ‘geometria descritiva’ em um documento escrito.

[1] Cf. ARAGO, 1848.

1.1 Objetivos da Geometria descritiva:

Gaspard Monge, considerado o criador desta ciência, determina que são dois os seus objetivos:

> *... le premier, de donner les méthodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, savoir, longueur et larguer, tous les corps de la nature, qui en on trois, longueur, larguer et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement.*
>
> *Le second objet est de donner la manière de reconnoître d'après une description exacte les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent et de leur forme et de leur positions respectives* (MONGE, 1799, p.5).

Desta forma, Monge propõe uma representação biunívoca do espaço a três dimensões, ou seja, um método através do qual toda e qualquer situação espacial possa ser expressa por um desenho plano, e cada representação plana possa ser traduzida na conjuntura que lhe deu origem. Essa transformação reversível torna possível a dedução de medidas e formas do espaço, por intermédio de um desenho plano.

Em uma primeira análise, somos tentados a considerar a Geometria descritiva como um simples método de representação[2], que pode ser compreendido a partir de algumas poucas regras e convenções. Isso não deixa de ser uma verdade; mas o fato é que compreender o método não significa saber utilizá-lo!

A Geometria descritiva abrange algo mais. Hachette[3] (1769-1834), que foi aluno, amigo e professor auxiliar de Monge, define-a como contendo duas partes: uma racional e a outra técnica. A primeira é teórica e comporta as propriedades do espaço figurado, ou seja, compreende os elementos da geometria tridimensional que os matemáticos tratam de forma analítica ou sintética[4]. A segunda é a arte de representar, sobre folhas de desenho que são bidimensionais, os elementos do espaço a três dimensões, na sua forma sintética.

Sob esse ponto de vista, a Geometria descritiva engloba duas questões, uma teórica e a outra prática. No entanto, ressaltamos que elas são interdependentes e não admitem uma fronteira definida. Isso porque os fundamentos da representação

---

[2] O método está descrito na seção 3.

[3] Cf. HACHETTE, 1828.

[4] A distinção entre geometria analítica e geometria sintética surgiu a partir do desenvolvimento da geometria analítica por Descartes. De uma forma simplificada, a geometria analítica representa as figuras geométricas por coordenadas e os grupos de figuras por equações, para, então, resolver as questões por cálculo; a outra geometria, por oposição, é a sintética. Ou ainda, na definição apresentada por Fano e Carrus: "a geometria sintética considera as figuras por elas mesmas e a geometria analítica, estabelece seus resultados recorrendo à análise" (FANO e CARRUS, 1991, p. 185, tradução nossa).

bidimensional do espaço se encontram na respectiva teoria da Geometria espacial. Ou ainda, a Geometria é a base da sua própria representação. Forma-se, então, um círculo vicioso: para conhecer a Geometria espacial é preciso representá-la e para efetuar a representação, é necessário conhecê-la.

No entanto, constatamos que a Geometria descritiva seguiu, a partir da sua concepção, duas vertentes distintas de desenvolvimento: como ciência pura e como ciência aplicada. A primeira foi praticada por matemáticos e gerou grandes aquisições, entre as quais, a Geometria projetiva. Esta resultou das pesquisas empreendidas por Jean-Victor Poncelet (1788-1867) com o objetivo de "aperfeiçoar o método de demonstrar e de descobrir em simples Geometria" (PONCELET, 1865, préface, p.vi, tradução nossa). A segunda, direcionada para a aplicação nas Artes e Engenharias, tendeu para a sistematização do método, separando-o progressivamente da teoria matemática.

No início do século XX Gino Loria assinala a divergência de opinião em relação à posição da Geometria descritiva no domínio das disciplinas matemáticas. Era considerada incorporada à Geometria projetiva, por alguns, e uma disciplina de aplicação, por outros (LORIA, *apud* ROEVER, 1918).

Temos a opinião de que a evolução do texto da disciplina, desencadeada por essa última vertente, contribuiu para tornar pouco útil o seu ensinamento. Embora pareça contraditório, a ênfase dada à utilização do método, com objetivos estritamente práticos, culminou em uma total abstração da ciência.

A definição da disciplina, constante nos prefácios de livros de autores consagrados (do século XIX e início do século XX), vem reforçar tal conjectura e mostrar a principal dificuldade com a qual se deparavam os escritores de livros didáticos, ao selecionar o conteúdo de suas obras: ensinar o método com o mínimo de teoria.

Por exemplo, Eugène Catalan sugere uma dissociação entre o método e a resolução do problema quando a define como um método de representação que serve de linguagem gráfica às soluções teóricas dos problemas, dadas pela Geometria espacial.

> *La partie des Mathématiques appliquées à laquelle l'illustre Monge a donnée le nom de Géométrie descriptive a pour objets principaux : 1^er^ la représentation exacte des corps au moyen de dessins tracés sur un seul plan ; 2 la solution graphique des problèmes dont la Géométrie de l'Espace donne la solution théorique* (CATALAN, 1867, p.1).

Albert E. Church, de forma análoga, declara que vai mostrar “os métodos de representar ... a solução dos problemas...”. Ou seja, o enfoque não está na resolução dos problemas mas, no desenho das soluções já conhecidas:

> *Descriptive Geometry is that branch of Mathematics which has for its object the explanation of the methods of representing by drawings:*
> *First. All geometrical magnitudes.*
> *Second. The solution of problems relating to these magnitudes in space* (CHURCH e BARTLETT, 1864, p.7).

Jules de la Gournerie, por sua vez, demonstra mais clareza ainda em seus objetivos práticos. Diz, explicitamente, que vai tratá-la como “ciência abstrata do traçado”:

> *La Géométrie descriptive, telle qu’elle a été constituée par Monge, est un résumé des principaux tracés des arts graphiques et une Méthode de Géométrie basée sur la transformation des figures par la projection. Le plus souvent l’illustre géomètre s’appuie sur des théorèmes pour établir des constructions, mais quelquefois il développe des constructions pour démontrer des théorèmes.*
> *Je considère la Géométrie descriptive seulement sous le premier point de vue, c’est-à-dire comme la science abstraite du trait. Quand je présente des considérations de Géométrie générale, c’est uniquement pour arriver à des tracés pratiques, ou pour lever les difficultés que les constructions peuvent présenter dans quelques circonstances* (LA GOURNERIE, 1891, p. v).

Há, também, aqueles em cuja obra a importância do conhecimento teórico é ressaltada. Jules Pillet, que foi aluno de La Gournerie, adverte que ensinar a Geometria descritiva àqueles que ignoram a Geometria e o Desenho geométrico é absolutamente infrutífero:

> *En principe, tout problème que si pose sur les corps solides doit, tout d’abord, être résolu dans l’espace et comme si la géométrie descriptive n’était pas inventée ; après quoi, la science que Monge a crée, en coordonnant, par un effort de génie, les éléments épars dans les méthodes de trait employées par les charpentiers et par les appareilleurs, nous permet de réaliser graphiquement, sur une feuille d’épure, la solution qui a été trouvée.*
> *La géométrie descriptive n’est donc pas une science abstraite ; c’est, au contraire, est par excellence, une science d’application. C’est la géométrie appliquée au dessin et ce ne pas autre chose.*
> ...
> *J’ai rappelé que la géométrie descriptive n’était autre chose que du dessin de précision (1). C’est pourquoi, ayant toujours à notre disposition plusieurs méthodes de trait pour résoudre un problème donné, nous devrons choisir celle qui permet d’exécuter les constructions dans le moindre espace et qui économise le plus possible des lignes.*
>
> *(1) On a le grand tort, dans les lycées et dans les collèges, d’enseigner la géométrie descriptive à des jeunes gens qui n’ont pas*

> *encore fait de dessin géométrique. Ces élèves n'ont jamais rien vu, ni rien observé, ni rien représenté. Il en résulte qu'ils ne voient pas dans l'espace les constructions qu'ils tracent sur le papier. Dans ce conditions, la géométrie descriptive devient une sorte de jeu de patience, sans intérêt et sans portée.*
> *Un professeur de géométrie descriptive doit savoir dessiner. Il doit connaître la perspective et la stéréotomie*[5] (PILLET, 1921, pp.vii-viii).

Outros procuraram uma ruptura entre o método e as investigações teóricas mais aprofundadas. Maurice D'Ocagne (1896), em sua obra escrita a partir do curso ministrado na *Ecole de Ponts et Chaussées,* fez uma separação distinta em seu livro. Na primeira parte trata do modo de representar os corpos sólidos, que chamou de Geometria descritiva. Nesta, são abordadas as projeções cotadas, a perspectiva axonométrica, a teoria das sombras e a perspectiva linear. Na segunda parte estuda as curvas planas, as reversas e as propriedades gerais das superfícies, ou sejam, as propriedades intrínsecas dos corpos, que denominou Geometria infinitesimal.

Há, ainda, os que simplificaram ao máximo a definição, sem deixar muito clara a orientação que seria encaminhada. Por exemplo, no curso de Geometria descritiva para uso dos alunos de Belas Artes, publicado pelo arquiteto Edmond Vallois**,** o objetivo da disciplina é assim introduzido: *"La Géométrie descriptive a pour objet l'étude et la représentation, sur un plan, des figures de l'espace ayant plus de deux dimensions"* (VALLOIS, 1909, p.1).

Pelo exposto, observamos que as publicações didáticas destinadas ao ensino da Geometria descritiva nas Artes e Engenharias procuraram minimizar o conteúdo teórico e se depararam com a dificuldade de representar aquilo que se desconhece. Para compensar tanta abstração, faziam "considerações de Geometria geral", como explicitamente comentado por La Gournerie.

1.2 Algumas conseqüências de uma trajetória voltada para a prática:

A exposição de Pillet vem ao encontro da nossa idéia de que o ensino da Geometria descritiva, desvinculado da sua parte teórica, contribuiu para o seu declínio. Nos livros didáticos mais recentes, a parte racional não é, em geral, abordada. Em outras palavras, os problemas e as propriedades dos elementos da Geometria espacial não constituem o ponto central da questão. Por outro lado, as representações gráficas bidimensionais das soluções destes problemas é que são enfocadas.

---

[5] Estereotomia (stéréotomie) é a ciência do corte de figuras espaciais.

De maneira geral, a Geometria do espaço a três dimensões (na sua forma sintética) não é conhecida por aqueles que 'aprendem' a Geometria descritiva. O ensino da Geometria sintética nas escolas compreende, em sua maior parte, a Geometria plana. O aprendizado da Geometria espacial sintética é, usualmente, concentrado em classificações de sólidos e em alguns teoremas particulares. Os problemas espaciais, tais como a determinação de distâncias (entre pontos, retas, planos), posições relativas (paralelismo, perpendicularidade, obliqüidade) e ângulos (entre retas e planos), para citar os mais simples, são resolvidos na forma analítica. Poucas são as instituições que mantêm o ensino da Geometria descritiva; este, geralmente, tem enfoque em soluções prontas, apresentadas diretamente na respectiva representação plana e abstraídas de suas aplicações práticas. Ou seja, o problema não é pensado nem resolvido no espaço tridimensional[6]. Logo, não é difícil concluir que, ao invés de servir para resolver os problemas do espaço tridimensional, a Geometria descritiva passou a ser, ela própria, um grande problema. E por mais incrível que possa parecer, um problema essencialmente plano.

Em decorrência disto, esta ciência - que tem como objetivos imediatos resolver sinteticamente os problemas da Geometria do espaço, representar essa solução em uma superfície de duas dimensões e deduzir, a partir daí, a forma e posição de tudo o que puder ser inferido das posições relativas dos elementos representados - perdeu a sua motivação primordial.

Como conseqüência final, chegamos a um ponto em que o método e as convenções, estabelecidos por Monge, foram padronizados e particularizados para cada aplicação específica. Temos, por exemplo, 'manuais' para construções de telhados que prescindem da teoria geométrica (e também – ou portanto - da 'Geometria descritiva', seja lá como esta for entendida!). Isto nos faz lembrar os primeiros tratados de estereotomia, que apresentavam 'receitas' para cada tipo de construção[7].

Por outro lado, o ensino da Geometria descritiva, como disciplina escolar, foi se tornando cada vez mais desvinculado de qualquer aplicação prática. Ora, se não é voltado para a prática e não tem preocupação com a parte racional, qual o seu objetivo? Diante do exposto, somos levados a concluir que a Geometria descritiva passou a ser uma disciplina abstrata, sem aplicação, e que também não serve ao

---

[6] Na seção 5, daremos exemplos desta maneira de enfocar o assunto.
[7] Alguns tratados serão vistos na seção 3.

desenvolvimento da Geometria pura. Parafraseando Pillet (1921), uma espécie de jogo de paciência, desinteressante e despropositado. Ou seja, um jogo de deduções entre as representações planas, abstraídas de suas situações tridimensionais geradoras.

O resultado dessa abordagem estéril aparece bem caracterizado nas poesias satíricas, escritas por alunos da Escola Politécnica do Rio de Janeiro, que Paulo Pardal transcreveu nas *Memórias da Escola Politécnica.*

Poesias de Bastos Tigre em Saguão da Posteridade[8]

MONGE

Foi tua vida, Monge, a mais nociva
Das dos sábios antigos e modernos,
Hoje estás nas profundas dos Infernos
Ensinando ao Diabo, Descritiva.

Duros tormentos, bárbaros, eternos,
Roem-te o coração qual chaga viva
E Satã no teu corpo espetos criva
Mais que tem o Travassos de cadernos.

Mas a dor cruciante que me invade
Que me torna casmurro e não ‘sta longe
De me enviar à praia da Saudade,

É de não ter te carregado o Diabo
Antes de haveres descoberto, oh Monge,
Os helicóides que de mim dão cabo.
(PARDAL, 1984, p.25)

VISITA À SALA DAS ÉPURAS
(Paródia[9])

Como o frade que volta ao seu convento,
Depois de longa pândega festiva,
Quis a sala rever da Descritiva,
- O meu primeiro amolador tormento.

Entrei! Um velho vulto macilento,
Talvez de Monge a sombra fugitiva,
Tomou-me pelo braço e pensativa,
Deu um ai de saudade e de lamento!

Era esta a sala! O velho Mestre, a gente,
O Amaral; não terminei, o pranto
Rolou-se-me dos olhos em torrente...

Olhei a pedra, olhei a mesa, o teto...
- Um helicóide gemia em cada canto,
- Chorava em cada canto um cone reto!
(PARDAL, 1984, p.30)

[8] O *Saguão da Posteridade* foi escrito por Bastos Tigre, publicado em 1902.
[9] Do soneto “Visita à Casa Paterna” de Luís Guimarães Jr (PARDAL, p. 30, em nota de página)

Poesias de Sóter Caio de Araújo em Ex-tudo[10]

GEOMETRIA DESCRITIVA

Injeções quotidianas
Da cinzenta Descritiva;
Dolorosas, desumanas,
Horas d'épura inventiva;
Professor é Monroe dado[11],
Na concepção de vida...
Eis aí o que eu, coitado,
Levo e tenho nesta vida.
(PARDAL, 1984, p.64)

MARTÍRIO [3]

Ao Miranda Carvalho, que um dia teve a triste idéia de aparecer na Escola com uma Descritiva escrita em alemão.

Se a descritiva simplória,
Em bem vulgar português
Das cadeiras é a escória
Que nos maltrata de vez...
Imagina a dor ingente,
O trabalho e a aflição
Que não deve dar à gente
Quando escrita em alemão!!
(PARDAL, 1984, p.67)

Provavelmente, uma disciplina que causava tanto sofrimento não era compreendida por grande parte dos alunos. Ilustramos na figura 1 um dos grandes vilões, destacado por Bastos Tigre: a superfície gerada por uma reta apoiada em uma hélice e no eixo desta e que se desloca paralelamente às geratrizes de um cone - o helicóide de cone diretor.

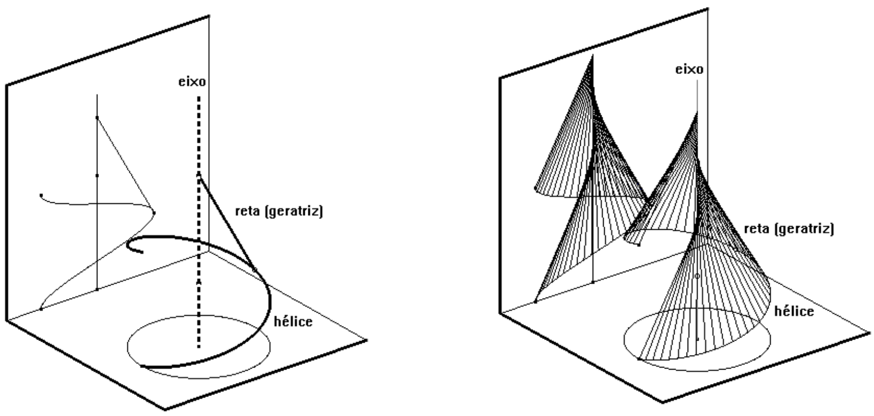


Figura 1: Helicóide reverso de cone diretor.

[10] *Ex-tudo* foi escrito por Sóter Caio de Araújo, formado em engenharia civil na turma de 1917.
[11] "Monroe dado" na concepção de vida é uma alusão ao dito popular de alguém estar irritado por sofrer de hemorróidas, ou ser *hemorroidado.* (PARDAL, p. 64, em nota de página)

É curioso, no entanto, lembrar que a Geometria descritiva surgiu, justamente, para reunir os diversos procedimentos que eram utilizados nas Artes, Arquitetura e Engenharia, em uma doutrina única e geral. Assim, aquilo que a História aponta como uma grande realização para a ciência e as técnicas, no final do século XVIII, parece ter perdido a importância e as Artes liberais voltaram a se separar em procedimentos isolados.

De uma outra forma, podemos pensar que a generalização dos processos empíricos, em uma teoria comum, já tenha cumprido o seu papel. Isto é, o método foi generalizado e deu embasamento racional às técnicas que, uma vez bem estruturadas, não necessitam mais recorrer às bases, para prosseguir. Tal pensamento, porém, estaria vinculado à crença de que a técnica já tivesse atingido sua expressão máxima ou, ainda, não precisasse dos fundamentos teóricos para evoluir em técnicas mais avançadas.

De forma análoga, podemos pensar na parte racional da disciplina. Tomar conhecimento dos teoremas já sabidos e das Geometrias que derivaram da Geometria descritiva, sem dar valor aos fundamentos que levaram a tais aquisições, seria considerar conhecida toda a teoria e que nada mais restasse para ser descoberto.

Em vista do exposto, acreditamos que a Geometria descritiva não é uma ciência 'morta' nem deve ser abandonada. Entretanto, seus fundamentos e objetivos precisam ser revistos. Enfim, a presente pesquisa foi empreendida com o intuito de contribuir com tal revisão.

1.3 Organização da pesquisa:

A nossa primeira idéia, com o propósito de resgatar a Geometria descritiva, era determinar os 'fundamentos necessários ao ensino da disciplina'. Pretendíamos proceder à leitura cronológica de livros e tratados consagrados de Geometria descritiva, desde Monge até os dias de hoje. Através da comparação entre os diversos conteúdos e respectivas ordenações, acreditávamos que seria possível chegar ao objetivo almejado. Essa primeira investida nos levou ao que hoje parece óbvio: antes de tudo, era preciso conhecer outros aspectos do assunto, entre os quais, como surgiu, com que finalidade, como se propagou e ainda, o que havia antes.

A partir dessa constatação, adiamos a proposta de determinar os fundamentos da disciplina e investimos em uma pesquisa das suas origens. Nesta, incluímos: (i) a vida de Gaspard Monge, seu fundador, enfatizando o caminho que o conduziu à elaboração e propagação da Geometria descritiva; (ii) a evolução das técnicas de representação, através dos livros de texto, que culminaram na Geometria descritiva; (iii) a formação das escolas, na França, que contribuíram para a divulgação da Geometria descritiva. E os primórdios do ensino da disciplina, no Brasil.

Após essa indagação inicial, procuramos fazer uma comparação entre a Geometria descritiva ensinada por Monge e aquela que foi divulgada, posteriormente, nas escolas. Para o confronto, utilizamos a publicação das aulas de Monge e uma obra do século XIX[12], produzida com fins didáticos. Pretendemos, através deste paralelo, dar embasamento à nossa concepção de que a evolução do texto didático se encaminhou para uma abstração total da disciplina. O resultado final é conhecido por todos: a sua quase total eliminação do currículo escolar.

A escolha do livro publicado pela Congregação dos *Frères de l'Instruction Chrétienne* (da coleção conhecida pela sigla F.I.C.), para contrastar com as aulas de Monge, ao invés de optar por outro mais recente, justifica-se pelo fato de aquele ter sido adotado nas escolas brasileiras por mais de cinqüenta anos. Portanto, foi o livro que serviu de ensinamento aos autores de livros posteriores, funcionando como um elemento intermediário e relevante entre a concepção da Geometria descritiva e a sua abordagem atual.

Temos, assim, o seguinte desenvolvimento da tese: Seção 2 – Dados biográficos de Gaspard Monge; Seção 3 – Origens da Geometria descritiva; Seção 4 – Primórdios do ensino da Geometria descritiva; Seção 5 – Geometria descritiva: Um contraste entre as lições de Monge e o livro por F.I.C.

As biografias que fundamentaram a segunda seção foram, principalmente, duas: *Gaspard Monge*, *biographie lue en séance publique de l'Academie des Sciences*, de François Arago (1848) e *L'Oeuvre Scientifique de Monge*, de René Taton (1951). Também foram consultados a obra de Charles Dupin[13](1784-1873) e trechos referentes ao assunto, constantes em livros de História da Matemática.

A escolha da biografia escrita por Arago pareceu pertinente uma vez que este, contemporâneo de Monge, foi admitido na Escola Politécnica em 1803, tendo substituído o criador da Geometria descritiva em 1810, por proposta do próprio. Portanto, além de ter tido contato direto com Monge, Arago vivenciou o ensino da

[12] Não temos a data da primeira edição deste livro. Sabemos, porém, que os *Eléments de Géométrie Descriptive avec quatre cents exercices,* por F.I.C., teve sua 2ª edição pela Poussielgue, Paris, em 1882.
[13] *Essai Historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, 1819.

disciplina. Por outro lado, a biografia de Taton traz a pesquisa de um estudioso no assunto, com a visão do século XX.

Na terceira seção procuramos traçar uma linha evolutiva dos textos que precederam a Geometria descritiva. Neste ponto, nos deparamos com uma dificuldade: que tipo de texto escolher? O método de Monge tem raízes no estudo das cônicas e em atividades práticas, tais como o desenvolvimento da perspectiva e os tratados de estereotomia. Não foram poucos os que realizaram pesquisas relacionando a Matemática com os procedimentos empíricos das Artes. A idéia mais comum era a de que a Matemática servia à Arte; no entanto, alguns estudiosos tentaram reverter essa convicção e mostrar que o desenho projetivo servia à Matemática. Entre eles, Dürer (1471-1528) em cujo tratado de 1525[14] "aparece pela primeira vez uma concepção clara do papel do método das projeções e o primeiro emprego dos procedimentos próximos do espírito da geometria descritiva" de Monge (TATON, 1951, p.65, tradução nossa). De fato, diversas de suas épuras são bastante parecidas com as épuras da Geometria descritiva.

Dessa forma, o progresso dos tratados das cônicas e o desenvolvimento da representação visual do espaço, desde a Ótica de Euclides até a Perspectiva do Renascimento, são assuntos bastante pertinentes ao estudo das origens da Geometria descritiva. Porém, foi na evolução dos tratados de estereotomia que encontramos a trajetória direta para a criação de Monge. Pelo menos, do modo como foi compreendida por aqueles que produziram livros-texto para o ensino. O vínculo explícito entre o método mongeano e as formas de transmitir as informações necessárias à produção industrial contribuiu para que a disciplina se instalasse nas áreas técnicas. O encaminhamento de um estudo através dos tratados das cônicas levaria à parte racional da Geometria descritiva, a que resultou na Geometria projetiva.

Tendo decidido seguir a evolução da arte da estereotomia, escolhemos três obras referenciais das quais fizemos uma pequena análise: uma do século XVI, de Philibert Delorme, na qual o autor organiza os procedimentos que eram praticados diretamente nos canteiros de obras; a segunda, no século seguinte, em que Girard Desargues (1591-1661) apresenta a genial idéia de compreender diversos procedimentos particulares como um problema único e geral; e finalmente, uma grande obra do século XVIII, de

[14] *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, ebenen, und gantzen Corporen,* Nuremberg, 1525 (referência em nota de pé de página, em Taton, 1951, p. 64).

Amédée-François Frézier (1682-1773). Esta última é cuidadosamente constituída e traz, entre outras, uma novidade que consiste na separação explícita entre teoria e prática: propõe um estudo teórico inicial, seguido da aplicação prática.

A análise das obras citadas foi realizada a partir de versões dos textos originais, disponíveis na *Gallica, Bibliothèque Numérique de la Bibliothèque National de France.*

Na quarta seção buscamos conhecer a forma como a Geometria descritiva foi divulgada. O seu ensinamento, como disciplina oficial das escolas francesas, teve início com a própria formação destas, na época da Revolução. Monge se encontrava plenamente envolvido na tarefa de organização das instituições educacionais e tinha a convicção de introduzir a Geometria descritiva no ensino. Com o objetivo de iniciar uma nova disciplina, alguns cursos preliminares foram realizados e muitas análises e justificativas apresentadas. Da mesma forma, o primeiro ano da Geometria descritiva em uma escola em Paris, a *Ecole Polytechnique,* foi avaliado por um instrutor da matéria[15]. A relevância desse material, para melhor compreender os objetivos da disciplina, é indiscutível. Portanto, nesse capítulo abordamos as escolas francesas em que a disciplina começou a ser divulgada, com os respectivos programas e comentários.

As avaliações sobre os cursos ministrados na *Ecole Polytechnique* foram transcritas dos textos originais, publicados no *Journal de l'Ecole Polytechnique,* que se encontram reunidos e organizados em diversos volumes.

Outro fato importante está na elaboração do primeiro livro didático da disciplina, *Géométrie Descriptive, leçons données aux Ecoles normales.* Este teve origem nas anotações das aulas de Monge na primeira escola de formação de professores da França, a *Ecole normale de l'an III.* A divulgação da Geometria descritiva, na França e em outros países do mundo, ocorreu a partir de reedições e traduções desta publicação. No Brasil, a propagação da disciplina teve início na Academia Real Militar, por intermédio da tradução, para o português, desse livro, em 1812. O autor da tradução, José Victorino dos Santos e Sousa (?-1852), acrescentou alguns comentários aos quais julgamos ser pertinente fazer alusão. A tradução de Santos pode ser encontrada na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro.

Finalmente, na quinta seção, procuramos explicitar, através de exemplos, que o ensino da Geometria descritiva progrediu para um conteúdo abstrato e desvinculado, tanto de suas aplicações práticas quanto de seu desenvolvimento racional. A

---

[15] Esta avaliação encontra-se no anexo E.

argumentação é conduzida por intermédio da comparação entre dois livros. O primeiro é aquele das aulas de Monge na *Ecole normale* e o segundo, um livro produzido com fins didáticos, da coleção de livros conhecida pela sigla F.I.C., já mencionada.

Avaliamos apenas uma pequena parte de cada obra, que acreditamos suficiente para ilustrar nosso ponto de vista. Desta forma, nos detivemos na primeira seção do livro de Monge, que corresponde à apresentação do método e à aplicação deste na resolução de problemas que envolvem pontos, retas e superfícies planas. Fizemos a descrição do conteúdo dessa primeira parte do livro, que serviu como guia da comparação. Ou seja, tomando por orientação a seqüência dos tópicos tratados por ele, procuramos os mesmos itens no outro livro e contrastamos, tanto a abordagem de cada um, quanto o posicionamento do conteúdo.

Reproduzimos, também, alguns trechos dos debates ocorridos entre Monge e seus alunos da *Ecole normale,* que evidenciam importantes divergências conceituais entre os participantes. É interessante salientar que tais debates, inicialmente previstos para serem intercalados com as aulas durante todo o curso, foram substituídos por exercícios práticos[16].

Na comparação entre as obras, optamos por trabalhar com as traduções: a de José Victorino dos Santos e Souza para o livro de Monge, e a de Eugênio de Barros Raja Gabaglia, para o livro escrito por F.I.C.. A primeira reproduz integralmente o texto de Monge acrescido de alguns comentários do tradutor. O original consultado foi uma reedição da *Jacques Gabay,* de 1989, das lições de Monge publicadas em 1799. A segunda conta com inúmeras edições. Utilizamos a edição de H. Garnier, de 1910, que é uma tradução dos *Eléments de Géométrie Descriptive avec de nombreux exercices,* por F.I.C, revista e adaptada à instrução secundária do Brasil, por Gabaglia. Essa última se mostrou bastante fiel à edição francesa de 1902, de Alfred Mame & Fils e Ch. Poussielgue, nos capítulos utilizados por nós.

Colocamos como suplemento alguns textos que julgamos essenciais para complementar a nossa dissertação. Os três primeiros são programas de ensino da Geometria descritiva, que foram elaborados com objetivos distintos. O anexo A contém

[16] No nosso entender, essa substituição prenuncia o destino da Geometria descritiva. Esta questão será abordada nas considerações finais desta dissertação.

o plano do curso ministrado com o intuito de dar uma visão geral da Geometria descritiva. Este plano foi publicado por Taton (1951, pp.93-95) a partir do manuscrito de Monge, encontrado nos arquivos do barão de Chaubry. A tradução é nossa.

O anexo B consiste em uma listagem dos tópicos de cada uma das nove aulas da *Ecole normale,* organizados em itens numerados. Estes tópicos foram relacionados por nós, baseados na leitura do livro de Monge. As datas das respectivas aulas foram encontradas em Belhoste e Taton (1992, pp.304-453).

O anexo C traz a relação das lições ministradas (e exercícios aplicados) aos alunos, nos meses iniciais do primeiro curso completo de Geometria descritiva em Paris, ocorrido na *Ecole Polytechnique*. Este curso, de apenas dois meses, aborda todo o conteúdo da disciplina, conforme é compreendida atualmente. O programa foi tirado do *Journal Polytechnique ou Bulletin du travail fait a l'Ecole Centrale des Travaux Publics* (*cahiers 1-2, tome I, an III*, pp. 11-14), que pode ser encontrado na seção de obras raras do IMPA[17]. A tradução é nossa.

Seguem ainda, mais três textos, que reproduzimos na língua original. O primeiro (anexo D) foi escrito por Frézier. Neste, o autor se propõe a dar as regras para representar, sobre um plano, as figuras que têm três dimensões. Ou seja, Frézier pretende estabelecer normas simples para a perfeita compreensão da representação plana de situações espaciais. Este texto nos ajuda a perceber os meandros do raciocínio dedicado à simplificação de um conteúdo bastante complexo. Conseqüentemente, nos leva a valorizar a genialidade de Monge.

Outro texto (anexo E) contém a avaliação do ensinamento da Geometria descritiva na *Ecole Polytechnique*, relativa aos dois anos iniciais da instituição. Este documento também foi publicado no *Journal Polytechnique* (*cahiers 5-6, tome II, an IV*, pp. 251-254).

Por último, reproduzimos as primeiras considerações de Monge em suas lições na *Ecole normale de l'an III* (anexo F). Nelas o autor expõe o seu método explicando o porquê e como chegou a ele. Monge "conduz o ouvinte [leitor] pela mão" para que este participe da elaboração de uma nova forma de perceber e interpretar o espaço - através do método das projeções. Atribuímos grande importância a esse fragmento e até ousamos dizer que, a partir dele, passamos a compreender a Geometria descritiva sob nova ótica.

[17] IMPA: Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Os textos aqui transcritos são fiéis à escrita da época, salvo quando tirados de uma publicação mais recente em que já tiverem sido modernizados. O alfabeto antigo foi, no entanto, transliterado. Quanto às figuras reproduzidas, procuramos deixá-las mais nítidas: eliminamos as partes borradas e reforçamos linhas quase apagadas. Em alguns casos, porém, julgamos mais proveitoso fazer um novo desenho, que foi colocado ao lado. Em outros, destacamos determinados elementos para facilitar sua compreensão.

2 DADOS BIOGRÁFICOS DE GASPARD MONGE

> *... vous prenait-il fantaisie d'analyser le talent oratoire de Monge, votre oreille était désagréablement affectée par une prosodie défectueuse. A des paroles traînantes succédaient, de temps à autre, des membres de phrase articulés avec une volubilité faite pour dérouter l'attention la plus soutenue. Vous alliez alors, par dépit, jusqu'à vous ranger à une opinion erronée, mais fort répandue : vous croyiez Monge bègue. Bientôt, cependant, entraîné, séduit par la lucidité des démonstrations, vous étiez tenté de rompre le silence solennel de l'amphithéâtre et de vous écrier, à l'exemple d'un des élèves les plus distingués de notre confrère:' D'autres parlent mieux, personne ne professe aussi bien'* (ARAGO, 1848, t.2, v.2, p.449).

Conhecer alguns aspectos da vida e da época daquele que é considerado o criador da Geometria descritiva ajuda a compreender o desenvolvimento desta ciência e de sua respectiva divulgação. Dessa forma, uma biografia, mesmo que breve, se faz necessária.

Tendo em vista que a Geometria descritiva se consolidou e começou a ser ensinada, de forma definitiva, durante a Revolução Francesa, o envolvimento político do criador dessa ciência parece inevitável. De fato, Monge ocupava o cargo de Ministro da Marinha quando Louis XVI foi guilhotinado e, na posição de presidente do conselho, assinou o processo verbal da sentença (TATON, 1951). Participou, também, do clube dos jacobinos, chegando a ser vice-presidente da instituição. Tais acontecimentos, entre outros, contaram para que houvesse reações contrárias a esse sábio, em determinados períodos da sua história.

Por outro lado, Monge foi membro de algumas das inúmeras comissões criadas na época, que tinham por objetivo organizar um país em crise. É incontestável que tais posições serviram de veículo para a propagação da Geometria descritiva. Mais um fator relevante na divulgação dessa ciência reside no fato de Monge ter sido um excelente e entusiástico professor, conforme o relato dos biógrafos consultados, muitos dos quais, ex-alunos. É, também, indubitável que a diversidade de interesses do autor contribuiu, de maneira efetiva, na elaboração dessa ciência.

Entretanto, embora Monge tenha sido um personagem de destaque na Revolução Francesa, dispensamos quaisquer análises do seu 'caráter revolucionário'. Da mesma forma, não nos preocupamos em citar os inúmeros trabalhos publicados nos diversos ramos da matemática ou em diferentes áreas científicas. Uma relação destes escritos pode ser encontrada na obra de René Taton, *L'Oeuvre Scientifique de Monge* (TATON, 1951, pp.377-393). Optamos, ao contrário, por sintetizar sua biografia com ênfase nos dados que conduzem diretamente ao desenvolvimento e à vulgarização da Geometria descritiva. Incluímos, também, uma sucinta orientação sobre a organização das escolas na França, em que a participação de Monge foi essencial. A formação destas escolas será retomada, mais detalhadamente, na seção 4.

2.1 Gaspard Monge

Gaspard Monge nasceu na cidade de Beaune, em maio de 1746. Embora de origem humilde, fez os estudos primários e secundários em uma instituição de elite, o *Collège d'Oratoriens,* por determinação de seu pai, Jacques Monge. Desde cedo se destacou na escola e aos quatorze anos elaborou um extintor de incêndio cujos efeitos foram muito admirados. Ao ser questionado a respeito de seu feito respondeu: "*J'avais, ..., deux moyens de succès infaillibles: une invincible ténacité, et des doigts qui traduisaient ma pensée avec une fidélité géométrique*" (MONGE, apud ARAGO, 1848, t.2, v.2, p. 429).

Terminou, com distinção, os cursos de filosofia, física e matemática em sua cidade natal, no ano de 1762. Seus professores o encaminharam ao *Collège d'Oratoriens* de Lyon, para seguir a carreira religiosa. Lá, foi designado para a cadeira de física e aos dezesseis anos já demonstrava grande habilidade em ensinar. Por orientação de seu pai, retornou a Beaune em 1764. Foi, então, para a *Ecole Royale du Génie*, em Mézières, por indicação de um oficial superior desta escola. Ele havia tomado conhecimento de um plano para a cidade de Beaune idealizado por Monge[1]. A escola existia desde 1748 e tinha excelente reputação; formava engenheiros militares para as obras de fortificações e para todos os trabalhos relativos aos ataques e defesas de territórios. Apesar de o programa ser orientado para a arte militar, os estudos científicos eram tão avançados quanto os das universidades e escolas técnicas da época. No entanto, por não ser de origem nobre, Monge foi encaminhado para uma sucursal dessa escola destinada a formar os aparelhadores[2] e todos os que se ocupavam dos trabalhos práticos, onde foi vinculado como desenhista e aluno. Nessa escola prática, chamada desdenhosamente de *Gâche*[3]*,* eram ensinados os princípios elementares do cálculo algébrico e da geometria, desenho gráfico, corte de pedras e carpintaria e, ainda, executados modelos em gesso das partes que compunham as abóbadas em uso na

[1] *Plan de la ville de Beaune*, projetado em 1764, juntamente com Fion, e publicado por Gandelot em *"Histoire de la ville de Beaune et des antiquités",* Dijon, 1772 (TATON, 1951, p. 377).
[2] aparelhador (*appareilleur*):é um mestre de obras que faz as épuras de execução em tamanho natural, escolhe as pedras, desenha sobre elas e supervisiona o trabalho dos talhadores (MONDUIT, 1889, p.3, tradução nossa).
[3] *Gâcheur, euse* – estragador, o que deita tudo a perder por falta de habilidade (FREIRE, 1879).

arquitetura civil e militar. Os alunos dessa escola eram, também, incumbidos de efetuar os cansativos cálculos de um importante problema da Fortificação: o desfilamento[4] (que era resolvido por ensaios imprecisos, envolvendo cálculos intermináveis). Encarregado de um determinado problema de desfilamento, Monge desenvolveu uma técnica gráfica que substituía as tentativas empíricas, utilizadas até então, reduzindo uma questão prática a um problema essencialmente teórico. Essa descoberta lhe valeu o cargo de repetidor[5] de matemática, na *Ecole Royale du Génie.*

Arago (1848) sinaliza esse momento como o início de um novo ramo da matemática aplicada, conhecido, posteriormente, como Geometria descritiva. Da mesma forma, Charles Dupin enfatiza que:

> *En appliquant successivement son talent mathématique à diverses questions d'un genre analogue, et généralisant toujours ses moyens de concevoir et d'opérer, Monge parvint enfin à former un corps de doctrine; ce fut sa géométrie descriptive…*(DUPIN, 1819, p.13).

Apesar do grande sucesso obtido por seu novo método, Monge começou a ser conhecido no meio científico por intermédio de publicações de estudos analíticos. Segundo Arago, isso se deveu ao fato das autoridades francesas, imbuídas de "um espírito patriótico, pequeno e mesquinho" (ARAGO, 1848, p.441, tradução nossa), terem proibido que ele divulgasse sua descoberta, que possibilitava aos construtores e engenheiros militares desenvolver edificações mais sólidas, de forma mais rápida e econômica. Dupin, por sua vez, comenta sobre os inúmeros obstáculos que deveriam ser vencidos para que o "aglomerado de práticas incoerentes" (DUPIN, 1819, p.14, tradução nossa) fosse substituído por um método mais simples e geral. Entre eles, cita a resistência de alguns responsáveis pelo ensino em aceitar as novas idéias e a rivalidade existente entre as escolas de engenharia militar e as de artilharia; segundo o autor, os oficiais da engenharia eram proibidos de divulgar, aos da artilharia, os manuscritos que continham tais ensinamentos. Há, porém, uma outra idéia, citada por Langins[6] (1989),

---

[4] *Défilement – défiler une fortification, c'est -à-dire ne laisser aucune des ses parties en prise aux coups directs de l'artillerie de l'assiégeant* (ARAGO, 1848, p.433). Foram encontradas duas traduções para o termo: desfilamento e desenfiamento. Desfilamento – o desfilamento consiste em conduzir o delineamento, e o relevo de huma obra de fortificação de modo que seu interior não seja visto de algum ponto dominante do terreno *E*, e que conserve as propriedades que as regras da defesa lhe assignão (VERNON, 1813, p.167). Défilement – (Fort.) Desenfiamento, methodo para preservar uma obra de fortificação das enfiadas (FREIRE, 1879).

[5] O repetidor era encarregado de "repetir" as lições dadas pelos professores, em salas particulares.

[6] Langins referencia duas obras a respeito desta idéia. A de Taton, 1951, p. 74 e Gillispie, *Science and Polity in France at the end of the Old Regime,* Princeton, 1980, pp. 523-24. Em sua obra, Taton sugere que Monge considerava a Geometria descritiva muito elementar para os sábios da Academia e, por outro lado, suficientemente conhecida por seus alunos para que houvesse necessidade de apresentá-la.

que atribui a ausência de qualquer publicação de Geometria descritiva, anterior a 1794, ao seu caráter prático; o autor ressalta que os sábios da *Académie Royale des Sciences*[7] não consideravam nobres as atividades exercidas por engenheiros e artistas.

Monge tinha uma área de investigação bastante variada. No entanto, seus trabalhos apresentavam características comuns. Estas relacionavam a prática, a geometria e a razão, com o objetivo claro de chegar a uma generalização dos procedimentos que eram tratados de forma particular. Dupin conta que Monge "queria que aplicássemos essa geometria [descritiva] à descrição geral das máquinas para reduzir, assim, todos os meios de transmitir a força e o movimento, a elementos perfeitamente conhecidos ..." (DUPIN, 1819, p.39, tradução nossa). Com esse intuito, desenvolveu grandes idéias em geometria aplicada à mecânica, considerando as relações entre causa e efeito dos movimentos; reduziu a máquina a seus elementos mais simples e avaliou, para cada elemento, os movimentos recebidos e transmitidos; concluiu, enfim, que todas as partes do espaço que os elementos de uma máquina percorrem podem ser determinadas pelo simples conhecimento de suas formas específicas.

Nas questões da matemática, procurava fazer ilustrações por imagens geométricas, dos desenvolvimentos analíticos e oferecia exemplos concretos das superfícies e curvas estudadas; em outras palavras, abordava, simultaneamente, três aspectos de um mesmo problema: analítico, geométrico e prático. Na sua eterna busca pela generalização (ARAGO, 1848) tentou levar, para o espaço a três dimensões, os fundamentos do cálculo de variações, elaborados por Euler (1707- 1783) e Lagrange (1736-1813) no estudo de problemas planos. Sua habilidade em visualizar o espaço geométrico contribuía na concepção de idéias inovadoras, como a que o levou a formular uma classificação das superfícies, pelo modo de geração, e assim estudar, simultaneamente, tanto as propriedades das superfícies cilíndricas, como as das cônicas, as de revolução, etc., independente de sua ordem; analiticamente, as superfícies se grupavam em função do grau das equações, através das quais estas podiam ser geradas. Não se pensava em propriedade comum entre superfícies de diferentes graus. Os primeiros impressos sobre este assunto aparecem no *Recueil de l'Académie de Turin*, de 1770 a 1773 e suscitaram o seguinte comentário de Lagrange: "*Avec son application de l'analyse à la*

[7] A *Académie des Sciences* foi fundada em 1666, por Colbert, e ficou sob a proteção da monarquia francesa (Louis XIV) a partir de 1699, como *Académie Royale des Sciences*. Um grupo, formado por cientistas e filósofos, mantinha encontros regulares, na *Académie*, para apresentar novas idéias e debater questões científicas. Foi suprimida em 1793, pela Convenção, e restaurada com a nova monarquia, em 1816.

représentation des surfaces, ce diable d'homme sera immortel !" (ARAGO,1848, t.2, v.2, pp. 447-448).

Monge defendia uma posição diante da querela corrente do século XVIII entre os matemáticos de espírito analista e os de espírito geômetra: que a análise e a geometria deviam caminhar lado a lado. Em uma memória relativa às superfícies desenvolvíveis e à teoria das sombras e das penumbras, sustentava que a "cooperação constante entre métodos geométricos e analíticos permitia a compreensão clara e a demonstração simples das propriedades das figuras no espaço"[8] (MONGE, apud TATON, 1951, p.21, tradução nossa). Euler havia tratado do mesmo problema de forma exclusivamente analítica.

Assumiu o cargo de professor de matemática, aos vinte e dois anos, em substituição a Bossut (1730-1814). Acumulou, três anos após, a cadeira de física, que ficou disponível devido ao falecimento de Nollet. Passou a ensinar, então, para grupos de alunos ao invés de orientá-los individualmente nas salas de estudos, como fazia na condição de repetidor. Sua atuação como professor é bastante elogiada por Arago (1848, t.2, v.2, pp. 448-452). Em 1772 obteve um lugar de correspondente da *Académie Royale des Sciences*, por influência de d'Alembert (1717-1783), Bossut e Vandermonde (1735-1796). Em 1780 substituiu este último como geômetra dessa mesma Academia. A partir de então, passou a viver seis meses em Mézieres e seis meses em Paris. Nessa primeira cidade, mantinha o cargo de professor e vivia com Marie-Catherine Huart, sua esposa desde 1777. Em Paris, permanecia para assistir às sessões da *Académie*[9].

Nas duas últimas décadas do século XVIII a física e a química vinham obtendo progressos muito rápidos e a matemática pura estava provisoriamente em segundo plano. Monge se encontrava perfeitamente envolvido com o espírito da época. Escreveu manuscritos sobre eletricidade, magnetismo e calor; participou ativamente das novas descobertas e teorias científicas, aparecendo, inclusive, como colaborador no prefácio do *Traité élémentaire de chimie* (Paris, 1789), de Lavoisier (1743-1794), em que este apresentava uma nova teoria em substituição à teoria do flogisto de Stahl. Pesquisou, com Lavoisier e Fourcroy (1755-1809), as diversas fases da metalurgia, investigando os diferentes problemas científicos, técnicos e econômicos colocados pela modernização; aliás, o interesse pela metalurgia remonta à época de seu casamento, quando começou a freqüentar a usina metalúrgica de sua mulher. Convém assinalar que essas pesquisas

[8] Sobre este assunto, ver Roger Laurent, *Annexe 17,* pp. 547– 563. In: Dhombres, 1992.
[9] Os estatutos da *Académie* impunham, aos seus membros, assiduidade e publicação de trabalhos.

viriam a ser, depois, de grande utilidade para esses três homens no período da Revolução.

Monge se desligou definitivamente de Mézieres, quando foi nomeado examinador dos alunos da Marinha, em função da morte de Bézout (1739-1783). Foi substituído por Ferry, que dava aulas na sua ausência. Com esse novo cargo, aprofundou seus conhecimentos de organização técnica em visitas freqüentes aos diversos portos da França. Pôde, também, conhecer as minas, as fundições e as usinas, acumulando, assim, mais uma função que viria a ser de bastante utilidade para a Revolução. Por outro lado, a substituição a Bézout o trouxe de volta à matemática, tendo sido convidado a escrever um curso completo dessa disciplina. Redigiu um tratado de estática, que foi publicado em 1788, prometendo um de aritmética e outro de geometria. Estes últimos nunca foram apresentados. Taton (1951) atribui a isso dois fatos: (1) sua repugnância em escrever qualquer coisa que não fosse resultado direto de suas pesquisas; (2) sua preocupação com a viúva de Bézout para que esta não fosse privada do único provento deixado por seu marido, que consistia nos direitos de autor de um curso completo de matemática[10].

Seus diversos trabalhos nas diferentes áreas do conhecimento científico o tornaram um cientista de grande reputação em matemática, física e química. Desenvolveu (ARAGO, 1848) um tratado sobre os principais fenômenos da meteorologia, que foi, por um longo período de tempo, a base do ensinamento dessa disciplina na França. Foi também, juntamente com Meusnier (1754-1793), encarregado de participar de uma das comissões criadas para estabelecer as bases de um sistema unificado de medidas, em 1790. No entanto, o sistema métrico só foi estabelecido nove anos depois, sem grande colaboração de Monge, que se encontrava envolvido em outras funções.

Com a derrubada definitiva de Louis XVI, a Assembléia Legislativa criou um Conselho provisório formado por ministros, dos quais Monge ocupou, por oito meses, o cargo de Ministro da Marinha. Não se adaptou a essa função política e sua dedicação à nação ficou por conta de suas atividades práticas no desenvolvimento da manufatura de armas e munições, e do estabelecimento de um novo sistema de educação, científico e técnico. Foi solicitado, juntamente com os demais sábios da França, a procurar uma solução para o problema de fabricação do material necessário para a defesa da nação. Isso porque, a matéria prima, assim como o seu refinamento e a produção final das

[10] Bézout, Etienne, *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, Paris, J.B.G. Musier, 1764-1769. O curso contém 5 partes em 6 volumes: I – Aritmética; II- Geometria; III- Álgebra; IV- Mecânica; V- Continuação do curso de matemática. Tratado de Navegação.

armas e munições provinham, em sua maior parte, de países estrangeiros, com os quais os franceses não podiam mais contar. Os homens das ciências difundiram, então, instruções metódicas e simples por toda a república; assim, todos os cidadãos puderam contribuir para a defesa do país. O conhecimento em química foi utilizado para obter matéria prima através de novos processos de separação de materiais. Dessa forma, o cobre necessário para a produção de armamento foi retirado dos campanários das igrejas, compostos de cobre e estanho; técnicas, até então desconhecidas, foram criadas, como, por exemplo, na arte de fazer o aço; procedimentos antigos e lentos, como a moldagem em terra, utilizada nas fundições de canhões, foram substituídos por outros mais rápidos, como a moldagem em areia.

Para difundir esses novos conhecimentos, foram selecionados cidadãos de cada distrito. Eles deveriam aprender com os mestres, em *cours révolutionnaires* [11]. Estes foram organizados pelo *Comité de salut public* e adotados em fevereiro de 1794. Nesses cursos, Fourcroy ensinou os meios de extrair e refinar o salitre; Guyton de Morveau (1737-1816) e Berthollet (1748-1822), a nova maneira de fabricar a pólvora; Monge, Hassenfratz (1755-1827) e Perrier, a arte aperfeiçoada de fundir os canhões de bronze para o armamento em terra, e os canhões de ferro utilizados pela Marinha. Para servir de manual nas usinas particulares e nos arsenais do Estado, Monge redigiu *L' Art de fabriquer les canons*. Em setembro de 1793 escreveu, com Vandermonde e Berthollet, uma obra prática para a fabricação do aço, que vinha acompanhada de pranchas. Participou, ainda, da implantação das aplicações militares dos aeróstatos.

A instrução pública francesa, na época em que eclodiu a Revolução, era feita em escolas especiais com finalidades específicas, tais como: a de *Mézières* para a engenharia militar; *Châlons-sur-Marne* para a artilharia; a *Ecole de Ponts et Chaussées,* em Paris, fundada no Ministério de Trudaine; uma escola para os alunos engenheiros da Marinha, que ocupava uma sala no Louvre; e uma de minas, também na capital. Segundo análise de Arago (1848), o aprendizado era bastante deficiente, ou por falta de equipamentos e laboratórios ou pelo número reduzido, muitas vezes nulo, de professores com título. O autor critica, também, a forma de acesso a essas escolas. Em geral, eram aceitos aqueles que vinham de família nobre e os exames de seleção,

[11] "cursos revolucionários" , onde revolucionário qualifica uma produção rápida e em grande quantidade para uma situação extraordinária (LANGINS, 1989, p. 17, tradução nossa). A palavra *revolucionário*, no sentido dado por Fourcroy, tem o sentido de acelerado, para satisfazer as necessidades de um momento (FOURCY, 1828, p.25, tradução nossa).

quando havia, eram muito fáceis; em outras palavras, sem qualquer valorização do mérito do aluno. Arago elogia, apenas, os exercícios práticos que eram feitos nos portos e canteiros de obras. Para agravar ainda mais a situação, foram decretadas duas leis disponibilizando todos os engenheiros civis ao ministro da guerra. Estas pretendiam compensar o insuficiente número de engenheiros militares existente em um país que mantinha luta armada contra a Europa em toda a sua fronteira. A conseqüência disso foi uma desorganização geral das escolas.

Com a vitória das forças armadas francesas, a Convenção ficou aliviada da preocupação com a defesa e pode consagrar parte do seu tempo à organização de um novo sistema de ensino. Fourcy (1828) comenta que muitos dos alunos que deixavam a *Ecole des Ponts et Chaussées* não tinham conseguido aprender nada, pois entravam sem nenhum conhecimento prévio e os cursos internos eram ministrados por alunos. Não havia professores. Jacques Lamblardie (1747-1797), sucessor de Perronet (1708-1794) na direção dessa escola, achou que a criação de uma escola preparatória comum a todos os serviços públicos, em que se ensinassem os princípios gerais das ciências, necessários tanto aos engenheiros civis, quanto aos militares, poderia ser a solução para o ensino na França.

A idéia de que havia um conhecimento comum a diversas profissões não era essencialmente nova e pode ser encontrada em trechos de escritos anteriores: (i) em um decreto do *Comité de salut public*, de fevereiro de 1794, sobre a transição da escola de Mézières para Metz, há a valorização das "...vantagens atribuídas a um centro que reúna todos os ramos da instrução, relativos às obras públicas" (ARAGO, 1848, t.2, v.2, p.490, tradução nossa); (ii) no *projet d'écoles secondaires pour artisans et ouvriers de tous genres*, preparado por Monge em setembro de 1793, este ressalta que:

> ... há uma série de conhecimentos indispensáveis aos aparelhadores, talhadores de pedra, carpinteiros, marceneiros, serralheiros, empreiteiros de todos os tipos, pintores, engenheiros de pontes e calçadas, oficiais da engenharia, ... etc e de grande utilidade para todos os outros poderes públicos que requeiram habilidade e meditação (MONGE, 1793. In: TATON, 1992, anexo 20, p. 578, tradução nossa);

(iii) no relatório apresentado à Assembléia nacional legislativa, em nome do *Comité d'Instruction publique* de abril de 1792, Condorcet (1743-1794) orienta que:

> ...os professores particulares de hidrografia e de pilotagem poderão ensinar a arte náutica aos alunos já preparados pelas lições de matemática, astronomia e física, que fazem parte do ensino geral. Ainda, com o apoio destas mesmas lições, um reduzido número de

> mestres bastará para formar outros alunos para a prática da arte das construções; e em todos os gêneros, esta distribuição de instrução comum tornará mais simples e menos dispendiosa toda espécie de instrução particular cujo estabelecimento seria exigido pela utilidade pública (CONDORCET, 1792, pp. 482-483, tradução nossa).

Uma Comissão criada pela Convenção, para presidir as construções civis e militares em toda a República, da qual Monge fazia parte, foi encarregada de preparar o estabelecimento de uma *Ecole centrale des Travaux publics*. Sob a incumbência da *Commission des Travaux publics* se encontrava toda espécie de obra executada com o tesouro público: pontes e calçadas, vias e canais públicos; fortificações, portos e estabelecimentos construídos para a defesa da costa; monumentos e edifícios nacionais; obras hidráulicas e de drenagem; levantamento de plantas, elaboração de mapas. Para essa escola, foram criados laboratórios, uma biblioteca e ainda preparadas épuras para o ensino da Geometria descritiva. O *Comité de salut public* apresentou à Convenção, por intermédio de Fourcroy, um projeto de lei que foi aprovado em 28 de setembro de 1794 (*7 vendémiaire an III*) descrevendo, detalhadamente, a organização e o objetivo da Escola, no qual conclui:

> ... vai difundir, ... por toda a República, o profícuo gosto pelo estudo das ciências exatas, e que é afinal, um poderoso meio de fazer caminhar, no mesmo passo, o aperfeiçoamento das artes úteis e aquele da razão humana (FOURCROY, 1794. In: LANGINS, 1989, anexo H, p. 220, tradução nossa).

O relatório de Fourcroy vinha acrescido de uma parte intitulada *Développements sur l'enseignement adopté pour l'Ecole centrale des travaux publics* em que eram apresentados os conhecimentos que seriam ensinados. A Geometria descritiva ocupa um lugar de destaque entre esses conhecimentos. A descrição dessa disciplina, e da sua forma de ensino, são relatadas com tanta autoridade no assunto, que diversos historiadores foram levados a atribuir, a Monge, a autoria dessa parte do relatório.

A *Ecole centrale des travaux publics,* depois chamada de *Ecole Polytechnique,* foi inaugurada em 24 de maio de 1795 e a participação de Monge foi essencial em todas as fases da sua criação. O recrutamento de quatrocentos alunos foi feito através de concurso, em setembro de 1794. O exame de seleção é enaltecido tanto por Arago (1848) quanto por Dupin (1819), pois substituiu a admissão de alunos em função da sua fortuna, classe social ou berço, por alunos dotados de inteligência.

O projeto de organização da escola determinava que os alunos fossem divididos em grupos de vinte, cada grupo ocupando uma sala de estudos, que seria presidida por um chefe; este deveria tirar as dificuldades dos alunos para que todos pudessem caminhar a passos “de gigantes” (DUPIN, 1819, p.54), condizentes com o movimento geral. Hachette (1828) esclarece que essa disposição não era aplicável à Geometria descritiva, por não ser ainda conhecida pelos alunos, havendo, portanto, necessidade da criação de uma escola preparatória para formar os chefes de estudos. Foi a primeira vez que a Geometria descritiva foi ensinada em Paris, tendo Hachette como principal encarregado do curso. Monge, no entanto, acompanhava esses alunos de Geometria descritiva, além de explicar suas folhas de análise. Essas instruções preliminares foram dadas durante os últimos meses de 1794, e delas participaram, aproximadamente, cinqüenta alunos selecionados pelos examinadores, de onde saíram vinte e cinco[12] para exercer a função; esses alunos assistiam aos cursos pela manhã e, à tarde, se reuniam no hotel *Pommeuse*.

> *C’est là [hotel Pommeuse] que nous commençâmes à connaître Monge, cet homme si bon, si attaché à la jeunesse, si dévoué à la propagation des sciences. Presque toujours au milieu de nous, il faisait succéder aux leçons de géométrie, d’analyse, de physique, des entretiens particuliers où nous trouvions plus à gagner encore. Il devint l’ami de chacun des élèves de l’Ecole provisoire ; il s’associait aux efforts qu’il provoquait sans cesse, et applaudissait, avec toute la vivacité de son caractère, aux succès de nos jeunes intelligences* (BRISSON, apud ARAGO, 1848, p.497).

Monge estava sempre em contato com seus alunos, para orientá-los nos estudos, ou defendê-los de incidentes políticos em que eram freqüentemente envolvidos; ou, ainda, ajudando, financeiramente, os mais necessitados. Em maio de 1795, foi denunciado como antigo revolucionário[13] e teve de se ausentar da *Ecole Polytechnique*. Mas, uma impronúncia de 22 de julho seguinte permitiu que retomasse seu curso.

A duração do curso completo de estudos politécnicos foi fixada em três anos; todavia, o país tinha pressa em formar engenheiros instruídos. Para tal, foram aplicados cursos revolucionários de três meses aos quatrocentos alunos do primeiro ano da escola, em que se ensinavam, de forma resumida, todas as matérias que, na marcha regular da escola, se distribuiriam por três anos. O objetivo desses cursos revolucionários era

[12] Malus, Dupuis, Pattu, Fayolle, Hesse, Francoeur, Bruslé, Patural, Callier, Biot, Bouvet, Lahure, Saint-Genys, Lancret, Hauterre, Eudel, Donop, Ancalin, Cavenne, Debaudre, Riché, Lamandé, L’Evesque-Durostu, Le Maye, et Durivau (Fourcy, 1828, p.72). A lista de Fourcy só contém vinte e quatro nomes. O vigésimo quinto, Pattu, foi relacionado por Dhombres, nas notas da reedição de Fourcy (Dhombres, 1989, p.86).

[13] Monge foi membro do clube dos jacobinos, chegando a assumir o cargo de vice-presidente, pouco antes do Termidor.

distribuir os alunos de acordo com seus respectivos conhecimentos; assim, os mais instruídos poderiam terminar o curso regular em dois anos, ao invés de três.

Monge, designado como instrutor de estereotomia, elaborou um resumo condensado em vinte e quatro lições[14], do curso que normalmente seria dado em um ano, para ser ensinado em dois meses (*germinal e floreal*), organizado em seis lições por *décade*[15]. Auxiliou, ainda, os instrutores de física em três cursos revolucionários sobre meteorologia e acústica. Para a aplicação da análise à geometria, ou seja, o estudo simultâneo da geometria infinitesimal e das equações de derivadas parciais (curso que deu depois das lições de estereotomia) preparou folhas contendo, entre outros pontos, um estudo de numerosos tipos de superfícies definidas por suas equações a derivadas parciais e por seu modo de geração, assunto que aparece em diversas de suas memórias anteriores.

Nesse mesmo período, uma comissão foi nomeada para tratar da organização de uma *Ecole Normale*, que formaria todos os professores para as escolas centrais (secundárias) que estavam sendo organizadas. Essa escola contava com cerca de mil e duzentos alunos[16], recrutados sem concurso, para serem instruídos pelos métodos dos cursos revolucionários. Lagrange, Laplace (1749-1827) e Monge, considerados grandes sábios da época, se encontravam entre os professores.

Os cursos começaram em 20 de janeiro de 1795 (*1^er^ pluviôse*) e, por diversas dificuldades, duraram apenas quatro meses, fechando definitivamente em maio (*floreal*). O curso de Geometria descritiva de Monge foi ministrado em treze lições e três seções de debates; estes na igreja da *Sorbonne*[17]. As lições eram estenografadas por profissionais vinculados à Escola e publicadas no *Journal des Séances des Ecoles Normales.* O conhecido *Traitée de Géométrie Descriptive, leçons données aux Ecoles normales,* reuniu, em um só volume, as lições dispersas no *Séances;* foi uma iniciativa de Hachette e da esposa de Monge, quando este se encontrava em missão no Egito, em 1799.

As quatro últimas seções não foram publicadas no *Séances* pois o professor não havia concordado com o texto dos estenógrafos. Um ex-aluno de Monge, Brisson

---

14 As vinte e quatro lições do curso de Monge estão relacionadas no anexo A.

15 *décade*: divisão do calendário revolucionário francês, correspondente a dez dias; cada mês compreendia três *décades.*

16 Não há concordância entre os historiadores a respeito deste número; uns apontam para 1200, outros dizem 1400.

17 A igreja da Sorbonne, erguida por Richelier no século XVII, é o único prédio da antiga Universidade que não foi demolido.

(1777-1828), recebeu da viúva do professor, os textos dos estenógrafos: (1) – determinação geométrica das sombras; (2) – apreciação da gradação (nuança), ou perspectiva aérea; (3) – perspectiva linear; (4) – reflexões gerais sobre as vantagens da introdução da Geometria descritiva na Instrução pública. As três primeiras lições foram revistas e publicadas, por Brisson, com acréscimos. Trata-se da quarta edição do *Traitée de Géométrie Descriptive,* de 1820. A última delas foi abandonada por Brisson, e parece ter se perdido definitivamente (LAURENT, 1992).

Em 1795, um artigo da Constituição do país consagrava a criação de um Instituto Nacional. Como parte deste Instituto, foi reconstituída a antiga *Académie des Sciences*, fechada em 1793. Monge foi designado pelas autoridades (além de outros quarenta e sete membros) para escolher mais oitenta e seis nomes, entre sábios, historiadores, filósofos, eruditos e artistas, que iriam compor as três academias da instituição. Participou, também, de uma comissão que foi à Itália para recolher as obras de arte que as cidades deveriam entregar à França; de Roma, seguiu para o *château de Passeriano*, perto de Udine, onde conheceu o General Bonaparte. Monge despertou admiração e confiança no general, tendo sido por ele incumbido, juntamente com o General Berthier, de levar o texto de paz de Campo-Formio para Paris. Monge manteve-se fiel a Bonaparte até o final de seus dias.

Bonaparte determinou a formação de uma comissão científica para explorar os países que fossem conquistados, em que incluía os nomes de Berthollet e Monge. Dessa forma, os cientistas participaram da expedição ao Egito, que resultou na criação, em agosto de 1798, de um Instituto de Ciências e Artes no Cairo. Monge foi presidente deste Instituto, que contava, ainda, com grandes nomes como Fourier (1768-1830), Malus, Dolomieu, Descostils, Savigny, Dellile, entre outros. Taton (1951) conta que Monge escreveu, nesta época, uma memória de geometria infinitesimal e um estudo de ótica sobre as causas da miragem. Este estudo constata a característica de Gaspard Monge em manter-se envolvido com a produção científica, mesmo em viagens missionárias, e, ainda, salienta que tinha espírito predisposto às pesquisas em áreas diversificadas e contextualizadas.

Em 1799, tomou parte de uma fracassada expedição à Síria. Deixou o Egito, de retorno à França, em companhia de Bonaparte e Berthollet, em uma viagem cujo verdadeiro destino foi mantido em sigilo até o último momento. Segundo Arago (1848), os demais membros do Instituto do Cairo pensavam que Monge se dirigia à foz do Nilo, em uma viagem de curta duração. Ficaram surpresos, no entanto, com sua decisão em doar todos os seus livros e manuscritos à biblioteca da Instituição.

Monge se manteve entre os amigos íntimos de Bonaparte e foi nomeado senador em 1799. Permaneceu envolvido em funções oficiais e administrativas, sem ter tido muito tempo livre para fazer pesquisas pessoais e ministrar cursos. Com a derrota de Napoleão e a imposição de um novo rei ao poder, foi, juntamente com Carnot (1753-1823) e Guyton de Morveau, destituído de seu cargo na *Académie des Sciences*. Nos cem dias de retorno de Napoleão, Monge continuou ao seu lado. A derrubada definitiva do General levou à dissolução do Instituto e sua reconstituição com novos acadêmicos escolhidos pelas autoridades. Monge teve de se esconder por alguns meses.

De volta a Paris, em 1816, sentiu-se profundamente deprimido diante das novas bases sob as quais a *Ecole Polytechnique* tinha sido reorganizada. Monge morreu em julho de 1818, sofrendo das faculdades mentais.

Arago (1848) lamenta o fato de as autoridades francesas não terem prestado nenhuma homenagem oficial a Monge e apresenta dados que deixam claro a consideração que sua figura despertou no meio acadêmico. Conta, ainda, que seus amigos Berthollet, Laplace, Chaptal (1756-1832), e diversos oficiais e engenheiros, antigos alunos, assistiram às exéquias. Berthollet proferiu um discurso ressaltando seus méritos como acadêmico, professor e pelos serviços prestados ao país. Acrescenta que os alunos da *Ecole Polytechnique* não obtiveram autorização para acompanhar a cerimônia, mas, aproveitaram o primeiro dia de folga para visitar seu túmulo[18]. Monge foi também, homenageado, por dois de seus antigos alunos, Guyon e Brisson. Eles escreveram, no mesmo ano de sua morte, duas biografias: *Eloge funèbre de M. Monge* [19], de Guyon e *Notice historique sur Gaspard Monge,* por Brisson. Um regimento de artilharia iniciou a subscrição responsável pelo monumento erguido, em 1819 e, neste mesmo ano, Charles Dupin (que também foi seu aluno) comenta o esquecimento injusto a que o governo relegou o grande sábio depois de 1815, no seu *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge.*

Em uma síntese de Arago (1848), as contribuições acadêmicas de Monge foram : (i) criação de uma forma gráfica de comunicação comum aos construtores, arquitetos,

[18] Segundo Dupin, há um desenho litografado desta cena, de Comte e Chapuis, ex-alunos (DUPIN, 1819, p.167).

[19]GUYON, 1818, *Éloge funèbre de M. Monge, comte de Péluse ..., par um élève de l'École polytechnique précédé d'une notice sur la vie et les ouvrages de cet homme célèbre,* Paris.

mecânicos, carpinteiros, talhadores de pedras, etc.: a “linguagem do engenheiro”; (ii) emprego de novos métodos para encontrar as equações diferenciais de superfícies de geração conhecida; (iii) descoberta de uma das propriedades primordiais dos espaços geométricos: os espaços limitados por superfícies suscetíveis de definição rigorosa; (iv) fundação de uma Escola invejada por outros países do mundo e que prestou enormes serviços tanto às ciências puras quanto às ciências aplicadas.

3 ORIGENS DA GEOMETRIA DESCRITIVA

> *Dans les Arts qui dépendent des Sciences, si l'on ne fait préceder de bons Principes, comme autant de Lumieres qui éclairent l'esprit, on fait rarement du progrès, parce qu'on n'y avance qu'à tâtons ;& de même que l'ennui qui accompagne les ténebres, augmente la fatigue d'une route qu'on parcourt dans l'obscurité, une Etude sans Principes devient pénible & capable de rebuter, lorsque la necessité de s'instruire ne fournit pas de la perséverance* (FREZIER, 1737, t. 1, p.1).

Pensar nas origens da Geometria descritiva conduz ao estudo da evolução da representação gráfica do espaço tridimensional. Portanto, somos levados a considerar, essencialmente, o trabalho de pintores e arquitetos: os primeiros, dedicados a reproduzir o espaço visual com fidelidade; os segundos, preocupados com a exatidão das medidas para a construção.

Os procedimentos do pintor e do arquiteto têm, de uma maneira geral, características de cunho prático, mais ou menos empíricos. No entanto, a necessidade de obter resultados seguros requer a fundamentação teórica encontrada na matemática. Isso demonstra a relação inevitável entre a geometria e as atividades dos profissionais das artes, que é evidente desde a antiguidade. Porém, a dicotomia entre o conhecimento dos artistas e o dos matemáticos tem sido, desde os primórdios da representação gráfica, um enorme empecilho ao seu desenvolvimento.

Através de uma leitura da história do desenho, podemos constatar que as grandes realizações alcançadas nessa área foram, em geral, frutos da união entre a prática e a teoria. Em outras palavras, os autores consagrados, nessa habilidade, se ocupavam das artes e da matemática com o mesmo afinco. Por outro lado, a propagação das novas técnicas adquiridas recai em usuários cujo saber é, em geral, dissociado. Assim, o conhecimento novamente se bifurca na antítese: prática – teoria.

Podemos considerar que a representação do espaço visual atingiu o seu ápice com a perspectiva cônica, elaborada no século XV. Já o desenho das formas tridimensionais com medidas exatas só ficou resolvido a partir da Geometria descritiva, no século XVIII. A Matemática, por sua vez, serviu de fundamento para ambas as representações. No século XIX consolidou-se a Geometria projetiva, criada a partir de reflexões sobre a Perspectiva, o estudo das cônicas e a Geometria descritiva.

Em vista disso, fica claro que o desenvolvimento da Perspectiva e as aquisições da Matemática, especialmente aquelas referentes às seções cônicas, foram fundamentais para a criação da Geometria descritiva. Entretanto, por motivos já esclarecidos na introdução desta dissertação (p.17), suas contribuições não serão avaliadas neste trabalho. Optamos por limitar a pesquisa à evolução do traçado feito com objetivos puramente construtivos.

Entendemos que a Geometria descritiva, desenvolvida por Gaspard Monge, teve sua linha condutora nos procedimentos práticos dos engenheiros e arquitetos que tentavam resolver os inúmeros problemas encontrados nas edificações em pedra e madeira. Da mesma forma, a sua inclusão como disciplina escolar se voltou, essencialmente, para os profissionais de áreas técnicas.

3.1 O método de Monge e seus princípios fundamentais

O procedimento da Geometria descritiva de Monge, de uma forma resumida, consiste em associar duas projeções de uma mesma figura para conhecer, a partir daí, tudo o que diz respeito à sua forma e posição. O método é bastante simples: cada ponto é representado por suas projeções ortogonais em dois planos perpendiculares entre si; em seguida, um plano é rebatido sobre o outro, girando em torno da interseção entre eles, de maneira que as duas projeções fiquem em um mesmo plano. Na figura 2 fizemos uma seqüência de desenhos para ilustrar o método: (a) um ponto é projetado sobre dois planos; (b) um dos planos é rebatido sobre o outro; (c) como resultado dos procedimentos anteriores, as duas projeções do ponto encontram-se representadas em um único plano: é a épura descritiva.

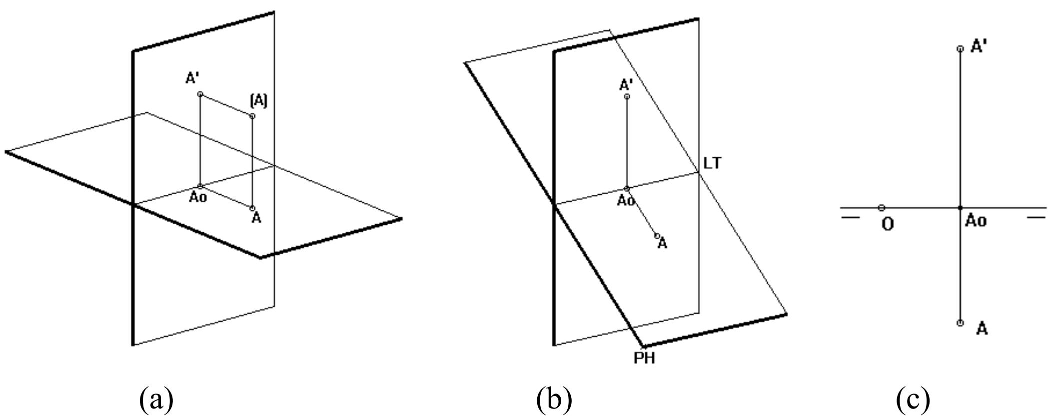


Figura 2: Ilustração do método de Monge.

Na proposta de Monge, o ponto do espaço fica “perfeitamente determinado”, a partir das suas duas projeções, em dois planos de posições conhecidas; ou seja, levantando-se uma perpendicular a cada plano, pela respectiva projeção, a interseção dessas retas (perpendiculares) é o ponto do espaço.

> *... si l'on a deux plans connus de position dans l'espace, et si l'on donne, sur chacun de ces plans, la projection du point dont on veut définir la position, ce point sera parfaitement déterminé.*
> *En effet, si par la projection sur le premier plan on conçoit une perpendiculaire à ce plan, il est évident qu'elle passera par le point défini ; de même si, par sa projection sur le second plan, on conçoit une perpendiculaire sur ce plan, elle passera de même par le point défini : donc ce point sera en même temps sur deux lignes droites connues de position dans l'espace ; donc il sera le point unique de leur intersection ; donc enfin il sera parfaitement déterminé* (MONGE, 1799, p.11).

Se nos reportarmos aos desenhos anteriores à geometria mongeana, veremos que os princípios que sustentam o processo não foram criações do autor. Para ilustrar essa idéia, vamos nos ater a dois princípios essenciais do método: a projeção ortogonal e a determinação de um ponto no espaço através da relação entre duas projeções.

A noção de projeção ortogonal é simples, intuitiva e tem origem bastante remota. Esse recurso era utilizado por arquitetos e mestres de obra anteriores a Monge. Já no primeiro século da era cristã, encontramos um tratado de arquitetura em que a projeção ortogonal é empregada. No capítulo dedicado aos princípios fundamentais para um arquiteto, Vitrúvio[1] se refere à "iconografia", à "ortografia" e à "cenografia" como formas de expressão da Arquitetura. Essas são, respectivamente, as projeções ortogonais sobre um plano horizontal (planta baixa), sobre um plano vertical (elevação ou fachada), e a perspectiva.

A perspectiva tem importância fundamental para o construtor, pois mostra como a obra arquitetônica deve ser vista. Os desenhos em projeção ortogonal, por sua vez, proporcionam ao arquiteto a possibilidade de organizar a distribuição dos espaços internos e a fachada da construção, de modo racional. Vitrúvio, inclusive, defende o conhecimento geométrico para a demarcação da planta baixa (utilizando a régua e o compasso) e a concepção da fachada, que, segundo ele, deve ser apoiada nos princípios de proporção e de simetria.

No intuito de resolver problemas específicos da edificação, os arquitetos antigos faziam uso de diversos outros desenhos em projeção. Estes eram, geralmente, dissociados uns dos outros. Em alguns tratados anteriores a Monge, no entanto, aparece a relação entre duas ou mais projeções, no mesmo posicionamento do método

[1] A biografia de Vitrúvio não é muito conhecida. Sabe-se que serviu no exército romano de Julio César e que seu tratado é considerado "o primeiro a conter todo o campo da Arquitetura de forma sistemática" (KRUFT, 1994, p. 21, tradução nossa).

mongeano. Não há, porém, qualquer sistematização do procedimento. Temos um exemplo no tratado de Philibert Delorme, que será visto mais adiante.

A associação explícita entre as projeções, no entanto, aparece na Geometria teórica. Descartes (1596-1650) apresenta a idéia de estudar uma curva reversa (não plana) a partir de duas projeções ortogonais. Conforme seu processo, os planos, nos quais são feitas as projeções, são perpendiculares entre si. Cada um dos pontos da curva reversa fica totalmente determinado, fazendo-se uma relação entre suas duas projeções, através da linha de interseção desses planos. A idéia se encontra no final do segundo livro, da obra *La Géométrie,* que trata das linhas curvas. Um único parágrafo se refere à curva no espaço, e não há qualquer desenho ilustrativo. Convém, também, observar que, após a determinação dos pontos da figura, Descartes levanta a questão de representar a tangente por um ponto da curva. O problema é resolvido com a intervenção de planos. Estes planos contêm a tangente e são perpendiculares aos planos em que foram feitas as projeções. Ou seja, na terminologia atual, são os planos projetantes, fundamentais na Geometria descritiva[2].

Reproduzimos o texto a que nos referimos e acrescentamos uma ilustração gráfica da idéia, através de dois desenhos: uma perspectiva (à esquerda) e a épura descritiva (à direita). O propósito de Descartes é esclarecer que a curva espacial é perfeitamente conhecida por suas projeções.

> ***Comment on peut appliquer ce qui a été dit ici des lignes courbes, décrites sur une superficie plate, à celles qui se décrivent dans un espace qui a trois dimensions.***
> *Au reste je n'ai parlé en tout ceci que des lignes courbes qu'on peut décrire sur une superficie plate ; mais il est aisé de rapporter ce qui j'en ai dit à toutes celles qu'on sauroit imaginer être formées par le mouvement régulier des points de quelque corps dans un espace qui a trois dimensions : à savoir, en tirant deux perpendiculaires de chacun des points de la ligne courbe qu'on veut considérer, sur deux plans qui s'entre-coupent à angles droits, l'un sur l'une et l'autre sur l'autre ; car les extrémités des ces perpendiculaires décrivent deux autres lignes courbes, une sur chacun de ces plans, desquelles on peut en la façon ci-dessus expliquée déterminer tout les points et les rapporter à ceux de la ligne droite qui est commune à ces deux plans, au moyen de quoi ce de la courbe qui a trois dimensions sont entièrement déterminés. Même si on veut tirer une ligne droite qui coupe cette courbe au point donné à angles droits, il faut seulement tirer deux autres lignes droites dans les deux plans, une en chacun, qui coupent à angles droits les deux lignes courbes qui y sont aux deux points où tombent les perpendiculaires qui viennent de ce point donné ; car ayant élevé deux autres plans, un sur chacune de ces*

[2] Monge faz uso constante desses planos para resolver problemas. Alguns exemplos serão vistos na seção 5.

> *lignes droites, qui coupe à angles droits le plan où elle est, on aura l'intersection de ces deux plans pour la ligne droite cherchée. Et ainsi je pense n'avoir rien omis des éléments qui sont nécessaires pour la connoissance des lignes courbes* (DESCARTES, 1664, p.64).

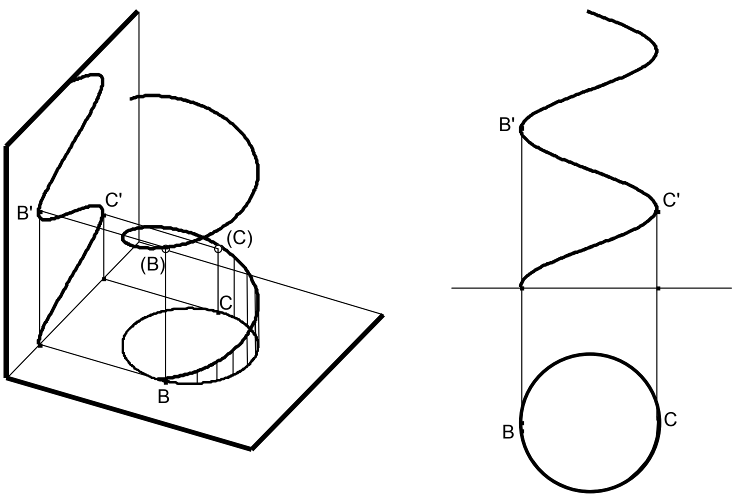


Figura 3: Interpretação gráfica da idéia de Descartes.

3.2 Origem em diversas artes

A Geometria descritiva foi desenvolvida por Gaspard Monge, no período de 1766 a 1784, enquanto lecionava na *Ecole du génie,* em Mézières. No entanto, só foi publicada em 1799, a partir de suas aulas ministradas na *Ecole Normale*, em 1795. A grande glória desta ciência está no fato de ter reunido as técnicas e os procedimentos diversos das atividades praticadas por artistas e geômetras, em um método rigoroso de representação. Ou, em outras palavras, de ter unificado as práticas usuais de desenho e interpretação de situações do espaço tridimensional sobre uma superfície plana, independente de qualquer aplicação específica. Nas palavras de Hachette:

> *Ces considérations générales sur l'étendu aux trois dimensions amenèrent bientôt la comparaison et la rapprochement des méthodes graphiques, que l'on avait jusqu'alors regardées comme très-distinctes, parce qu'on les appliquait de diverses manières à des arts différens, tels que la fortification, le tracé des routes et de canaux, l'appareil des ouvrages en pierres et en bois* (HACHETTE, 1828, préface, p.viii).

3.2.1 A arte de Fortificação

Dentre as diferentes artes mencionadas por Hachette, encontram-se as de Fortificação. Nesta, estão inclusos os problemas de desfilamento, que consistiam em determinar a altura dos muros de uma obra, de maneira a garantir a defesa da construção, frente ao ataque inimigo. Ou, o processo inverso, que seria localizar os limites do espaço, totalmente protegido pelos muros, onde poderia ser construída a fortificação. Tais problemas eram resolvidos na escola de Mézières e suscitavam cálculos intermináveis. As pesquisas por uma solução, que simplificasse o processo, deram o impulso inicial para a abstração, a geometrização das questões práticas e sua conseqüente generalização.

Bruno Belhoste (1992) conta que os métodos, utilizados até a metade do século XVIII, eram os de Vauban e de Cormontaigne. Os procedimentos, de cunho empírico, exigiam que o engenheiro se deslocasse, sobre o terreno, munido de tábuas e varas. O espaço protegido dos tiros era estabelecido através de sucessivas tentativas.

As técnicas de construção sobre um mapa foram desenvolvidas na escola de Mézières, permitindo, ao engenheiro, permanecer em seu gabinete. Assim, as tábuas foram substituídas por planos; e as varas, por retas. Chatillon redigiu um curso para seus alunos, em que utilizou a idéia das "curvas de nível", de P. Buache. Acrescentou, a estas, as projeções dos pontos de maiores cotas e seus respectivos valores (método do plano cotado). No entanto, só tratou do caso mais simples, em terreno horizontal. Du Vignau completou o trabalho de Chatillon, acrescentando os procedimentos para terrenos acidentados. Em 1768, Du Buat criou uma escala de declive[3], aperfeiçoando o método vigente.

Com Monge, no entanto, o problema passou a ser visto de maneira diferente. Ao invés de considerar diversos planos independentes, tangentes à superfície do terreno, Monge imagina uma superfície cônica, envelope destes planos. Desta forma, o problema passa a ser o de determinar os planos tangentes a uma superfície curva. Tal mudança caracteriza um tratamento teórico e generalizado a uma questão, até então, resolvida de forma empírica e particular.

Hachette sugere que os problemas do desfilamento "levaram a descobrir os verdadeiros elementos da geometria descritiva" (HACHETTE, 1828, p.vi, tradução nossa). O primeiro a utilizar a Geometria descritiva de Monge, no ensino de Fortificação, foi Horace Say, na *Ecole Polytechnique*.

> *En parlant du défilement, on est obligé pour se faire entendre d'employer des figures, de réduire à des opérations graphiques les opérations qui sur le terrain doivent se faire sans règles, sans compas, mais seulement avec des alignemens et quelques perches. Ainsi l'apparence de complication que la construction des figures peut*

---

[3] Construir uma escala de declive de um plano inclinado é projetar sobre o mapa uma linha de maior declive do plano, dividir esta projeção em segmentos iguais e cotar cada ponto da divisão.

> *donner au défilement, disparaît lorsqu'on exécute ce qu'elles ne font qu'indiquer. Je suppose néanmoins, qu'outre les principes de la fortification, l'on connaisse ceux de la géométrie descriptive.* (SAY, 1796, p. 588).

Say considera os seguintes elementos do desfilamento: (i) o espaço de onde podem partir os tiros do inimigo (espaço exterior); (ii) o espaço que deve ser preservado dos tiros do inimigo (espaço interior); (iii) a massa dos parapeitos, que deverá interceptar os tiros do inimigo. Compreende ainda, por tiros diretos, aqueles que descrevem uma linha reta, como os tiros de fuzis ou de canhões. Em seguida, faz uma analogia entre os problemas do desfilamento e os da sombra; desta forma, os tiros diretos são como os raios luminosos, o espaço exterior substitui os corpos luminosos, a massa dos parapeitos é considerada como os corpos opacos, e o espaço interior é aquele delimitado pelas sombras (própria e projetada) do corpo opaco.

3.2.2 A Arte da Estereotomia

Outra arte, a Estereotomia ou Ciência do Corte de Figuras Espaciais, também teve papel fundamental na elaboração do método de Monge. Essa técnica consiste em dar, separadamente, a forma de cada elemento que deverá compor a construção.

Frézier (1737, p. xij), autor de um tratado de Estereotomia que será analisado mais adiante, conjectura que a origem ("ou, pelo menos, a adolescência") da Arte do Corte de Pedras é devida à Arquitetura Gótica, pela complexidade das construções. Segundo o autor, não restaram monumentos antigos, nem tratados, que provassem o contrário. Na sua opinião, os antigos usavam pedras enormes (que cobriam todo o vão, não sendo necessário fazer encaixes), e suas abóbadas eram esféricas ou cilíndricas; portanto, não ofereciam grandes dificuldades para serem construídas. Taton (1951) também reconhece a dificuldade de execução das obras da Idade Média e lamenta a pouca informação encontrada sobre a codificação das regras do corte de pedras, da época. Declara, também, que o álbum de Villard de Honnecourt[4] possui diversas figuras detalhadas que, no entanto, mostram muito pouco dos métodos gráficos propriamente ditos.

Ainda em relação à obscuridade do conhecimento dos talhadores de pedras, do mesmo período, Sakarovitch diz que esse era mantido em segredo pela corporação, em cujos estatutos constava o seguinte: *"nul ouvrier, nul maître, nul parlier, nul journalier, n'enseignera à quiconque n'est pas de notre métier et n'a jamais fait travail de maçon comment tirer l'élévation du plan"* (SAKAROVITCH, 1992, p.531).

---

[4] *Album de Villard de Honnecourt, architecte du XIIIe siècle* (TATON, 1951, p.55).

3.2.2.1 O tratado de Philibert Delorme

O tratado de Philibert Delorme, *Le premier tome de l'Architecture,* é citado por diversos autores como o primeiro que recorre ao raciocínio geométrico, para justificar as regras da Estereotomia e do Desenho de Arquitetura. Segundo Trevisan (2000), a obra foi publicada pela primeira vez em Paris, no ano de 1567, com nove livros, e reimpressa diversas vezes. A partir de 1576 as edições passaram a vir acrescidas de mais dois livros - *Nouvelles inventions pour bien bastir et à petits fraiz* - escritos em 1561.

Delorme apresenta soluções geométricas gráficas para os problemas práticos, encontrados nas construções. O tratado contém uma seqüência de procedimentos que podem ser aplicados diretamente na obra, com as respectivas descrições e ilustrações. Como bem assinalado por Deforge, Delorme apresenta um método particular, "que corresponde efetivamente às necessidades do aparelhador, que traça em escala (verdadeira grandeza)[5], no solo, com o compasso e a régua..." (DEFORGE, 1995, p.51, tradução nossa). Os desenhos que ilustram o tratado são de tipos variados de projeções.

Na figura 4, por exemplo, o autor faz uso da perspectiva, para mostrar como as pequenas peças (assinaladas pela letra F), que formam os arcos de sustentação da cobertura, deverão ser colocadas sobre as paredes de apoio.

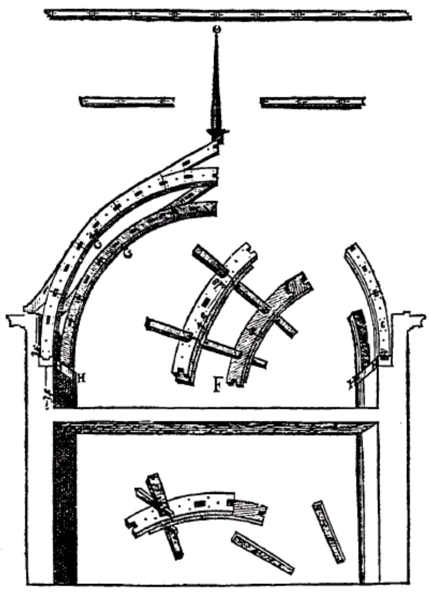


Figura 4: Assentamento das peças (DELORME, 1561, p.8)

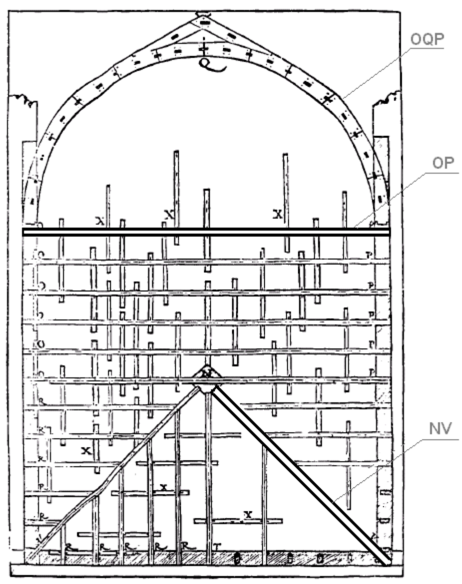


Figura 5: Distribuição dos arcos (DELORME, 1561, p.11)

[5] Trevisan distingue o desenho feito em escala real (1 :1) daquele preparatório, em escala reduzida, executado em uma prancha. Diz que o primeiro era chamado de épura, e o segundo, de traçado (ou trato). Monge vai utilizar o termo épura para a representação pelo seu método.

Um outro desenho (figura 5) ilustra a maneira como o autor utiliza as projeções ortogonais sobre um plano vertical e outro horizontal (na mesma disposição empregada posteriormente por Monge) para mostrar a distribuição dos arcos sobre as paredes. Nesse, o semicírculo **OQP** representa o arco em projeção vertical e, abaixo deste, a partir da primeira linha **OP**, estão os arcos projetados sobre o plano horizontal; as linhas **NV**, que aparecem inclinadas, são as projeções horizontais dos "*cherches r'alongees*"[6]. Na figura 5, reforçamos as linhas **OP** e **NV** e fizemos a indicação destas e do arco **OQP**, para dar clareza à explicação.

Na determinação dos "círculos alongados" (figura 6), Delorme emprega um processo que, na Geometria descritiva atual, corresponde aos "métodos descritivos". A construção dos círculos alongados é orientada passo a passo.

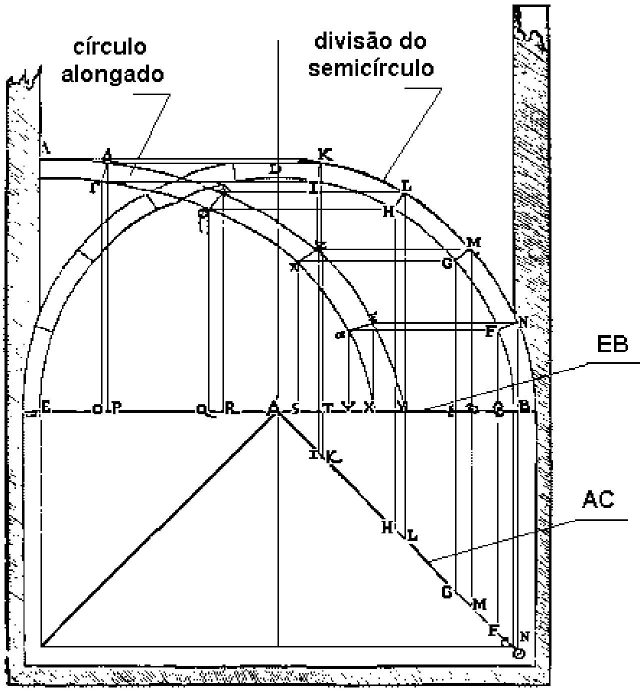


Figura 6: Determinação dos "círculos alongados".
(DELORME, 1561, p.13)

Primeiramente, sugere a divisão do semicírculo em partes iguais (nove no exemplo). Em seguida, projeta ortogonalmente essas partes (**IK, HL, GM, FN**) na linha **AC**, que corresponde à projeção da curva procurada sobre o plano horizontal. As medidas determinadas sobre **AC** são transportadas para o diâmetro **EB.** Assim, os pontos **O, P, Q, R, S, T, V, X** são determinados, respectivamente, pelo transporte das

6 cherches – segundo Frézier, a palavra provém do italiano *cerchio* (círculo) ; *ralongée – se dit d'une ligne courbe à laquelle on donne plus d'extension sur un diametre ou une corde qu'elle n'en avoit, sans changer sa profondeur* (FREZIER, 1737, p. 405). O círculo alongado é um arco de elipse. Delorme, no entanto, não faz nenhuma menção à cônica.

medidas **AI, AK, AH, ...** em **EO, EP, EQ,...**. As alturas de cada uma das nove peças são transferidas à curva procurada, através de paralelas horizontais, tiradas de cada um dos pontos das divisões do arco. A curva fica, então, definida pelos pontos de encontro entre as verticais levantadas, a partir das marcações feitas sobre o diâmetro **EB** (**O, P, Q, R, S, T, V, X**) e as horizontais, traçadas dos vértices das respectivas peças (**I, K, H, L, G, M, F, N**). Nessa figura, fizemos as indicações do círculo alongado, da divisão do círculo e das linhas **AC** e **EB**. Interferimos, também, em algumas letras que não estavam nítidas.

É interessante observar que o autor mostra, logo a seguir, uma outra solução gráfica para o mesmo problema (figura 7). Neste procedimento, o semidiâmetro **AB** é dividido em um número qualquer de partes iguais (no caso, oito), e são levantadas as perpendiculares até a curva. A linha **AL** (projeção horizontal do círculo alongado) também é dividida no mesmo número de partes iguais. Pelos pontos da divisão, são traçadas perpendiculares, para as quais são transferidas as medidas das alturas, determinadas no semicírculo (**D, E, F, G, H, I, K**).

A idéia que está por trás desses processos é a mesma: encontrar um número razoável de pontos do arco procurado, através da determinação de suas coordenadas horizontal e vertical. Ambos procedimentos podem ser aplicados em escala natural, diretamente na construção, utilizando o fio de prumo, esquadros e outros instrumentos comuns aos canteiros de obra.

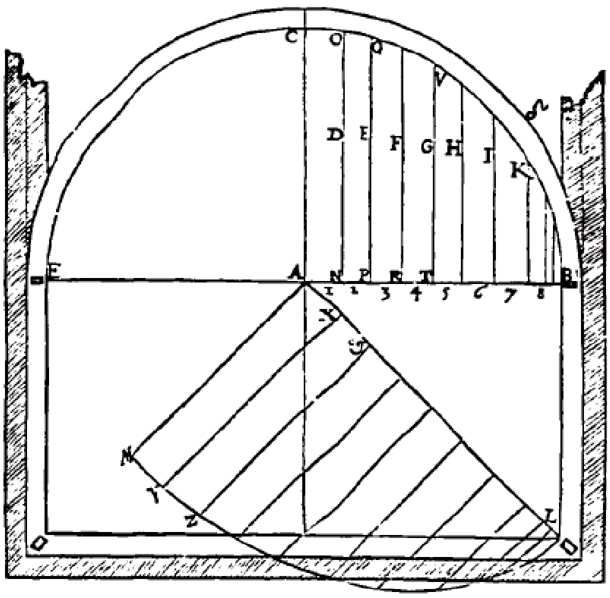


Figura 7: Outra maneira de determinar os “círculos alongados”.
(DELORME, 1561, p.14)

Chama a atenção o título do livro: "Novas invenções para construir bem, a baixo custo"(tradução nossa). Nele fica clara a intenção do autor ao dizer, no prefácio, que pretende apresentar sua invenção para que a madeira e a pedra, empregadas nas construções, possam ser economizadas, pois estavam se tornando cada vez mais escassas na França. Isso indica que a racionalização dos procedimentos utilizados nas construções começou a se fazer necessária, para evitar os desperdícios resultantes dos cortes mal feitos. O tratado de Delorme se distinguiu das demais obras francesas de Arquitetura por se preocupar com a teoria, enquanto as outras se ocupavam, essencialmente, de padrões e Ordens Arquitetônicas. Há, inclusive, uma reimpressão de *Le premier tome de l'Architecture*, que data de 1648.

3.2.2.2 O livro de Girard Desargues

Desargues, que era geômetra e arquiteto, tinha grande interesse pelas questões da geometria pura e de suas aplicações às técnicas gráficas. Sua obra mais conhecida, o *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan,* trata das seções cônicas e é considerada a precursora da Geometria projetiva. Escreveu, também, sobre a perspectiva, o corte de pedras e o relógio de sol. A produção científica desse autor, no entanto, não teve o merecido reconhecimento em sua época. Segundo a análise de Poncelet, a casta dos geômetras contemporâneos de Desargues não "estava à altura de suas idéias" (PONCELET, 1865, p. xxvi, tradução nossa)[7].

A característica dos estudos de Desargues é a apresentação de um método geral, baseado em princípios teóricos. Por sua excepcional capacidade em generalizar, o autor produzia estudos concisos, que exigiam um grande esforço mental dos leitores. Este motivo, certamente, contribuía para que seus trabalhos não fossem bem aceitos pela maior parte dos interessados.

Assim é o *Brouillon project d'exemple d'une manière universelle du S. G. D. L. touchant la practique du trait à preuves en l'architecture*[8], pequeno livro sobre o corte de pedras, publicado em 1640, quase um século depois do tratado de Delorme.

O método para o corte de pedras é exposto a partir de um caso geral de construção de um tipo de abóbada, a abóbada de berço[9]. Bem a seu estilo, Desargues declara: "... *on en conclura facilement les cas particuliers ; de plus la méthode exposée pour ce genre*

[7] Cabe aqui uma ressalva de que Descartes e Fermat, em cartas a Mersenne, elogiaram o trabalho do geômetra.
[8] As iniciais: S.G.D.L. se referem a Sieur Girard Desargues Lyonnais.
[9] A abóbada de berço é obtida através de seções em um cilindro.

de voûte, conduira à celle nécessaire dans tout autre genre de construction" (DESARGUES, 1640, apud POUDRA, 1864, v.1, p.363).

A concepção espacial da idéia é a seguinte: Desargues estabelece cinco planos em posições especiais em relação à abóbada. Em seguida seleciona algumas retas principais, que se relacionam com esses planos e determinam ângulos, que na concepção do autor, são fundamentais para a construção da abóbada. Tais retas são projetadas em um único plano (*plan de face*) e o conhecimento dos ângulos é obtido através de procedimentos efetuados nesse plano (os procedimentos são semelhantes aos métodos descritivos atuais).

A publicação de Poudra (1864) traz um desenho que, segundo o autor, foi reproduzido a partir do texto de Desargues e da obra de Bosse (1602-1676)[10] (figura 8). Os planos notáveis podem ser observados na figura em perspectiva: (i) *plan horizontal* ou *de niveau*. Este é o plano do solo, determinado pelos pontos **CDR,** e está à frente da porta; (ii) *plan de la face du mur*, que forma o vão de entrada; (iii) *plan du chemin*, que é um plano em rampa, depois da entrada (**CDGE**); (iv) *plan de route,* um plano vertical, paralelo às faces internas da entrada, que contém as verticais traçadas pelos vértices **K** e **Z** da abóbada de cobertura; (v) *plan droit aux face et niveau,* que é um plano auxiliar, perpendicular aos dois primeiros planos (*niveau* e *face du mur*).

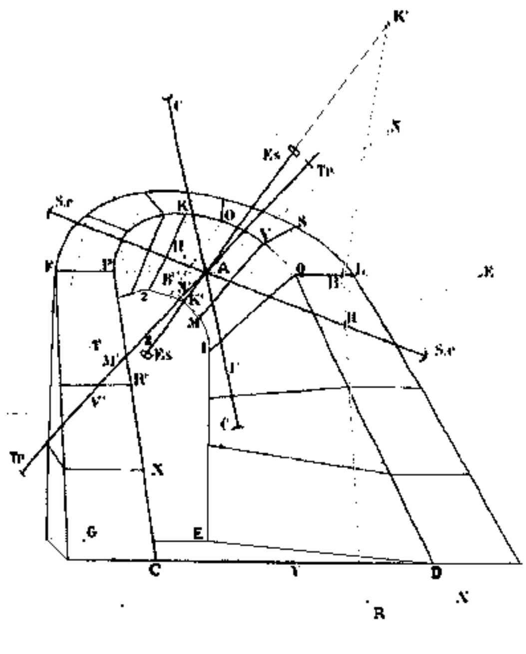


Figura 8: Ilustração da idéia de Desargues.

[10] Abraham Bosse era gravador e publicou *La pratique du trait à preuves de M. Desargues Lyonnois, pour la coupe des pierres em l´architecture.* Paris, 1613. Segundo Taton (1951a), os originais de Desargues eram extremamente raros e o trabalho de Bosse contribuiu para a divulgação da obra do mestre.

A figura mostra, ainda, as retas principais; todas elas passam pelo ponto **A**, que corresponde ao centro do arco. Após apresentar o método, o autor resolve quatro problemas. Ao contrário de Delorme, Desargues remete o leitor, constantemente, à situação espacial. A solução de cada problema é um exercício mental entre a realidade tridimensional e sua representação plana. Não é difícil entender que os construtores da época, habituados a seguirem procedimentos específicos para cada tipo de abóbada, não se tenham interessado em desenvolver seus próprios procedimentos, segundo um método geral.

3.2.2.3 Outros tratados de Estereotomia

Após 1640, surgiram outros tratados que, apesar de mais completos, seguiam a linha de ‘receitas’ de Delorme em detrimento da generalização proposta por Desargues. Leroy (1786-1854) compara essas obras à maneira como os antigos construtores e carpinteiros determinavam a forma das peças de encaixe: de maneira instintiva e de procedimentos particulares a cada questão:

> *... Aussi les premiers auteurs qui ont décrit ces procédés se bornent-ils à indiquer, et d’une manière très-fastidieuse, la série d’opérations graphiques à effectuer sur l’épure, sans soulager la mémoire ni guider l’esprit par quelques considérations géométriques qui aideraient à traiter d’autre cas analogues, quoique un peu différents* (LEROY, 1845, p.vj).

Entre os autores aos quais Leroy se refere, está Mathurin Jousse, que publicou *Le Secret d’architecture découvrant fidèlement les traits géométriques, couppes et dérobemens nécessaires dans les bastimens...*, em 1642[11]. Taton reproduz parte do prefácio do livro e comenta que, apesar do título e do prefácio do seu tratado indicarem que o autor pretende dar uma abordagem matemática ao assunto, Jousse apresenta as pranchas ao lado de explicações muito mais técnicas e empíricas do que geométricas:

> *Il y a beaucoup de superbes Edifices qui ont très mal réüssi, pour avoir esté faits par des personnes qui ne sçavoient point les traits Geometriques necessaires à la couppe des pierres. Combien en a-t-on veu, & voit t’on tous les jours de grands et riches Bastimens aller en ruine, & se perdre entièrement pour les mauvais assemblages des parties, pour les mauvais rappors des pierres les uns aux autres, pour n’avoir sçeu tailler et aprester les pierres comme il falloit ? Vous m’advoürez donc, qu’en fait d’Architecture, il est necessaire de sçavoir ce qui concerne la couppe de pierres & les traits Geometriques qui en donnent la reigle, puis que de l’ignorance de ce point procède la perte des Édifices, et de l’honneur des Architectes* (JOUSSE, apud TATON, 1951, p.55).

[11] O tratado de Jousse foi revisto por La Hire, em 1702.

No ano seguinte ao tratado de Jousse, François Derand publicou *Architecture des voûtes ou l'art des traits et coupe des voûtes*. Segundo Taton (1951), Derand detrata as obras anteriores[12], porém apresenta um tratado bastante incompleto. Taton diz, ainda, que o autor justifica a falta de demonstrações em seu tratado, alegando que, para os que conhecem a geometria, elas serão redundantes; e para os que não a conhecem, serão incompreensíveis. A despeito da crítica feita, Taton exalta o fato desta obra ter sido a primeira a reunir os diversos problemas relativos à técnica do desenho de Arquitetura.

Igualmente voltado para a prática, Jean-Baptiste de La Rue publicou *Le Traité de la Coupe des pierres,* em 1728. Este traz, em especial, ilustrações de representações axonométricas, cuja qualidade da gravação é admirável. Monge, inclusive, as utilizou em suas aulas na escola de Mézières e no curso das aplicações da Geometria descritiva, da *École centrale des travaux publics*.

As obras de Jousse, Derand e de La Rue foram especificamente preparadas para os profissionais da construção. Esses autores tinham consciência das conseqüências desastrosas, que resultavam de uma abordagem informal do tema. Sabiam, além disso, que a fundamentação teórica residia na Geometria. Por esse motivo, cada um deles pretendia (e, até mesmo, acreditava ter conseguido) dar um caráter científico à arte da Estereotomia, estabelecendo uma base geométrica. No entanto, nenhum deles conseguiu alcançar a simplicidade e o rigor do método estabelecido posteriormente por Monge.

Convém mencionar, ainda, que há obras de matemática pura que dedicam alguns capítulos ao corte de pedras. Uma delas é a de Milliet-Dechalles, escrita em 1762. O livro traz um tratado, de *Lapidum Sectione*, que contém demonstrações. Frezier (1737), no entanto, considera esse tratado como uma parte da obra de Derand, e comenta alguns erros cometidos pelo autor.

Outra produção, com a mesma característica, é *Euclides adauctus et methodicus mathematicaque universalis*, elaborada por Guarino Guarini (1624-1683) em 1671. Guarini era arquiteto e matemático. Seus estudos teóricos, voltados para a aplicação, o levaram a produzir uma obra arquitetônica, que foi considerada audaciosa para a época[13]. Giedion chega a assegurar que "o arquiteto de São Lourenço aspirava a exigir da arquitetura mais do que ela estava preparada para dar, naquela época. Nenhum arquiteto posterior teve a audácia de seguir o exemplo, ao qual Guarini havia se proposto nessa igreja." (GIEDION, 1968, p.124, tradução nossa).

[12] Derand faz uma ressalva em relação ao trabalho de Desargues.
[13] Trata-se da Igreja de São Lourenço, em Turin, construída em 1668-87 (GIEDION, 1968).

O livro de Guarini contém trinta e cinco tratados de geometria teórica e aplicada, dos quais, o trigésimo segundo é considerado “um capítulo da nossa geometria descritiva atual” (CHASLES, 1837, p.345). Neste encontram-se projeções planas das linhas resultantes das interseções entre a esfera, o cilindro e o cone, e o desenvolvimento dessas curvas sobre um plano. Loria (1921) acrescenta que o vigésimo sexto tratado contém uma importante proposição sobre a relação entre uma figura e sua projeção ortogonal.

A breve exposição desses tratados nos leva a deduzir que havia a convicção, por um lado, da importância em se tratar, geometricamente, as questões da Estereotomia. Por outro, da necessidade em generalizar o processo e torná-lo acessível aos construtores. Sem dúvida, não era fácil atingir esse objetivo. Era preciso encontrar uma linguagem que tivesse o rigor da matemática e fosse, ao mesmo tempo, de fácil interpretação. Entre as dificuldades existentes, destacamos três: (i) a complexidade da questão; (ii) a dicotomia entre o conhecimento dos artistas e o dos matemáticos; (iii) a resistência dos técnicos e profissionais em relação ao conhecimento puramente teórico. A primeira envolve um conhecimento profundo da Geometria espacial e a representação de objetos tridimensionais em superfícies que têm duas dimensões. Em relação à segunda, é preciso considerar que os livros, escritos por artistas, falhavam nas questões matemáticas; e os dos matemáticos não despertavam o interesse dos práticos. A última dificuldade está bem caracterizada nos discursos de Frézier, que serão discutidos a seguir.

3.2.2.4 O Tratado de Amédée-François Frézier

Após tantas investidas no sentido de estabelecer uma fundamentação matemática para a prática da Estereotomia, surge *La Théorie et la Pratique de la Coupe des Pierres et des Bois pour la constructions des Voutes ou Traité de stéréotomie à l’usage de l’architecture*, de Amédée-François Frézier (1737/39), que veio consagrar a importância dos estudos teóricos de Geometria e Mecânica como bases sólidas da Arquitetura.

Frézier iniciou seu discurso, ressaltando a utilidade da teoria nas Artes relativas à Arquitetura. Como os demais autores, criticou os escritos anteriores, observando que se ocupavam apenas da prática[14].

---

[14] Frezier fala com a autoridade de quem conhece bem as obras anteriores. Sua crítica, no entanto, não se estende ao trabalho de Desargues. Quanto a este, reconhece que o autor reduziu as operações de aparelhar diversas abóbadas, em um único problema. Enfatiza que Desargues percebeu que a diferença entre alguns tipos de abóbadas era a simples mudança de posição, ou de seção, de um corpo sólido.

Os primeiros comentários de Frézier nos dão uma idéia clara das controvérsias vigentes entre teóricos e práticos. Por exemplo, cita a obra de Cartaud, *Pensées critiques sur les mathématiques,* de 1734, em que este diz que os matemáticos não contribuem em nada com as belas Artes. Frézier lamenta a postura dos profissionais que, como Cartaud, consideram a teoria "...uma ocupação vã, cujos objetivos são utópicos e das quais as Artes não tiram nenhum proveito" (FREZIER, 1737, discursos, p. ij , tradução nossa).

Prosseguindo com o ataque aos profissionais, que consideram a prática superior à teoria, Frézier satiriza um conhecido autor em Arquitetura, Daviler. Conta que o arquiteto, em seu *Cours d'Architecture*, apresenta um exemplo para mostrar que as regras de Geometria são inferiores às da prática: Daviler diz que os métodos para a determinação do 'círculo alongado'[15] são melhores que as figuras geométricas. Frézier ridiculariza o arquiteto por este não reconhecer a figura geométrica da elipse nos chamados círculos alongados.

Como justificativa de suas preocupações, Frézier assinala que, durante a execução de uma abóbada, surgem diversas dificuldades imprevistas. Estas são resolvidas por tentativas: demolindo e experimentando, diversas vezes, as partes que não se encaixam. Afirma que, sem a Geometria, a Mecânica e a Hidráulica, as pessoas não são capazes de construir Fortes e Praças de guerra diferentes dos que já foram feitos e copiam, muitas vezes, até as falhas! O autor faz comentários sobre as diversas obras existentes e conclui que "*...il m'a paru qu'il restoit encore quelque chose de mieux à faire*" (FREZIER, 1737, preliminaire, p. xiij). Declara, enfim, que a primeira inovação do seu Tratado será o conhecimento exato da natureza das linhas curvas que se formam nas arestas das abóbadas.

Frézier não deixa dúvidas de que seu livro não pretende ser mais um manual. Esclarece que empregou o termo "corte de pedras" com o significado da ciência do matemático que conduz o artesão à construção de uma abóbada, através do desenho. Salienta que é necessária mais habilidade do que imaginamos, para elaborar o conjunto de pequenas partes que vão compor o corpo de uma certa figura. Isto porque essas pequenas partes, quando juntas, deverão formar uma "superfície regular ou

[15] A definição de círculo alongado encontra-se na página 44 desta seção.

regularmente irregular”[16]. Além disso, elas terão que se sustentar no ar, apoiando-se umas nas outras, pelo próprio peso, sem contar com argamassa ou cimento. Portanto, essa ciência tem seus princípios tanto na Geometria, pelo conhecimento das linhas e superfícies (curvas e retas) e dos corpos sólidos (que deverão ser secionados), quanto na Mecânica e Estática, pelo conhecimento do equilíbrio necessário entre as partes que compõem as abóbadas.

A concepção fundamental de Frézier aparece, quando ele diz que, ao invés de pensar em pedaços de corpos que se relacionam e somam esforços, vai tratar de corpos cônicos, piramidais ou angulosos, secionados por superfícies, ou que se interceptam mutuamente. Essa idéia representa uma mudança essencial na maneira de abordar os problemas de Estereotomia[17]. Isso porque, em lugar de pensar em cada uma das partes que se juntam para formar o todo, ele estabelece o processo inverso. Ou seja, partindo da visualização da forma geral da abóbada, vai determinar cada uma de suas pequenas partes, por intermédio de seções e interseções.

Frézier sintetiza e organiza essa ciência em quatro etapas:

1º Conhecer as linhas curvas, formadas pela seção dos sólidos: *tomomorphie,* ou figura das seções.

2º Descrever as linhas curvas sobre superfícies planas ou curvas: *tomographie* ou descrição das seções.

3º Representar os sólidos e suas seções sobre superfícies planas:

I - por projeção feita pelas linhas paralelas entre si e perpendiculares ao plano de descrição: *iconographie* (sobre um plano horizontal); *ortographie* (sobre um plano vertical);

II – pela descrição das superfícies sobre um plano, dispostas, separadamente, e em toda a sua extensão: desenvolvimento, ou *epipedographie*;

4º Aplicar os modelos de ângulos e de superfícies sobre os sólidos, para os cortar e os reduzir às figuras requisitadas: *tomotechnie* (que é a Arte do Corte de Pedras e de Madeiras propriamente dita).

[16] Frézier classifica de superfícies regulares as da esfera, do cilindro e do cone; as regularmente irregulares são todas as outras, geradas pela revolução de linhas curvas (abertas ou fechadas) em torno de seus eixos, de suas tangentes ou de outras curvas, por exemplo, de uma hélice.

[17] Esta idéia está implícita em Desargues, conforme o próprio Frézier reconhece em análise que faz daquele autor (FREZIER, 1739, t. III, pp. 191-195). No entanto, Desargues não expôs os princípios do seu método da maneira clara, encontrada em Frézier.

Em sua organização da Estereotomia, há uma clara distinção entre teoria e prática, coisa que não acontecia nos tratados anteriores. Nestes, os traçados geométricos eram apresentados em função de alguma construção específica. Essa separação é um marco em sua obra, que está distribuída em duas partes: Ciência e Arte da Estereotomia, cada uma com dois livros. A *tomomorphie,* ou figura de seções (Livro I), e a *tomographie,* ou descrição de seções (Livro II) são parte da Ciência. A *stereographie,* ou descrição dos sólidos (Livro III), e a *tomotechnie,* ou arte de fazer as seções (Livro IV) pertencem à Arte da Estereotomia. O quadro da figura 9 mostra a organização da obra de Frézier: "*La Théorie et la Pratique de la Coupe des Pierres et des Bois pour la construction des Voutes ou Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*."

<table>
<tr><td rowspan="5">CIÊNCIA</td><td rowspan="2">Livro I
tomomorphie</td><td>Primeira parte</td><td>seção plana de sólidos</td><td rowspan="6">TOMO I
(1737)</td></tr>
<tr><td>Segunda parte</td><td>interseção de sólidos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Livro II
tomographie</td><td>Primeira parte</td><td>descrição de figura plana
em superfície plana</td></tr>
<tr><td>Segunda parte</td><td>descrição de figura plana
em superfície curva</td></tr>
<tr><td>Terceira parte</td><td>descrição de figura reversa em
superfície curva ou plana por projeção</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ESTEREOTOMIA</td><td>Livro III
stereographie</td><td></td><td>descrição da divisão dos sólidos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Livro IV
tomotechnie</td><td>Primeira parte</td><td>aplicação nas abóbadas simples</td><td>TOMO II
(1738)</td></tr>
<tr><td>Segunda parte</td><td>aplicação nas abóbadas compostas</td><td>TOMO III
(1739)</td></tr>
</table>

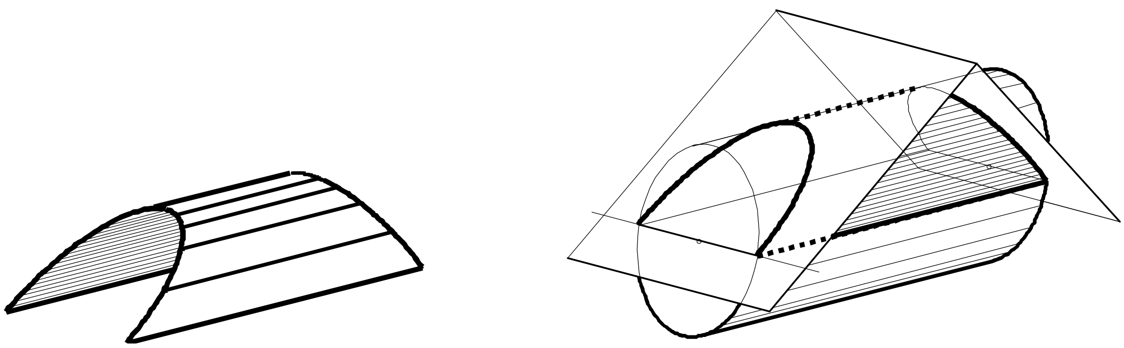
Figura 9: Divisão da obra de Amédée-François Frézier

Devido à parte inicial da obra ser puramente teórica, o autor se esforça, nos discursos preliminares, em conquistar os profissionais aos quais se destina. Tem plena consciência de que são essencialmente práticos e estão habituados a se orientar pelos tratados existentes, medíocres em teoria. Frézier argumenta que, para entender as explicações e as provas por demonstrações, basta conhecer a Geometria Elementar de Euclides. Diz, também, que a coletânea de princípios apresentados é necessária e suficiente para que aqueles mais curiosos possam encontrar as soluções dos problemas que venham a surgir. No entanto, alerta que na última parte acrescentou as construções existentes nas outras obras, para os que "*... aiment les Ouvrages faits, ...* " (FREZIER, 1737, *discours*, p.x).

A questão primordial na obra de Frézier, como já observamos anteriormente, diz respeito à visualização da cobertura como um todo. O autor enfatiza que a dificuldade de leitura dos tratados anteriores é devida à falta de uma noção clara da figura da abóbada e, portanto, essa deve ser entendida como o resultado das interseções e seções planas entre os conhecidos sólidos de revolução (ou seja: a esfera, o cilindro e o cone). Quando os sólidos forem irregulares (diferentes dos três citados anteriormente), deverão ser definidos por uma geração que possibilite a sua concepção[18]. Esta idéia é exemplificada pela revolução de uma elipse em torno de seu eixo maior, que gera o elipsóide.

Em resumo, Frézier insiste ser fundamental conhecer a figura final, que será formada pelos pedaços. Conhecer bem a figura é a melhor maneira de determinar as suas partes. Na opinião do autor, tratar das partes, sem pensar no todo, foi a grande falha do tratado de Derand.

Procuramos fazer uma ilustração da proposta do autor. A abóbada desenhada na figura 10a deverá ser entendida como o corpo que resultou das seções de um semicilindro reto, por dois planos oblíquos ao seu eixo (figura 10b). Uma das vantagens em conceber a abóbada como o resultado de seções e/ou interseções entre sólidos conhecidos é que suas arestas poderão ser determinadas com precisão. No exemplo dado, as linhas são elipses. Ter o conhecimento exato das arestas permite que elas sejam descritas corretamente, sobre as pequenas partes que vão compor a peça final.



(a) (b)

Figura 10: Ilustração gráfica da idéia primordial de Frézier.

[18] Lembramos que uma das idéias, considerada inovadora de Monge, consiste na classificação das superfícies pelo modo de geração (seção 2, p. 25).

Outro benefício, adquirido a partir da concepção do autor, diz respeito à definição dos pequenos blocos que vão compor a edificação. Frézier argumenta que o melhor procedimento para determiná-los é fazê-lo através de uma análise da divisão da abóbada, de maneira que esta não seja destruída. Ou seja, as partes que vão formar o todo não devem ser aleatórias e sim determinadas, segundo seções feitas em direções bem definidas. Para elucidar essa idéia, faz analogia com um exemplo concreto - a metade de um melão - (que classifica como a metade de um esferóide). Nesse, indica cortes longitudinais e transversais, subdividindo o meio melão em pequenas partes. Garante que, se os primeiros pedaços forem impedidos de deslizar, o melão vai se manter intacto apesar das divisões. Assim, se os blocos de pedra forem concebidos de maneira análoga, a estabilidade da construção ficará assegurada. O autor sugere, ainda, outras possíveis seções do melão que não comprometem a estabilidade do todo. Conclui que, para conhecer as partes que compõem a figura final, é necessário recorrer à Geometria.

Completando sua idéia, Frézier declara que "*...la Theorie des Sections est la base de cet Art* " (FREZIER, 1737, livro I, p. 6). Distingue, então, dois tipos de seções: (i) as seções feitas por planos, segundo diferentes inclinações em relação aos eixos e lados; (ii) as geradas pelas interseções de sólidos, de mesma espécie, ou de espécies diferentes. Ressalta que as diversidades entre as abóbadas serão, sempre, em função das diferentes posições dos planos de seção, ou das diversas possibilidades de interseções entre os sólidos. Finalizando seus discursos preliminares, faz a correlação entre os termos da Arquitetura com os da Geometria:

> *Pour nous énoncer en termes convenables à la Theorie, nous considerons le mur comme une surface plane, que nous appellons un* ***Plan,*** *& la voute comme un Cylindre, Cóne ou Sphére, selon qu'il convient à la figure, & au lieu de dire une face Biaise en Talud ou à Plomb, nous dirons qu'un Cylindre est coupé par un plan perpendiculairement ou obliquement, ce changement d'expression signifie toujours la même chose* (FREZIER, 1737, livro I, p. 7).

Os desenhos do tratado estão agrupados em pranchas. A figura 11 mostra a primeira prancha do Livro I. A disposição das figuras, na folha, não segue nenhuma ordenação específica. A intenção principal é obter o maior aproveitamento possível do espaço. O próprio autor reconhece que a diagramação deixa a desejar, embora tenha a vantagem de mostrar determinadas relações: "*La necessité de rassembler plusieurs objets dans une petit Planche rend cet embarras presque inévitable; d'autant plus qu'il a son utilité pour indiquer plus sensiblement leurs rapports*"(ibid, liv. III, p. 271).

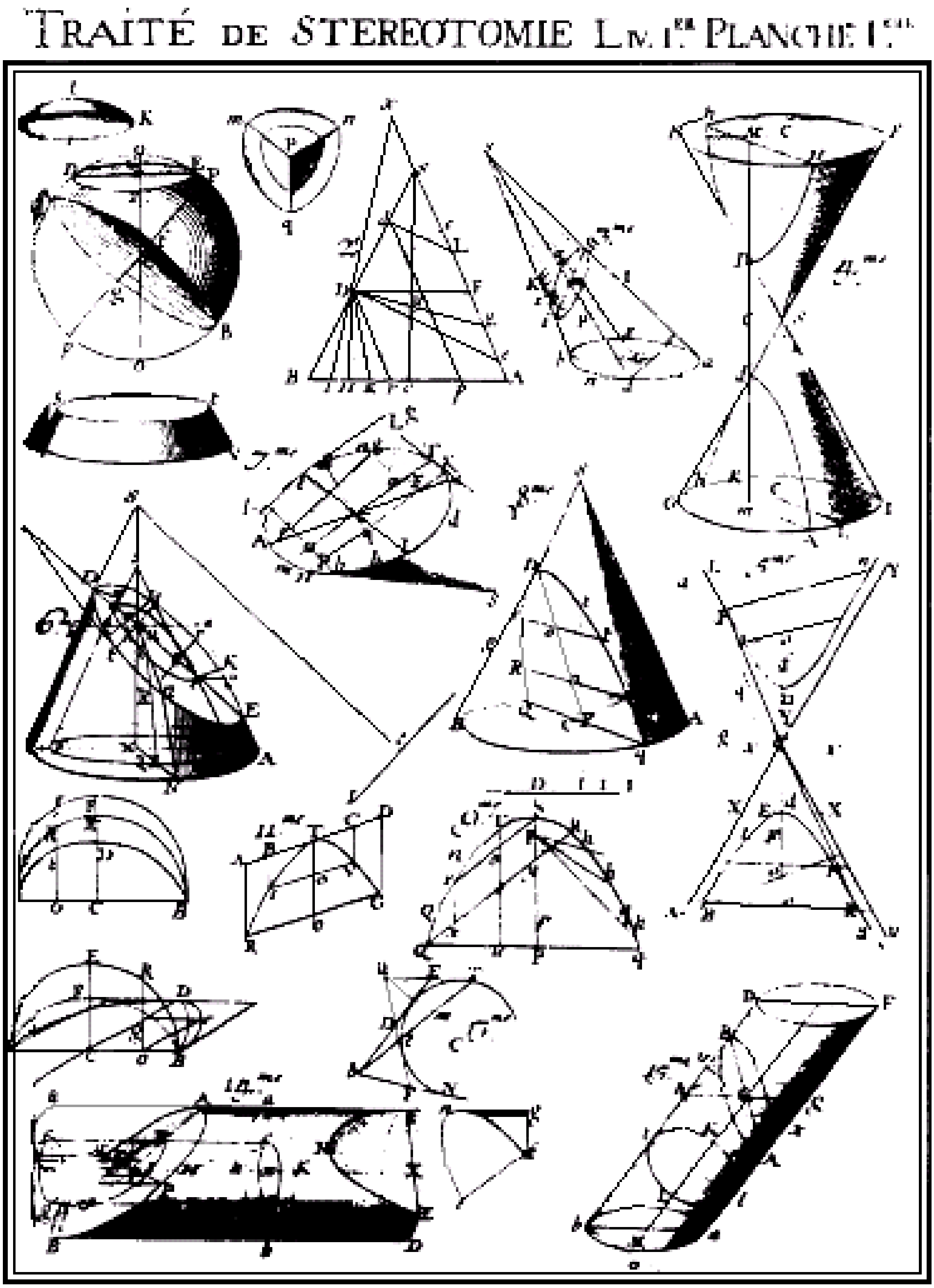


Figura 11: Primeira prancha do tratado de Frézier. (FREZIER, 1737, livro I)

Livro I – Figura das seções *(tomomorphie)*

O Livro I traz uma relação das curvas planas e reversas, que são encontradas nas construções. Tais curvas são resultantes das seções de sólidos por planos, ou das interseções entre os sólidos. O autor inicia com as seções mais simples, ou seja, aquelas determinadas por planos. As interseções de sólidos são tratadas na segunda parte. Os sólidos considerados são: a esfera, o cilindro, o cone e aqueles que o autor chama de regularmente irregulares.

A teoria é ilustrada com desenhos que se alternam em diversos tipos de projeções: as que dão idéia de profundidade e as que ocultam a terceira dimensão. Frézier não estabeleceu nenhum critério rigoroso para a escolha do tipo de representação. Nem tampouco forneceu alguma orientação quanto à elaboração dos desenhos[19]. O autor fez uso da representação que julgou ser mais conveniente para a perfeita compreensão do assunto abordado.

A figura 12, por exemplo, representa a seção de um cone reto por um plano que passa pelo seu vértice. Esse desenho serve de esquema para a indicação das diferentes seções planas em um cone (**DF, DE**, **De**, **dP**, etc.). Frézier vai tratar de cada uma delas separadamente.

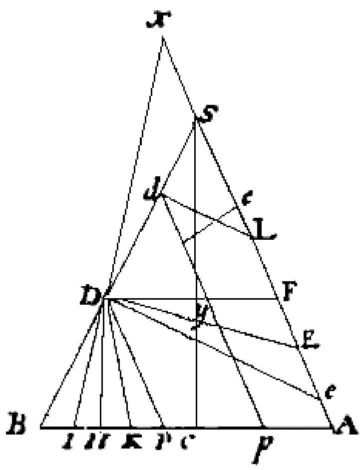
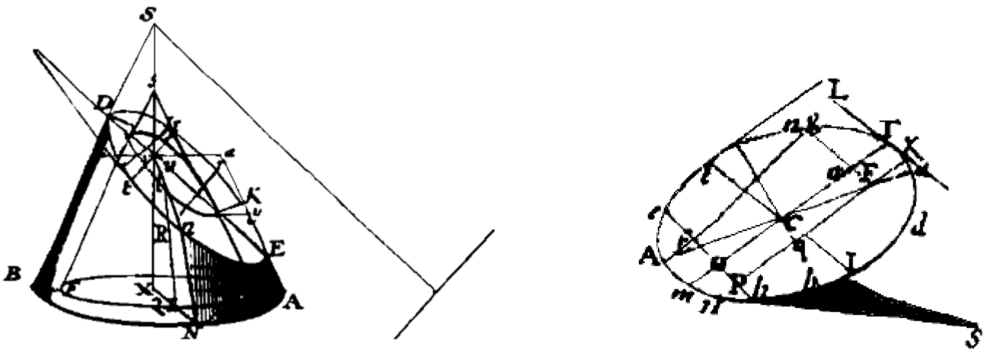


Figura 12: As diversas seções planas de um cone.
(FREZIER, 1737, t. I, liv.I, prancha 1, fig. 2)

A elipse, resultante da seção **DE,** vai aparecer em dois outros desenhos (figura 13). A curva foi destacada, para ilustrar alguns de seus elementos (centro, eixos, tangentes, diâmetros etc) e enumerar suas propriedades. Na figura 13a, encontra-se o tronco do cone com a respectiva seção. Na figura 13b, a elipse foi isolada do sólido,

[19] Uma 'tentativa' de orientar a execução dos desenhos é abordada no Livro III, que será vista mais adiante.

dando maior clareza aos elementos. Essas duas representações estão em perspectiva, "*pour aider à l'imagination, & suppléer à ce qu'on n'a pu exprimer à la Fig. 2 qui sert pour toutes les sections*" (FREZIER, 1737, t. I, livro I, p. 11).



(a) (b)

Figura 13: Perspectivas da elipse e seus respectivos elementos.
(FREZIER, 1737, t. I, livro I, prancha 1, fig. 6-7)

Livro II – Descrição das seções *(tomographie)*

No Livro II, Frézier ensina como transcrever as seções relacionadas no Livro I, em superfícies bidimensionais. O livro se divide em três partes: na primeira, foram descritas, sobre planos, as figuras que são planas; na segunda, mostrou como descrever essas curvas (planas) sobre superfícies côncavas, ou convexas; e na última parte, tratou das curvas reversas, aquelas que só podem ser traçadas em superfícies curvas, ou em superfícies planas, através de projeção.

As curvas planas abordadas foram as cônicas (círculo, elipse, parábola e hipérbole), as curvas usuais em arquitetura (espirais, ovais) e as curvas compostas de arcos de círculos, que 'imitam' as curvas geométricas (falsas elipses, falsas espirais). Estas últimas são aproximações das curvas matemáticas. Uma curva matemática, em geral, não admite construção com o instrumental usual de desenho – a régua e o compasso. Para servir às Artes, essas curvas são convertidas em outras 'parecidas', que podem ser desenhadas com a régua e o compasso. Na figura 14 fizemos a representação de um processo sugerido por Frézier. A figura da esquerda é uma aproximação da elipse desenhada à direita. Os pontos **S**, **T**, **s** são os centros dos arcos dos círculos que concordam nos pontos **I**, **i**. O triângulo **STs** é eqüilátero.

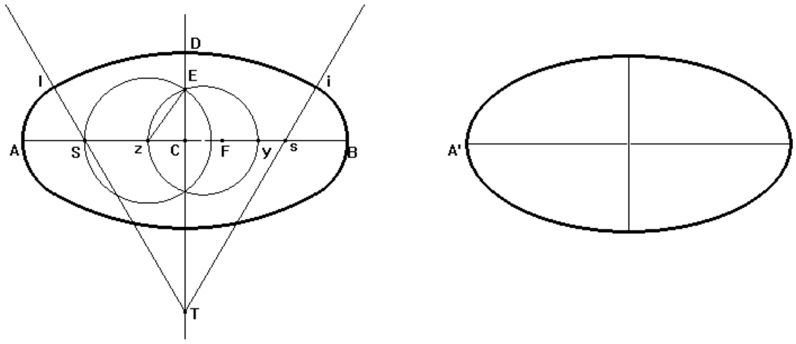


Figura 14: Curva aproximada de uma elipse.

Para se descrever uma figura plana, em um plano, é preciso conhecer os elementos da figura e suas respectivas propriedades - assunto tratado no Livro I. A representação, em si, não requer nenhum procedimento especial. Na primeira parte do Livro II, portanto, Frézier indica os meios para construir uma figura de seção, conhecendo alguns de seus elementos, baseado no respectivo conhecimento geométrico. Faz, também, o processo inverso: determina os elementos, conhecendo a curva. Essa parte do livro corresponde ao nosso Desenho Geométrico Plano. A figura 15 ilustra, entre outros procedimentos, o da determinação das tangentes à elipse por um ponto ***D***, da curva, e por um ponto exterior ***d***.

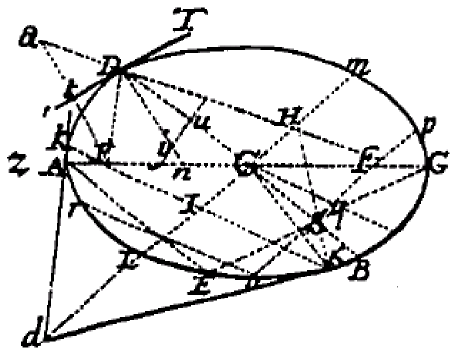


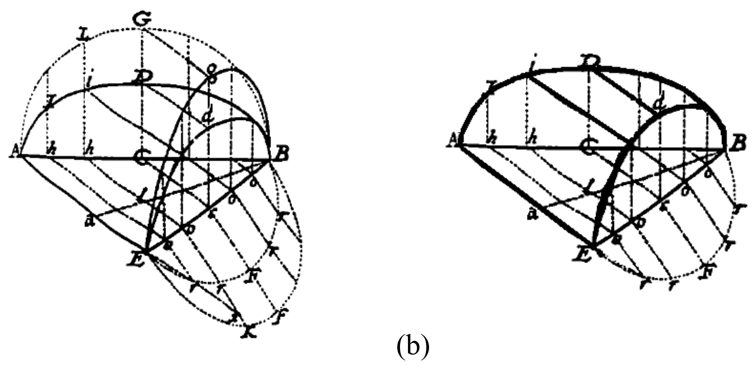
Figura 15: Determinação de elementos da elipse.
(FREZIER, 1737, t.I, livro II, prancha 10, fig. 111)

Outro tópico, abordado nessa primeira parte, diz respeito ao "alongamento" e "encurtamento"[20] de elipses, de maneira que sejam o resultado de diferentes seções de um mesmo cilindro. O procedimento é o mesmo utilizado por Delorme na determinação dos "círculos alongados" (figuras 6 e 7, pp. 52, 53), com duas diferenças relevantes: (i) Delorme orienta a construção de uma curva, que deverá ser utilizada no fechamento de

[20] Frézier comenta que utilizou os termos "alongar" e "encurtar" em uma alusão ao equívoco de Daviler. O autor volta a mencionar o fato de que o Arquiteto não reconheceu a elipse naquelas curvas.

um determinado tipo de cobertura, e não classifica essa curva; Frézier, por outro lado, mostra como "alongar" ou "encurtar" uma elipse, enfatizando que são seções de um mesmo cilindro. (ii) Delorme não se preocupa em justificar o processo; Frézier, no entanto, faz a demonstração recorrendo à visualização do cilindro, através de um alçamento[21] da projeção da base em torno do seu diâmetro, ou seja, recorre à situação espacial para justificar a representação plana.

O processo está ilustrado na figura 16a. O cilindro tem base circular de diâmetro ***EB***. A linha ***AB*** corresponde ao alongamento desejado. A base circular é representada no plano ***ABE***, em ***EFB.*** Nesse plano, são determinadas as alturas, posteriormente transportadas para as perpendiculares tiradas de ***AB.*** O transporte das alturas é justificado através de um alçamento da base ***EFB*** em ***EdB.*** Esse alçamento produz a imagem do cilindro, que destacamos na figura 16b. A linha ***aB*** sugere outro comprimento para a elipse e o semicírculo ***AGB*** foi encurtado, por processo análogo, na elipse ***EfB*** (alçada em ***EgB***)***.*** O desenho da esquerda foi reproduzido na forma encontrada em Frézier. No entanto, apagamos algumas linhas e letras que estavam bastante borradas.



(a) (b)

Figura 16: Seções de um cilindro (FREZIER, 1737, t.I, livro II, prancha 10, fig. 119).

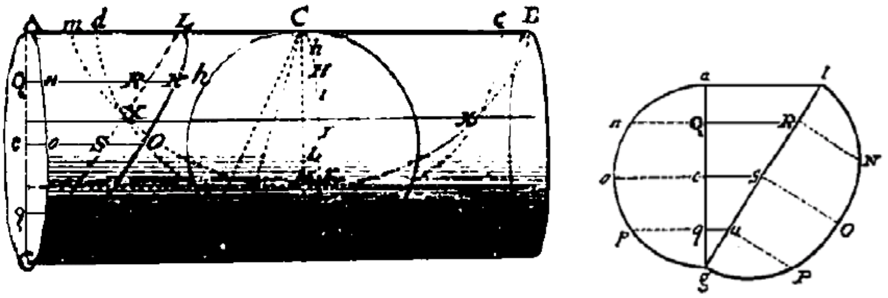
Na segunda parte do Livro II, Frézier faz a descrição de curvas planas, em superfícies curvas. Isso, em termos práticos, significa que a forma de uma determinada seção é conhecida, e é preciso determinar o local exato em que o sólido deve ser secionado, para obtê-la. Ou ainda, de que maneira deve-se cortar o sólido para obter-se determinada seção?

Na figura 17a, o autor descreve uma elipse de eixo maior conhecido, sobre a superfície de um cilindro reto. Primeiramente, recorreu a outro desenho (figura 17b),

[21] Alçar é o processo inverso de rebater, ou seja, Frézier fez o retorno da base para a posição original e a projetou no plano vertical.

para definir a curva a partir do eixo dado. Nesse, o segmento ***ag*** é o diâmetro da base do cilindro e ***gl*** é o eixo maior da elipse. O ponto ***l*** foi determinado sobre a perpendicular a ***ag*****,** tirada de ***a***. O diâmetro ***ag*** foi dividido em um número qualquer de partes iguais. Os pontos ***n, o, p*** são as interseções das perpendiculares ao diâmetro, pelos pontos das divisões, com o semicírculo da base do cilindro. O eixo da elipse ***gl*** foi dividido no mesmo número de partes iguais, e as distâncias **nQ, oc, pq** foram transferidas para as perpendiculares ao eixo da elipse, pelos pontos das divisões, ***RN, SO, uP***, respectivamente. A linha ***lNOPg*** corresponde à semi-elipse.

Para descrever essa curva na superfície do cilindro (figura 17a), o autor divide o diâmetro da base do sólido nos pontos **Q, c, q** e determina **n, o, p** no contorno da base. Por esses pontos, traça as retas paralelas ao eixo do cilindro (este procedimento foi dado em um problema anterior) e transfere as distâncias ***QR, cS, qu*** (da figura 17b), respectivamente, para aquelas retas, determinando os pontos ***N, O, P*** da elipse, na superfície do cilindro. A curva foi traçada à mão, passando por esses pontos.



(a) (b)

Figura 17: Descrição de uma elipse na superfície de um cilindro.
(FREZIER, 1737,t. I, livro II, prancha 16, fig. 176 - 178)

Ainda nessa segunda parte do Livro II, o autor começa a preparar o leitor para o desenho de curvas reversas. Estas curvas, por não ‘caberem’ em um plano, deverão ser representadas por projeção. Frézier estabelece, então, alguns teoremas relativos à projeção ortogonal. O corolário geral se refere à redução sofrida por um segmento de reta, quando projetado em um plano não paralelo a ele: “*...la Projection faite sur un Plan Vertical ou Horizontal, raccourcit la representation de toutes les Lignes & Surfaces qui ne sont pas paralleles au Plan sur lequel on la fait* ” (FREZIER, 1737, t. I, livro II, p. 207).

Por intermédio da figura 18, esclarece seu corolário: se a linha **AB** estiver na posição **aB**, paralela ao plano ***gh***, a representação **DF** será igual à **aB** (justifica essa afirmação através do retângulo **aBFD**). No entanto, ao transportar o ponto **a** para a posição **A**, a representação **EF** ficará menor que a linha **AB**, pois será, sempre, um dos lados de um triângulo retângulo, cuja linha objetiva é a hipotenusa (a linha **AC** foi traçada, paralela à **EF**, para demonstrar o corolário).

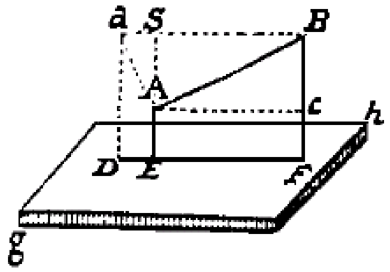


Figura 18: Corolário geral da projeção ortogonal.
(FREZIER, 1737, t. I, livro II, prancha 16, fig. 169)

Frézier enuncia alguns teoremas e corolários referentes às linhas curvas. Inicialmente apresenta a idéia de que a projeção de uma linha curva, que está em um plano perpendicular ao plano de projeção, é uma linha reta. Este teorema está ilustrado pela figura 19 e justificado da seguinte forma: “todas as linhas tiradas dos pontos da curva, perpendicularmente ao plano de descrição, estão em um mesmo plano. Basta considerar, então, a interseção de dois planos que, segundo a Geometria Elementar, é necessariamente uma linha reta”[22] (FREZIER, 1737, t. I, livro II, p. 208, tradução nossa). Assim, a elipse **ABDE** fica representada pelas linhas ***ad*** no plano horizontal ***gh***, e ***be***, no plano vertical ***gk***. Os pontos **c¹** e **C²** representam, cada um, três pontos: **B, C, E** e **A, C, D,** respectivamente. Frézier alerta que o leitor deverá se acostumar a compreender a linha curva, a partir da linha reta; forma sob a qual aquela será, freqüentemente, representada. Como a figura do livro não está muito nítida, fizemos uma reprodução ao lado.

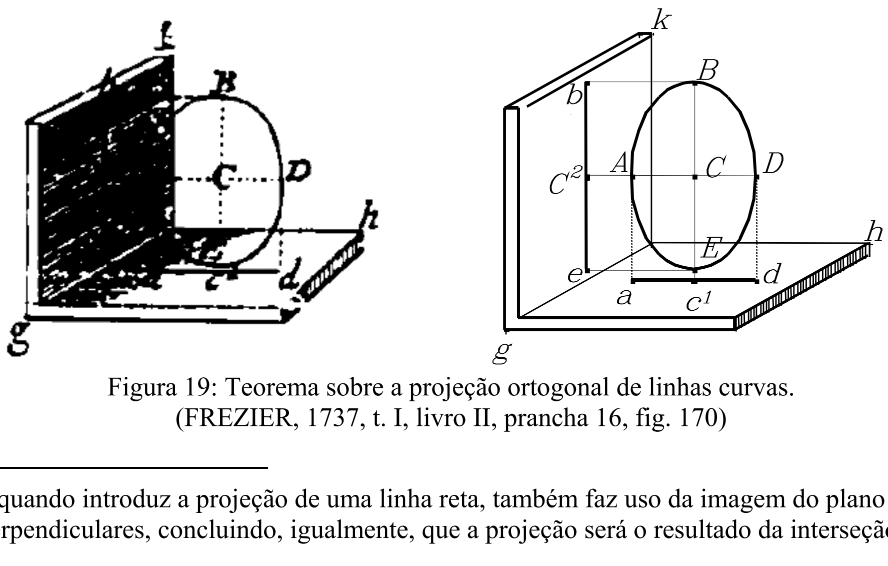


Figura 19: Teorema sobre a projeção ortogonal de linhas curvas.
(FREZIER, 1737, t. I, livro II, prancha 16, fig. 170)

[22] Monge, quando introduz a projeção de uma linha reta, também faz uso da imagem do plano que contém todas as perpendiculares, concluindo, igualmente, que a projeção será o resultado da interseção de dois planos.

Em seguida, esclarece, através de teoremas, que há uma razão constante entre os segmentos de reta que representam arcos de uma cônica. Diz, ainda, que essa razão é independente tanto da posição do plano de projeção quanto do ângulo das projetantes, contanto que estas últimas sejam paralelas entre si. Ou seja, a razão é função exclusiva da curva que foi projetada. Dessa forma, ficam expressas algumas propriedades da curva, nos segmentos que correspondem às projeções de seus arcos. As cônicas, utilizadas nas demonstrações, foram o círculo e a elipse. No entanto, o autor estende o teorema para as demais cônicas e outras curvas:

> *On peut étendre ce Théoreme à d'autres courbes qu'aux Sections coniques, comme aux Spirales, & aux Ovales faites par la section des corps Annulaires, dont nous avons parlé: en un mot la projection conserve toujours une certaine régularité de rapport, qui est le seul moyen d'adapter à une ligne droite quelques proprietez d'une ligne courbe, & d'appliquer sur un plan les surfaces concaves ou convexes, sans confusion de leurs parties, quoiqu'elles transforme quelquefois une courbe en une autre* (FREZIER, 1737, t. I, liv. II, p.209).

Frézier enfatiza que "esta maneira de representar os corpos é Geométrica; porque ela conserva, sempre, uma certa razão das partes das Curvas projetadas"(Ibid., tradução nossa).

Na terceira e última parte do Livro II foram tratadas as curvas reversas, ou seja, aquelas que só podem ser descritas em superfícies curvas, ou projetadas em superfícies planas. Tais curvas resultam das interseções entre sólidos, e a concepção de cada uma delas era considerada como um difícil problema da Arte do Corte de Pedras.

Para determinar os pontos dessas curvas Frézier orienta que os sólidos, que se interceptam, devem ser secionados por planos paralelos entre si. Cada um destes planos auxiliares cortaria os dois sólidos, produzindo duas seções distintas. A parte comum aos sólidos seria formada pelos pontos pertencentes, ao mesmo tempo, a ambas seções. Esses pontos seriam, então, localizados diretamente sobre as superfícies curvas dos sólidos, para obter a "curva natural", ou sobre o desenho dos sólidos em uma superfície plana, para obter a "imitação" produzida pela projeção.

A figura 20 mostra essa segunda opção: como determinar, em uma representação plana, os pontos da curva de interseção entre dois cilindros de raios diferentes. Frézier faz o "rebatimento" de um quarto da base de cada um dos cilindros (representação à esquerda da perspectiva) e divide o arco do cilindro menor em partes iguais (pontos **1, 2, 3**). Transporta as medidas, determinadas por essas divisões (**DI, DH, DG, DF**), para a reta ***ob*** do desenho em perspectiva, definindo os segmentos ***mt, m1, m2, m3***. Em seguida, determina, no cilindro maior, as geratrizes que correspondem às divisões feitas no cilindro menor; estas são paralelas a ***ob***, tiradas pelos pontos ***d, g, h, i***. Finalmente, localiza os pontos da curva de interseção (***F, q, r, s, t***) no encontro entre as perpendiculares a ***ob***, levantadas pelos pontos ***m, 3, 2, 1***, e as geratrizes traçadas.

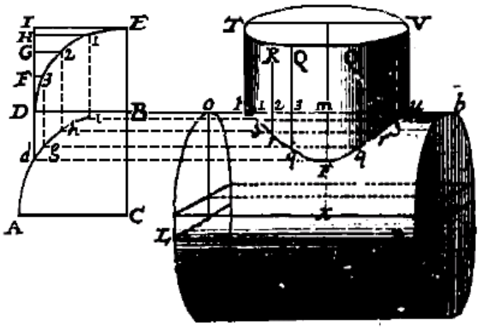


Figura 20: Determinação da curva de interseção entre dois cilindros de raios diferentes. (FREZIER, 1737, t. I, liv. II, prancha 17, fig. 187)

Esse desenho serviu de preparação para representar a curva nas superfícies côncavas dos cilindros, que seriam cortados e encaixados com perfeição. Os procedimentos para descrever a curva no corpo sólido são análogos a esses utilizados para o desenho no plano. O autor explicou como fazê-lo, utilizando, para isso, uma outra figura.

Livro III – Descrição dos sólidos *(stereographie)*

Nos dois primeiros livros, Frézier aborda as figuras bidimensionais: as linhas e superfícies, formadas pela seção dos corpos. No livro seguinte, com o qual encerra o primeiro tomo, se ocupa dos pedaços de sólidos que resultariam dessas seções. Assim, o Livro III é o da descrição das divisões dos sólidos, ou seja, do espaço compreendido entre as seções - a *stereographie*. É voltado diretamente para a Estereotomia, no seu caráter prático.

Frézier se propõe a encontrar a melhor maneira de representar esses sólidos em um plano, de maneira a determinar as distâncias e os ângulos necessários ao conhecimento da figura. Acrescenta que, neste tipo de desenho, "consiste toda a dificuldade do corte de pedras" (FREZIER, 1737, t. I, liv.III, p. 269, tradução nossa).

O autor expõe, com bastante clareza, a confusão que havia nas representações dos tratados existentes. Diz que a projeção vertical era rebatida, cada vez para um lado, sem regras estabelecidas. Além disso, a função das linhas do desenho também não era evidente. Enquanto algumas serviam a mais de uma projeção, desordenadamente distribuídas em uma prancha, outras indicavam alinhamentos (linhas auxiliares do traçado gráfico), que terminavam por confundir o leitor. Enfim, declara que vai "esclarecer esta matéria, e dar os princípios que a reduzem a um pequeno número de regras"(FREZIER, 1737, t.I, liv.III, pp.269-270, tradução nossa)[22].

Apesar dessas considerações iniciais, Frézier não chega a estabelecer uma padronização da representação de uma épura, como poderíamos supor. Isto é, não institui convenções gráficas do tipo daquelas elaboradas por Monge. Ao invés disso, faz algumas observações em relação às projeções ortogonais de sólidos e estabelece regras para a divisão de uma abóbada. Essas regras, na concepção do autor, são determinantes na escolha da melhor maneira de se representar uma abóbada através de um desenho. Em outras palavras, o desenho que deve representar uma determinada abóbada no plano depende, essencialmente, da forma como aquela será dividida em pequenos blocos[23].

O autor assinala que, para efetuar uma projeção, tanto a figura quanto sua posição em relação ao plano de projeção devem estar definidas. Isso porque, uma única projeção não basta para que sejam conhecidos, nem o próprio objeto, nem sua posição em relação ao plano de projeção. A figura 21 ilustra a idéia de que sólidos diversos podem ter projeções congruentes. Ou ainda, que um sólido pode gerar uma determinada projeção, mesmo estando em diferentes posições em relação ao plano de projeção (ver as pirâmides e os cones).

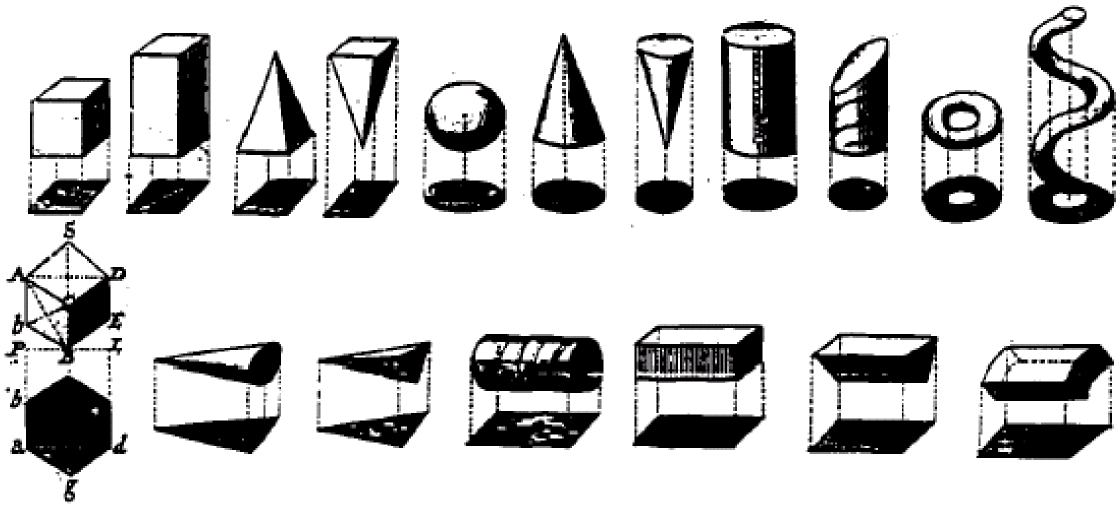


Figura 21: Projeções ortogonais de diversos sólidos em diferentes posições.
(FREZIER, 1737, t. I, liv. III, prancha 19, fig. 212- 229)

[22] Parte deste texto está reproduzida no anexo D.
[23] Esta divisão da abóbada compreende as seções transversais e longitudinais que Frézier exemplificou através de uma analogia com um melão (p.54 desta seção). As linhas produzidas por tais seções, por sua vez, podem ser consideradas como as linhas geratrizes da superfície, ou seja, aquelas que Monge vai utilizar para representar superfícies curvas.

Após as considerações sobre projeções, Frézier se ocupa em dar as regras do desenho em épura. Estas, como dissemos, eram voltadas à escolha de uma curva principal, que deveria servir para representar a abóbada no desenho. Tal curva seria determinada a partir das divisões feitas na abóbada. Estas divisões, por sua vez, deveriam proporcionar maior estabilidade estrutural e melhor estética à construção.

Por questão de solidez, as juntas das divisões devem ser contínuas, tanto no sentido longitudinal quanto no transversal. Ou seja, o sólido será cortado nos dois sentidos e a curva escolhida como principal deverá possibilitar uma divisão segundo regras bem definidas. A partir da decisão sobre a curva principal, o autor passa a orientar sua divisão no outro sentido, determinando a direção das juntas. Na figura 22, a curva principal escolhida foi uma seção transversal em um cilindro: o arco circular **ABD**. Este está dividido, no sentido longitudinal da abóbada, pelos planos representados por **11, 22, 33, 44.** Tais planos são direcionados para o centro do arco, em **G**. As juntas do arco interno, tomadas nesse sentido, estão definidas pelas linhas ***ek, fl, gm, bn***, paralelas ao eixo do sólido.

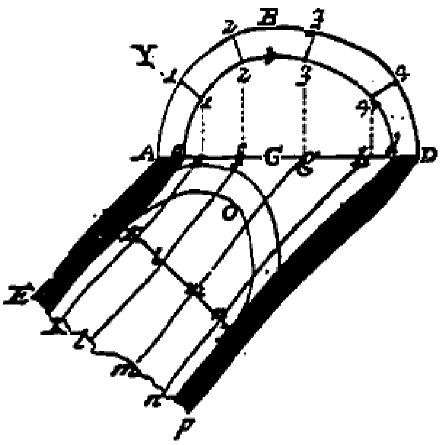


Figura 22: Representação de uma abóbada e divisão em pequenas partes.
(FREZIER, 1737, t. I, liv. III, prancha 19, fig. 237)

Para completar esse livro, que pretende dar os conhecimentos necessários àqueles que irão executar os trabalhos práticos, encontram-se os procedimentos do desenvolvimento[24] de sólidos (poliédricos e curvos) e a descrição dos ângulos dos planos. Ambos são necessários na execução dos moldes a serem usados para cortar as pedras.

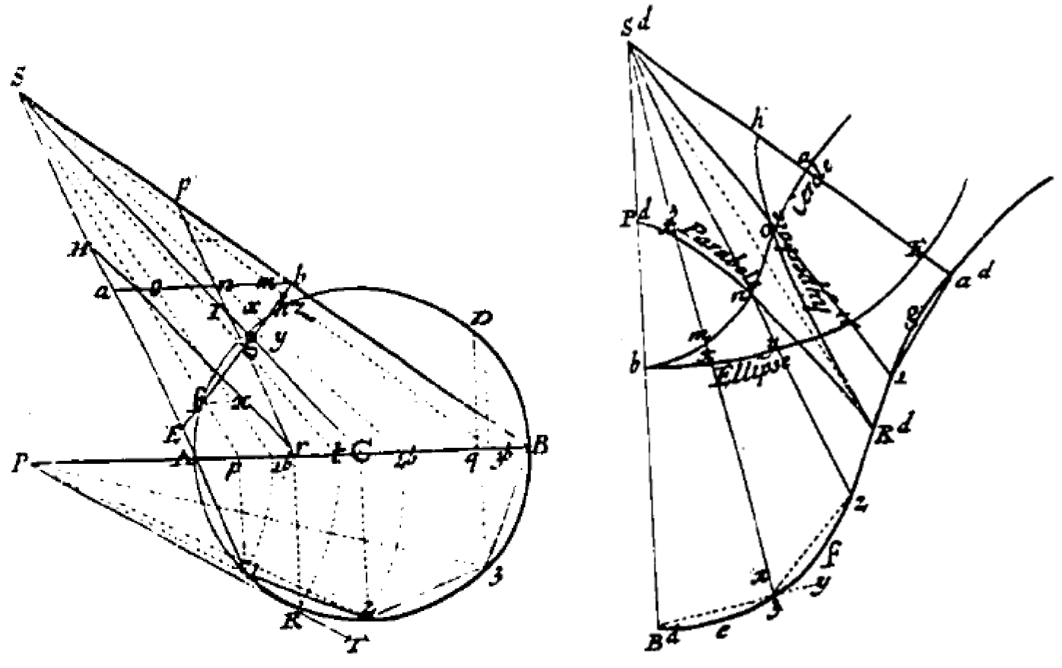
O desenho e o processo, utilizados por Frézier para efetuar as seções de um sólido e seu respectivo desenvolvimento, diferem muito pouco da Geometria descritiva atual.

[24] Desenvolver um sólido é estender sua superfície em um plano, de forma contínua.

A figura 23a traz a representação de um cone oblíquo, de base circular, e algumas seções planas do sólido. O desenvolvimento do cone é ilustrado na figura 23b.

A base do cone, **ADBR,** está dividida em partes iguais, determinando um octógono regular inscrito (Frézier trabalha com a metade da figura, ou seja, com o semicírculo **ARB** que, dividido em quatro partes, determina os pontos **1, 2** e **3**).

O desenvolvimento do cone é feito pela determinação desses pontos: a partir da geratriz ***SdBd*** (figura 23b) o ponto **3** é localizado na interseção da distância ***Bd*3** com ***Sd*3**. A primeira distância corresponde à corda **B3** da figura 23a[25]. A segunda é tomada em ***S3b*** na mesma figura. O ponto **3*b*** está determinado na interseção do círculo, de centro em **P** e raio **P3**, com a reta **PB.** Os pontos **2, 1**, e ***a*** são obtidos de maneira análoga. A curva foi traçada à mão, unindo-se esses pontos. Para os que têm familiaridade com a Geometria descritiva, é imediato o reconhecimento de que Frézier faz uso de uma rotação da geratriz, em torno de um eixo vertical, para determinar a sua verdadeira grandeza.



(a) (b)

Figura 23: Projeções e desenvolvimento de um cone oblíquo de base circular.
(FREZIER, 1737, t. I, liv. III, prancha 22, fig. 264 e 266)

[25] Na realidade, Frezier indica o transporte da distância A1 ao invés de B3. O autor, provavelmente, se enganou, pois, embora as distâncias sejam iguais (o que determina o mesmo resultado), metodologicamente não faz sentido. Principalmente porque, quando sugere a divisão do círculo, Frezier diz, explicitamente, que esta poderá ser em “partes iguais ou desiguais”(FREZIER, 1737,t.I, liv.III, p.327, tradução nossa).

Frézier utiliza as mesmas figuras para ilustrar as projeções e os respectivos desenvolvimentos das seções do cone. A linha ***Eb*** (figura 23a), por exemplo, é o eixo de uma elipse. O desenvolvimento desta curva é obtido pelo transporte da verdadeira grandeza de cada um dos segmentos das geratrizes (do vértice **S** até cada ponto da elipse) alcançada, igualmente, por uma rotação. Desta forma, a verdadeira grandeza de ***Sf*** está determinada em ***Sx*** (figura 23a), e transportada para a figura 23b, na geratriz ***Sd*1**[26]**.** E, assim, sucessivamente, para os demais pontos.

Livro IV – A Arte de fazer as Seções *(tomotechnie)*

Frézier declara, no início do Livro IV, que "Os princípios de teoria e prática que compõem os dois primeiros livros do tratado, e as regras do desenho de épura, dadas no terceiro, abrangem toda a Arte do Corte de Pedras"(FREZIER, 1738, t.II, liv.IV, p.1, tradução nossa). Esclarece, ainda, que pretendia limitar sua obra a esses três livros, pois considerava que seriam suficientes para tornar o leitor capaz de aplicar a teoria a qualquer tipo de abóbada. Na sua idéia inicial, aqueles que não se sentissem capazes de fazer seus próprios desenhos poderiam consultar os livros dos autores Deran e de la Rue (para o corte de pedras) e Blanchard (para o corte de madeira). Porém, muda de idéia e decide refazer esse assunto, esclarecendo-o com demonstrações e dando um tratamento mais metódico, uma vez que os autores citados se preocuparam, apenas, com a prática. O Livro IV, portanto, é o da aplicação da Estereotomia na Arquitetura.

Esse último tópico da obra foi dividido em duas partes, sendo um tomo para cada uma delas. A primeira parte contém as abóbadas simples; e a segunda, aquelas compostas de duas ou mais superfícies.

Frézier apresenta diversos exemplos de abóbadas, mantendo a mesma ordem em que são descritas as seções e interseções de sólidos do Livro I. No Livro IV, porém, utiliza a nomenclatura consagrada na Arquitetura. As aplicações práticas, que incluem abóbadas, portas e escadas, são precedidas e intercaladas com a teoria geométrica necessária. Por vezes, o autor corrige e tece comentários a respeito das falhas dos traçados que eram, freqüentemente, empregados na prática.

A obra termina com um discurso acerca do "bom e mau" uso das Ordens Arquitetônicas (Dórica, Jônica e Coríntia). Há, também, a sugestão de um retorno à simplicidade dos tempos antigos. Frézier repete a máxima dos gregos, mencionada por

---

[26] Aqui também há uma inversão nas letras: o ponto **z** da transformada da elipse deveria ser **x** e vice-versa.

Vitrúvio: "*qui ne faisoient rien dont ils ne pussent rendre des bonnes raisons*" (FREZIER, 1739, t.III, liv.IV, *Dissertation sur les ordres d'Architecture,* p.65). Considera, portanto, "a observância do uso e objetivo das coisas, como uma regra invariável e universal, e o único princípio da verdadeira beleza"(Ibid., tradução nossa).

Enfim, Frézier apresenta uma forma original de tratar a Estereotomia. A qualidade de sua obra foi devidamente reconhecida por autores da época, tanto por arquitetos quanto por matemáticos. Seu método foi elogiado por Belidor (1697/8-1761), no prefácio do primeiro volume do livro, publicado pouco tempo depois:

> *La conformité du mérite de M. Frezier avec celui des grands hommes à qui j'ai consacré cette premiere Partie de mon Architecture Hydraulique, est trop généralement reconnue pour hésiter de le faire participer à mes sentimens de reconnoissance, puisque si l'on y trouve les matieres traitées avec quelque méthode, c'est à ses conseils que j'en suis redevable. Le bel Ouvrage qu'il vient de donner au Public sur la Coupe des pierre; est un sûr garant des lumieres qu'il est en état de communiquer: il désapprouvera sans doute cette marque authentique de ma sensibilité, mais je suis intéressé à faire voir que l'ingratitude n'est pas mon défaut.* (BELIDOR, *Architecture Hydraulique, ou L'Art de Conduire, d'élever et de ménager Les Eaux pour les différens besoins de la vie, t.I, preface*, p. xij).

3.3 Considerações finais desta seção

A primeira obra analisada - a de Delorme - é essencialmente voltada para a prática. O autor se preocupa em utilizar procedimentos geométricos, mas não pretende justificar sua prática. Ao invés disso, objetiva, claramente, facilitar a execução *in loco*. Seu tratado contém procedimentos específicos para cada tipo de abóbada sem qualquer tentativa de generalização.

Em seguida a esse 'primeiro' tratado, e anteriores ao de Frézier, vieram outros, que traziam novos exemplos de construções e procuravam aprimorar determinados procedimentos. Em uma ligeira análise, não encontramos nada, nessas produções subseqüentes, que caracterizasse uma mudança conceitual.

O opúsculo de Desargues, por outro lado, nos pareceu ser um desvio nesse caminho. Sua idéia é totalmente diversa daquela de Delorme. Desargues não se mostra interessado no profissional que segue instruções passo a passo. Ao contrário, sua intenção é esclarecer que o processo é geral, e não específico para cada tipo de edificação. O autor faz uma generalização, baseada em princípios geométricos, ou seja, mostra que a forma de uma abóbada é obtida por seções de um sólido. Assim, diferentes seções em um mesmo sólido (e em sólidos variados) vão determinar diversos tipos de abóbadas. Desargues, porém, apresenta um único exemplo, deixando para o leitor a tarefa de adaptar a teoria para outras situações. Esta pode ser uma das razões de seu livro não ter agradado à maioria dos profissionais da época.

A idéia de Desargues foi retomada por Frézier que, além de alertar para a forma final da abóbada, se empenhou, também, em esclarecer a determinação das partes que deveriam se juntar para compô-la. Neste ponto, porém, não chegou a estabelecer princípios bem definidos (como fez Monge, com a idéia de geração de superfícies). Procurou, ainda, definir qual a Geometria necessária à construção e separou o estudo teórico dos procedimentos práticos, fazendo, contudo, a devida relação entre esses dois saberes. Em sua obra, de aproximadamente mil e seiscentas páginas, buscou satisfazer a todos, teóricos e práticos. O autor, no entanto, se manteve restrito às construções em pedra e madeira, empregadas na Arquitetura.

Na cronologia da Estereotomia, destacamos a obra de Frézier como um momento crucial de transformação. Thomas Kuhn caracteriza as revoluções científicas como “os episódios extraordinários nos quais ocorre ... alteração de compromissos profissionais” (KUHN, 1978, p.25). Sob esse ponto de vista, somos levados a considerar que o tratado de Frézier simboliza uma revolução na Estereotomia. Muito embora Desargues tenha sido o precursor de uma nova maneira de entrever a abóbada, seus escritos não tiveram boa divulgação nem aceitação pública. Frézier, portanto, pode ser reputado como aquele que proporcionou uma mudança de visão e de parâmetros na arte de construir: propiciou a substituição da prática comum, que consistia em construir a abóbada a partir de pequenos blocos de forma e dimensões determinados por métodos empíricos, por um conhecimento da forma final da construção e de suas possíveis divisões, que conduzem à determinação das pequenas partes. Por intermédio dessa maneira racional de determinar a forma dos blocos, a arte de construir progrediu em harmonia, economia e solidez. Frézier conjugou o racionalismo matemático com as técnicas empíricas existentes e produziu uma obra que contém tanto a fundamentação teórica, quanto o preceituário das construções em Arquitetura. Sob o foco da Estereotomia, a Geometria descritiva veio consumar esse processo. Na figura 24 elaboramos uma linha do tempo dos principais tratados de Estereotomia, que precederam a Geometria descritiva.

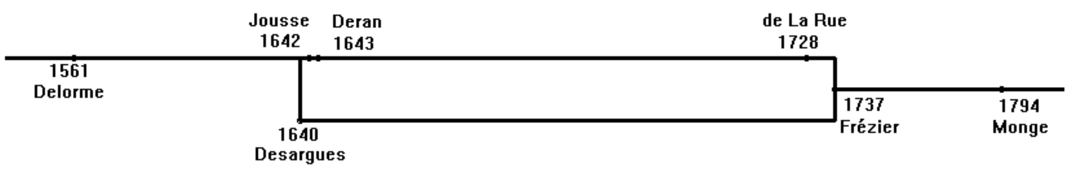


Figura 24: Cronologia da Estereotomia

A obra de Gaspard Monge seguiu, de certa forma, o modelo de Frézier: apresenta, inicialmente, a teoria, para depois mostrar as aplicações. No entanto, não permanece limitado ao emprego no corte de pedras; ao contrário, expande (sua técnica) às diversas outras atividades que precisam da representação do espaço tridimensional. Monge, além disso, padronizou o método de representar determinando regras simples e objetivas, apoiado na idéia de geração de superfícies. Finalmente, estabeleceu o desenvolvimento paralelo das geometrias, sintética e analítica, ressaltando a fertilidade advinda da ‘intuição geométrica’ na elaboração de novos teoremas.

Eduard Glas (2002), em artigo intitulado *Socially condictioned mathematical change: the case of the French Revolution,* avalia as transformações ocorridas na matemática, nesse período, e a conseqüente formação de uma comunidade profissional, cuja nova visão a respeito dos objetos, problemas, objetivos e valores da disciplina, a torna singular. Discute o papel desses novos profissionais sob o foco das idéias de Kuhn a respeito de desenvolvimento revolucionário. Argumenta que as modificações influenciadas por fatores externos (o progresso da tecnologia industrial, por exemplo) ocasionaram mudanças conceituais na matemática. Assinala, ainda, a valiosa contribuição de Monge (e Carnot[27]) conferindo à Geometria um *status* nivelado ao da Análise.

Finalmente, a prática de ensino de Monge é considerada, por Glas, paradigmática. O professor fornecia aos alunos os meios de fazer, por si mesmos, as aplicações dos conceitos matemáticos aprendidos. Ou seja, Monge expunha, brevemente, a teoria e em seguida colocava o aluno diante de soluções de problemas exemplares. Logo após, propunha novos problemas para que os aprendizes buscassem suas próprias soluções. Essas questões relativas ao ensino da Geometria descritiva são tratadas nas próximas seções.

[27] Lazare Carnot foi aluno de Monge na *école du Génie de Mézières.* Assim como seu professor, tinha espírito geômetra e contribuiu bastante para a valorização desta área da matemática através de estudos sobre a teoria das máquinas.

4 PRIMÓRDIOS DO ENSINO DA GEOMETRIA DESCRITIVA

4.1 O ensino da Geometria descritiva na França

Monge começou a utilizar os métodos da Geometria descritiva quando esteve encarregado de ensinar Estereotomia na *Ecole du génie militaire,* em Mézières. A escola formava os alunos do primeiro corpo de engenheiros militares da Europa e contava com excelente reputação. O trabalho prático era bastante valorizado nessa instituição. O curso de Estereotomia, por exemplo, consistia na construção das épuras de Geometria descritiva, do Corte de pedras, da Carpintaria, da Perspectiva e das Sombras, executadas em salas com vinte alunos. O professor permanecia nas salas, e não havia aulas orais. Quando os franceses começaram a organizar suas instituições educacionais, a Escola foi transferida para Metz. Com a mudança, o estabelecimento perdeu muitas de suas características de excelência, porém o modelo de ensino adotado em Mézières foi seguido, posteriormente, pela *Ecole centrale des travaux publics*.

O termo *"géométrie descriptive"* (TATON, 1992) apareceu pela primeira vez no *Projet d'écoles secondaires pour artisans et ouvriers.* Monge redigiu este texto para anexá-lo ao projeto de organização dos níveis superiores de instrução, apresentado à Convenção pelos representantes do departamento de Paris, em setembro de 1793:

> *... L'ordre de connaissance dont il s'agit ici est fondé sur une géométrie particulière des trois dimensions dont il n'existe pas de traité bien fait ; sur une géométrie purement descriptive, mais rigoureuse, et dont l'objet est de représenter par de dessins qui n'ont que deux dimensions des objets qui en ont trois. Cet art est pour ainsi dire un langue commune nécessaire au chef d'ateliers qui dirige des travaux, et au ouvriers qui doivent les exécuter ; il réunit pour l'éducation deux avantages précieux ; 1º par la rigueur dont il est susceptible, il présente aux bons esprits une certitude avec laquelle il est sans contredit trez important que soient familiarisés les individus d'une grande nation qui ne veut pas être les jouet du premier imposteur ; 2º par la généralité des ses procédés, il fournit aux jeunes gens même qui ont les plus de sagacité le moyen d'exercer leurs facultés et de développer leur intelligence* (MONGE, apud TATON, 1992, anexo 20, p.579).

Na proposta de Monge, a Geometria descritiva deveria ser ensinada nos dois anos de duração dos estudos da escola, na seguinte seqüência: (1º) nos traçados do corte de pedras; (2º) nos traçados do corte em madeira; (3º) nas construções das sombras nos desenhos; (4º) nas construções das perspectivas; (5º) no levantamento de plantas e mapas, no nivelamento de terreno; (6º) nas descrições das máquinas simples e mais usuais. Esse projeto não chegou a ser realizado. A introdução da Geometria descritiva no ensino, entretanto, era uma idéia definitiva para Monge.

4.1.1 Formação da *Ecole centrale des travaux publics*

Nas disposições preliminares, que davam início à criação da *Ecole centrale des travaux publics*, Monge tornou a expor suas idéias com relação ao ensino da Geometria descritiva:

> *D'après le plan de l'établissement de l'Ecole centrale des travaux publics, la Géométrie descriptive doit y être cultivée par les élèves pendant les trois années du cours entier des études. Dans la première année elle fait elle-même l'objet d'instruction. Dans les deux autres elle n'en est plus que le moyen ou l'instrument. (...) Ainsi après avoir appris pendant deux mois les méthodes générales ils apprendront pendant le reste de l'année à faire usage de ces méthodes dans les différents cas en les appliquant successivement aux trait de la coupe de pierres, à ceux de la coupe de bois, à la détermination rigoureuse des ombres dans les projections, aux constructions de la perspective, au lever des cartes et des plans, et enfin à la description du plus grand nombre possible des machines élémentaires et à celle des principales machines employées dans les travaux publics de tous les genres, et, si l'on me permet un langage figuré, la méthodes des projections est pour les élèves un instrument d'instruction que dans la première année ils doivent d'abord fabriquer eux-mêmes et dont ils doivent ensuite apprendre à se servir pour acquérir toutes les connaissances qui n'en supposent aucune autre préliminaire ou qui n'en supposent qu'un petit nombre* (MONGE, apud LANGINS, 1989, anexo B, p.116)[1].

O projeto de Monge, para essa Escola, dedica um significado bastante amplo à Geometria descritiva. Esse abrange a Estereotomia, a Arquitetura e a Fortificação, que deveriam ser ensinadas, nesta ordem, uma a cada ano. A Estereotomia consistia nas regras gerais do método das projeções seguidas das aplicações práticas (no corte de pedras, de madeira, etc.). A prática era considerada fundamental, para reforçar o conhecimento adquirido e ampliar as possibilidades de sua utilização. O primeiro ano de Estereotomia visava a garantir a experiência e o embasamento necessários aos dois anos seguintes, em que os alunos “fariam uso deste instrumento (...) para melhor servir à natureza ou para melhor a esclarecer” (MONGE, apud LANGINS, 1989, pp.116-117, tradução nossa). Os objetivos de aplicação da disciplina estão explícitos no seu discurso; no entanto, Monge deixa claro que o método deveria ser bem compreendido para que o aluno pudesse utilizá-lo com propriedade. Sua proposta mostra nítida

---

[1] Langins reproduziu este texto, que foi extraído dos Processos Verbais da Sessão do Conselho de Administração da *l' Ecole centrale des travaux publics*, em 20 pluviôse an III (8 fev. 1795).

preocupação com a aquisição do conhecimento teórico e geral, que, magnificamente, havia conseguido organizar de forma tão simples e concisa.

A inauguração oficial da *Ecole centrale des travaux publics* ocorreu em 24 de maio de 1795 *(5 prairial, an III).* Antes, porém, três cursos foram postos em prática para garantir o perfeito funcionamento da instituição: (1) um curso para preparar os instrutores que seriam necessários para o primeiro ano da escola: escola preparatória para os chefes de brigada; (2) um curso revolucionário, de dois meses, para classificar os alunos, segundo suas aptidões e conhecimentos: cursos preliminares; (3) um curso de estereotomia, para divulgar esta disciplina que ainda não era conhecida pelos alunos: curso de estereotomia. O quadro da figura 25 mostra os períodos em que ocorreram tais cursos e, também, a curta duração de uma escola criada para a formação de professores, a *Ecole normale de l'an III.*

Cursos ano III	Escola preparatória chefes de brigada	Cursos preliminares da *Ecole centrale des travaux publics*	Curso de estereotomia da *Ecole centrale des travaux publics*	Lições de Geometria descritiva *Ecole normale*
brumaire/ frimaire (nov./dez. 1794)	o			
nivôse dez./jan. (1794/95)	o	o		
pluviôse jan./fev. 1795	o	o		o
ventôse fev./mar. 1795	eleição dos chefes			o
germinal mar./abr. 1795			estereotomia para as 3 divisões	o
floréal abr./maio 1795			estereotomia para as 3 divisões	o
prairial maio/jun. 1795			Inauguração da Escola	

Figura 25 : Quadro cronológico dos primeiros cursos de Geometria descritiva ensinados em Paris.

Escola dos chefes de brigada

Os chefes de brigada eram instrutores que davam assistência aos alunos, em salas particulares, após as aulas orais. Quando a Escola tivesse completado os primeiros três anos, eles seriam escolhidos entre os melhores alunos. Para os primeiros anos da Instituição, evidentemente, os chefes de brigada teriam de ser preparados em uma classe especial. Dos cinqüenta alunos que cursaram essa escola preparatória uns foram selecionados, por mérito, da *Ecole des Ponts et Chaussées* e da *Ecole de Mines*; outros, escolhidos através de exames. Os alunos eleitos participaram de um curso intensivo, em que trabalharam a Geometria descritiva, das oito da manhã às duas horas da tarde; e as

Ciências físicas, das cinco da tarde às nove da noite. Hachette ficou encarregado do curso de Geometria descritiva. Monge, no entanto, acompanhou, de perto, esses alunos.

Segundo os historiadores consultados, não há registro do conteúdo das aulas dadas aos chefes de brigada, que foi o primeiro curso de Geometria descritiva, ensinado em Paris. Entretanto, sabe-se que teve início em novembro de 1794 *(frimaire, an III)* e, em março de 1795 *(ventôse, an III)*, os vinte e cinco chefes de brigada foram selecionados[2]. Os aspirantes de instrutores assistiram, também, às aulas de Geometria descritiva dos cursos preliminares (revolucionários) e os da *Ecole normale*, que começaram, respectivamente, em dezembro de 1794 *(nivôse, an III)* e janeiro de 1795 *(pluviôse, an III).*

O curso foi considerado um sucesso, tanto pela capacidade dos professores quanto pelo interesse dos alunos. Em um artigo do *Journal Polytechnique de l' Ecole centrale des travaux publics*[3], Monge enaltece a dedicação dos alunos que, além de demonstrarem a aquisição do conhecimento necessário à função pretendida, se ocuparam, também, de novas pesquisas em Geometria descritiva. Os alunos aprimoraram assuntos que foram tratados, superficialmente, nos cursos preliminares. Por exemplo, estudaram as nuanças de intensidade da luz em superfícies arredondadas e descobriram diversas propriedades importantes das superfícies geradas pelo movimento de uma linha reta[4].

Cursos Preliminares (revolucionários)

Os organizadores da *Ecole centrale des travaux publics* pretendiam que esta funcionasse, com todos os cursos, desde o primeiro ano de implantação. Para isso, havia necessidade de distribuir os alunos de acordo com seus respectivos conhecimentos. A medida tomada, conforme consta no relatório de Fourcroy, foi que os instrutores de cada disciplina dessem cursos revolucionários orais, de três meses, a todos os alunos selecionados para a Escola (aproximadamente 400[5]). Tais cursos serviam para dar uma

---

[2] Estes alunos estão relacionados na seção 2, p.31, em nota de pé de página.

[3] O *Journal Polytechnique ou Bulletin du Travail fait à l'Ecole Centrale des Travaux Publics,* foi a primeira produção da instituição recém formada. O artigo citado encontra-se no primeiro caderno do ano III, pp. 4-6.

[4] O primeiro, *Mémoire sur la détermination géométrique des teintes dans les Dessins*, foi redigido por Dupuis (um dos alunos) e publicado no *Journal Polytechnique ou Bulletin du Travail fait à l'Ecole Centrale des Travaux Publics*, premier cahier, pp.167-189.

[5] Esses alunos foram admitidos através de exames. A maioria deles tinha entre dezesseis e vinte anos, no entanto, havia setenta alunos com mais de vinte anos e vinte e sete com menos de dezesseis; o mais novo tinha apenas doze anos e meio de idade. Os examinadores consideravam, prioritariamente, a inteligência dos candidatos em detrimento de seus conhecimentos específicos (FOURCY, 1828).

idéia geral da matéria. Ao final desses, os diversos níveis de instrução dos alunos seriam, então, apreciados.

Os cursos preliminares tiveram início em 21 de dezembro de 1794 *(1er nivôse, an III)*. Os alunos foram avaliados por exames e organizados de acordo com seus conhecimentos, no término dos cursos. No primeiro ano (ou primeira divisão), ficaram os mais jovens e os menos instruídos, para completar o curso em três anos. Na segunda e terceira divisões, ficaram aqueles que tinham um conhecimento mais avançado e poderiam fazer o curso em dois anos. Essas duas últimas divisões se revezariam no final do primeiro ano.

Em relação à Geometria descritiva, por exemplo, a primeira divisão faria o curso de Estereotomia no primeiro ano, seguido dos cursos de Arquitetura e Fortificação nos anos seguintes. As segunda e terceira divisões fariam, alternadamente, o curso de Arquitetura em um ano e o de Fortificação no ano seguinte. Porém, por ser a Geometria descritiva um assunto novo, ficou decidido que as três divisões assistiriam, juntas, aos primeiros meses do curso de Estereotomia.

Fourcy (1828) comenta, com aprovação, a atitude dos organizadores da Escola em classificar os alunos por seus respectivos conhecimentos. Segundo o autor, a desigualdade de instrução entre os candidatos justificava-se pelo recém fechamento dos estabelecimentos de instrução pública. Ou seja, havia alguns alunos bastante avançados nas Ciências físicas e matemáticas, enquanto outros nunca tinham freqüentado uma escola.

O curso revolucionário de Geometria descritiva começou atrasado, por problemas de saúde de Monge. No final do primeiro mês, o Conselho mandou imprimir dois mil exemplares dos respectivos programas, apresentados pelos professores. O plano de Monge, para o curso de Estereotomia, consta de vinte e quatro lições[6]. Nas quatro primeiras aulas, o professor apresenta os princípios gerais da matéria, expõe a teoria das projeções, discorre sobre os métodos para construir interseções de superfícies curvas, aplica os procedimentos na solução de problemas de formas e posições de corpos e enuncia as propriedades e gerações das superfícies desenvolvíveis e reversas. A partir da quinta lição, Monge começa a mostrar as diversas aplicações dos métodos da Estereotomia. Assim, dedica quatro lições ao Corte de pedras (da quinta à oitava), quatro para o Corte de madeiras (da nona à décima segunda), duas de Sombras (décima

---

[6]As 24 lições estão relacionadas no Anexo A.

terceira e décima quarta), duas de Perspectiva, sendo uma sobre a Perspectiva linear[7] (décima quinta) e a outra de Perspectiva aérea[8] (décima sexta), quatro aulas de Topografia (da décima sétima à vigésima) e mais quatro sobre a conversão de um movimento em outro diferente e a descrição das máquinas (da vigésima primeira à vigésima quarta).

Em análise desse curso, publicada no *Journal Polytechnique de l'Ecole centrale des travaux publics*[9], Monge enfatiza que a Estereotomia tem maior necessidade de ser apresentada mais detalhadamente que as outras partes das Ciências, por não ter sido, até então, *" cultivée, et parce qu'il n'existe aucun ouvrage qui puisse diriger les élèves et tracer la marche de l'instruction"* (MONGE, 1795, p.6). Nas suas considerações, diz que três tópicos essenciais foram abordados no curso preliminar: a exposição do método geral das projeções (que dá a base de toda a Geometria descritiva), os procedimentos que o método fornece para construir as interseções das superfícies curvas e as aplicações do método nas Artes plásticas e de execução.

O professor explica, em seu relatório, os meios empregados na exposição de cada uma das aplicações do método. No Corte de pedras, distingue duas partes: uma, que tem por objetivo determinar as dimensões e formas de cada peça da construção; e outra, que serve para dar a forma em cada uma das pedras que deverão entrar na composição da edificação. Para a primeira, seria necessário o conhecimento das qualidades físicas do material e das leis da mecânica, a fim de garantir a estabilidade da obra. Para a segunda, bastaria o domínio da Geometria, fundamentado nos métodos da Geometria descritiva. Quanto à Carpintaria, informa que os procedimentos, empregados para levar as dimensões construídas nas projeções para as peças de madeira, diferem bastante daqueles do Corte de pedras.

A arte de determinar a sombra é considerada, por Monge, como um suplemento à Geometria descritiva. Segundo ele, quando se faz uso de uma só projeção, a construção da sombra é indispensável para a compreensão da tridimensionalidade do objeto. O professor deixa claro que é grande a dificuldade em relacionar as duas projeções, para conhecer o objeto desenhado. Insiste, ainda, que as duas imagens são necessárias como

---

[7] A perspectiva linear é aquela que reproduz a imagem de um corpo, como este é visto de um ponto de vista único e fixo, através de uma superfície transparente e plana. É, portanto, obtida pelas interseções entre as retas (tiradas do ponto fixo ao objeto) com a superfície plana.
[8] A perspectiva aérea é aquela que considera as nuanças de tonalidades nas superfícies dos corpos, provocadas pelos efeitos de luz.
[9] *Stéréotomie*, *an III, cahiers 1- 2, article II*, p.6-10.

meio de pesquisa, mas quando o objetivo da representação for "descrever" o objeto, bastará fazer uma projeção que, com a respectiva sombra, dará uma idéia bastante satisfatória da terceira dimensão.

Monge apresenta a perspectiva como uma aplicação direta do método das projeções, nas suas considerações mais gerais. As cartas geográficas, topográficas, plantas de construções e de máquinas, por outro lado, são resultantes de projeções específicas, feitas segundo diferentes regras particulares. Finalmente, aponta a descrição das formas e as respectivas construções das partes elementares das máquinas, como uma das aplicações mais úteis da Geometria descritiva.

É interessante observar a abrangência do curso de Estereotomia que, por sua vez, corresponde à terça parte do ensino completo de Geometria descritiva proposto por Monge. De todo esse conteúdo, apenas a primeira parte da Estereotomia, ou seja, aquela das regras gerais do método das projeções foi o estudo que se difundiu posteriormente nas escolas, com o nome de Geometria descritiva. Na proposta do autor, essa parte deveria ser ensinada nos dois primeiros meses de curso.

A diversidade dos assuntos, que se relacionam com essa disciplina, proporcionou alternativas aos autores de livros ulteriores. Encontramos obras de Geometria descritiva que contêm uma ou mais aplicações, ou ainda, tratados que abordam, apenas, o conteúdo preliminar da parte que Monge chamou de Estereotomia. Nesses últimos, a disciplina é tratada de maneira totalmente abstrata.

Podemos destacar dois tópicos que servem a uma análise do afastamento entre as partes teórica e prática da disciplina: (1) a necessidade de aprofundar o desenvolvimento das questões teóricas inerentes, que fez com que o conteúdo se estendesse em questões específicas e particulares; (2) o objetivo da Escola em que a disciplina é ensinada, que levou à restrição das aplicações ou ainda, à sua total eliminação. Este último caso ocorreu, principalmente, nos cursos que antecedem a formação profissional (Ensino Médio). Convém lembrar, entretanto, que Monge considerava o método das projeções um instrumento, que os alunos deveriam desenvolver por si mesmos e aprender a utilizá-lo. Essa questão será retomada nas considerações finais desta dissertação.

4.1.2 *l'Ecole Normale de l'an III*

A *Ecole Normale de l'an III* foi inaugurada em dezembro de 1795 *(pluviôse, an III),* enquanto Monge ainda ministrava seu curso revolucionário na *Ecole centrale des travaux publics*. Schubring (2003) atribui a criação dessa escola ao fracasso da iniciativa francesa de elaborar livros elementares[10], para o ensino. Em pesquisa histórica, acerca dos livros de matemática, o autor descreve as diversas tentativas de concepção desses. Os compêndios eram considerados essenciais para o sistema educacional francês, conforme indicava o plano de reforma educacional de La Chalotai. O pesquisador esclarece que, em 1794, foi decretado um concurso de livros didáticos cujo júri de matemática era composto por Monge, Lagrange e Vandermonde. Os resultados, porém, não foram satisfatórios, e nenhum livro didático de matemática foi oficializado. Conseqüentemente, surgiram projetos de organização de uma escola para formar professores. Preocupados, ainda, com a carência de livros para o ensino, ficou decidido que estes seriam constituídos das notas das aulas dadas nessa escola.

Segundo Belhoste e Taton (1992), o primeiro objetivo da Escola era o de formação de professores primários. Na opinião dos autores, essa meta foi substituída por um projeto que visava à criação “de uma escola de alta cultura, inspirada na experiência dos Liceus” (BELHOSTE e TATON, 1992, p.280, tradução nossa). Concluíram, portanto, que as lições de Monge foram concebidas para o ensino de professores de escola secundária, intermediária entre as escolas primárias e as escolas centrais. Essa idéia se confirma nas palavras de Hachette quem, ao lado de Lacroix (1765-1843)[11], exerceu o cargo de professor adjunto de Monge nessa Escola. Hachette diz que os cursos da primeira escola normal tinham “por objetivo formar os professores para todo o tipo de instrução científicas e literárias” (HACHETTE, 1828, *préface*, p.x, tradução nossa).

A Escola funcionou por quatro meses e a Geometria descritiva foi ensinada em treze lições. As aulas tinham a duração de quarenta e cinco minutos e eram proferidas no anfiteatro do *Jardin des Plantes*, para aproximadamente 1200 alunos. Monge completava algumas lições, que julgava não ter desenvolvido suficientemente, na igreja da *Sorbonne*. Lá ficavam as salas de desenho, onde eram executados os trabalhos práticos. O projeto inicial previa seções de debates entre as aulas. Após o terceiro debate, porém, eles foram substituídos por exercícios práticos (BELHOSTE e TATON, 1992).

---

[10] Schubring esclarece que o projeto de realizar livros elementares objetivava tornar o saber passível de ser ensinado, independente do nível de ensino (SCHUBRING, 2003).

[11] Lacroix já havia, praticamente, terminado seus *Essais sur la géomètrie à trois dimensions,* que publicou no mesmo ano de 1795 (HACHETTE, 1828).

No intuito de atender à decisão de transformar as aulas em livros elementares, as lições do anfiteatro foram estenografadas e publicadas no *Journal des Séances des Ecoles Normales*. Convém ressaltar que os professores podiam corrigi-las e completá-las antes que fossem impressas. Belhoste e Taton (1992) não têm dúvidas de que Monge "utilizou amplamente esta possibilidade para desenvolver as construções gráficas que não pôde evocar no anfiteatro" (BELHOSTE e TATON, 1992, pp. 281-282, tradução nossa).

As nove lições iniciais tratam da exposição do método e de questões teóricas da Geometria espacial[12]. Nas três aulas seguintes, Monge falou das sombras, da perspectiva aérea e da perspectiva linear, respectivamente. Na última seção, ocorrida na *Ecole normale,* o professor apresentou reflexões sobre a importância de introduzir a Geometria descritiva na instrução pública. A publicação de Hachette, de 1799, e a reedição de 1811 contêm apenas as nove primeiras lições, com alguns acréscimos e correções. Segundo o editor, "a compilação destas lições é o primeiro tratado de Geometria descritiva no qual esta ciência é considerada de maneira abstrata e independente de suas aplicações" (HACHETTE, 1828, *préface,* p.x, tradução nossa).

A ordem das aplicações da disciplina foi invertida, em relação àquela da *Ecole centrale des travaux publics* (nesta, as sombras e as perspectivas foram ensinadas após o corte de pedras e de madeiras). Monge justifica tal inversão:

> ... em uma escola destinada a repassar os métodos da Geometria descritiva, será conveniente que os alunos comecem com as aplicações desses métodos ao estudo do corte de pedras e da carpintaria (...) Mas, em um curso especialmente consagrado à Geometria descritiva propriamente dita, é natural que tome, como primeiro objetivo, a aplicação à teoria das sombras, que deve ser vista como complemento desta ciência"(MONGE, apud BELHOSTE e TATON, 1992, p. 279, tradução nossa).

Convém lembrar que as lições da *Ecole normale* constituíram a primeira publicação de Geometria descritiva. A divulgação da disciplina, na França e em outros países do mundo, deu-se, inicialmente, a partir dessa obra e de suas traduções. No Brasil, inclusive, a Geometria descritiva foi ensinada, pela primeira vez, através da tradução dessas aulas, em 1812. Portanto, a criação de Monge teve sua divulgação

---

[12] No anexo B procuramos listar os principais tópicos de cada aula, seguindo o modelo do programa da *Ecole centrale de travaux publics* que traduzimos no anexo C. Os tópicos foram tirados da publicação das lições dadas na *Ecole normale* e as datas, das informações contidas no artigo de Belhoste e Taton, *L'invention d'une langue de figures* (In : Dhombres, 1992, pp. 269 – 303).

através de uma publicação em que a Geometria descritiva é definida, pelo próprio editor, como abstrata e desvinculada de suas atividades práticas.

4.1.3 Curso de Estereotomia na *Ecole centrale des travaux publics*

Fourcy (1828) conta que os fundadores da *Ecole centrale des travaux publics* consideravam que os conhecimentos necessários aos engenheiros eram de dois tipos: uns, relativos às formas e movimentos dos corpos; outros, referentes à composição dos corpos. Os primeiros eram obtidos por raciocínio e empregavam o cálculo ou a régua e o compasso, ou seja, dependiam das matemáticas; os segundos eram adquiridos pela experiência em laboratórios e faziam parte da física. Assim, o programa da escola dividia o ensinamento em Matemática e Física. A Matemática, por sua vez, se bifurcava em análise e na descrição dos objetos. Esta última se classificava em dois tipos de objetos: (i) os suscetíveis de definição rigorosa, que constituíam a Estereotomia, a Arquitetura e a Fortificação; (ii) os que não têm precisão em suas dimensões, que davam lugar à arte do Desenho.

O curso regular de Estereotomia teve início em 21 de março de 1795 *(1^er^ germinal, an III*), para os alunos das três divisões. Os chefes de brigada já haviam sido escolhidos. Monge, encarregado do curso, mantinha suas lições na *Ecole Normale de l'an III*. Os alunos, que já possuíam uma visão geral do assunto, adquirida no curso revolucionário (preliminar), iriam, então, desenvolver esse conhecimento durante o ano.

As aulas começavam às oito horas da manhã, quando o professor explicava o assunto do dia durante meia hora, aproximadamente. Em seguida, os alunos se dirigiam para as salas particulares, onde executavam as operações propostas. Lá permaneciam até as duas horas da tarde e eram orientados pelos chefes de brigada. A instrução total de Estereotomia previa uma divisão em seis partes e cada uma deveria ocupar dois meses[13]. No final do primeiro mês, de cada uma dessas partes, os alunos recebiam exercícios para serem resolvidos durante o mês seguinte. Segundo Monge, os métodos aprendidos deveriam ser empregados na solução desses problemas.

As aulas do primeiro mês *(germinal)* perfizeram um total de vinte e sete, ministradas em 18 dias[14]. Foram propostos seis problemas para os alunos solucionarem

---

[13] A distribuição desses cursos sofreu modificações desde o primeiro ano. Esse fato é bastante compreensível em uma escola que estava se formando e, principalmente, em se tratando de uma disciplina que se apresentava pela primeira vez.

[14] O mês se dividia em três *décades*, cada uma com dez dias. Seis dias de cada *décade* eram dedicados à Geometria descritiva (primeiro, segundo, terceiro, sexto, sétimo e oitavo), perfazendo dezoito dias por mês. A Geometria descritiva ocupava os alunos das oito horas da manhã até as duas horas da tarde, num

durante o mês seguinte *(floréal)*[15]. Nessas lições, Monge ensinou: paralelismo (de retas e planos), verdadeira grandeza de segmento de reta, determinação de plano por três pontos, perpendicularidade (de retas e planos), ângulos (de retas e planos entre si e com os planos de projeção), interseção (de retas e planos), ângulos sólidos, distâncias (de retas e planos), planos tangentes (a esferas e a superfícies cilíndricas, cônicas, de revolução e àquelas geradas por uma reta). Apresentou, ainda, dois teoremas de Geometria espacial. Os problemas propostos envolviam poliedros, superfícies curvas e as respectivas seções.

Monge fez uma análise do primeiro mês do curso, que saiu publicada no *Journal Polytechnique*[16] :

> *Les deux premiers mois de l'année sont destinés à l'étude des règles générales de la géométrie descriptive, qui doivent servir de base au travail du reste de l'année, et de moyen d'instruction pour les trois années d'études. Dans le mois de germinal, les élèves ont entièrement suivi la marche que l'on s'était proposée ; ils ont été exercé à la méthode des projections. On leur a fait connaître les générations d'un très-grand nombre de surfaces courbes, et principalement de celles dont on fait un usage fréquent dans les arts. Ils ont construit les plans tangens et les normales à toutes ces surfaces* (*Journal Polytechnique ou Bulletin du Travail fait à l'Ecole Centrale des Travaux Publics, cahiers 1-2, p.10, an III*).

O segundo mês do curso *(floréal)* foi dedicado às interseções de superfícies curvas. As aulas foram ministradas por Monge. A análise do curso, constante no *Journal Polytechnique*, foi feita por seu adjunto Eisenmann. Nesse curso, foram construídas as interseções de superfícies desenvolvíveis, reversas, as de revolução de um plano e as respectivas tangentes. No comentário de Eisenmann, a grande maioria dos alunos foi capaz de resolver quase todos os problemas propostos no mês anterior. O instrutor elogiou a objetividade e a elegância de algumas construções. Disse ainda:

> *On doit prévoir que de ce concours d'applications nombreuses, et de cette action réciproque de facultés plus ou moins exercées, la science recueillera des productions, qui seront autant de matériaux sur lesquels il pourra, par la suite des temps, s'élever un édifice de connaissances plus vastes et plus élégamment ordonnées* (*Journal Polytechnique ou Bulletin du Travail fait à l'Ecole Centrale des Travaux Publics,* cahiers 1-2, p.101, an III).

---

total de seis horas diárias. Portanto, cada parte da disciplina dispunha de cento e oito horas de dedicação, das quais nove horas, apenas, de exposição oral e noventa e nove horas de exercícios práticos.

[15] A relação dessas aulas encontra-se no anexo C, tirada do *Journal Polytechnique ou Bulletin du Travail fait a l'Ecole Centrale des Travaux Publics, cahiers 1-2, pp11-14, an III*.

[16] A avaliação de Monge sobre o curso de Estereotomia foi o primeiro artigo do caderno. Deste boletim foram impressos quatro mil exemplares, distribuídos aos alunos, instrutores, membros da Convenção, engenheiros e às outras instituições.

O primeiro curso de aplicação teve início no terceiro mês (*prairial*), com o Corte de pedras, e se estendeu por três meses (até *thermidor*). A Carpintaria começou a ser ensinada em primeiro *fructidor* (18 de agosto), no mesmo mês em que a escola passou a ser chamada de *Ecole Polytechnique.*

l'Ecole Polytechnique

Em primeiro de setembro de 1795 *(15 fructidor, an III)*, a Convenção expediu uma lei que dispunha sobre pontos importantes da organização da *Ecole centrale des travaux publics* e impunha-lhe o novo nome de *Ecole Polytechnique.*

A idéia inicial da *Ecole centrale des travaux publics,* segundo Fourcy (1828), era dar uma educação fundamental comum aos jovens que se preparavam para os diversos serviços públicos. Depois, cada um deveria continuar os estudos em uma escola particular, específica da carreira almejada. Essa idéia, no entanto, não se sustentou, porque os estabelecimentos consagrados ao ensino das ciências foram fechados; portanto, não havia mais escolas especiais. Conseqüentemente, a nova escola deveria suprir ambos os objetivos, unindo as instruções geral e especial. Assim, os alunos seriam iniciados nos "mistérios da ciência" e, simultaneamente, aprenderiam as teorias e os procedimentos das diversas artes do engenheiro.

Fourcy (1828) comenta, ainda, que, quando as escolas específicas foram reorganizadas, os ramos de ensino, que eram estranhos ao objetivo da escola central, foram se reduzindo, a cada ano, enquanto as partes essenciais se desenvolviam mais. Alguns estudiosos questionaram, veementemente, essas mudanças, como sendo um desvio do plano inicial. O autor observa, com propriedade, que aquilo que havia sido introduzido na escola para satisfazer uma necessidade momentânea, passou a ser considerado como inerente à sua constituição. Tais questões, que tratavam tanto da instrução quanto da distribuição de cargos da Escola, foram motivos de calorosos debates, proporcionando diversas modificações no seu ensinamento e regimento interno.

Em vista disso, torna-se difícil precisar o objetivo da instituição. Dhombres (1989) assinala uma oposição existente entre as ciências puras e as aplicadas, desde o "nascimento" da Escola. Sugere, no entanto, que essa "aparente contradição", entre formar engenheiros voltados para a prática e desenvolver o ensino científico teórico, resultou na grande "originalidade intelectual" do estabelecimento. Grande parte dos historiadores, que se ocuparam da *Ecole Polytechnique,* insiste em distinguir duas escolas diversas: a Escola de Monge, voltada para a prática; e a escola de Laplace, puramente teórica. Dhombres (1989), no entanto, diz que esses dois personagens, dominantes na vida da Escola, se preocupavam com ambas as questões. Concordamos com o julgamento de Monge, feito por Dhombres, pois encontramos uma preocupação explícita em ensinar os métodos gerais e desenvolver a geometria teórica nos discursos e preleções do criador da Geometria descritiva.

Por outro lado, o fato de que os métodos gerais ocupavam apenas os dois primeiros meses de ensino, seguidos de dois anos e dez meses de aplicações, parece uma contradição ao que acabamos de afirmar. O discurso de Gayvernon[17] sobre o ensino da Geometria descritiva, durante os dois primeiros anos da escola, ajuda a compreender melhor essa aparente discrepância.

Gayvernon faz uma distinção entre a determinação das grandezas das dimensões dos corpos e a descrição de suas formas, situações e curvas resultantes das interseções de suas superfícies. Diz que a primeira deverá ser tratada pela análise, enquanto a segunda constitui o "objeto puro" da Geometria descritiva. O autor ressalta a importância do trabalho gráfico meticuloso, que deverá seguir as lições orais da disciplina. O conteúdo programático do primeiro ano contém o método das projeções (que resolve graficamente as questões da reta e do plano e de suas posições relativas no espaço) e a geração de superfícies (que serve para exprimir a posição de qualquer ponto de uma superfície curva e de suas interseções). Após esse conhecimento inicial, começam as aplicações ao Corte de pedras, à Carpintaria, às Sombras, aos Mapas e à Perspectiva.

Pelo texto de Gayvernon, entendemos que a maneira imaginada, para que os princípios gerais da Geometria descritiva fossem definitivamente incorporados ao corpo de conhecimento dos alunos, era exercitá-los por meio de atividades práticas e não por especulações teóricas e abstratas. Isso, porém, não significava o afastamento da teoria e sim o constante relacionamento entre as duas questões. Achamos que esse movimento, entre a teoria e a prática, não foi devidamente enfatizado no ensino posterior da Geometria descritiva.

Para o ensino na *Ecole Polytechnique,* foi utilizado o livro publicado por Hachette[18] em 1799, que nada mais era do que a compilação das aulas de Monge na *Ecole Normale.* A publicação contém a seguinte advertência:

---

[17] O discurso de Gayvernon encontra-se reproduzido no anexo E.

[18] Hachette foi encarregado do curso de Geometria descritiva em 1797.

> *Ce traité renferme une théorie compléte de la partie de la géométrie qu'on a nommée Géométrie descriptive. Le citoyen G. Monge devoit en faire l'application aux constructions de la perspective linéaire, à la détermination des ombres dans les dessins, à la description des élémens des machines, etc., ainsi que cela est annoncé dans le programme qui précède cet écrit. Déjà il avoit fait graver les dessins qui servent maintenant de modèles aux élèves de l'école polytechnique pour l'étude de la coupe des pierres, de la charpente, de la perspective et des ombres ; mais les différentes missions qu'il a reçues du gouvernement, celle qu'il remplit maintenant en Egypte, l'ont empêche de terminer ce travail.*
>
> *On a pensé qu'il seroit utile de publier séparément la première partie de l'ouvrage ; elle pourra mettre le lecteur en état d'en faire lui-même les applications.*
>
> *Pour lire ce traité, il suffit de connoître la première partie de la géometrie élémentaire.* (MONGE, 1799, avertissement).

Os desenhos, citados na advertência, foram elaborados por Monge e Hachette, no ano da fundação da Escola. Eles se compunham de épuras de Geometria descritiva, do corte de pedras, da carpintaria, das sombras e da perspectiva linear. Essas épuras foram gravadas e distribuídas aos alunos e, juntamente com modelos tridimensionais em madeira ou gesso, os auxiliavam na execução das tarefas. Tais desenhos, no entanto, não fizeram parte da publicação de Hachette. Por conseguinte, as escolas que adotaram o livro deveriam executar, elas mesmas, as épuras e os modelos dos sólidos.

O livro contou com várias reedições sem qualquer mudança em seu conteúdo. Segundo Hachette, a última reedição foi em 1811 e trazia um suplemento, aprovado por Monge. Esse suplemento e mais algumas adições compõem a obra de Hachette, publicada em 1822 e reeditada em 1828.

4.2 O ensino da Geometria descritiva no Brasil

4.2.1 Academia Real Militar

As primeiras aulas de Fortificação, ainda no Brasil Colônia, eram irregulares e a escola não tinha sede própria. Em 1699 foi criada a Aula de Fortificações no Rio de Janeiro que, segundo Telles (1994), até 1710 não havia começado por falta de livros e instrumental necessário. Em 1738, foi instituído, no Rio de Janeiro, um curso militar de cinco anos, regular e obrigatório. O curso, conhecido como "Aula do Terço" era ministrado por José Fernandes Pinto Alpoim (1698-1770). Essas aulas foram transformadas em um curso de ensino superior, em 1792, pela recém formada Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho. Nessa Academia, cujo curso era bem mais organizado que os anteriores, os futuros engenheiros deveriam permanecer por seis anos. No último ano, eram dadas disciplinas específicas da Engenharia, entre as quais o estudo do corte das pedras e madeiras, a construção de caminhos e calçadas, e a arquitetura de pontes, aquedutos, canais, diques e comportas (TELLES, 1994, p.88).

A vinda da família Real para o Brasil, em 1808, desencadeou diversas realizações que tornaram o ambiente mais propício ao ensino. A fundação da *Impressão Régia*, por exemplo, teve importância indiscutível, pois facilitou a impressão de livros para o ensino, em língua portuguesa.

A Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho foi substituída pela Academia Real Militar, criada pela Carta-Régia de 4 de dezembro de 1810. Esse documento contém doze capítulos, nos quais são descritos, detalhadamente, os objetivos e a regulamentação de todos os itens pertinentes à formação de uma escola. Essa nova instituição se propunha ao ensino das Ciências exatas e de observação, e suas respectivas aplicações aos Estudos Militares e Práticos. Os regulamentos e programas se baseavam na proposta da *Ecole Polytechnique* de Paris (TELLES, 1994). O curso completo para os Oficiais Engenheiros e para os de Artilharia era de sete anos: quatro de curso matemático e três de curso militar. As aulas de matemática eram diárias, com duração de uma hora e meia. Nos 45 minutos iniciais, o professor expunha a matéria e, no tempo complementar da aula, argüía os alunos. Os exercícios práticos eram obrigatórios e bastante valorizados.

A Geometria descritiva aparece como disciplina do segundo ano, a ser dada em dias alternados com as aulas de Desenho. Os professores deveriam preparar um compêndio para o seu curso, de sua própria autoria, ou fazer a tradução de um livro estrangeiro consagrado. A lei indicava o livro de Gaspar Monge para o ensino da Geometria descritiva.

O decreto de 11 de março de 1811 nomeava um professor para cada ano inicial, (do 1º ao 4º) e dois para os anos finais (do 5º ao 7º). Foram , também, designados lentes para cadeiras específicas assim como, professores substitutos. O 2º Ten. do Real Corpo de Engenheiros, José Victorino dos Santos e Souza foi escolhido para lecionar a Geometria descritiva e substituir qualquer titular, nas cadeiras de Matemática, quando necessário. O professor era brasileiro e havia se graduado pela Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra[19]. José Victorino traduziu o livro de Monge,

[19] Segundo Oliveira de Castro, a Universidade de Coimbra não tinha grandes tradições matemáticas; o ensino nessa instituição visava formar uma base sólida para engenharia militar, navegação e arquitetura naval, e não desenvolvia a matemática pura (CASTRO, 1994).

em 1812, e a *Aplicação da Álgebra à Geometria,* de Lacroix; escreveu, ainda, o livro de *Geometria e Mecânica das Artes dos Ofícios e das Belas Artes*, que foi publicado em 1832.

O primeiro curso brasileiro de Geometria descritiva, portanto, foi orientado pelas aulas ministradas por Monge, na *École Normale,* ou seja, pela tradução da publicação utilizada para o ensino na *Ecole Polytechnique.* Apesar de adotarem o mesmo livro, as propostas de ensino da disciplina diferiam bastante nas duas instituições. Enquanto na escola francesa, o conteúdo do livro era ensinado em um período de dois meses, de aulas, praticamente, diárias, aqui no Brasil, ele se distribuía em um ano, com aulas em dias alternados. Outra diferença relevante se encontra nas aplicações do método. Na *Ecole Polytechnique* elas eram parte do aprendizado e, por esse motivo, eram dadas imediatamente após a apresentação do método, nos dez meses que faltavam para completar o ano. Na Academia Militar, por outro lado, as aplicações eram ensinadas em anos posteriores, como disciplinas independentes[20].

Os objetivos, indicados por José Victorino, no entanto, são os mesmos constantes no programa da publicação francesa. A tradução portuguesa é bastante fiel ao texto original quanto ao conteúdo das aulas. As diferenças que encontramos se referem a alguns comentários, feitos no prefácio, e notas de pé de página. Nesses o autor procura explicitar as aplicações do método no seu duplo objetivo (indicando a forma como ele se aplica nas artes) e apontar a utilização dos métodos da Geometria descritiva, no estudo da Geometria pura. Na conclusão do prefácio, Victorino se propõe a estabelecer os princípios metódicos das aplicações da Geometria descritiva à Perspectiva, cortes de pedras, etc., se for "julgado necessário"[21].

> Em fim se as pessoas que verdadeiramente desejão o melhoramento das sciencias, e das artes uteis, exigirem que se reduzão a principios methodicos, e a elementos rigorosos as applicações desta Geometria á *Perspectiva Linear*, aos *cortes das pedras*, às *machinas*, etc. para que por meio destes elementos se aperfeiçoem a Architectura Civil, a Architecura Militar, e a Architectura Naval: ainda que as minhas forças sejão poucas, e os meus conhecimentos sejão limitados, com tudo desejo cooperar para levantar o Imperio das sciencias, e das bellas artes, em hum novo mundo, que offerece muitos recursos naturaes para a applicação das mesmas á industria, e aos melhoramentos das artes, que são as molas da grande machina social; julgo ter feito já huma cousa util trabalhar em hum Compendio, que

[20] Observamos que esta tendência, em dissociar as diversas aplicações da Geometria descritiva, tornou-se comum no ensino da disciplina.
[21] Convém lembrar que a publicação que serviu à tradução de Victorino não continha as aplicações referidas.

> serve de fundamento a taes applicações, o qual contendo mais algumas cousas do que os seus originaes, fica mais util do que estes: e julgo ter cumprido por agora com os deveres, que me são impostos pelas sabias determinações da creação da Real Academia Militar nesta Côrte, pelas altas providencias do Soberano Augusto, que fará época nos fastos literarios do Imperio Luso-Americano (SOUZA, 1812, pp.XVII – XIX).

Ao final do livro, o autor acrescenta um capítulo com "Notas, e Addições" em que esclarece definições, compara as construções da Geometria descritiva com as da Perspectiva Linear e ressalta a importância dessas ciências nas Arquiteturas.

Segundo Miranda, não foram encontrados registros dos programas de Geometria descritiva das aulas ministradas na Academia Real Militar levando o autor a concluir que o ensino era orientado pela obra de Victorino ou, então, por alguma outra produzida para uso da Academia, como o compêndio de Pedro de Alcântara Bellegarde, "Noções de Geometria Descritiva", cuja data estimada é de 1845 (MIRANDA, 2001, p.89).

Conforme assinala Telles (1994), a Academia Real Militar passou por diversas dificuldades na implantação do seu programa. O autor cita, por exemplo, a dificuldade em manter os professores, uma vez que estes eram, constantemente, requisitados para ocupar cargos políticos. A obrigatoriedade do ensino militar, por outro lado, constituía um empecilho para o desenvolvimento de carreiras liberais, tal qual a Engenharia. Uma tentativa em dissociar a Engenharia Civil da Engenharia Militar ocorreu com a criação da Escola Central, em 1858. Porém, a primeira escola civil de engenharia do Brasil só se deu, realmente, com a formação da Escola Politécnica, em 1874. O ensino nessa instituição se separou completamente do ensinamento militar, em 1876 (CASTRO, 1994).

4.2.2 Escola Politécnica / Escola Nacional de Engenharia

A Escola Politécnica foi criada pelo decreto de 25 de abril de 1874 e era composta de um Curso Geral, de dois anos, e dos cursos especiais de: Ciências Físicas e Naturais, ou Matemáticas (também de dois anos); Engenheiros Civis, Engenheiros de Minas e Artes e Manufaturas (de três anos). Os alunos que completavam o primeiro ano de engenharia civil recebiam o título de "engenheiro geógrafo".

A Geometria descritiva representava a segunda cadeira do segundo ano do Curso Geral; portanto, seria freqüentada por todos os alunos que ingressassem na escola. O conteúdo desse curso, dado em um ano, corresponde àquele ministrado por Monge nos dois primeiros meses da *Ecole Polytechnique*, acrescido de questões particulares e casos específicos[22]. A matéria é introduzida através de uma síntese da Geometria, da apresentação de duas formas de representá-la - analítica e sintética – com suas respectivas relações e diferenças, da consideração de exemplos práticos de aplicação da Geometria descritiva e das primeiras definições necessárias à compreensão do método. Após essas considerações iniciais o processo é exposto mediante a representação do ponto e das convenções que serão empregadas. Completando a primeira parte do programa são tratadas, sob a forma de teoremas e problemas, questões relativas à representação da linha reta, do plano e das interseções, posições relativas e ângulos entre retas e planos. A segunda parte versa sobre as superfícies e seus planos tangentes. Na introdução é feita uma explanação a respeito da representação de uma superfície curva e de suas classificações – pelo grau da equação (analítica) e pela geração (concepção de Monge). As superfícies são, então, divididas em regradas (desenvolvíveis e reversas) e de revolução. Ainda nessa parte, são vistas as curvas de contato, provenientes de inscrições e circunscrições de sólidos em superfícies de revolução. Na terceira parte encontram-se as interseções de superfícies (seções planas e interseções de duas superfícies curvas), noções de superfícies envoltórias e estudos da hélice e da epiciclóide. Finalizando o programa há uma lista de dezoito problemas, propostos sob a denominação de "Trabalhos Gráficos", todos de caráter abstrato.

Terminado o curso geral, cada aluno se dirigia ao curso específico de sua opção. A cadeira de Geometria Descritiva Aplicada (perspectiva, sombras, estereotomia) era lecionada no primeiro ano dos cursos específicos de Ciências Físicas e Matemáticas, de Engenharia Civil e de Engenharia de Minas. Nos demais cursos, porém, essa parte da matéria, que Monge considerava "um complemento dessa ciência", não era ensinada.

Na reforma dos estatutos, em 1896, o Curso Geral mudou para três anos de duração. A Geometria descritiva passou a ocupar a segunda cadeira do primeiro ano, e a Geometria Descritiva Aplicada (perspectiva, sombras, estereotomia) não aparece explicitamente nem no Curso Geral nem nos Cursos Específicos.

Em 1937 a Escola Politécnica passou a se chamar Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil, atual Universidade Federal do Rio de Janeiro.

[22] A descrição desse programa foi feita a partir da reprodução do mesmo, em anexo da dissertação de Mestrado de Miranda (MIRANDA, 2001, anexo 4, pp. 135-143).

4.2.3 Colégio Pedro II

O Colégio Pedro II foi criado em 2 de dezembro de 1837 como escola de ensino secundário. Na fundação do Colégio, Bernardo de Vasconcellos[23] indicou a adoção do compêndio de Lacroix para o ensino de Geometria (DORIA, 1937). O livro foi traduzido por Manuel Ferreira de Araújo Guimarães, sob o título de *Elementos de Geometria de Lacroix.* Embora o livro de Lacroix contenha um capítulo dedicado à Geometria descritiva, não sabemos se a disciplina era, de fato, ensinada. Os programas das cadeiras só começaram a ser organizados a partir de 1856, pelo Conselho Diretor da Instrução Pública. Naquele ano, inclusive, o livro de Geometria, indicado, era o de Cristiano Ottoni. Segundo Valente, Ottoni "retirou o capítulo que tratava de princípios da geometria descritiva" na compilação que fez da obra de Lacroix (VALENTE, 1999, p.149).

A Geometria descritiva, no entanto, aparece, explicitamente, no programa do Colégio[24] no ano de 1895, com indicação do livro *Elementos de Geometria Descritiva,* por F.I.C.. Esta obra foi traduzida e adaptada ao ensino secundário brasileiro pelo professor Eugenio de Barros Raja Gabaglia[25]. Parte do conteúdo do livro está relacionado na seção 5 desta dissertação.

Temos, portanto, um registro da introdução da disciplina no ensino secundário brasileiro. Convém mencionar, ainda, que um decreto de abril de 1879 determinou que o programa do Colégio Pedro II servisse de modelo às instituições secundárias que viessem a se organizar no país.

É interessante observar, ainda, que desde 1816 o conhecimento da disciplina passou a ser obrigatório para o ingresso dos alunos à *Ecole Polytechnique*, na França, conforme indica o artigo acrescentado ao programa de admissão àquela instituição:

> *...les élèves doivent avoir été exercés, avant leur entrée à l'Ecole, à construire, avec la règle et le compas, quelques problèmes de géométrie élémentaire et de géométrie descriptive* (FOURCY, 1828, p.367).

---

[23] Bernardo de Vasconcellos assumiu o cargo de ministro da Justiça e interino do Império em substituição a Araujo Lima, quando este passou a exercer a regência do Império após a renúncia de Feijó. Foi ele quem se ocupou dos preparativos para a inauguração do Colégio Pedro II (DORIA, 1937).

[24] A indicação encontra-se no Anuário do Colégio Pedro II, vol. XV, 1949/1950.

[25] O professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia foi catedrático da Escola Politécnica e diretor do Colégio Pedro II, entre outras atribuições. Foi quem traduziu e trouxe ao Brasil os livros da coleção didática dos F.I.C (Pardal, 1984).

5 GEOMETRIA DESCRITIVA: UM CONTRASTE ENTRE AS LIÇÕES DE MONGE E O LIVRO POR F.I.C.

Avant d'avoir entendu Monge, je ne savais pas que je savais la géométrie descriptive (LAGRANGE, apud ARAGO, 1848, p.440).

5.1 O livro de Monge

Segundo Belhoste e Taton (1992), a compilação das nove lições de Monge na *Ecole normale*, publicada por Hachette em 1799, é bastante fiel ao texto dos estenógrafos, salvo por algumas correções de erros tipográficos e pela conversão da antiga unidade usual de medida para o sistema métrico, já oficializado na época. A interferência pessoal de Hachette aparece na organização do texto. Ele agrupou o conteúdo das aulas, em cinco partes, e introduziu algumas frases de ligação entre as lições. Acrescentou, ainda, três complementos, que são as "Adições", encontradas no final do livro: (i) interseção de três cilindros circulares; (ii) geração de superfície reversa; (iii) plano tangente a uma superfície reversa. A publicação contém vinte e cinco pranchas, com cinqüenta figuras no total, desenhadas por Girard[1]; os desenhos são muito semelhantes àqueles utilizados por Monge, em suas lições[2] (BELHOSTE e TATON, 1992). Essa publicação foi reeditada em 1989 pela Jacques Gabay: *Géométrie Descriptive. Leçons données aux Écoles Normales, l'an 3 de la République;* par Gaspard Monge, de l'Institut national. Paris, Baudouin, an VII.

Belhoste e Taton (1992) mencionam duas outras publicações das lições na *Ecole normale.* Uma, de 1811, igualmente editada por Hachette, em que este substituiu as Adições por um Suplemento de, aproximadamente, cento e vinte páginas. Outra, de 1820, publicada por Brisson, na qual foram acrescentadas três lições inéditas sob o título de *Théorie des ombres et de la perspective*[3]. Segundo os mesmos autores, as reedições posteriores, assim como as traduções para diversas línguas, são reproduções dessa última. Citam, porém, duas traduções feitas a partir da edição de 1799: uma, espanhola (1803); e outra, inglesa (1809).

---

[1] Antes da abertura dos cursos da Escola Politécnica foi criado um escritório de desenhistas, sob a direção de Eisenman, para executar os desenhos que eram distribuídos aos alunos. Girard fazia parte desse grupo, tendo sido, posteriormente, vinculado à Escola, onde permaneceu por longo tempo (HACHETTE, 1828).

[2] Os modelos das épuras, utilizados por Monge no curso de 1795, foram extraídos da obra do arquiteto de La Rue e dos cadernos manuscritos da antiga *Ecole du genie de Mézières* (BELHOSTE e TATON, 1992).

[3] Há um comentário a respeito dessas lições nas páginas 32-33 da seção 2. A edição de Brisson não contém as "Adições" de Hachette. Hachette apresentou o texto, em itens numerados, até o item 131. Brisson dá continuidade à numeração de Hachette seguindo, do item 131, até o 143.

Acreditamos que a tradução para o português também tenha sido baseada na primeira edição. Embora elaborada em 1812, contém as “Adições”, da publicação de 1799 e não os “Suplementos”, da edição de 1811. Além disso, fizemos uma leitura paralela entre essa tradução e a reedição da Jacques Gabay. As diferenças que encontramos foram, essencialmente, acréscimos do tradutor, José Victorino. Alguns comentários a respeito de sua interferência no livro foram feitos na seção 4 desta tese (pp.103-104). Essas duas obras (a tradução de Victorino e a reedição de Jacques Gabay) foram as que utilizamos para resumo do livro de Monge, que apresentamos a seguir.

5.1.1. Resumo do livro

Na primeira parte do compêndio, o autor descreve os objetivos da disciplina, expõe as considerações que o levaram à escolha do sistema de referência para a determinação de um ponto no espaço, compara a Geometria descritiva com a Álgebra e apresenta a convenção que deverá ser utilizada para a representação de superfícies. Ao final da primeira parte, seguem problemas resolvidos, relativos à reta e ao plano.

Na segunda parte, começa a tratar das superfícies curvas. Inicialmente, mostra como determinar o plano tangente e a respectiva normal, em um ponto da curva. Justifica esse tópico com exemplos do uso dos planos tangentes e das normais na Arquitetura, na Pintura e na resolução de problemas de Geometria. Completa essa seção com a solução de problemas de determinação de planos tangentes às diversas superfícies curvas, passando por pontos tomados fora da superfície.

Na terceira parte, estuda as interseções de superfícies curvas. Esclarece que as curvas resultantes dessas interseções são, em geral, curvas de “dupla curvatura”, por pertencerem, ao mesmo tempo, às curvaturas de duas superfícies curvas. Acrescenta que, em situações particulares, tais curvas poderão ser planas, reduzidas a uma linha reta ou, a um único ponto, inclusive. Antes de entrar nos métodos para a determinação das projeções das interseções de superfícies curvas, Monge faz uma analogia entre a Geometria e a Análise. Discorre sobre a correspondência entre os métodos das duas formas de representação e ressalta a importância de pensar em ambas. Diz que o aluno deve transitar de uma a outra, com facilidade. Apresenta, então, o método geral para a determinação das interseções e analisa algumas adaptações do procedimento, para casos particulares. Prossegue com as tangentes às interseções, enunciando o problema geral e mostrando diversos casos, em ordem crescente de complexidade.

Monge adverte que, até aquele momento, considerou as curvas de dupla curvatura como sendo as interseções de duas superfícies curvas. Alerta que a curva pode ser, também, conhecida pela lei do movimento de um ponto gerador; neste caso, para determinar a tangente sem recorrer à análise, sugere o emprego do método de Roberval[4] e dá exemplos desta aplicação[5].

Na quarta parte, são feitas as aplicações das interseções de superfícies curvas na solução de diversas questões. Inicialmente, Monge constata que o assunto - interseção de superfícies - foi tratado, de maneira abstrata[6], na terceira parte. Alega que tal abordagem "seria suficiente para o maior número de artes" (MONGE, 1799, p. 89, tradução nossa), uma vez que os problemas relativos ao assunto, que possam surgir, são facilmente associados às questões teóricas analisadas. Cita um exemplo na arte do Corte de pedras: as superfícies curvas, cujas interseções deverão ser construídas, são claramente identificadas com as curvas teóricas estudadas. O mesmo, porém, não acontece com a substituição dos métodos da análise por procedimentos da Geometria descritiva, na resolução de problemas de Geometria. Para tornar mais explícita essa relação, apresenta alguns problemas, que a princípio seriam resolvidos pela análise, mostrando a solução dos mesmos pelos métodos da Geometria descritiva. Monge acrescenta, ainda, exemplos de aplicação do conhecimento teórico adquirido, a partir da concepção geométrica dessas questões, na solução de problemas práticos de topografia e de aplicações militares do aeróstato.

Na introdução da quinta e última parte, o autor declara que o conteúdo desenvolvido, até aquele ponto, contém os principais métodos necessários às artes e seria, portanto, suficiente para o ensino secundário. O aluno deveria, a partir desse ponto, exercitar as construções gráficas, durante dois anos. Diz, ainda, que:

> *...et si nous ne nous proposions que de faire le livre élémentaire qui auroit dû servir de base à l'instruction de ces écoles secondaires, il faudroit terminer là les généralités, et passer immédiatement aux applications les plus utiles, et à celles dont l'usage est le plus fréquent. Mais nous ne devons pas écrire seulement pour les élèves*

---

[4] O método de Roberval é baseado no princípio da composição do movimento; a direção da tangente à curva, gerada pelo movimento de um ponto, é dada pela diagonal do paralelogramo cujos lados se mantêm nas direções do movimento decomposto, e são proporcionais às respectivas velocidades. Este método encontra-se transcrito nas *Mémoires de l'Académie des sciences,* anteriores a 1699.

[5] Loria critica a 'tentativa' de Monge em generalizar o método de Roberval (ou de Torricelli), estendendo-o para o espaço. Na opinião do autor, Monge exemplificou com uma curva plana e, portanto, não é convincente quanto à generalização do método para o espaço (LORIA, 1921, pp. 113-114).

[6] *" ..., c'est-à-dire, sans nous occuper de la nature des questions qui pourroient rendre nécessaires de pareilles recherches"* (MONGE, 1799, p.89).

> *des écoles secondaires, nous devons écrire pour leurs professeurs* (MONGE, 1799, p. 105).

Monge julga necessário fazer considerações aprofundadas sobre as curvas (planas e de dupla curvatura) e superfícies (desenvolvíveis e não desenvolvíveis), para que os professores se tornem capazes de resolver qualquer problema, diferente daqueles estudados na escola. Desta forma, estarão aptos a auxiliar os artistas diante de novos problemas com os quais possam se deparar no exercício da profissão.

Portanto, a última parte do livro trata das curvaturas de linhas e do desenvolvimento de curvas de dupla curvatura; são estudadas, também, as superfícies curvas. Segundo Monge, este último assunto é bem mais simples quando tratado por métodos analíticos. Porém, por serem seus resultados bastante úteis aos artistas, que não estão familiarizados com a Análise, torna-se conveniente apresentá-lo de maneira puramente geométrica.

Monge introduz uma abordagem inovadora das superfícies curvas, pelo método sintético. Primeiro, divide-as em três classes, analisando as curvaturas em cada um de seus pontos: (i) sem curvatura em cada ponto – superfície plana; (ii) com uma curvatura em cada ponto – superfícies desenvolvíveis, em geral; (iii) com duas curvaturas distintas em cada ponto – todas as outras superfícies. Como a superfície plana já havia sido tratada na primeira parte do livro, faz considerações gerais sobre as duas outras classes de curvas.

O autor exemplifica a utilização desse conhecimento, nas artes. Em Arquitetura, mostra como deve ser feita a divisão de uma abóbada em aduelas: através das linhas de curvatura da superfície, que chama de meridianos e paralelos[7]. Outro exemplo foi dado no campo da Gravura, para determinar as nuanças de luz em uma superfície curva. Os diversos tons são expressos por hachuras, cujos contornos se resumem às projeções das linhas de curvatura da superfície. Monge diz que, apesar da maior parte das superfícies dos objetos (representados pelos artistas) não serem suscetíveis de definição rigorosa, o hábito de procurar as linhas de curvatura em superfícies, nas quais essas são determinadas com exatidão, fará com que os artistas se tornem "... mais sensíveis quanto à forma dessas linhas e de suas posições, mesmo para os objetos menos determinados" (MONGE, 1799, p.128, tradução nossa).

---

[7] Este assunto foi tratado por Frézier, que exemplificou com as seções de um melão. Há uma referência sobre esse assunto na seção 3, p. 55.

Finalizando a publicação de 1799, seguem as "Adições" de Hachette. Segundo Taton (1951), elas foram tiradas dos *comptes rendus* das seções de debates e das folhas de análise aplicada à geometria. Na primeira delas, é estudada a interseção de três cilindros de base circular. Este estudo vem complementar o item quatro da publicação, em que Monge analisa a viabilidade de utilizar três retas como referenciais para a determinação de um ponto no espaço. Esta questão foi discutida no debate ocorrido após a segunda lição[8]. A segunda adição é um acréscimo ao item doze, no qual o autor trata da geração de superfícies curvas. No referido item, Monge exemplifica a geração das superfícies cilíndricas, cônicas e de revolução; na adição, é tratada a superfície reversa. A terceira e última adição dá seqüência ao trigésimo item, em que é traçado um plano tangente a uma superfície, por um ponto desta. A superfície abordada na aula foi a de revolução. Hachette analisou a mesma questão em uma superfície reversa.

5.1.2 Descrição da primeira parte

A primeira parte contém vinte e dois artigos e onze figuras. Nos treze artigos iniciais, o autor apresenta o método a ser utilizado e as convenções para a representação dos elementos mais simples da geometria: o ponto, a reta e o plano. Essas preliminares são ilustradas por três figuras. Do décimo quarto item ao vigésimo segundo, são resolvidas nove questões, ilustradas com oito figuras. No primeiro artigo, Monge determina o duplo objetivo da Geometria descritiva, que transcrevemos na tradução de SANTOS:

> A Geometria descriptiva tem dois objectos: o primeiro he dar os methodos para representar sobre huma folha de desenho, que só tem duas dimenções, a saber, comprimento e largura, todos os corpos da natureza, que no espaço occupão tres, a saber, comprimento, largura, e profundidade; com tanto porém, que estes corpos se possão definir rigorosamente.
>
> O segundo objecto he dar o modo de reconhecer depois de huma descripção exacta, as fórmas dos mesmos corpos, e deduzir-lhes todas as verdades que resultão, tanto da sua figura, como das suas posições respectivas (SANTOS, 1812, pp. 1-2).

Em seguida, investiga qual seria o elemento de referência mais apropriado para fixar a posição de um ponto no espaço (do segundo ao quinto itens). Conclui que, entre o ponto, a reta e o plano, este último é o que "apresenta mais facilidade ..., para a determinação de hum ponto no espaço"(SANTOS, 1812, p.11), por gerar figuras mais

[8] Uma parte do diálogo entre Monge e Duchesne encontra-se reproduzida nesta seção, pp. 107-108.

simples[9]. Acrescenta que esse procedimento (de localizar um ponto por suas distâncias a três planos conhecidos) é o mesmo utilizado na aplicação da Álgebra à Geometria; no método das projeções, no entanto, dois planos serão suficientes.

Após ter determinado o plano como referência, estabelece (item seis) o conceito de projeção ortogonal de um ponto sobre um plano. Acentua que, fazendo-se as respectivas projeções de um ponto sobre os dois planos referenciais, ele fica perfeitamente determinado pelo procedimento inverso; ou seja, passar (pelas projeções feitas) retas perpendiculares aos planos, que se interceptam no ponto em questão. O leitor é, então, preparado para a apresentação do método : "Nos seguintes paragrafos indicaremos os meios de fazer este processo de hum uso facil, e de natureza tal para se empregar sobre huma só folha de desenho" (SANTOS, 1812, p.12).

Monge prossegue com as projeções da reta (sétimo item) e, nesse ponto, remete à primeira figura do livro (figura 26): um desenho em perspectiva paralela, representando a projeção ortogonal de uma reta em um plano, que é indicada pelas projeções ortogonais de seus pontos.

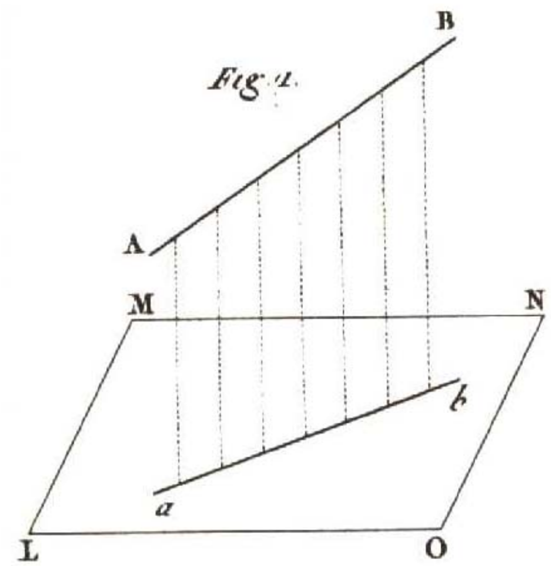


Figura 26: Projeção ortogonal de uma reta
(MONGE, 1799, *planche I, fig. 1*)

O autor enfatiza que as perpendiculares (que projetam ortogonalmente cada ponto da reta) encontram-se, todas, em um mesmo plano (perpendicular ao plano de projeção). Com base neste argumento, conclui que a projeção de uma reta em um plano é a

[9] Reproduzimos o texto em que Monge define a posição de um ponto no espaço e a escolha do sistema de referência, no anexo F.

interseção de dois planos: o plano em que a reta é projetada, e aquele perpendicular ao primeiro, que contém a reta. Portanto, a projeção de uma reta será, igualmente, uma reta – a interseção de dois planos – salvo quando a reta projetada for perpendicular ao plano de projeção; neste caso, sua projeção será um ponto. Diz, ainda, que, assim como dois pontos são suficientes para a determinação de uma reta, bastam, também, para construir a sua projeção.

A mesma inversão, usada para mostrar a determinação do ponto, a partir de duas projeções, foi utilizada para a reta. Assim, a reta estaria definida pela interseção de dois planos, traçados pelas projeções da reta em dois planos não paralelos, perpendicularmente aos respectivos planos de projeção.

No item oitavo, justifica a adoção de planos ortogonais como referenciais. Na opinião de Monge, se os planos de projeção formarem um ângulo muito obtuso, o ângulo entre os planos que lhes forem, respectivamente, perpendiculares, será muito agudo. Isso poderá incorrer em grandes erros na determinação da posição de uma reta. Outra razão encontra-se no hábito, já adquirido por artistas, de utilizar as direções horizontal e vertical em suas projeções. Diz, ainda, que os artistas costumam imaginar

> ... que o plano vertical tenha girado em torno da sua intersecção com o plano horisontal como em charneira, para se abater sobre o plano horisontal, ou na sua prolongação de modo, que fórme com elle hum só e mesmo plano, e a construir suas projecções neste estado (SANTOS, 1812, p.15).

Por esse procedimento, a projeção vertical é traçada diretamente sobre o plano horizontal. Monge, porém, ressalta que a imaginação deve trazê-la de volta, à posição original, através de uma rotação em torno da interseção entre os planos horizontal e vertical de projeção. Para facilitar esta 'visualização mental', a linha, utilizada como charneira, deve ser destacada no desenho[10].

Para ilustrar a técnica proposta, há a segunda figura da publicação (figura 27), também em perspectiva paralela, com recursos visuais de hachuras e sombras. Demonstra, por intermédio desse desenho, a perpendicularidade entre a reta que contém as projeções de um ponto (as linhas de chamada) e a reta utilizada como charneira (linha de terra).

[10] Cabe aqui uma ressalva de que alguns autores optaram por suprimir essa linha. Antomari, por exemplo, adverte que, em seu livro, ela não será traçada, "todas as vezes que não interferir nas construções" (ANTOMARI, 1898, p.42, tradução nossa).

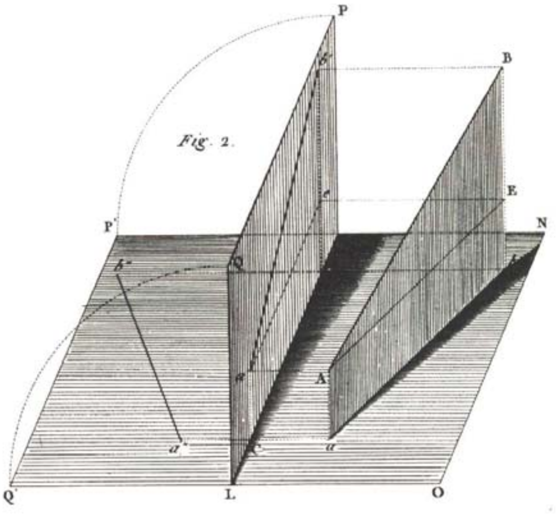


Figura 27: Perpendicularidade entre a linha de terra e as linhas de chamada
(MONGE, 1799, *planche I, fig. 2*)

Essa mesma figura é utilizada para esclarecer a determinação da grandeza de um segmento de reta, sendo conhecidas suas duas projeções (artigo nove). Antes, porém, faz a observação de que, quando a reta for paralela a um dos planos de projeção, a grandeza do segmento será a mesma da respectiva projeção. O autor indica como reconhecer essa posição particular através das projeções. A definição da grandeza de um segmento, portanto, só será necessária quando este for oblíquo, simultaneamente, aos dois planos de projeção. Neste caso, o tamanho do segmento corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo (H*b”*), cujos catetos são: (i) a projeção sobre o plano horizontal (*ab*), transportada para H*e*; (ii) a diferença entre as alturas (cotas) dos extremos do segmento (A e B), representada em *b”e.* (figura 28).

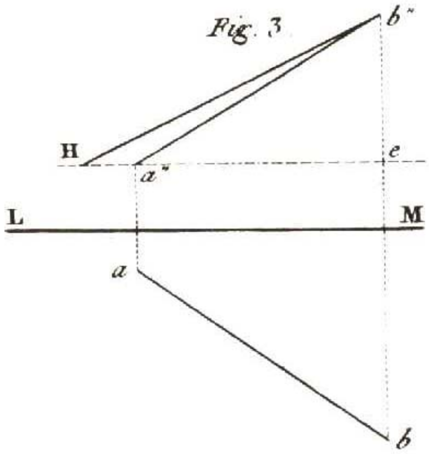


Figura 28: A verdadeira grandeza de um segmento de reta
(MONGE, 1799, *planche I, fig.3*)

A figura 28 é o primeiro desenho em épura. Monge introduz, com ela, a passagem para o método proposto: "Como a Fig. 2 está em perspectiva, e não tem relação alguma com as construcções do methodo das projecções, vamos dar aqui a construcção desta primeira questão em toda a sua simplicidade" (SANTOS, 1812, p.18).

O procedimento é feito em um dos planos de projeção e segue a indicação de que, no outro plano, daria o mesmo resultado[11]. O autor encerra esse item concluindo que, em se tratando de corpos poliédricos, dos quais se conhecem as duas projeções, qualquer comprimento pode ser obtido pelo processo descrito.

No décimo artigo, Monge se desculpa por não seguir com a construção das projeções das figuras poliédricas pois, "... para esta operação não ha regra geral alguma" (SANTOS, 1812, p.19). Argumenta que a dificuldade, encontrada na construção das projeções de uma figura, depende da posição desta. Faz uma analogia com a Álgebra, em que a equação, para resolver cada problema, é determinada em função das relações entre as quantidades dadas e aquelas procuradas. Conclui dizendo que, na Geometria descritiva (assim como, na Álgebra), só a prática fará com que o aluno aprenda a escolher as projeções (e as equações) mais simples para cada caso particular, e complementa:

> Porém da mesma sorte que em analyse quando hum problema está posto em equações, existem processos para resolver estas equações, e para dellas deduzir os valores de cada incognita, do mesmo modo na Geometria Descriptiva, quando estiverem feitas as projecções, existem methodos geraes para construir tudo o que resulta da fórma, e da posição respectiva dos corpos (SANTOS, 1812, p.20).

O décimo primeiro item é dedicado à justificativa de que as convenções, apresentadas para representar os corpos poliédricos, não são convenientes para as superfícies geométricas curvas, sejam estas limitadas ou infinitas. Isso porque, enquanto as figuras poliédricas ficam totalmente determinadas, quando são conhecidas as projeções dos vértices dos seus ângulos e das suas arestas retilíneas, para as superfícies curvas, seriam necessárias as projeções de todos os seus pontos. Por esse motivo, recorre a uma nova convenção para as curvas, compatível com a primeira. No décimo segundo item, introduz o recurso estabelecido para a representação das superfícies curvas:

> Não há superfície curva alguma, que não possa ser considerada como gerada pelo movimento de huma linha curva, ou ella conserve a fórma

[11] Esse recurso contém a essência dos procedimentos que, atualmente, são chamados de "métodos descritivos".

> constante quando muda de posição, ou seja variavel ao mesmo tempo, tanto de fórma, como de posição no espaço (SANTOS, 1812, p.23).

O autor exemplifica o parágrafo acima, descrevendo duas gerações principais para cada uma das seguintes superfícies: cilíndrica, cônica e de revolução. Na figura 29, ilustramos as duas gerações principais das superfícies cilíndricas, indicadas por ele: (i) pelo movimento de uma linha reta ao se deslocar, apoiada em uma curva conhecida, mantendo-se paralela a uma reta dada; (ii) pelo movimento de uma curva que, apoiada em uma reta, sempre no mesmo ponto, tem seus outros pontos descrevendo linhas paralelas àquela reta. A linha que descreve o movimento é chamada de geratriz (uma reta, no primeiro caso; e uma curva, no segundo).

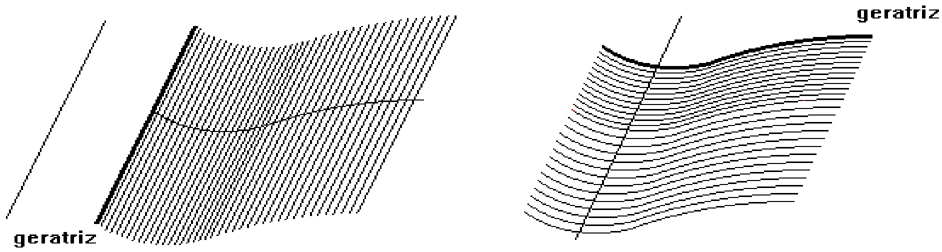


Figura 29: Ilustração da descrição de Monge das gerações de superfícies cilíndricas.

Monge conclui que é por intermédio da construção da curva geratriz de uma superfície, por um ponto qualquer desta, que ela será conhecida. Acrescenta que a geração escolhida deverá ser aquela que usar a curva mais simples e exigir considerações menos trabalhosas. Sugere, também, que ao invés de representar a curva por uma geratriz e sua respectiva lei de movimento, muitas vezes é mais simples considerar duas gerações, ao mesmo tempo, e representar as duas geratrizes para cada ponto.

Finalizando as considerações teóricas dessa primeira parte, discorre sobre a representação do plano (décimo terceiro item). Apoiado em suas reflexões sobre a geração de superfícies, determina o plano pelo deslocamento dos pontos de uma reta, paralelamente à outra reta. Aponta, como vantajoso, o fato de a segunda reta ser também do mesmo plano. Dessa forma, conhecendo a posição de duas retas de um plano, este ficará determinado. Escolhe, para representar o plano, suas retas de interseção com os planos de projeção, as quais chama de traços. Salienta, ainda, que os traços de um plano irão se encontrar em um ponto da reta de interseção entre os planos de projeção (na linha de terra).

Do décimo quarto item ao vigésimo segundo, Monge apresenta as soluções de nove questões que "terão a dupla vantagem de exercitar-nos no methodo das projecções, de nos acostumar, e de nos procurar os meios de fazer depois novos progressos na Geometria Descriptiva" (SANTOS, 1812, p. 28).

Essas questões, com as quais o autor encerra a primeira parte da obra, são:

1ª Questão: construir as projeções de uma reta paralela a uma reta dada, por um ponto dado.
2ª Questão: construir os traços de um plano paralelo a um plano dado, por um ponto dado.
3ª Questão: construir as projeções de uma reta perpendicular a um plano dado, por um ponto dado fora do plano.
4ª Questão: construir os traços de um plano perpendicular a uma reta dada, por um ponto dado fora da reta.
5ª Questão: construir as projeções da reta de interseção de dois planos dados.
6ª Questão: construir o ângulo formado por dois planos dados.
7ª Questão: construir o ângulo formado por duas retas dadas.
8ª Questão: construir o ângulo formado por uma reta dada, com um plano dado.
9ª Questão: construir a projeção horizontal de um ângulo dado.

5.2 O livro da Coleção F.I.C.

O livro "*Elementos de Geometria Descritiva*" da Coleção F.I.C. é dividido em quatro partes. A primeira trata do ponto, da reta e do plano, em seis capítulos. A segunda parte contém cinco capítulos e aborda as superfícies curvas. Essas duas partes compreendem o conteúdo do livro de Monge.

A terceira parte consiste no método dos planos cotados e em suas respectivas aplicações às cartas topográficas. Na quarta e última parte, são vistas as seguintes aplicações[12] (uma em cada capítulo): (i) no traçado das sombras; (ii) no corte de pedras e de madeiras; (iii) na construção das perspectivas. Há um quarto capítulo, ainda nessa parte, em que são feitas considerações sobre os sistemas de projeção (cilíndrico e cônico).

Na tradução brasileira de Raja Gabaglia há, ainda, um complemento com as "*Notas da Aula do Dr. Ortiz Monteiro*"[13] em que o professor estabelece uma classificação das superfícies a partir da forma de geração, descrita por Monge. Esta obra contou com inúmeras edições, fato que assinala a sua enorme popularidade e influência

[12] Essas aplicações eram solicitadas pelo antigo programa de ensino secundário especial francês (F.G.M., 1920).

[13] João Batista Ortiz Monteiro foi professor da Escola Politécnica e passou a catedrático titular de Geometria descritiva em 1882. Teve licença concedida, com vencimentos e vantagens, para viajar à Europa e aprofundar seus conhecimentos na ciência de Monge, freqüentando cursos em Paris, Viena e Leipzip (Pardal, 1984).

no ensino da disciplina no Brasil. Por exemplo, no prefácio da 11ª edição, revista e atualizada pelo professor da Escola Militar, Ten. Cel. Dr. Waldemar Pereira Cotta, o Cel Américo de Menezes declara:

> São sobejamente conhecidas as excelências didáticas dos *Elementos de Geometria Descritiva* de F.I.C. Não há quem, ao iniciar o estudo da bela e fecunda criação de Monge, não se tenha compendiado pela Descritiva de F.I.C.
>
> A sua popularidade e os ótimos resultados de seus ensinamentos, dão-lhe credenciais que dispensam reclamos e recomendações (F.I.C, 1946).

O conteúdo do livro é apresentado através de teoremas, seguidos de problemas resolvidos. Ao final de cada capítulo, há uma lista de exercícios propostos sobre o assunto estudado.

A resolução desses exercícios foi publicada pela primeira vez em 1877 com o título: *Exercices de Géométrie descriptive* (F.G.M., 1920, 5ª ed., p.949). A obra traz considerações interessantes em sua introdução. Uma delas se refere à substituição de expressões muito longas como: projeção horizontal de um ponto, linha de máxima inclinação de um plano em relação ao plano horizontal etc..., para que a exposição das questões fique mais concisa[14].

Outra reflexão de valor considerável para a nossa pesquisa diz respeito à "Leitura no espaço". Na segunda edição, de 1884, há o seguinte parágrafo, reproduzido na quinta edição:

> *Suivant l'expression reçue, il est indispensable d'apprendre à lire dans l'espace, c'est-a-dire d'imaginer la forme et la position des objets d'après la seule inspection de leurs projections; et, réciproquement, de trouver la manière la plus simple de représenter une surface quelconque et d'étudier les questions qui lui sont relatives, d'après la position donnée dans l'espace à la surface ou aux lignes considérées* (F.G.M., 1920, 5ª ed., p.6).

Para facilitar a visão espacial é sugerida a execução de modelos concretos, feitos com planos em papel cartão e fios de ferro. Tal recurso, porém, traz o inconveniente de ficar restrito às posições de linhas e planos em relação aos planos de projeção, tornando-se inviáveis nas questões mais complexas. Entretanto, essa limitação não é considerada

---

[14] Esta última expressão, por exemplo, foi substituída por "reta de máximo declive" e a sua análoga, em relação ao plano vertical de projeção, "reta de máxima inclinação".

um ponto negativo, uma vez que "*... il faut arriver à pouvoir se priver d'un secours qui aurait l'inconvénient de rendre l'esprit paresseux, si l'on y recourait trop souvent*" (F.G.M., 1920, 5ª ed., p.6).

Segundo o autor, a leitura no espaço é indispensável no momento de dispor os dados do problema de maneira conveniente, na escolha do método a ser utilizado para a sua resolução e na compreensão dos resultados obtidos. Da mesma forma, é fundamental na busca de novas soluções e nas demonstrações de teoremas. O mesmo, porém, não ocorre em relação às operações intermediárias (problemas de interseções, por exemplo). Estas, portanto, foram tratadas por métodos conhecidos, sem intervenção de raciocínio espacial.

Finalizando a questão da visão espacial conclui:

> Em résumé, il *est indispensable de s'exercer à lire, à voir dans l'espace, si l'on veut apprendre la Géométrie descriptive avec plaisir et profit ;* néanmoins il est possible de tracer bon nombre d'épures, et l'on peut même acquérir les notions essentielles de Géométrie descriptive sans recourir à cette faculté (ibid., p.7).

Convém reiterar que tais considerações encontram-se no livro de exercícios. O compêndio de Geometria descritiva, traduzido e reeditado no Brasil, inicia-se com a definição da disciplina, seguida da apresentação do método. A única referência que faz, em relação à leitura no espaço, vem logo após a definição de épura:

> Ler uma épura, é ver pelo pensamento os dois planos de projecção perpendiculares um ao outro e imaginar a figura do espaço que a épura representa (GABAGLIA, 1910, p.4).

5.3 Comparação entre os livros de Monge e o F.I.C.

5.3.1 Índices dos conteúdos da primeira parte de cada um dos livros

Géométrie Descriptive de Gaspard Monge:

1. Objetivo da geometria descritiva
2 – 9. Considerações para a determinação de um ponto no espaço
10. Comparação entre a geometria descritiva e a álgebra
11–13. Convenções próprias a exprimir as formas e as posições das superfícies. Aplicações ao plano.
14–22. Soluções de diversas questões elementares relativas à linha reta e ao plano.

Elementos de Geometria Descritiva por F.I.C:

Capítulo I – Noções preliminares
1. Introdução
2. Do ponto
3. Da reta

O contraste entre os índices das duas obras indica a enorme diferença entre elas. O livro de Monge traz considerações preliminares sobre o método, que ocupam duas aulas e meia, aproximadamente. Na continuação da terceira, e no início da quarta aula, foram resolvidos os problemas relativos à reta e ao plano. Cada um desses, como veremos mais adiante, comportam grande quantidade de tópicos que foram tratados, separadamente, no livro por F.I.C. Este, por outro lado, toca ligeiramente no tema do método e do objetivo. Descreve, porém, em detalhe, questões concernentes ao ponto, à reta e ao plano. Em outras palavras, as nove questões de Monge compreendem o conteúdo de seis capítulos do F.I.C.

5.3.2 Diferenças e semelhanças

No primeiro tópico, os dois livros tratam da definição e da descrição dos objetivos da Geometria descritiva. Monge distingue dois objetos de estudo: o primeiro é representar, no plano, com rigor, os corpos que têm três dimensões; o segundo, reconhecer a forma exata desses corpos (através de sua representação plana) e deduzir todas as verdades resultantes de suas formas e posições relativas. Ou seja, estabelece uma relação biunívoca entre a situação espacial e sua representação plana e faz uso desta relação, para resolver os problemas do espaço tridimensional. No F.I.C. esses dois propósitos se unem em uma única definição:

> A *Geometria descriptiva* é a parte das mathematicas applicadas que tem por fim representar sobre um plano as figuras do espaço, de modo a se poder resolver, com o auxilio da geometria plana, os problemas em que se consideram tres dimensões (GABAGLIA., 1910, p.1).

No nosso ponto de vista, tal definição induz à idéia de que os problemas espaciais serão resolvidos no plano. Este, no entanto, não nos pareceu ser o encaminhamento de Monge. O criador da Geometria descritiva pensa, concomitantemente, no espaço e nas representações planas de cada etapa da solução. Veremos, mais adiante, alguns exemplos dessa postura através de uma análise de como o autor chega ao resultado das questões.

Há, em Monge, a preocupação de que o método seja compreendido em toda a sua plenitude. Desde as primeiras considerações, o autor procura justificar cada fase do processo. Suas reflexões iniciam-se com a exegese: *"Como as superfícies de todos os corpos da natureza se podem considerar como compostas de pontos, o primeiro passo que vamos dar nesta materia deve ser o indicar o modo pelo qual se exprime a posição de hum ponto no espaço"* (SANTOS, 1812, p.2). Em seguida, especula sobre o elemento mais apropriado para a localização espacial de um ponto.

Esses esclarecimentos provocaram interessantes discussões nas seções de debates. Géruzzez, por exemplo, questiona a idéia de compreender o sólido, a partir do ponto. Embasado nas idéias de Condillac (1715-1780), como ele mesmo cita, discute o método dos geômetras em engendrar a linha, pelo movimento do ponto; a superfície, pelo movimento da reta; o sólido, pelo movimento da superfície; alegando que eles pecam na definição do ponto: *"le point est une chose si simple, qu'elle n'a pas besoin de définition; ensuite, ils n'ont pas suivi la vraie génération des choses et des idées*" (DHOMBRES, 1992, p.332). Os sólidos, como ele diz, são transmitidos pelos sentidos e, portanto, o procedimento deveria ser o contrário: começar por eles e seguir, desconsiderando uma dimensão a cada passo, até chegar, sucessivamente, às idéias de superfície, de linha e de ponto.

Monge partilha da opinião de que um curso de geometria deve começar pelo sólido e chegar ao ponto, por abstrações sucessivas das dimensões. Argumenta, porém, que esse caminho se faz necessário, apenas, para apresentar as primeiras definições. Uma vez que o ouvinte estiver convencido destas idéias abstratas, a exposição do modo de geração inverso (do ponto para o sólido), além de não se opor ao primeiro, é *“absolument indispensable”* para a consideração das famílias de superfícies.

Quanto à escolha do ente que deverá servir para determinar um ponto no espaço, Monge examina as conseqüências de adotar, como referência, primeiramente, o ponto, seguido da reta; e, finalmente, o plano. Só depois dessas considerações - que envolvem interseções de superfícies esféricas, cilíndricas e planas - é que vai estabelecer o conceito de projeção ortogonal de um ponto sobre um plano e concluir a perfeita determinação de um ponto no espaço, a partir de suas projeções sobre dois planos de posições conhecidas (a ortogonalidade dos planos será argumentada posteriormente).

Aproveitando as reflexões de Monge com relação à determinação do sistema de referência, Fourier propõe uma definição mais exata da linha reta, em substituição à de Archimedes[15], adotada por Legendre (1752-1833) em obra da época. O argüente discute a sucessão e dependência das definições: a da circunferência do círculo supõe a do plano, uma vez que todos os pontos daquela deverão estar em um mesmo plano; a do plano, por sua vez, supõe a da reta, já que é uma superfície gerada por esta. Dessa forma, a definição da circunferência de círculo precisa de uma definição rigorosa da reta. Fourier sugere, então, a determinação da reta a partir de três pontos fixos[16]: *“ ...la ligne droite est une série de points, dont chacun est à égale distance de trois points donnés”* (FOURIER apud DHOMBRES, 1992, p.319). De maneira análoga, porém independente, pode ser definido o plano – *“ ...le plan est une série de points, dont chacun est à égale distance de deux points donnés ...”* (ibid.) e a circunferência de círculo – *“...la circonférence est un assemblage de points, dont chacun est à une distance donnée de deux points données”* (ibid.). Na figura 30, procuramos ilustrar o pensamento de Fourier, que é baseado na idéia de ‘lugar geométrico’(LG): (i) o LG dos pontos equidistantes de um ponto fixo é uma esfera; (ii)dos pontos equidistantes de dois pontos fixos é um plano; (iii) dos pontos equidistantes de três pontos fixos é uma reta.

---

[15] *“de toutes les lignes ayant les mêmes extrémités, la plus courte est la ligne droite ”* (Archimède, apud in Dhombres, 1992, p.318).

[16] Fourier baseou-se na exposição de Monge em que este ressalta a notória propriedade da superfície da esfera – ter todos os seus pontos a igual distância do seu centro. Esse discurso encontra-se no anexo F.

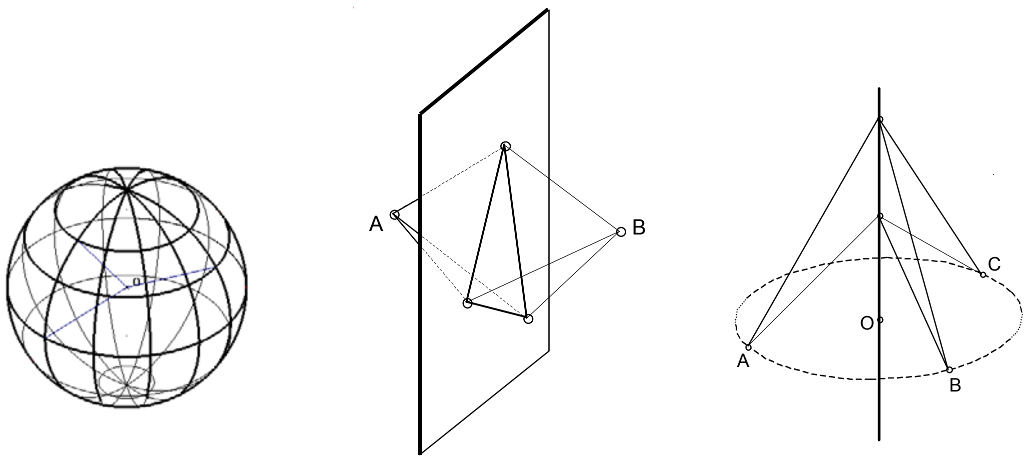


Figura 30 : Definição da esfera, do plano e da linha reta proposta por Fourier.

As reflexões de Fourier são elogiadas por Monge que, no entanto, descarta sua definição de linha reta, justificando: *"les considérations dont tu fait usage dans ta définition ont quelque chose des plus compliqué que la ligne droite que tu veux définir; et elles supposent une habitude de la géométrie que l'on ne peut avoir acquise sans la notion de la ligne droite"* (DHOMBRES, 1992, p. 319).

A questão das definições, em geometria, gera um 'círculo vicioso', que é ressaltado por Bénoni-Debrun. A discussão alastra-se entre os diversos presentes até que um deles comenta:

> *Ce n'est pas ici le lieu d'agiter des semblables questions ; nous ne sommes plus sur les bancs de l'école. Le but d'une définition est de convenir entre soi de l'objet d'une discussion. Lorsqu'un objet est simple, que tout le monde en a le sentiment, sa définition est inutile* (DHOMBRES, 1992, p.320).

A mesma indagação em relação ao sistema de referência suscitou reação totalmente diversa em Duchesne, que questionou o professor durante o segundo debate:

> *Je désirerais que le professeur voulût bien expliquer la nécessité qu'il y a de présenter des difficultés pour déterminer la position d'un point dans l'espace et d'employer pour cela des sphères, des cylindres et des plans, avant que d'en venir à la définition des projections* (ibid., p.321).

A resposta de Monge mostra, explicitamente, a sua concepção da Geometria descritiva :

> *Je devais vous faire voir combien est simple la méthode des projections, qui n'a pas dû se présenter d'abord, et à laquelle on n'est parvenu vraisemblablement qu'après un grand nombre de tentatives ; et pour cela, je ne pouvais faire mieux que de vous conduire pour ainsi dire par la main sur toutes les routes qui se présentent plus naturellement, et des vous faire voir que partout la marche est*

> *beaucoup plus pénible. D'ailleurs, il était convenable, dès l'introduction, de vous faire faire connaissance avec les objets dont s'occupe continuellement la géométrie descriptive ; il fallait vous donner une idée des raisonnements qu'on a coutume d'y faire, et un exemple de la manière dont on y marche vers la vérité ; il fallait vous montrer la nature du spectacle que l'on y a toujours sous les yeux ; il fallait enfin exciter en vous quelques-unes des émotions que ce spectacle est propre à produire : et si parmi vous il en est un à qui, pendant la première leçon, ou à la lecture de la première séance, le cœur ait battu, c'en est fait, il est géomètre* (ibid., p. 321).

O professor prossegue, considerando, muito provavelmente com ironia, que a pergunta se reportava à demonstração da proposição referente à interseção das três superfícies cilíndricas de base circular, citadas na primeira aula, e que não havia sido feita por ser a platéia assaz numerosa[17]. Após discorrer sobre o tema, é novamente inquirido por Duchesne:

> *Je reviens à ma question, et je demande s'il y a nécessité de passer par la difficulté des sphères, des cylindres et des plans, pour déterminer un point dans l'espace, et de faire précéder par ces considérations l'opération simple de la projection, qui détermine un point d'une manière plus commode* (ibid., p.322).

Monge encerra esse assunto, tentando esclarecer, à platéia, que a elaboração do método envolve um *espetáculo geométrico,* que lhe é inerente e que constitui a própria essência do processo:

> *J'aurais pu commencer par définir sèchement la méthode des projections, mais la séance aurait été sans intérêt : j'aurais laissé échapper l'occasion de vous faire une belle leçon de géométrie, et j'aurais manqué mon but qui est de vous familiariser avec les propriétés de l'étendu, afin que vous puissiez accoutumer vous élèves à toute la rigueur dont elles sont susceptibles et contribuer un jour, de tout votre pouvoir, à élever de quelques degrés l'instruction générale de nos jeunes artistes, et à perfectionner l'industrie nationale* (ibid.).

Resumindo, Monge introduz a Geometria descritiva destacando duas idéias: (i) a de que vai partir do ponto como elemento inicial ; (ii) a de que é importante mostrar a complexidade do raciocínio que resultou na simplicidade do método que irá introduzir. Suas observações deixam claro que o exercício mental, exigido para a compreensão do procedimento, do qual se lamenta Duchesne, deverá ser exercido sempre que houver um problema a ser resolvido, o que reitera o mérito de apresentá-lo na introdução da disciplina.

---

[17] Essa explicação é assunto da primeira adição de Hachette, na edição de 1799.

Nada disso consta no livro escrito por F.I.C.. A publicação didática traz, logo após a definição, a observação de que o "desenho ordinário", ou seja, a perspectiva, deforma as grandezas de distâncias e ângulos, enquanto "a geometria descritiva permite determinar a verdadeira grandeza" destes. Com uma postura 'duchesniana', o livro prossegue com a projeção ortogonal de um ponto sobre um plano e apresenta dois métodos diferentes, para fixar a posição do ponto: o "methodo das projecções", que emprega dois planos de projeção e o "methodo dos planos cotados", que utiliza um único plano de projeção, acrescido da cota do ponto. Fala dos planos de projeção (perpendiculares entre si), da linha de terra e dos ângulos diedros. Em seguida, faz o rebatimento do plano vertical sobre o horizontal e define épura. Ou seja, expõe o método 'secamente', como diria Monge.

Outra questão, que não aparece no livro escrito por F.I.C., é a relação entre a Geometria descritiva e a Álgebra. Monge, ao contrário, expressa seu desejo de que as duas ciências caminhem lado a lado. Assinala, por diversas vezes, em suas aulas, a estreita correspondência que há entre as construções gráficas e as respectivas soluções analíticas:

> *Il n'y a aucune construction de géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en analyse ; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en géométrie .*
>
> *Il seroit à desirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble: la géométrie descriptive porteroit dans les opérations analytiques les plus compliquées l'évidence qui est son caractère, et, à son tour, l'analyse porteroit dans la géométrie la généralité qui lui est propre* (MONGE, 1799, p.16).

Monge procurou, inclusive, cultivar essa correspondência na *École centrale des travaux publics,* em que era responsável pelos cursos preliminares de estereotomia e de análise aplicada à geometria, associando uma folha de análise a cada prancha de Geometria descritiva, dada aos alunos[18]. A percepção da estreita relação entre essas duas disciplinas lhe era inerente. O professor aplicava, constantemente, concepções de uma na outra.

As duas publicações apresentam, também, abordagens bastante diversas do conteúdo específico da disciplina. Enquanto Monge se limita a falar da projeção

[18] Um exemplo de uma prancha de descritiva e uma folha de análise, tratando do mesmo assunto, pode ser encontrado no artigo de Belhoste e Taton, *L´invention d´une langue des figures* (DHOMBRES, 1992, pp. 296/297)

ortogonal de um ponto e de sua determinação, a partir das respectivas projeções, em dois planos distintos, no F.I.C. há um artigo, com vinte e um itens, dedicado ao mesmo tópico. Neste são analisadas as nove posições principais que um ponto pode ocupar em relação aos planos de projeção - nos quatro diedros, nos quatro semiplanos e na linha de terra - além daquelas em que o ponto se encontra nos planos bissetores. Portanto, ao passo que o primeiro faz uso do ponto apenas para introduzir a idéia de projeção, o segundo mostra um estudo discriminado das diversas situações em que um ponto pode ser encontrado. Convém ressaltar, ainda, que a Geometria descritiva de Monge se manifesta, ordinariamente, diante do plano vertical de projeção e acima do plano horizontal (no primeiro diedro).

O mesmo sucede em relação à reta. Monge mostra as projeções de uma reta e um procedimento intuitivo para a determinação da verdadeira grandeza de um segmento. No F.I.C., a reta é apresentada, em um extenso artigo, com os seguintes tópicos: pertinência de um ponto a uma reta; posições relativas de duas retas (concorrentes ou paralelas); definição do ponto de encontro da reta com cada um dos planos de projeção (traços); estudo das posições particulares de uma reta em relação aos planos de projeção (paralelas ou perpendiculares). A verdadeira grandeza de um segmento, no entanto, só será tratada muito depois, em um capítulo intitulado "posições relativas das retas e dos planos". Em Monge, os diversos tópicos, referentes à reta, surgirão, espontaneamente, nas "soluções das questões elementares", ao final da primeira parte. A primeira questão de Monge, por exemplo, abrange as posições relativas de duas retas e a pertinência de ponto à reta:

> 14. Sendo dados (fig.4), hum ponto cujas projecções sejão D, *d*, e huma recta, as projecções da qual sejão AB, *ab*; construir as projecções de huma segunda recta tirada pelo ponto dado, parallelamente à primeira (SANTOS, 1812, p.28).

A solução vem logo a seguir, e a figura do livro traz o problema resolvido. Na figura 31, fizemos um desenho baseado na ilustração mencionada.

> *Solução:* As duas projecções horisontaes da recta dada, e da recta que se procura, devem ser parallelas entre si, porque ellas são as interseções de dois planos verticaes parallelos, com hum mesmo plano. O mesmo acontece a respeito das projecções verticaes das mesmas rectas. Além disso devendo a recta pedida passar pelo ponto dado, as suas projecções devem respectivamente passar pelas projecções do mesmo ponto. Logo, se pelo ponto D tirarmos EF, parallela a AB, e se pelo ponto *d* tirarmos *ef* , parallela a *ab*, as rectas EF, e *ef* , serão as projecções pedidas (SANTOS, 1812, pp.28-29).

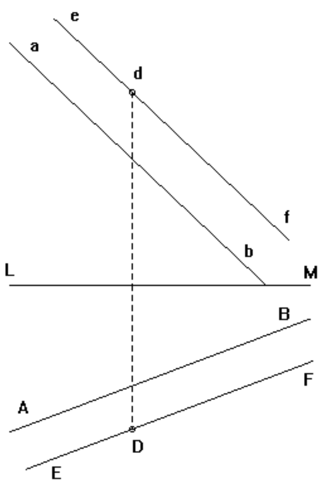


Figura 31: Desenho baseado na figura 4 do livro de Monge.

Monge, portanto, dá a solução do problema - as projeções devem ser paralelas entre si – recorrendo à imagem mental dos planos projetantes[19], que já haviam sido destacados no artigo referente às projeções da reta. Assim, quando fala das "interseções de dois planos verticais paralelos, com um mesmo plano", o professor nos conduz a elaborar, mentalmente, o que está mostrado na figura 32a. O conhecimento de que as projeções da reta devem passar pelas respectivas projeções dos pontos, também é assunto do artigo citado.

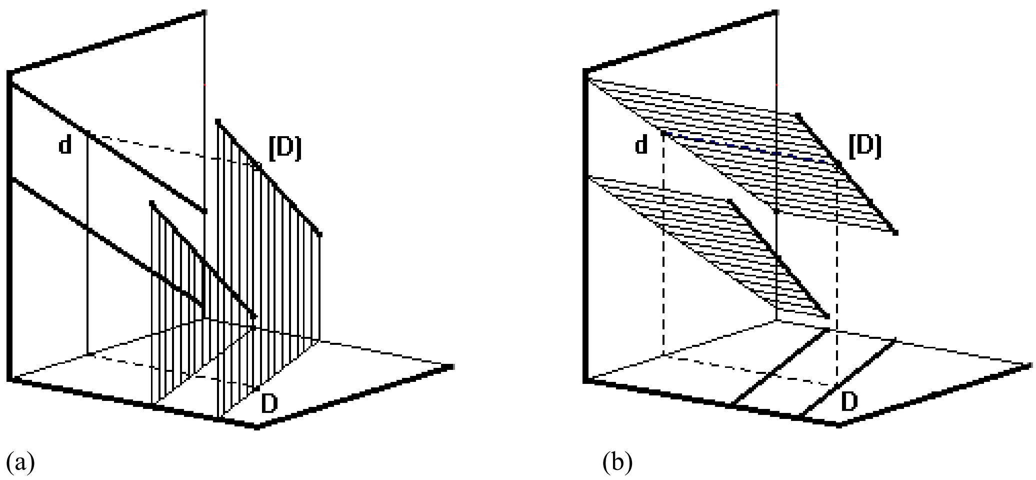


Figura 32: Imagem dos planos projetantes das retas.

No F.I.C., o problema de traçar uma reta paralela a uma reta dada, por um ponto dado, só vai aparecer no capítulo das posições relativas das retas e dos planos (capítulo III). A solução é apresentada da seguinte maneira:

> As projeções de mesmo nome das duas rectas devem ser parallelas (n° 30); portanto, por cada projecção do ponto é necessário tirar uma paralela á projecção de mesmo nome da recta dada.

[19] Na tradução de Santos, o plano é chamado de *projectador* (SANTOS, 1812, p. 13).

> Sejam (*ab, a'b'*) e (*d,d'*) a recta e o ponto dados. Tira-se *dc* parallela a *ab*, e *d'c'* parallela a *a'b'*. A recta CD é a parallela pedida (F.I.C., 1910, p. 52).

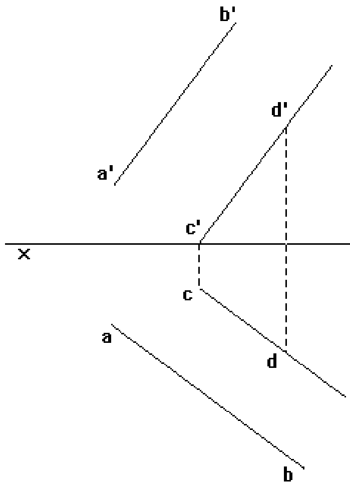


Figura 33: Desenho baseado na figura 101 do F.I.C.

O trigésimo item, ao qual a solução é reportada, trata-se de um teorema transcrito no capítulo I:

> *Duas rectas são paralelas:*
> *1º Quando as suas projecções de mesmo nome, sobre dois planos que se cortam, são parallelas;*
> *2º Quando duas projecções de mesmo nome se confundem e as outras duas são parallelas;*
> *3º Quando as suas projecções sobre um mesmo plano se reduzem cada uma a um ponto*(F.I.C., 1910, p.14).

Dessa forma, o livro apresenta um algoritmo que permite identificar, em épura, todas as situações de paralelismo de retas. Logo a seguir há uma justificativa que faz apelo à visualização da situação espacial, ilustrada pela figura 34:

> 1º Sejam as rectas AB e CD taes que *ab* e *cd* sejam parallelas, e que se tenha também *a'b'* parallela a *c'd'*.
> As projecções *a'b'* e *c'd'* são parallelas quando se levanta o plano vertical; ora, os planos projectantes que determinam *a'b'*, *c'd'* são parallelos, visto que os ângulos A*a'b',* C*c'd*' têm os seus lados respectivamente parallelos; assim tambem, os planos que determinam *ab* e *cd* são parallelos. Logo, AB é parallela a CD; porque, sendo parallela aos dois planos CD*d'*, CD*d* (G.)[20] é parallela á sua intersecção (G.).
> 2º Se as duas rectas têm a mesma projecção horizontal, por exemplo, e as projecções verticaes são parallelas, as rectas são parallelas como intersecções dos dois planos parallelos que as projectam sobre o plano vertical, pelo plano unico que as projecta sobre o plano horizontal.
> 3º Duas rectas perpendiculares ao mesmo plano são parallelas (G.)(F.I.C., 1910, p.14).

[20] (G.) – esta indicação é utilizada sempre que o autor julga necessário orientar o leitor a consultar o livro *Elementos de Geometria,* por F.I.C.

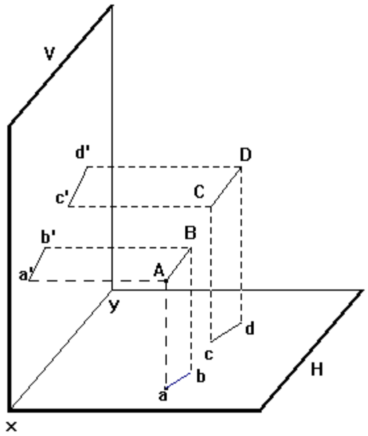


Figura 34: Desenho baseado na figura 35 do F.I.C.

Conforme foi visto nos capítulos anteriores desta dissertação, o público alvo das duas publicações não era o mesmo. Sabemos que as aulas de Monge eram preparatórias aos futuros professores das escolas secundárias francesas (que estavam sendo criadas), enquanto o F.I.C. destinava-se à instrução secundária. Porém, o encaminhamento de Monge, em suas aulas na *Ecole centrale de travaux publics* (para alunos com idades entre dezesseis e vinte anos), não diferia muito daquele da *Ecole Normale de l'an III.*

Em outras palavras, independente do destino da obra, é no enfoque de cada autor que se encontra a maior divergência. Enquanto Monge valoriza a resolução dos problemas através da sua visualização espacial, o F.I.C. considera o estudo metódico de um grande número de casos particulares, estipulando regras formais para a obtenção dos resultados. Dessa forma, a situação espacial fica afastada da solução do problema. Assim, à proporção que o primeiro resolve a questão em épura, deduzida da situação visualizada, espacialmente, o segundo chega à mesma solução por meio de um teorema, escrito para o uso específico em épura.

Monge considera que o ouvinte, já conhecedor do método e das projeções de uma reta, está capacitado a representar qualquer sólido terminado por planos e arestas retilíneas. Sugere, porém, a prática através de muitos exercícios:

> *Ce sera par des exemples nombreux et par l'usage de la règle et du compas dans nos salles d'exercice, que nous acquerrons l'habitude des constructions, et que nous nous accoutumerons au choix des méthodes les plus simples et les plus élégantes dans chaque cas particulière* (MONGE, 1989, p.16).

Em suas lições na *Ecole Polytechnique,* propôs alguns problemas que não constam das aulas na *Ecole normale de l'an III*[21]. Após essas observações, introduz o estudo das superfícies, abordando, primeiramente, o plano.

No livro didático, a representação do plano é iniciada logo após o artigo referente à reta, ainda no primeiro capítulo. Os poliedros são vistos, bem mais tarde, no sexto e último capítulo da primeira parte.

A maneira como cada um dos autores introduz o plano merece atenção especial. Conforme já mencionado na descrição que fizemos do livro, Monge faz uma distinção clara entre as convenções que servem à representação dos corpos poliédricos e àquelas que servirão aos corpos terminados por uma superfície curva. Suas reflexões são introdutórias à representação do plano e tornam, bastante claro, que : (i) as convenções, utilizadas para a representação de um plano, não são as mesmas que aquelas definidas para o ponto e a reta; (ii) o plano é considerado como um caso particular de uma superfície qualquer.

No F.I.C., ao contrário, não há ênfase no fato de que as convenções são outras. O autor não trata o plano como sendo parte de uma família de superfícies nem, tampouco, faz qualquer tipo de generalização. As questões das superfícies (curvas) serão tratadas na segunda parte do livro. O plano é apresentado da seguinte forma:

> **33. Traços e representações d'um plano.** *Traços d'um plano são as intersecções d'esse plano com os planos de projecção.*
> Distingue-se o traço horizontal e o traço vertical∗.
>
> *Um plano é frequentemente representado pelos seus traços.*
>
> Póde-se tambem empregar duas rectas quaesquer, concurrentes ou parallelas, d'esse plano.
>
> ∗ O *traço horizontal* é elle próprio a sua projecção horizontal, emquanto que a projecção vertical está sobre *xy*; observação análoga para o *traço vertical.* (Ver a *Observação* no nº 57)(F.I.C., 1910, p. 17).

Temos a opinião de que a forma segundo a qual o F.I.C. introduz o plano contribui para uma interpretação incorreta de sua épura. Embora o autor observe (em nota de pé de página) que cada traço possui duas projeções, a compreensão de que o plano é representado por "duas" de suas retas não parece devidamente enfatizada, podendo levar o aluno a considerar os traços como sendo as duas projeções de uma única reta.

[21] A relação das aulas e exercícios dados na *Ecole Polytechnique* encontra-se no anexo C.

A figura 35 mostra as projeções de uma reta (r) e de um ponto (A), pertencente a ela. Através do desenho em perspectiva, fica fácil perceber que o ponto tem suas projeções sobre as respectivas projeções da reta.

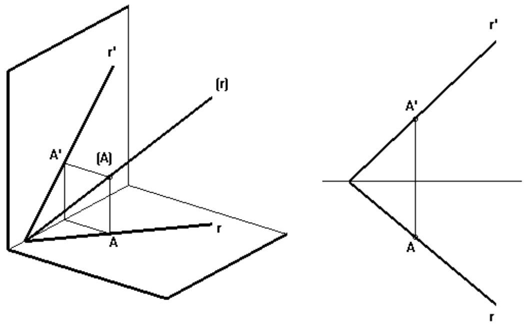


Figura 35: Projeções de um ponto pertencente a uma reta

No caso de um ponto contido em um plano, se ele se encontrar sobre um dos traços, sua outra projeção estará na linha de terra. Isso pode ser identificado, sem dificuldade, por uma representação da situação espacial em que fica evidente que o ponto pertence ao plano de projeção (figura 36).

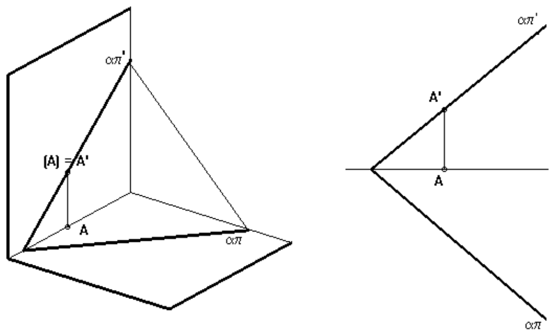


Figura 36: Projeções de um ponto contido em um plano.

A visualização espacial da questão deixa clara a diferença entre as situações mencionadas. Porém, aqueles que tentam "aprender" a Geometria mongeana, exclusivamente pela épura, são levados a "padronizar" a representação e, não raro, acontecem equívocos como o que está ilustrado pela figura 37.

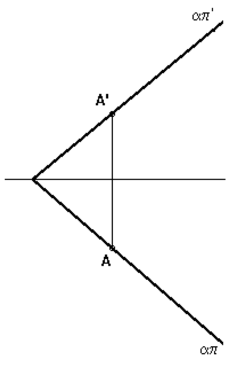


Figura 37: Representação incorreta de um ponto contido em um plano.

Esse exemplo mostra o tipo de confusão que costuma ocorrer com alguns iniciantes na disciplina. Embora possa parecer absurdo, o estudo da Geometria descritiva, em épura, é bastante comum. Ele é incentivado pela dificuldade inerente à visualização de uma situação espacial e a notória limitação em se fazer uma representação em perspectiva ou, ainda, um modelo tridimensional. Não é difícil prever que o problema tende a se agravar, quando as questões tornam-se mais complexas.

Imediatamente após as considerações a respeito da superfície plana, Monge passa à solução das nove questões (que envolvem pontos, retas e planos) destinadas a desenvolver a prática do método das projeções. O conteúdo, contido nessas questões, encontra-se organizado e distribuído nos diversos capítulos do F.I.C., em uma seqüência determinada pela relação de dependência entre os tópicos. Assim, cada problema, proposto no livro didático, é solucionado, tendo por base problemas resolvidos anteriormente e teoremas já descritos, acrescidos de algum fator novo, da forma como foi exemplificado na resolução da primeira questão de Monge.

A segunda questão, de Monge, trata do paralelismo de planos:

> 15. Sendo dados (fig.5) hum plano, do qual os dois traços sejão AB, e BC, e hum ponto, do qual as projecções sejão G, e *g*; construir os traços de hum segundo plano conduzido pelo ponto dado, parallelamente ao primeiro (SANTOS, 1812, p.29).

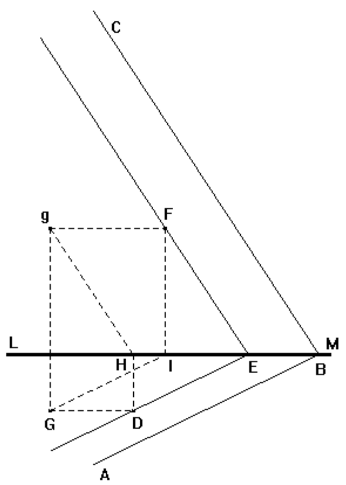


Figura 38: Desenho baseado na figura 5 do livro de Monge.

> *Solução.* Os traços do plano pedido devem ser parallelos aos traços respectivos do plano dado, porque estes traços considerados dois a dois, são as interseções de dois planos parallelos com hum mesmo plano. Não se trata mais, senão de achar para cada hum dos traços, hum unico dos pontos por onde elle deve passar. Para o que concebamos pelo ponto dado huma recta horisontal que exista no plano que procuramos, esta recta será parallela ao traço AB, e cortará o plano vertical em hum ponto que será hum dos pontos do traço do

plano procurado sobre o plano vertical; teremos as suas duas projecções tirando pelo ponto *g*, a horisontal indifinida *g*F, e pelo ponto G, a recta GI, parallela a AB. Se prolongarmos GI, até que encontre a intersecção LM dos dois planos de projecções no ponto I, este ponto será a projecção horisontal, da intersepcção da recta horizontal com o plano vertical. Logo este ponto de intersecção se achará sobre a vertical IF, tirada pelo ponto I. Porém, elle deve tambem achar-se sobre *g*F; Logo elle se achará no ponto F de intersecção destas duas ultimas rectas. Logo em fim se pelo ponto F, se tirar huma parallela a BC, esta será sobre o plano vertical, o traço do plano procurado; e se, depois de ter prolongado este traço até que elle encontre LM em hum ponto E, tirarmos ED parallela a AB, teremos o traço do mesmo plano sobre o plano horisontal.

Em lugar de concebermos huma recta horisontal sobre o plano procurado, poderiamos ter imaginado huma parallela ao plano vertical, o que por hum raciocinio absolutamente semelhante daria a construcção seguinte.

Conduza-se pelo ponto G e parallelamente a LM, a recta indifinida GD; e pelo ponto *g* a recta *g*H parallela a CB, a qual se prolongará até que ella corte LM em hum ponto H, pelo qual se tire HD perpendicular a LM: esta ultima intersectará GD em hum ponto D, se por este tirarmos huma parallela à AB, teremos hum dos traços do plano pedido, e se, depois de depois de ter prolongado este traço até que elle encontre LM em hum ponto E, tirarmos EF paralela à BC, teremos o traço sobre o plano vertical (SANTOS, 1812, pp.29,30).

Na figura 39, fizemos uma ilustração a fim de melhor visualizar a solução de Monge. O plano procurado tem os traços respectivamente paralelos aos traços do plano dado e é definido pelos pontos (G)EF, em que: (G) é o ponto dado; F é a interseção da horizontal (G)F, do plano procurado, com o plano vertical de projeção; E é o encontro do traço vertical do plano procurado, com a linha de terra (ponto que também pertence ao traço horizontal do plano).

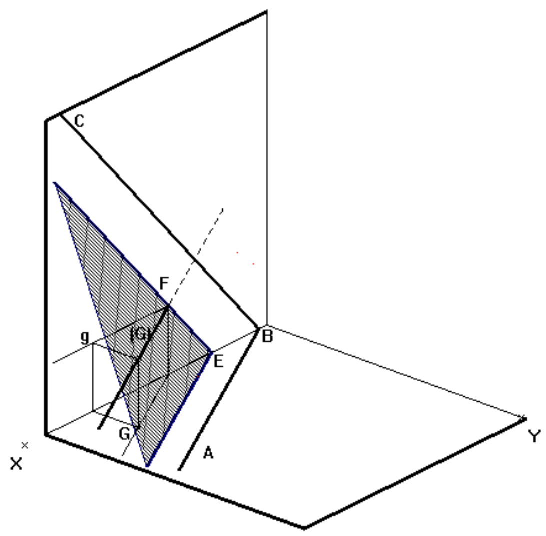


Figura 39: Interpretação da solução de Monge.

No F.I.C. essa questão é apresentada no capítulo das posições relativas das retas e dos planos (Capítulo III). É o problema do item 95: "*Por um ponto dado, fazer passar um plano parallelo a um plano dado*" (F.I.C., 1910, p. 53). Antes de chegar a esse problema, o livro já discorreu, separadamente, sobre cada uma das etapas da solução. No capítulo II há os seguintes itens pertinentes: (i) item 54, que fala dos traços de uma reta pertencente a um plano; (ii) itens 56 e 57, que tratam da reta horizontal de um plano. No capítulo III, o item 90 versa sobre o paralelismo de planos; o 93 mostra como traçar, por um ponto dado, uma horizontal paralela a um plano conhecido.

A terceira questão de Monge, que trata da perpendicular de um ponto a um plano e do respectivo ponto de interseção, engloba uma quantidade considerável de tópicos, que foram distribuídos ao longo do livro didático F.I.C.. Para acompanhar a sua solução, visualizando-a no espaço, são necessários um conhecimento e uma prática da geometria tridimensional e do método das projeções, bastante razoáveis:

> 16. Sendo dado hum plano (fig. 6) do qual sejão os seus dois traços AB, BC, e hum ponto do qual as duas projecções sejão D, d, construir 1. as projecções da recta abaixada perpendicularmente do ponto sobre o plano, II. A projecção do ponto do encontro da recta com o plano.

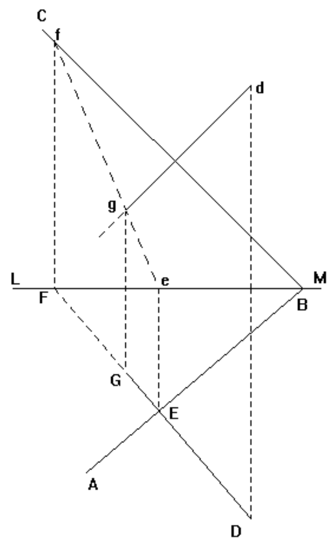


Figura 40: Desenho baseado na figura 6 do livro de Monge

> *Solução.* As perpendiculares DG, dg, abaixadas dos pontos D, e d, sobre os traços respectivos do plano, serão as projecções indifinidas da recta pedida; porque, se pela perpendicular imaginarmos hum plano vertical, este plano cortará o plano horisontal e o plano dado, em duas rectas que serão, huma e outra, perpendiculares á commum intersecção AB destes dois planos: ora, a primeira destas rectas, a saber a recta DF, sendo a projecção do plano vertical, he tambem a da perpendicular que elle comprehende; logo a projecção desta

> perpendicular deve passar pelo ponto D, e deve ser perpendicular a AB. A mesma demonstração tem lugar para a projecção vertical.
>
> Em quanto ao ponto de encontro da perpendicular com o plano, he claro que elle se deve achar sobre a intersecção deste plano com o plano vertical tirado pela perpendicular, intersecção que está projectada indifinidamente sobre EF. Se tivessemos a projecção vertical *fe* desta intersecção, ella conteria a do ponto pedido; e como este ponto deve tambem ser projectado sobre a recta *dg*, elle se acharia na intersecção *g* das duas rectas, *fe* e *dg*. Só nos resta pois achar a recta *fe*; ora, a intersecção do plano dado com o plano vertical que lhe he perpendicular, encontra o plano horisontal no ponto E, do qual teremos a projecção vertical *e*, abaixando E*e* perpendicularmente sobre LM; e ella encontra o plano vertical de projecção em hum ponto, do qual a projecção horisontal he a intersecção da recta LM com DG, prolongada se for necessario, e da qual a projecção vertical deve estar, tanto sobre a vertical F*f* como sobre o traço CB, ella estará pois no ponto *f* da intersecção.
>
> Sendo achada a projecção vertical *g* do pé da perpendicular, he fácil construir a sua projecção horisontal; porque se abaixarmos sobre LM a perpendicular indifinida *g*G, esta recta deverá conter o ponto pedido, ora, a recta DF deve-o conter também: logo elle estará no ponto G da intersecção destas duas rectas (SANTOS, 1812, pp. 31-32).

A figura 41 mostra a solução de Monge, em que a reta procurada é (D)(G) e o ponto de encontro é (G). Monge utiliza o plano vertical auxiliar, que contém a reta (D)(G), e é um dos planos projetantes da reta: (D)D(G). Demonstra que a projeção horizontal da reta, DG, será perpendicular ao traço horizontal do plano dado AB. De forma análoga, faz uso do segundo plano projetante da reta, (D)d(G), para determinar a projeção vertical da reta procurada. Quanto ao ponto (G), Monge deduz que será o encontro da reta de interseção entre o plano vertical auxiliar e o plano dado, Ef, e a reta (D)(G), cujas projeções já foram definidas.

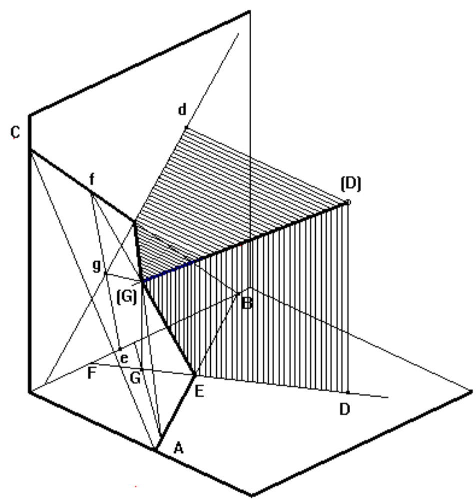


Figura 41: Interpretação gráfica da solução de Monge.

No F.I.C., esse problema aparece no número 102, dentro do artigo que trata da perpendicularidade entre retas e planos, no capítulo III. É interessante observar que, em suas aulas na *Ecole polytechnique,* Monge propôs dois outros problemas antes de apresentá-lo aos seus alunos: (i) construir o plano que passa por três pontos dados; (ii) determinar os ângulos de um plano com os planos de projeção.

A quarta questão apresenta uma variação da terceira. A reta é conhecida e o plano é que deve ser determinado:

> 17. Sendo dados huma recta (fig. 7) da qual duas projecções, sejão AB, *ab,* e hum ponto, cujas duas projecções sejão D, e *d;* construir os traços do plano tirado pelo dito ponto perpendicularmente a recta dada (SANTOS, 1812, p. 32)

Para resolvê-la, o professor faz uso dos planos projetantes de uma reta (os mesmos da terceira questão) e da reta horizontal de um plano (usada na segunda questão). Na *Ecole polytechnique* há um terceiro problema equivalente: traçar uma reta perpendicular a uma reta dada, por um ponto dado, e determinar o ponto de interseção.

Na quinta questão, Monge pede a determinação da reta de interseção entre dois planos. Esse assunto foi um dos diversos tópicos, tratados na resolução da terceira questão. Curiosamente, o professor decidiu ressaltá-lo em uma questão isolada. Gino Loria demonstra sua contrariedade diante desse fato, logo após elogiar o grande geômetra francês: "*... qualche riserva si può fare tanto sull'ordine nel quale si seguono le questioni trattate quanto sulla scelta di esse; chè, ad esempio, è strano che Monge si arresti e determinare l'intersezione di due piani mentre non faccia che un incidentale cenno della ricerca del punto comune ad una retta ed un piano*" (LORIA, 1921, p. 110).

Da sexta questão até a nona, são examinados os ângulos. Esse assunto, no F.I.C., pertence ao capítulo V (que precede o das aplicações do método na resolução de problemas relativos às figuras planas e aos poliedros), com o qual é encerrada a primeira parte do livro.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na introdução desta dissertação, discutimos a dualização da Geometria descritiva assinalada por Hachette: racional e técnica. Refletimos que essa ciência seguiu caminhos diversos em função de objetivos distintos. Em seu caráter racional, incorporou-se à matemática pura no empenho das descobertas e demonstrações de teoremas. Convém enfatizar a complementaridade, insistentemente assinalada por Monge, entre as duas formas de representação da Geometria - analítica e sintética – em que a primeira se sobressai pela simplicidade de seus métodos; enquanto a segunda, por sua qualidade intuitiva.

É notório que, nas mãos dos matemáticos, a Geometria descritiva serviu ao desenvolvimento da Geometria espacial ao estabelecer uma sólida relação entre a figura tridimensional e sua projeção em uma superfície de duas dimensões. Essa consideração foi determinante na concepção da Geometria projetiva em que Poncelet definiu as propriedades de uma figura que são mantidas na projeção. A partir dessas "propriedades projetivas", diversos teoremas da Geometria sintética puderam ser demonstrados, sem recorrer à análise.

Na qualidade de ciência aplicada, porém, nossas pesquisas indicam que os profissionais das áreas técnicas focalizaram suas atenções nas práticas resultantes, dispensando, progressivamente, o conhecimento teórico.

A Geometria descritiva encontra-se, portanto, no tronco principal dessas duas ramificações – Geometria projetiva / Ciência aplicada –. Enquanto a primeira se desenvolveu como ciência, expandindo o conteúdo da Geometria descritiva, no sentido de levar às novas descobertas matemáticas, a segunda proporcionou uma evolução, bem diferente, da disciplina. Houve, nesse caso, uma tendência ao atrofiamento do conteúdo, incorrendo em um retorno aos manuais práticos.

Indiferente a essa bifurcação, a Geometria descritiva se manteve nas escolas como disciplina autônoma. Isso gerou, ao longo dos anos, uma enorme lacuna entre o conteúdo da disciplina e suas aplicações práticas. Suspeitamos, ainda, que esse hiato vem sendo reforçado, pela deficiência na atualização do ensino dessas aplicações.

Diante disso, procuramos resgatar as questões primordiais da criação de Monge. A melhor síntese de seus propósitos encontra-se nas palavras do próprio autor, proferidas nas Seções do Conselho de administração da *Ecole centrale des travaux publics.* Uma pequena parte desse discurso está reproduzida na seção 4, página 73. Monge diz que, no primeiro ano, a Geometria descritiva deverá ser, ela mesma, o objeto de estudo para que, nos anos seguintes, possa servir como meio ou instrumento. É interessante observar que apenas dois meses, desse ano inicial, são dedicados à apreensão do método. Nos meses restantes, os alunos deverão aprender a utilizá-lo nas diversas aplicações práticas usuais. O professor salienta, mais adiante, que o esforço mental exigido será grande, porém,

> *...qu' il ne faut pas exiger d'un élève un travail pénible d'un ou de plusieurs jours et qui ne procurerait pas une instruction qui le dédommagerait de ce travail.*
> *...Il ne faut exiger de dessins que ceux qui exercent l'intelligence de l'élève, qui lui apprennent une opération dont il sent l'utilité et qu'il ne savait pas, ou qui lui apprennent la forme de certains objets qu'il est nécessaire qu'il connaisse et qu'il ne connaîtrait pas aussi bien de toute autre manière* (MONGE, apud LANGINS, 1989, anexo B, p.117).

Portanto, o mestre sugere um trabalho árduo da parte do aluno, mas enfatiza que o aprendiz não deverá, jamais, perder de vista o objetivo do seu esforço.

Nossas investigações nos levaram à constatação de que as convicções de Monge não foram, efetivamente, consideradas. Enquanto o professor orienta a apreensão do método em um curto espaço de tempo, o ensino subseqüente da Geometria descritiva estende essa introdução inserindo diversas questões particulares, soluções de problemas teóricos, específicos e as respectivas nomenclaturas e convenções. Essa conclusão fundamenta-se na comparação elaborada na seção 5, entre duas formas de ensinamento da disciplina: a de Monge e a que foi propagada nas escolas.

Outra idéia de Monge, solapada com a inserção indiscriminada de conteúdo, foi a de incorporar o método ao conjunto de conhecimentos do aluno, através da resolução de problemas práticos usuais. Ao invés disso, o discípulo passou a ser cobrado por dificuldades teóricas e memorização das convenções criadas. As aplicações práticas (no corte de pedras e de madeiras, nas sombras, perspectivas, mapas e peças de máquinas), que serviam ao propósito mencionado, foram postergadas para séries seguintes, podendo, ou não, fazer parte da programação da carreira em questão. A avaliação do primeiro ano do ensino da Geometria descritiva na *Ecole Polytechnique*, elaborada pelo instrutor da disciplina e constante do anexo E, apresenta a gama de aplicações que eram ministradas com o referido objetivo.

Para entender os motivos que levaram a essa situação, recorremos às definições apresentadas na introdução deste estudo. A idéia de que a Geometria descritiva serve para "representar graficamente o resultado de problemas cuja solução teórica encontra-se na Geometria espacial" mascara o fato de que a transformação da resposta, obtida na forma espacial, em um desenho plano, não é um processo imediato. Em outras palavras, não basta conhecer o mecanismo da representação mongeana e a solução teórica do problema - o desenho em épura requer a aplicação de outros recursos, definidos a partir da convergência desse duplo conhecimento.

Vamos exemplificar com o seguinte problema: Conhecidos um ponto e um plano, determinar a distância do ponto ao plano. A solução, dada pela Geometria espacial, consiste em baixar uma perpendicular, do ponto ao plano, e medir a distância entre o ponto dado e o ponto em que a perpendicular encontra o plano. Para representar essa solução em épura, no entanto, é necessário recorrer a um plano auxiliar, que contenha a reta e seja perpendicular a um dos planos de projeção - o plano projetante da reta. Esta solução está descrita no terceiro problema de Monge (seção 5, pp.118-119). Resta, ainda, determinar a verdadeira grandeza do segmento encontrado, que poderá ser obtida a partir do triângulo retângulo, conforme indicado por Monge e reproduzido na figura 28 (seção 5, p.98). Diante desse exemplo, sustentamos a idéia de que a Geometria descritiva não é, apenas, um conjunto de regras. A transformação de uma situação tridimensional em uma conjuntura plana requer, além de um 'código' de conversão, um artifício que só pode ser obtido através de uma familiaridade com a teoria da Geometria espacial.

É compreensível que, no intuito de desenvolver essa intimidade com a disciplina, tenham sido introduzidos tantos tópicos no seu ensino. Não estamos contestando a validade dessa conduta. Questionamos, porém, a decorrência dessa proposta que conduziu ao distanciamento entre os fundamentos da ciência e suas aplicações e culminou na total abstração da disciplina. Esta questão convém ser pesquisada e dá margem, inclusive, à abordagem do tema em outras áreas científicas.

Outra causa dessa separação foi apontada por Frézier e consiste na dicotomia entre os conhecimentos do construtor e os do matemático. Segundo o genial autor do século XVIII, esse é o motivo que leva à criação de regras práticas em detrimento do uso da razão. Ele próprio admite não ter resistido à tentação de completar seu tratado com exemplos 'prontos' de aplicação da Estereotomia na Arquitetura.

A bifurcação do saber é um fato, e poucos são aqueles que detêm a dupla experiência. Por isso, é de se esperar que ocorra a disseminação de regras formais para a consolidação de um trabalho prático, independente da divulgação da respectiva teoria.

Não tem sido diferente com a Geometria descritiva. Desde os primórdios, ainda nas lições de Monge, vimos que alguns instrutores tendiam a dar uma direção mais específica à disciplina. Nosso ponto de vista é que essa predisposição já começa a se mostrar a partir da substituição dos debates (previstos para intercalarem as aulas) por exercícios práticos. Dessa forma, as discussões de questões teóricas foram permutadas por exercícios propostos para treinar o método. Certamente, essa comutação contava com a aprovação de Monge, uma vez que este defendia a necessidade de muita prática, para tornar o aprendiz capaz de se expressar graficamente e de compreender, com exatidão, a representação de outros.

Achamos, ainda, bastante significativa a intervenção de Duchesne ao sugerir a apresentação do método, sem qualquer menção às elucubrações iniciais, que culminaram na escolha da superfície plana como elemento de referência para a localização de um ponto no espaço. De fato, entre os diversos autores de livros de Geometria descritiva, que tivemos a oportunidade de consultar, não encontramos um único que reproduzisse as divagações iniciais de Monge. Convém lembrar que essa introdução era considerada, pelo autor, como a própria essência do método exposto.

Diante do dilema, imposto pela dicotomia de conhecimentos, somos induzidos a aceitar a bipartição. No entanto, acreditamos que a essência da Geometria descritiva deve ser efetivamente apreendida por ambas as partes, para que haja uso profícuo dos benefícios - por ela proporcionados - à compreensão do espaço tridimensional nas suas diversas representações.

Pelo que pudemos concluir, a inserção de conteúdo ao programa original de Monge deve ser reavaliada, tendo-se em conta os seguintes pontos: (i) dar ênfase à compreensão do método, em lugar de sobrecarregar o aluno com excesso de convenções e casos particulares; (ii) evitar a resolução de problemas através de respostas prontas em épura, ou seja, deve-se evocar, sempre, a imagem tridimensional da situação; (iii) procurar consolidar o aprendizado com exercícios de aplicações práticas, imediatamente após a apresentação da teoria.

O primeiro item pode ser exemplificado com o estudo da reta. Enquanto Monge mostra as projeções, a pertinência do ponto e a determinação da verdadeira grandeza de um segmento de reta, o ensino atual apresenta um estudo sistemático de todas as possíveis posições que uma reta pode apresentar diante dos planos de projeção, nomeando cada uma delas. A pertinência do ponto é um capítulo à parte; e a verdadeira grandeza de um segmento, quando este se encontra oblíquo a ambos os planos de projeção, é tido como um problema, que será resolvido em um capítulo bem distante (em geral, no ano escolar seguinte), quando forem estudados os métodos descritivos.

De fato, o estudo das diversas posições de uma reta consiste em um treinamento bastante proveitoso, quando executado pelo aprendiz. No entanto, se exposto de maneira metódica, torna-se uma montoeira de épuras e nomes cuja função passa a ser de memorização. A pertinência do ponto à reta é conseqüência imediata do método de projeções; e a verdadeira grandeza de um segmento é deduzida, sem dificuldade alguma, por quem compreendeu o método; portanto, não vemos razão para que seja aprendida em um momento distinto. Desta forma, propomos que seja feita uma revisão no conteúdo da disciplina, assim como, na ordem de apresentação dos tópicos. Para isso, seria aconselhável uma leitura cronológica dos principais tratados, procedendo à análise de suas reais contribuições à exposição de Monge. Convém enfatizar que Monge apresentou a matéria de forma sucinta, porém, complementando-a com exercícios que exigiam, do aluno, tempo e dedicação.

A repetição de soluções prontas, tomadas diretamente da épura (item dois), é sustentada, principalmente, pela dificuldade em se fazer a imagem mental de situações espaciais. Na seção 5 (pp.102-103) apresentamos alguns comentários a respeito da "leitura no espaço", constante nos *Exercices de Géométrie descriptive,* da F.G.M.. O autor sugere a confecção de modelos concretos, ao mesmo tempo que alerta sobre a inviabilidade desse recurso para situações complexas.

Com a computação gráfica, essas modelagens tornaram-se exeqüíveis. Seja através de programas que permitem uma representação em perspectiva, cujo ponto de vista ou a posição do objeto podem ser facilmente alterados; seja por outros, que executam a planificação de sólidos, auxiliando na confecção de modelos concretos. A preparação desses exemplares era mais trabalhosa no século XIX. Portanto, podemos pensar na utilização das ferramentas computacionais, para facilitar a compreensão do espaço tridimensional. Assim, propomos o desenvolvimento de aplicativos, para o ensino da Geometria descritiva, que levem em conta os recursos que aumentam a capacidade da percepção espacial. Acreditamos que, colocado diante da épura e da 'realidade espacial', simultaneamente, o aluno venha a adquirir o hábito de visualizar, mentalmente, a conjuntura.

Um exemplo desse procedimento pode ser ilustrado por um projeto[1] desenvolvido em um programa de Geometria dinâmica[2]. A figura 42 ilustra uma das telas preparadas

---

[1] Sobre esse projeto ver: Gani, Belfort, *Cabri and Descriptive Geometry: Integrating Different Representations.* Em Livro do Primeiro Congresso Internacional sobre Cabri-Géomètre, Selected Works. PUC/ São Paulo, outubro de 1999.

para esse trabalho. Trata-se da seção de um cone circular reto por um plano oblíquo à sua base. As figuras 42a e 42b mostram diferentes posições do plano secante (na primeira, o resultado da seção é uma elipse; na segunda, uma hipérbole). A situação é exibida de duas formas, com o objetivo de facilitar a compreensão: uma perspectiva axonométrica, à esquerda; e a épura descritiva, à direita. O programa disponibiliza inúmeras facilidades para a elaboração de ambas representações. Além disso, por sua propriedade característica, permite a passagem de uma posição do plano, à outra, pela simples movimentação deste no desenho em épura. Em outras palavras, o desenho não precisa ser refeito e todas as posições intermediárias podem ser visualizadas, instantânea e seqüencialmente, na tela do computador.

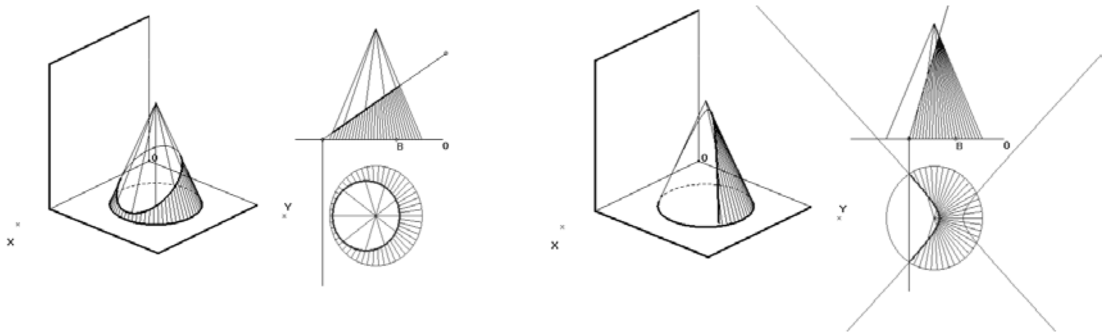


Figura 42: Seções de um cone circular reto, por um plano oblíquo à sua base.

Ainda sobre a questão da interpretação tridimensional de uma figura projetada, verificamos que a geometria de Monge proporcionou um avanço considerável na representação de superfícies. A idéia de exprimir-se por intermédio de duas geratrizes, no caso das superfícies curvas, não só promoveu uma nova forma de classificá-las[3] como levou a corroboração de uma maneira profícua de mostrá-las, no plano.

Para tornar mais claro os benefícios prestados, vamos pensar em corpos poliédricos e corpos curvos. Os primeiros são limitados por superfícies planas que geram, nas suas interseções, retas (arestas) e pontos (vértices). A simples representação dessas linhas e pontos permite uma compreensão razoável do sólido. A representação de corpos poliédricos, assim como, a determinação de interseções entre eles, não chegava a ser um problema para os precursores de Monge. Muito embora não houvesse um método específico, os arquitetos e engenheiros eram capazes de solucionar inúmeros casos de interseções. Quanto aos corpos limitados por superfícies curvas, porém, a

[2] Os programas de Geometria dinâmica se destacam, no ensino da geometria, pela particularidade que têm em permitir a movimentação, ou transformação, de uma figura, mantendo as propriedades geométricas dos elementos envolvidos na construção.
[3] Na seção 2, reproduzimos o comentário de Lagrange a respeito das idéias de Monge sobre as superfícies (pp. 25-26).

situação é bastante diferente. Os antigos não conheciam uma representação satisfatória para esses sólidos, e a determinação das interseções era resolvida, empiricamente, por tentativas.

Ao compararmos um poliedro com um sólido curvo, de superfície contínua, veremos que, enquanto o primeiro possui arestas e vértices, não há linhas concretas no segundo. A representação destes últimos seria pela projeção de sua linha de contorno externo. Agindo assim, não há como diferenciar uma figura plana, de um sólido (no caso da esfera, ela seria representada pelo círculo máximo e nada a distinguiria de uma figura plana). Na figura 43 representamos um quadrado, um cubo, um círculo e uma esfera. Sem utilizar o recurso da sombra, podemos distinguir, facilmente, o quadrado, do cubo, mostrando as arestas e os vértices do sólido. No caso do círculo e da esfera, a diferenciação foi determinada através da representação de algumas posições de duas geratrizes da superfície esférica, idéia sistematizada por Monge.

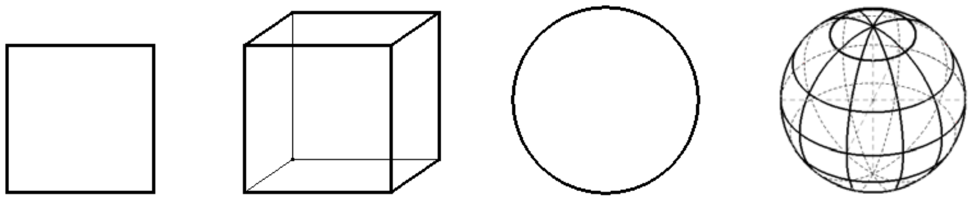


Figura 43: Representações de figuras planas e espaciais.

Outra forma de causar a sensação espacial reside na construção das sombras. Objeto de grande interesse dos artistas, o "*chiaroscuro*" suscitou inúmeros estudos entre pintores, matemáticos e filósofos[4], ao longo da história. Igualmente nessa área, a Geometria descritiva proporcionou grandes aquisições ao acrescentar às pesquisas anteriores, fundamentadas na perspectiva e na observação direta, os meios de obter as formas das linhas que definem as nuanças de intensidade da luz. Citamos (seção 4, p. 75) uma memória redigida por alunos de Monge (do curso destinado a selecionar os primeiros chefes de brigadas) em que esse assunto foi desenvolvido. Além do mais, a aplicação da Geometria descritiva, nas sombras e na perspectiva, era considerada, pelo autor, como um complemento da disciplina.

Convém lembrar que o computador é um instrumento (como a régua e o compasso) e o resultado da representação tridimensional, na superfície da tela, encontra-

[4] Sobre esse assunto, sugerimos o livro de Baxandall (1997), *Sombras e Luzes,* em que o autor discute o papel das sombras na nossa experiência visual, relacionando teorias modernas às idéias do século XVIII.

se fundamentado nas descobertas dos séculos XV, XVIII e XIX (respectivamente, na Perspectiva, na Geometria descritiva e na Geometria projetiva). Evidentemente, o usuário de um programa de computação gráfica precisa ter um conhecimento razoável dessas ciências para fazer uma leitura correta da imagem que a máquina apresenta ou, ainda, para que possa ter alguma autonomia na elaboração de seus projetos.

Resta-nos, além disso, refletir quanto à atualização das aplicações práticas, que deverão fazer parte do conteúdo da matéria. É desejável que a consolidação do conhecimento ocorra por intermédio de atividades de uso contemporâneo. Por outro lado, devem, também, ser analisadas as vantagens que são peculiares à atividade do corte de pedras. A prática adquirida em função da resolução dos problemas de encaixe de blocos rígidos, no intuito de formar uma figura harmoniosa e estável, nos parece indispensável à apreensão do conhecimento. Nesse assunto, a teoria constante no tratado de Frézier pode ser bastante útil. Sugerimos uma conjugação entre esta obra e o método mongeano, pois, enquanto a primeira traz uma teoria essencialmente voltada para a prática, a segunda estabelece regras bem definidas para a representação bidimensional.

Cabe ressaltar que, uma vez afastada das atividades práticas, a Geometria descritiva passou a criar problemas abstratos, decorrentes da própria épura, conforme sugerido por J. Pillet (1921), ao alertar quanto a transformação da disciplina em um “jogo de paciência, enfadonho e sem função”(seção 1, pp.10-11). Para finalizar, recorremos, ainda outra vez, à opinião de Monge, ao aventar que o aluno deverá trabalhar arduamente sem, no entanto, perder de vista o objetivo de seu esforço.

REFERÊNCIAS

ANTOMARI, X., 1898, **Traité de Géométrie Descriptive**, Paris, Librairie Nony & Cie.

ARAGO, D. F. J., 1848, "Gaspard Monge, biographie lue en séance publique de l'Académie des Sciences". In: Gide et J. Baudry, T.O. Weigel**, Oeuvres Complètes de François Arago, Notices Biographiques**, t.2, v.2, Paris, Leipzig, 1854, pp.428-592. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr>. Acesso em: out. 2001.

AZEVEDO, F., 1994, **As Ciências no Brasil**. 2.ed., Rio de Janeiro, UFRJ.

BAXANDALL, M., 1997, **Sombras e Luzes**. Trad. A. P. Danesi. São Paulo, Edusp.

BELHOSTE, B., 1992, "Les problèmes de défilement". In: DHOMBRES, J. (dir.), **L'École Normale de l'an III. Leçons de Mathématiques**, anexe 16, Paris, Dunod, pp.541-546.

BELHOSTE, B.; TATON, R., 1992, "L'invention d'une langue des figures". In: DHOMBRES, J. (dir.), **L'École Normale de l'an III. Leçons de Mathématiques**, Paris, Dunod, pp.269-317.

BOYER, C. B., 1996, **História da Matemática**. Trad. E. Gomide. 2.ed. São Paulo, Edgard Blücher.

CASTRO, F.M.O., 1994, "A Matemática no Brasil". In: AZEVEDO, F.(org.), **As Ciências no Brasil**. 2.ed., Rio de Janeiro, UFRJ, pp.55-96.

CATALAN, E.,1867, **Traité Élémentaire de Géométrie Descriptive**, 3e.éd. revue et augmentée Paris, Dunod.

CHASLES, M.,1837, **Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie**, Bruxelles, M. Hayez. Paris, Jacques Gabay, c1989.

CHURCH, A.E.; BARTLETT,G.M., c1864, **Elements of Descriptive Geometry, with applications to spherical and isometric projections, shades and shadows, and perspective**, New York, Barnes & Burr, George M. Bartlett, c1911.

CONDORCET, J.A.N.C., 1792, "Rapport sur l'organisation générale de l'Instruction publique" [Documento eletrônico]. In **: Oeuvres de Condorcet**, Paris, INALF, 1961 Reprod. de l'éd. de Paris: Firmin Didot frères, 1847-1849. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr >. Acesso em: maio 2001.

DEFORGES, Y., 1981, **Le Graphisme Technique. Son histoire et son enseignement**, Seyssel, Champ Vallon.

DELORME, P., 1561, **Nouvelles inventions pour bien bastir et à petits fraiz**, Paris, Federic Morel. Disponível em: < http://gallica.bnf.fr >. Acesso em: jan. 2002.

______.1567, **Le premier tome de l'Architecture,** Paris, Federic Morel. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr >. Acesso em: jan. 2002.

DESARGUES, G.,1640, "Coupe des pierres ". In : POUDRA, N.G, **Oeuvres de Desargues,** vol.1, Paris, Leiber, 1864. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr >. Acesso em: mar. 2001.

DESCARTES, R.,1664, "La Géométrie". In: COMTE, A., **La Géométrie Analytique, nouvelle édition precedée de la Géometrie de Descartes**, Paris, Louis Bahl, Rio de Janeiro, F. Briguiet & C., 1894.

DHOMBRES, J., 1989, **Histoire de L'École Polytechnique,** Paris, Belin.

______.1992, **L'École Normale de l'an III. Leçons de Mathématiques**, Paris, Dunod.

DORIA, E., 1937, **Memoria Historica do Collegio de Pedro Segundo**. Rio de Janeiro, Ministério da Educação.

DUPIN, C., 1819, **Essai Historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge**, Paris, Bachelier.

FANO, G.; CARRUS, S., 1991, "Exposé Parallèle du Développement de la Géométrie Synthétique et de la Géométrie Analytique Pendant le 19ième Siècle". In : MOLK, J., **Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées,** tomo III, vol.1, Fondements de la Géométrie, Jacques Gabay, Paris, p.185-259.

F.G.M, 1920, **Exercices de Géométrie descriptive**, 5e éd., Tours, Maison Alfred Mame et Fils, Paris, J. de Gigord.

______. [19 --], **Exercices de Géométrie**, 8e éd., Tours, Alfred Mame et Fils, Paris, J. de Gigord.

F.I.C., 1910, **Elementos de Geometria Descriptiva**, revistos e adaptados por E. B.Raja Gabaglia, Rio de Janeiro, H. Garnier.

______.1946, **Elementos de Geometria Descritiva** com numerosos exercícios, 11. ed., tradução e adaptação de E.B.Raja Gabaglia, revista, correta e atualizada pelo Ten. Cel. Dr. W. P. Cotta, Rio de Janeiro, F. Briguiet & Cia.

F.J., [1902?], **Eléments de Géométrie Descriptive** avec de nombreux exercices, Tours, Alfred Mame & Fils, Paris, Ch. Poussielgue.

FOURCROY, A. F., 1794, "Rapport sur les mesures prises par le Comité De Salut public, pour l'Etablissement de l'Ecole centrale des travaux publics". In: LANGINS, J., **La République avait besoin de savants**, anexe H, Paris, Belin, 1989, pp.200–226.

FOURCY, A.,1828, Histoire de L'École Polytechnique, Paris, Chez l'Auteur, A L'Ecole Polytechnique. In: **Histoire de L'École Polytechnique**, introduction J. Dhombres, Paris, Belin, 1989.

FREIRE, F.C., 1879, **Novo Diccionario Francez-Portuguez**, Paris, Vva J.P.Aillaud, Guillard e Ca..

FREZIER, A.,1737, La Théorie et la Pratique de la Coupe des Pierres et des Bois, pour la construction des voûtes et autres parties des bâtimens civils & militaires, ou **Traité de Stéréotomie a l'usage de l'Architecture**, t. 1, Strasbourg, Jean Daniel Doulsseker le Fils, Paris, L.H.Guerin. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr>. Acesso em: dez. 2001

______. ______.1738-1739, Strasbourg, Jean Daniel Doulsseker le Fils, Paris, Charles-Antoine Pombert, 3t. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr>. Acesso em: dez. 2001.

GABAGLIA, E.B.R.,1910, **Elementos de Geometria Descriptiva**, Rio de Janeiro, H. Garnier.

GAMA, R., 1987, **A Tecnologia e o Trabalho na História**, São Paulo, Nobel / EDUSP.

______.1993, **Ciência e Técnica. Antologia de textos históricos**, São Paulo, T.A. Queiroz.

GIEDION, S.,1968, **Espacio, Tiempo y Arquitectura**. Trad. Boada, I. P., 4 ed., Barcelona, Ulrico Hoelpi.

GLAS, E., 1986, "On the dynamics of mathematical change in the case of Monge and the French Revolution." **Studies in History and Philosophy of Science**, 17, pp.249-268.

______.2002, "Socially conditioned mathematical change: the case of the French Revolution." **Studies in History and Philosophy of Science**, 33, pp.709-728.

LA GOURNERIE, J.,1891, **Traité de Géométrie Descriptive**, 3e.éd. par Ernest Lebon, Gauthiers Villars et Fils, Paris.

HACHETTE, J.N.P.,1828, **Traité de Géométrie Descriptive, comprenant les aplications de cette géométrie aux ombres, a la perspective et a la stéréotomie;** 2e éd., Paris, Corby.

KRUFT, H.W., 1994, **A History of Architectural Theory, from Vitruvius to the Present**, New York, Princeton Architectural Press.

KUHN, T. S.,1978, **A estrutura das revoluções científicas**, 2.ed. São Paulo, Perspectiva.

LANGINS, J., 1989, **La République avait besoin des savants**, Paris, Belin.

LAURENT, R.,1992, "Théorie des ombres et des pénombres, perspective, perspective aérienne". In: DHOMBRES, J.(dir.), **L'École Normale de l'an III. Leçons de Mathématiques**, anexe 17, Paris, Dunod, pp.547- 563.

LAVOISY, O., 2000, **La Matière et l'Action :** Le graphisme technique comme instrument de la coordination industrielle dans le domaine de la mécanique depuis 3 siècles, Thèse, (Doucteur en Génie Industriel, Mention Sociologie et Economie) - Université Pierre Mendès France, 2000.

LEROY, C. F. A.,1845, **Traité de Stéréotomie comprenant les applications de la Géométrie Descriptive**, Liège, Félix Oudart.

LISHEVSKY, V, 2000, "Liberté, égalité, géométrie", **Quantum**: The Magazine of Math and Science, novembro/dezembro, pp.20-24.

LORIA, G., 1921, **Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri**, Milano, Ulrico Hoepli.

MELLO, A. B., 1972, **Brasil, 150 Anos de Independência**, Rio de Janeiro, Divulbrás.

MIRANDA, H.O., 2001, **O Ensino da Geometria Descritiva no Brasil: Da Academia Real Militar à Escola Politécnica do Rio de Janeiro**.153f. Dissertação (Mestrado em História da Ciência) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, SP, Brasil.

MONDUIT, L., 1889, **Traité Théorique et Pratique de la Stéréotomie au point de vue de la coupe des pierres,** 2e. éd., Paris, Ch. Juliot.

MONGE, G., 1795 (an III), "Stéréotomie". **Journal Polytechnique ou Bulletin du travail fait a l'Ecole centrale des travaux publics,** cahiers 1-2, p.1-14, Paris, L'Imprimerie de la République.

______. 1799, **Géométrie Descriptive. Leçons données aux Ecoles normales**, an VII, Paris, Baudouin. Paris, Jacques Gabay, c1989.

D'OCAGNE, M., 1896, **Cours de Géométrie Descriptive et de Géométrie Infinitésimale**. Encyclopédie des Travaux Publics, Paris, Gauthiers Villars et Fils.

PARDAL, P.,1984, **Memórias da Escola Politécnica**, Rio de Janeiro, Biblioteca Reprográfica Xerox.

PILLET, J., 1921, **Traité de Géométrie Descriptive**, nouveau tirage, Paris, Albert Blanchard.

PONCELET, J.V., 1865, **Traité des propriétés projectives des figures,** t. I, 2e. éd., revue, corrigé et augmentée, Paris, Gauthiers-Villars, réimpression autorisée, Paris, Jaques Gabay, c1995.

POUDRA, N.G., 1864, **Oeuvres de Desargues**, v.1, Paris, Leiber.

RODRIGUES, A., 1969, **Geometria Descritiva. Projetividades. Curvas e Superfícies,** 3.ed., 3 reimp., Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico.

ROEVER, W., 1918, "Descriptive Geometry and Its Merits as a Collegiate as Well as an Engineering Subject", **The American Mathematical Monthly**, The Mathematical Association of America, vol. XXV, n.4 (apr.), pp.145-159.

SAKAROVITCH, J., 1992, "La coupe des pierres et la géométrie descriptive". In: DHOMBRES, J. (dir.), **L'École Normale de l'an III. Leçons de Mathématiques**, anexo 15, Paris, Dunod, pp.531-540.

SAY, H., 1796, "Mémoire sur le Défilement des Fortifications". **Journal Polytechnique**, cahier 4, Paris, L'Imprimerie de la République, pp.588- 616.

SCHUBRING, G., 2003, **Análise Histórica de Livros de Matemática**, São Paulo, Autores Associados.

SCHWARTZMANN, S., 1979, **Formação da Comunidade Científica no Brasil,** Brasília, Finep.

SILVA, C. P., 1992, **A Matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento**, Curitiba, UFPR.

SOUZA, J. V. S., 1812, **Elementos de Geometria Descriptiva:** com applicações as artes**,** extrahidos das obras de Monge, Rio de Janeiro, Impressão Regia.

TATON, R., 1951, **L'Oeuvre Scientifique de Monge,** Paris, Presses Universitaires de France.

______. 1974, "Monge". In: Gillispie, C.C. (org.), **Dictionary of Scientific Biography**, v.IX, New York, Scribner.

______. 1992, "Un projet d'écoles secondaires pour artisans et ouvriers, préparé par Monge en septembre 1793". In: DHOMBRES, J. (dir.), **L'École Normale de l'an III. Leçons de Mathématiques**, Paris, Dunod, pp.574–582.

TELLES, P.C.S., 1994, **História da Engenharia no Brasil (Séculos XVI a XIX),** 2.ed.(revista e ampliada), Rio de Janeiro,Clavero.

TREVISAN, C., 2000, **Per la storia della stereotomia, metodi e construzioni**, ed. Eletrônica. Disponível em: http://brezza.iuav.it/dpa/ricerche/trevisan/, pp.52-74. Acesso em: jan. 2004.

ULBRICHT, S. M., 1998, **Geometria e Desenho. História, pesquisa e evolução**, Florianópolis, P.R. Silva.

VALENTE, W. R., 1999, **Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930),** São Paulo, Annablume.

VALLEE. L.L., 1825, **Traité de la Géométrie Descriptive**, 2e éd., Paris, Bachelier.

VALLOIS, E., 1909, **Cours de Géométrie Descriptive a l'usage descandidats a l'Ecole des Beaux-Arts**, Paris, Gauthiers-Villars.

VERNON, G., 1813, **Tratado elementar da Arte Militar e da Fortificação**. Trad. João de Sousa Pacheco Leitão, Rio de Janeiro, Impressão Regia.

VITRUVIUS, M.P, 1567, **Architecture ou Art de bien bastir**. Trad. franc. de Jan Martin, Paris, Jacques Gazeau.

ANEXO A – Plano do curso revolucionário de Geometria descritiva.

O curso foi ministrado por Monge, com o intuito de classificar os alunos selecionados para a *Ecole centrale des travaux publics*. Consta de 24 lições, aplicadas no período de 21 de dezembro de 1794 a 19 de janeiro de 1795 *(nivôse an III)*. O plano aqui apresentado foi traduzido por nós, a partir da republicação do manuscrito de Monge, dos arquivos do barão de Chaubry (TATON,1951, pp. 93-95).

PLANO DE CURSO:

I – Princípios gerais (lições 1 a 4).

1º Exposição da teoria das Projeções. Procedimentos que facilitam sua utilização.

2º Métodos para construir as interseções das superfícies curvas; as tangentes e os planos normais às linhas curvas; as normais e os planos tangentes às superfícies curvas.

3º Exemplos de aplicação dos princípios precedentes à solução de algumas questões relativas ao que resulta das formas dos corpos e de suas respectivas posições.

4º Geração, propriedades e construção das superfícies desenvolvíveis e das superfícies reversas.

II – Corte de pedras (lições 5 a 8).

1º Regulamentação das abóbadas e das aduelas; exposição das conveniências à que devem satisfazer.

2º Decomposição das abóbadas em aduelas. Condições às quais esta decomposição deverá se sujeitar em relação ao equilíbrio, à tenacidade da pedra e às conveniências gerais.

3º Procedimentos para dar, a cada uma das pedras que entram na composição de um edifício, a forma necessária para que, uma vez colocada em seu lugar, produza o efeito desejado.

4º Emprego do método das projeções para atender a esse objetivo.

III - Corte de madeiras (lições 8 a 12)

1º Regulamentação geral das obras de carpintaria.

2º e 3º Procedimentos para dar a forma que cada peça deverá ter: seja a peça reta, seja a peça curva.

4º Emprego do método das projeções para os dois últimos objetivos.

IV. Sombras (lições 13 e 14).

1º Determinação geométrica da sombra que um corpo qualquer, de forma e posição dadas, faz sobre uma superfície qualquer, também dada, supondo que o corpo luminoso é um ponto.

2º Determinação da sombra e da penumbra de um corpo qualquer, sobre uma superfície qualquer, supondo que as dimensões do corpo luminoso sejam finitas e sua forma, dada.

V. Perspectiva (lições 15 e 16).

1º Perspectiva linear: construção geométrica da perspectiva de um corpo qualquer, de forma e posição dadas, sobre um quadro, de forma e posição conhecidas.

2º Perspectiva aérea: da intensidade dos tons das superfícies dos objetos, estejam na sombra ou iluminados, tendo em vista suas posições, tanto em relação aos corpos luminosos, quanto à vista do observador; tendo em conta a imperfeição do órgão da visão.

VI. Topografia (lições 17 a 20).

1º Métodos para determinar, com precisão, a posição dos principais pontos de uma grande planta.

2º Método para executar o enchimento, com ajuda da prancheta, para os objetos que exigem uma certa precisão; da bússola, quando a precisão não for necessária; de um simples golpe de vista, quando a urgência da necessidade não permitir o emprego de outro meio.

3º Os diversos procedimentos de nivelamento.

4º A arte de representar, nas plantas, as formas e os acidentes do terreno.

VII. Máquinas (lições 21 a 24)

1º Exposição dos meios pelos quais podemos converter o movimento progressivo em um movimento circular e reciprocamente; o movimento circular em um movimento alternante de vai e vem e reciprocamente; o movimento alternante em movimento progressivo e reciprocamente.

2º Exposição dos meios de facilitar os movimentos de todos os tipos.

3º e 4º Descrição das principais máquinas movidas pelos homens, por animais e por forças da natureza, tais como água corrente ou em queda, vento ou vapor de água.

ANEXO B – Aulas de Gaspard Monge na *Ecole Normale de l'an III.*

As datas referentes às aulas de Monge na *Ecole Normale de l'an III* foram relacionadas, por Belhoste e Taton, na reprodução das respectivas lições. Elas podem ser encontradas em *L'Ecole Normale de l'an III. Leçons de Mathématiques* (DHOMBRES, 1992, pp.305-459). A partir dessas datas, procuramos organizar, em tópicos, o conteúdo de cada uma das lições do mestre.

I

1º lição:(1er pluviôse/ 20 de janeiro)

1 Objetivos da Geometria descritiva.

2-5 Reflexões sobre o sistema ideal de referência.

6 Projeções de um ponto.

2º lição: (9 pluviôse/ 28 de janeiro)

7 Projeções de uma reta.

8 Construção da épura.

9 Determinação do tamanho de um segmento de reta, oblíquo aos dois planos de projeção[1].

10 Considerações sobre os sólidos poliédricos.

Primeiro debate (11 pluviôse / 30 de janeiro)

Segundo debate (16 pluviôse/ 4 de fevereiro)

3º lição: (21 pluviôse/ 9 de fevereiro)

11 Considerações sobre a representação de superfícies curvas.

12 Considerações sobre a geração de superfícies.

13 Geração de um plano por duas retas. Representação de um plano.

14 *Primeira questão*: Por um ponto dado, construir as projeções de uma reta paralela a uma reta dada.

15 *Segunda questão*: Por um ponto dado, construir os traços de um plano paralelo a um plano dado, também por seus traços.

16 *Terceira questão*: Dados um plano (por seus traços) e um ponto, determinar: 1º as projeções da reta perpendicular, baixada do ponto ao plano; 2º o ponto de interseção entre essa reta e o plano.

17 *Quarta questão*: Por um ponto dado, construir os traços do plano perpendicular a uma reta dada.

Terceiro debate (26 pluviôse / 14 de fevereiro)

[1] Na terminologia atual, trata-se da determinação da "verdadeira grandeza" de um segmento de reta.

4º lição: (14 ventôse / 19 de fevereiro)

18 *Quinta questão*: Construir a reta de interseção entre dois planos, dados por seus respectivos traços.

19 *Sexta questão*: Construir o ângulo entre dois planos, dados por seus respectivos traços.

20 *Sétima questão*: Construir o ângulo formado por duas retas dadas.

21 *Oitava questão*: Construir o ângulo entre uma reta e um plano (dado por seus traços).

22 Considerações sobre a construção de um mapa.

Nona questão: Construir a projeção horizontal de um ângulo entre duas retas, conhecendo este ângulo e os ângulos que cada uma das retas faz com o plano horizontal.

II – Os planos tangentes e as normais às superfícies curvas.

23 Considerações sobre os planos tangentes e as retas normais às superfícies curvas.

24 Exemplo de aplicação de plano tangente e reta normal, na Arquitetura.

25 Exemplo de aplicação de plano tangente e reta normal, na Pintura.

26 Considerações sobre a aplicação de planos tangentes e retas normais na resolução de problemas.

27 Método geral para determinação do plano tangente, e da reta normal, a uma superfície curva, conhecendo o ponto de contato.

28 *Primeira questão*: Construir um plano tangente a uma superfície cilíndrica, por um ponto da curva.

29 *Segunda questão*: Construir um plano tangente a uma superfície cônica, por um ponto da curva.

30 *Terceira questão*: Construir um plano tangente a uma superfície de revolução (em torno de um eixo vertical), por um ponto da curva.

31 *Quarta questão*: Construir as projeções da menor distância entre duas retas e determinar sua verdadeira grandeza.

5º lição: (11 ventôse / 1º de março)

32 Considerações sobre a determinação do plano tangente a uma superfície curva, por um ponto fora da curva.

33 Exemplo de aplicação de planos tangentes, na Fortificação.

34 Exemplo de aplicação de planos tangentes, na Pintura.

35 Considerações sobre planos tangentes à superfície da esfera.

36 *Primeira questão*: Por uma reta dada, construir o plano tangente à superfície de uma esfera dada.

37 Segunda maneira de resolver a mesma questão

38 Propriedades notáveis do círculo, da esfera, das seções cônicas e de superfícies curvas do segundo grau, decorrentes da questão anterior.

39 Proposições particulares que são corolários imediatos da questão precedente.

40 Proposição geral da questão precedente.

41 *Segunda questão*: Por um ponto dado, construir um plano tangente, ao mesmo tempo, a duas esferas dadas.

42 *Terceira questão*: Construir um plano tangente, ao mesmo tempo, a três esferas de grandezas e posições dadas.

43 Considerações sobre a questão precedente.

44 Proposição decorrente da questão precedente.

45 *Quarta questão*: Por um ponto tomado arbitrariamente, construir um plano tangente a uma superfície cilíndrica dada.

46 *Quinta questão*: Por um ponto tomado arbitrariamente, construir um plano tangente a uma superfície cônica dada.

47 *Sexta questão*: Por uma reta dada, construir um plano tangente a uma superfície de revolução conhecida.

III – Das Interseções de Superfícies Curvas.

6º lição: (21 ventôse / 11 de março)

48 Considerações sobre as interseções de superfícies curvas.

49 Considerações sobre as operações da Análise.

50 Correspondência entre as operações da Análise e os métodos da Geometria descritiva.

51 Considerações sobre o método de determinar as projeções das interseções de superfícies curvas.

52 *Primeiro problema geral:* Construir as projeções da curva de dupla curvatura segundo a qual duas superfícies, de gerações dadas, se cortam.

53 Adaptação do método para outras posições das superfícies que se interceptam.

54 Adaptação do método para superfícies cônicas.

55 Adaptação do método para superfícies cilíndricas.

56 Adaptação do método para superfícies de revolução.

57 Considerações sobre a reta tangente, e o plano normal, em um ponto qualquer de uma curva de interseção.

58 *Segundo problema geral:* Por um ponto qualquer da interseção de duas superfícies curvas, traçar a tangente a esta interseção.

59 Aplicações a casos particulares. *Primeira questão:* Construir a interseção entre uma superfície cilíndrica dada e um plano de posição conhecida.
Primeiro caso: em que a geratriz da superfície é perpendicular a um dos planos de projeção e o plano secante é perpendicular ao outro.

60 Construção da curva de interseção, na forma como ela se apresenta em seu plano.[2]

61 Determinação da tangente à interseção, por um ponto qualquer da curva, no caso precedente.

62 Propriedade pertinente à curva de interseção

[2] Na terminologia atual, trata-se da determinação da "verdadeira grandeza" da seção.

63 Traçado da curva de interseção, na superfície cilíndrica desenvolvida[3]

64 Propriedades pertinentes aos elementos de uma curva desenvolvida.
Segundo caso: em que a superfície cilíndrica e o plano secante encontram-se em qualquer posição em relação aos planos de projeção.

65 Solução do segundo caso.

66 Determinação da tangente à interseção.

67 Construção da curva de interseção, na forma como ela se apresenta em seu plano.

68 Determinação da tangente, no caso precedente.

69 *Segunda questão:* Construir a interseção entre uma superfície cônica dada e um plano de posição conhecida

70 Determinação da tangente à interseção, por um ponto qualquer da curva.

71 Construção da curva de interseção, na forma como ela se apresenta em seu plano.

72 Determinação da tangente, no caso precedente.

73 *Terceira questão:* Construir a interseção de duas superfícies cônicas, de bases circulares, cujos eixos são paralelos entre si.

74 Determinação da tangente à interseção, por um ponto da curva.

75 Traçado da curva de interseção, na superfície cônica desenvolvida.

76 *Quarta questão:* Construir a interseção de duas superfícies cônicas, de bases quaisquer.

77 Determinação da tangente à interseção, por um ponto da curva.

78 *Quinta questão:* Construir a interseção entre uma superfície cônica, de base qualquer, e a superfície de uma esfera. Solução para o caso em que o cone e a esfera são concêntricos (o vértice do cone coincide com o centro da esfera).

79 Determinação da tangente à interseção, por um ponto da curva.

80 Solução para o caso em que o cone e a esfera não são concêntricos.

81 *Sexta questão:* Construir o desenvolvimento de uma superfície cônica, de base qualquer, e representar, sobre a superfície desenvolvida, uma seção de projeções conhecidas.

82 *Sétima questão:* Construir a interseção de duas superfícies cilíndricas de bases quaisquer.

83 *Oitava questão:* Construir a interseção de duas superfícies de revolução cujos eixos estão em um mesmo plano.

84 Método para determinar a tangente a uma curva conhecida pela lei do movimento de um ponto gerador. (método de Roberval).

85 Considerações sobre esse método.

86 Exemplo da utilização desse método.

87 Outro exemplo, análogo ao primeiro.

---

[3] Essa curva é conhecida, atualmente, como a “transformada” da seção.

IV – Aplicação do método de construir as interseções das superfícies curvas à solução de diversas questões.

7º lição: (1er germinal / 21 de março):

88 Considerações sobre a substituição da análise pela geometria descritiva, na solução de um grande número de questões.

89 Considerações sobre a maneira conveniente de tratar a geometria.

90 *Primeira questão:* Encontrar o centro e o raio de uma esfera cuja superfície passa por quatro pontos quaisquer do espaço.

91 Simplificação do processo precedente em função da escolha conveniente da posição dos planos de projeção.

92 *Segunda questão:* Inscrever uma esfera em uma pirâmide triangular dada; quer dizer, encontrar a posição do centro da esfera, e a grandeza do seu raio.

93 Posição dos planos de projeção que facilitam a construção da solução do problema precedente.

94 *Terceira questão:* Construir as projeções de um ponto do qual são conhecidas as distâncias a três outros pontos dados no espaço.

95 *Quarta questão:* Determinar, sobre uma planta topográfica (projeção cotada), a posição e a cota de um ponto notável.

96 Construção da questão precedente.

97 Advertência sobre a possibilidade de erro na questão precedente.

98 *Quinta questão:* Resolver a questão precedente, munido de outros dados.

99 Demonstração da simplicidade decorrente da solução (da questão precedente) pelos métodos da geometria descritiva em comparação aos procedimentos da análise.

100 Construção da mesma questão pelos métodos da geometria descritiva.

101 *Sexta questão:* Executar o levantamento topográfico de um terreno, do interior de um aeróstato.

102 Construção da mesma questão, por um procedimento simplificado.

V

8º lição: (11germinal / 31 de março):

103 Considerações a respeito do ensino da geometria descritiva para alunos de escolas secundárias e para os respectivos professores.

Curvatura e evolutas das curvas de dupla curvatura

104 Como a devoluta se forma a partir da evoluta. Ponto de reversão.

105 Exemplo nas artes: utilização da devoluta do círculo.

106 Como a evoluta pode ser formada pela devoluta. Raio e centro de curvatura.

107 Considerações para as curvas de dupla curvatura.

108 Centro e raio de curvatura em cada ponto de uma curva de dupla curvatura.

109 Superfície que é o lugar geométrico dos pólos de uma curva de dupla curvatura.

110 Propriedades de que gozam as superfícies precedentes.

111 Como gerar uma curva qualquer, de dupla curvatura, por um movimento contínuo.

112 Superfície desenvolvível formada pelas interseções consecutivas dos planos normais a uma curva plana.

9º lição: (21germinal / 10 de abril):

113 Divisão das superfícies, em três classes, em função de suas curvaturas.

114 Considerações a respeito das superfícies cilíndricas. Posição relativa dos planos que contêm três normais à superfície cilíndrica, duas a duas.

115 Posição relativa de duas normais, tiradas de dois pontos distintos da superfície cilíndrica.

116 Conclusões a respeito dos centros e raios de curvatura de qualquer superfície desenvolvível.

117 Considerações a respeito de uma superfície curva qualquer. Geração de uma superfície cilíndrica que envolve a superfície considerada. Curva de contato entre as duas superfícies consideradas.

118 Investigação do caso particular em que a superfície curva é do segundo grau.

119 Investigação do caso em que a superfície curva é gerada por uma curva plana fixa em seu plano, quando este se move sobre duas superfícies curvas dadas. Caso particular das superfícies de revolução.

120 Considerações análogas às da questão precedente, para todos os demais casos.

121 Posições relativas de duas normais, tiradas de dois pontos consecutivos de uma superfície curva.

122 Generalização da questão precedente para a superfície esférica e algumas superfícies de revolução.

123 Proposição sobre a existência de duas curvas em cada ponto de uma superfície qualquer.

124 Considerações a respeito do sentido das duas curvaturas de cada ponto, em diferentes superfícies. Estabelecimento de superfícies de área mínima.

125 Conseqüências que sucedem de duas curvaturas de uma superfície curva cujo conhecimento é importante aos artistas. Divisão de uma superfície em zonas, delimitadas pelo par de curvas de cada um de seus pontos.

126 Exemplo para as superfícies de revolução cujas linhas de curvatura são os meridianos e os paralelos.

127 Considerações a respeito das superfícies geradas pelas normais tiradas dos pontos de cada uma das linhas de curvatura.

128 Investigação de casos particulares.

129 Conclusão das considerações precedentes.

130 Exemplo na Arquitetura.

131 Exemplo na gravura.

O programa oficial das aulas e dos exercícios aplicados aos alunos, do primeiro curso da *Ecole Polytechnique,* foi publicado no *Journal Polytechnique ou Bulletin du Travail fait a l'Ecole Centrale des Travaux Publics, cahiers 1-2, an III*. O texto a seguir é uma tradução nossa desse programa.

QUADRO DAS OPERAÇÕES QUE FORAM EXECUTADAS PELOS ALUNOS DA *ECOLE CENTRALE DES TRAVAUX PUBLICS,* DURANTE O MÊS DE GERMINAL (JP, 1795, pp. 11-14)

PRELIMINARES:

1º dia: (21 de março / 1er germinal)

1 Por um ponto dado, no espaço, traçar uma reta paralela a uma reta dada e determinar a grandeza de um segmento desta reta.

2 Por um ponto dado, construir um plano paralelo a um plano dado.

2º dia: (22 de março / 2 germinal)

3 Construir o plano que passa por três pontos dados no espaço.

4 Sendo dado um plano, determinar os ângulos que ele forma com os planos de projeção.

3º dia: (24 de março / 3 germinal)

5 Por um ponto dado, construir um plano perpendicular a uma reta dada e determinar as projeções do ponto de interseção entre a reta e o plano.

6 Por um ponto dado, traçar uma perpendicular a um plano dado e determinar as projeções do ponto de interseção entre a reta e o plano.

7 Por um ponto dado, traçar uma reta perpendicular a uma reta dada no espaço e determinar o ponto de interseção entre as duas retas.

4º dia: (26 de março / 6 germinal)

8 Sendo dados dois planos, determinar as projeções da interseção entre eles.

9 Sendo dados dois planos, construir o ângulo que formam entre si.

5º dia: (27 de março / 7 germinal)

10 Sendo dadas duas retas concorrentes, construir o ângulo que elas formam entre si.

11 Construir o ângulo formado por uma reta e um plano, de posições dadas no espaço.

6º e 7º dias: (28-31 de março / 8-11 germinal)

12 Em um vértice de pirâmide triangular, podemos considerar os três ângulos formados pelas faces da pirâmide duas a duas, e os três ângulos que as arestas formam entre si. Sendo dados três desses seis ângulos, construir qualquer dos outros três; é isso o que compreende toda a trigonometria esférica.

13 Reduzir um ângulo ao horizonte; quer dizer, sendo observado um ângulo em um plano oblíquo ao horizonte, e conhecendo as inclinações de seus dois lados, construir a projeção horizontal deste ângulo.

8º dia: (01 de abril / 12 germinal)

14 Sendo dadas duas retas no espaço: 1º construir a menor distância entre elas; 2º determinar a posição da reta sobre a qual se mede essa distância.

9º dia: (02 de abril / 13 germinal)

15 A distância do centro de gravidade de uma pirâmide triangular a um plano é igual a um quarto da soma das distâncias dos vértices de seus quatro ângulos sólidos, ao mesmo plano.

16 O quadrado da área de uma figura plana, disposta de maneira qualquer no espaço, é igual a soma dos quadrados de suas projeções sobre três planos retangulares.

PLANOS TANGENTES ÀS SUPERFÍCIES CURVAS

10º dia: (05 de abril / 16 germinal)

17 Por uma reta dada, construir um plano tangente à superfície de uma esfera............. *duas soluções.*

11º dia: (06 de abril / 17 germinal)

18 Por um ponto dado, construir um plano tangente às superfícies de duas esferas........ *quatro soluções*.

19 Sendo dadas três esferas, construir um plano tangente comum a elas.......................... *oito soluções.*

12º dia: (07 de abril / 18 germinal)

20 Por um ponto qualquer sobre uma superfície cilíndrica dada, de base qualquer, construir um plano tangente a essa superfície.

13º dia: (10 de abril / 21 germinal)

21 Construir um plano tangente a uma superfície cilíndrica, por um ponto tomado arbitrariamente no espaço.

14º dia: (11 de abril / 22 germinal)

22 Por um ponto tomado sobre uma superfície cônica qualquer, construir um plano tangente a essa superfície.

23 Construir um plano tangente a uma superfície cônica, por um ponto tomado arbitrariamente no espaço.

15º dia: (12 de abril / 23 germinal)

24 Por um ponto tomado sobre uma superfície de revolução, da qual se conhece a seção feita pelo eixo, construir um plano tangente a essa superfície.

16º dia: (15 de abril / 26 germinal)

25 Resolver a mesma questão quando a superfície de revolução for gerada pelo movimento de uma curva dada, de dupla curvatura.

17º dia: (16 de abril / 27 germinal)

26 Por uma reta dada no espaço, construir um plano tangente a uma superfície de revolução.

18º dia: (17 de abril / 28 germinal)

27 Se concebermos que uma reta horizontal se move de maneira que, sem deixar de ser horizontal, se apóie constantemente sobre uma vertical (por um lado) e sobre uma curva dada, de dupla curvatura (do outro), ela gerará uma superfície curva; assim sendo, construir um plano tangente a essa superfície, seja por um ponto necessariamente sobre a superfície, seja por uma reta tomada exteriormente.

RELAÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS AOS ALUNOS, CUJA SOLUÇÃO DEVERÁ SER DADA NO DECORRER DE FLOREAL.

1. Construir as projeções, horizontal e vertical, de um dodecaedro regular e a seção feita neste sólido por um plano qualquer, de posição conhecida.
2. Por um ponto dado, passar um plano que faça ângulos dados com os planos de projeção, sem utilizar, nesta solução, outra curva que não seja o círculo.
3. Por um ponto dado, passar uma reta que faça ângulos dados com os planos de projeção, sem utilizar, nesta solução, outra curva que não seja o círculo.
4. Fazer a projeção de um parafuso de filete triangular, sobre um plano paralelo a seu eixo.
5. Supondo que o centro de uma esfera de raio constante se mova sobre a elipse de um parafuso, a esfera percorrerá um espaço que será envolvido por uma certa superfície curva; assim sendo, construir as seções determinadas nesta superfície, por um plano traçado pelo eixo do parafuso e um plano perpendicular ao eixo; e traçar as tangentes a essas seções.
6. Dadas três retas quaisquer no espaço, se concebermos uma quarta reta movendo-se de maneira que corte, constantemente, as outras três, ela gerará uma certa superfície curva; assim sendo, construir um plano tangente a essa superfície por um ponto tomado sobre ela, dado por uma de suas projeções.

QUADRO DAS OPERAÇÕES QUE FORAM EXECUTADAS PELOS ALUNOS DA *ECOLE POLYTECHNIQUE,* DURANTE O MÊS DE FLOREAL. (J.P., 1795, pp.102-103)

INTERSEÇÃO DE SUPERFÍCIES

28 Seção feita na superfície de um cilindro reto, por um plano perpendicular a um dos planos de projeção, com as tangentes e o desenvolvimento.

29 Interseção do cilindro oblíquo com um plano perpendicular ao seu eixo. Desenvolvimento e tangentes.

30 Interseção do cone reto com um plano perpendicular a um dos planos de projeção. Desenvolvimento e tangentes.

31 Interseção do cone oblíquo com um plano perpendicular a um plano vertical. Desenvolvimento e tangentes.

32 Interseção de uma superfície de revolução com um plano. E as tangentes.

33 Interseção de uma superfície reversa de revolução com um plano. E as tangentes.

34 Interseção de dois cilindros. E as tangentes.

35 Interseção de dois cones oblíquos. E as tangentes.

36 Interseção de duas superfícies de revolução. E as tangentes.

APLICAÇÃO DAS INTERSEÇÕES DE SUPERFÍCIES

37 Dados quatro pontos no espaço, encontrar um quinto ponto que esteja eqüidistante de cada um deles; isso se reduz a circunscrever uma esfera a uma pirâmide dada.

38 Inscrever uma esfera em uma pirâmide dada.

39 Conhecendo as distâncias de um ponto a três pontos dados, construir esse ponto. Interseção de três esferas.

40 Conhecendo as distâncias de um ponto a três linhas dadas, construir esse ponto. Interseção de três superfícies cilíndricas.

41 Conhecendo os ângulos que formam, com a vertical, três linhas traçadas por um ponto, construir esse ponto. Interseção de três superfícies cônicas.

42 Conhecendo a base de uma pirâmide e os ângulos das arestas do vértice, construir as projeções do vértice. Interseção de três superfícies de revolução.

SEQÜÊNCIA DE PROBLEMAS PROPOSTOS AOS ALUNOS NO FINAL DO MÊS DE FLOREAL.

1. Interseção de dois cones de bases circulares, cujos eixos não são paralelos. Identificar se essas curvas de interseção têm ramos que se estendem ao infinito; e, neste caso, encontrar as assíntotas.
2. Interseção de uma superfície de revolução com uma superfície cilíndrica.
3. Interseção de uma superfície cônica com uma superfície reversa, gerada pelo movimento de uma reta apoiada em três outras.
4. Interseção de duas superfícies reversas geradas, cada uma, pelo movimento de uma reta apoiada em três outras.
5. Dadas quatro retas no espaço, encontrar o ponto que é eqüidistante de cada uma.
6. De três coisas de um helicóide: seção pelo eixo, seção perpendicular ao eixo, hélice descrita por um ponto da superfície; sendo dadas duas delas, encontrar a terceira.

O texto trata das idéias de Frézier sobre a representação de sólidos em uma superfície bidimensional. Foi reproduzido da versão eletrônica do *Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture,* de Amédée-François Frézier (FREZIER, 1737, t.1, liv. III, pp.269-272).

TRAITE DE STEREOTOMIE

LIVRE TROISIEME

De la description des Divisions des Solides.

Dans les deux Livres précedens nous n'avons eu pour objet que la Figure des lignes & des surfaces formées par les sections des corps, & l'art de les décrire. Presentement nous embrassons l'espace compris entre une, deux ou plusieurs sections ; c'est-à-dire, les parties solides qui résultent de la division des corps coupez par des surfaces planes ou courbes ; & nous nous proposons de chercher les moyens de les representer sur un plan autant exactement qu'il est possible, afin de trouver les longueurs de leurs côtez, & leurs angles plans & solides, tant rectilignes, que mixtes.

Pour m'expliquer en termes de l'Art, il s'agit ici de cette espece de *Dessein* que les Architectes appellent le *Trait & l'Epure,* dans lequel consiste toute la difficulté de la coupe des Pierres.

Je vais tâcher d'eclaircir cette matiere, & d'en donner les principes en la réduisant à un petit nombres de Régles appuyées de leurs raisons, & dont l'application sera d'autant plus facile, que le lecteur est déjà pleinement instruit de la maniere de décrire toutes les especes de Courbes qui peuvent y être mêlées.

On sait qu'il est impossible de representer exactement un solide sur une surface plane, non seulement celui qui en a de courbes ; mais encore celui qui n'est compris que par des planes, puisqu'elle ne peut jamais en representer qu'une, & un solide en a au mois quatre ; ordinairement dans l'usage de l'Architecture six, & quelquefois davantage. On a donc été obligé de considerer les solides dans les differentes rélations & situations de leurs parties, par le moyen desquelles on parvient à les representer à differentes reprises.

Tantot, pour connoître la distance horizontale de leurs angles, on les a supposé comme aplatis sur un plan horizontal ; tantôt, pour connoître leurs hauteurs, on les a conçû comme aplatis sur un plan vertical ; quelquefois pour connoître d'un coup d'œil tout leurs surfaces, & en voir le rapport, on les a rangé de suite sur une surface plane. Enfin pour savoir quels sont les angles que ces surfaces sont entr'elles, on en a mesuré les angles mixtes, curvilignes & rectilignes par le moyen des cordes des côtez courbes, ou avec des instrumens ; jusqu'ici on a rien imaginé de mieux.

On peut donc réduire tout l'Art de tracer une *Epure* à quatre sortes de descriptions, la premiere a pour objet les mesures horizontales ; on l'appelle en termes d'Architecture le *Plan*, en langage de Mathematique *l'Ichonographie,* ou la *projection horizontale*. Nous sommes obligez d'aporter ce dernier pour éviter les équivoques dans les raisonnemens Geometriques, où le mot de *Plan* signifie en general une surface plane quelconque. Secondement, pour éviter les manieres de parler qui renferment une espece de contradiction, comme de dire *le plan d'un point, où d'une ligne*, pour signifier la projection. Troisiémement, pour éviter la Cacophonie, lorsqu'il faudra dire *le plan d'un plan*, au lieu de sa projection.

(…)

De l'Arangement de Desseins dans l'Epure.

La confusion que l'on trouve dans les desseins des Livres qui traitent de la coupe des Pierres, vient souvent de la multiplicité des especes de representations que l'on rassemble dans la même Epure ; car souvent on y joint le plan au Profil, quelquefois encore à l'élevation, & l'on mêle les uns avec les autres sans divisions ; ce qui demande une grand attention pour démêler ce qui appartient à chacune ; en effet souvent la même ligne fait partie du plan & de l'élevation, & sert encore au Profil.

Souvent les objets verticaux sont renversez, comme si au lieu de monter ils tomboient du haut en bas ; quelquefois ils sont placez de côté, quoiqu'ils doivent être verticaux ; souvent on fait des lignes & des arcs de cercles inutiles à la construction, qui ne servent qu'a indiquer les alignemens, les égalitez des lignes transposées, ou l'ouverture de leurs angles : il arrive aussi suivant les circonstances, que pour analiser une projection, on se sert pour plus de commodité & abreger l'operation, d'un angle Droit qu'on a trouvé fait, quoique pour un sujet different. Ce double employ de lignes trouble l'attention des Lecteurs, ou exige une fatigante contention d'esprit pour démêler ces differentes considerations.

La necessité de rassembler plusieurs objets dans une petite Planche rend cet embarras presque inévitable ; d'autant plus qu'il a son utilité pour indiquer plus sensiblement leurs rapports.

Malgré les soins qu'on a pris pour éviter la confusion, il est bon d'avertir le Lecteur qu'il ne doit compter de connexité necessaire entre les lignes des desseins, que celle qui est annoncée ou indiquée par le dessein qu'on y a joint, dans lequel on aura soin de dire que cette ligne qui étoit de l'élevation ou du *Plan* doit être considerée par une autre supposition, comme étant du Profil ; mais lorsqu'on aura omis cet avertissement, & qu'il sera question de Profil, il faut abandonner l'idée qu'on attachoit à une ligne, comme faisant partie du plan, & prendre celle qui convient au Profil dont on a parlé.

Quoiqu'il soit plus naturel de mettre chaque espece de dessein à part ; il est cependant vrai que cette simplicité d'objet indique moins sensiblement les rapport des lignes, & que l'on trouve en cela moins de commodité qu'a rassembler, & même quelquefois à mêler les *Plan, Profil* & *Elevation* : on tiendra cependant pour arbitraire l'arangement de leurs situations, les uns auprès des autres, ou dans les autres, au dessus, au dessous, ou à côté ; pourvu que les parties en soient distinctement décrites.

ANEXO E – Avaliação do curso da *Ecole Polytechnique.*

A avaliação dos dois primeiros anos de curso de Geometria descritiva, ministrados na *Ecole Polytechnique,* foi feita pelo próprio instrutor da disciplina, Gayvernon e publicada no *Journal de L'Ecole Polytechnique, Séance d'Ouverture de L'Ecole Polytechnique,* cahiers 5-6, pp.251-262, an VI. (1798).

Reproduzimos, na íntegra, o discurso relativo ao primeiro ano. A exposição do ensino no segundo ano consta de uma introdução seguida da orientação sobre a melhor maneira de transmitir os conhecimentos necessários à cada um dos cursos de aplicação (de obras públicas ; de arquitetura ; de minas ; de marinha ; e de fortificação). Transcrevemos apenas, a introdução desse relatório.

Enseignement de la GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
pendant la première année.

Indépendamment du point de vue sous lequel vous avez considéré jusqu'á pre´sent la Géométrie, il en est un nouveau pour vous, et qui vous sera enseigné avec le plus grand détail ; je veux parler de la géométrie descriptive, et de ses applications aux services publics.

La géométrie descriptive ne s'occupe pas de la mesure des dimensions des corps ; cette considération est un cas particulier pour elle, et qui sera traité à l'aide de l'analyse. Son objet pur est la description des objets susceptibles d'une définition exacte et rigoureuse ; elle représente par des lignes tracées sur des feuilles de papier, les formes, les situations des corps, ainsi que les courbes résultant de l'intersection de leurs surfaces. Par cette définition, vous sentez que cette partie de l'enseignement ne peut se traiter avec succès que par des leçons orales, qui sont suivies des procédés graphiques exécutés avec soin dans les salles de travail. Il en sera de même de l'enseignement relatif aux cours d'applications, dont je vous parlerai dans un instant.

INTRODUCTION

La solution de plusieurs questions élémentaires relatives à la ligne droite et au plan, servira d'introduction à la géométrie descriptive. Vous verrez comment on détermine la position respective des droites et des plans situés dans l'espace, indépendamment de leurs dimensions qu'on suppose étendues indéfiniment. C'est en cela que consiste la méthode des projections.

Générations des Surfaces.

La convention qui sert de base à la méthode des projections, serait insuffisante pour exprimer la position de tous les points d'une surface courbe. Pour y suppléer, on vous fera concevoir un mode de génération qui convient à toutes les surfaces.

Plans tangens.

Les surfaces sont définies de forme et de position dans l'espace, lorsque par chacun de leurs points on peut assigner la ligne génératrice correspondante : mais le sens de courbure de leurs élémens est encore inconnu ; on le déterminera en menant des plans tangens à ces surfaces.

Intersection des Surfaces.

Les surfaces dont la génération est connue, se rencontrent, se pénètrent ; de là résultent des courbes à double courbure. On menera les tangentes et on déterminera les points remarquables par des considérations déduites de la génération des surfaces dont elles sont l'intersection.

Application à la Coupe des pierres, à la Charpente, aux Ombres, aux Cartes et à la Perspective

Après avoir exposé les principes généraux de la géométrie descriptive, on en fera des applications.

Ne pensez pas que la théorie des surfaces et des courbes résultant de leurs intersections, puisse être regardée comme purement spéculative ; elle est une des bases fondamentales des arts qui en font un usage habituel : c'est par les méthodes qu'elle enseigne, qu'ils déterminent les formes exactes qu'il faut donner à la matière. Par ses procédés, on détermine la forme et l'ordonnance des édifices ; on parvient à modeler toutes les parties qui les composent ; on trace sur le dessin le contour des ombres, et sur les cartes la figure du terrain, &c.

Tous ces procédés seront développés et mis en pratique.

La géométrie descriptive de la première année est terminée par un cours d'élémens des machines, c'est-à-dire, de l'art de construire les machines propes à exécuter tout ce qui est le résultat de la main des hommes. On s'est occupé, jusqu'à présent, de représenter les machines ingénieuses que les hommes ont inventées, et l'on a publié les recueils de ces machines sous le nom de *Théâtre des machines ;* on a déterminé les lois du mouvement, et l'on a créé les élémens de mécanique : mais personne n'était encore parvenu à décomposer les machines faites et à faire, de manière à en déterminer les élémens ; c'est un cours absolument neuf que l'on doit à la réunion des lumières des hommes instruits qui composent l'enseignement de l'école : ce travail a été fait par le C.en *Hassenfratz,* qui est chargé de cette partie de l'enseignement. Cecours, ramenant la constrution des machines à la simplicité qui leur appartient, procurera aux arts, aux manufactures et à l'industrie française un perfectionnement qu'ils auraient inutilement attendu d'ailleurs.

Tel est, en peu de mots, l'enseignement de la géométrie descriptive pendant la première année.

Enseignement de la GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE pendant la seconde année.

INTRODUCTION
AUX COURS D'APPLICATION.

L'enseignement de la Géométrie descriptive pendant la seconde année, consiste à faire des applications de cette science aux arts relatifs aux services publics. Dans Cette enseignement, tous les services sont considérés comme les membres distincts d'une même famille, qui doivent avoir des connaissances particulières plus développées. L'École polytechnique donne la généralité des connaissances ; et les écoles d'applications directes, comme autant de faisceaux partant du point central lumineux, donnent les grands développemens des connaissances particulières.

Il résulte de ce mode d'enseignement, d'autres avantages bien grands pour la société, et que la suite des temps prouvera d'une manière incontestable. Un des plus frappans, c'est de familiariser les élèves avec les méthodes de la géométrie descriptive, de leur faire sentir sa grande utilité, et de les mettre à même de se diriger avec des données bien positives vers le service public pour lequel ils se sentent le plus de goût et d'aptitude.

(…)

ANEXO F – Considerações de Gaspard Monge a respeito da localização de um ponto no espaço.

Gaspard Monge faz a introdução do seu método a partir das considerações reproduzidas abaixo. Elas foram tiradas da *Géométrie descriptive, leçons données aux écoles normales, l'an 3 de la république,* editada em 1799 (ano VII do calendário republicano francês) e reeditada pela Jacques Gabay em 1989.

GEOMETRIE DESCRIPTIVE

1. La géométrie descriptive a deux objets : le premier, de donner les méthodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, savoir, longueur et larguer, tous les corps de la nature, qui en on trois, longueur, larguer et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement.

Le second objet est de donner la manière de reconnoître d'après une description exacte les formes de corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent et de leur forme et de leurs positions respectives.

Nous allons d'abord indiquer les procédés qu'une longue expérience a fait découvrir, pour remplir le premier de ces deux objets ; nous donnerons ensuite la manière de remplir le second.

2. Les surfaces de tous les corps de la nature pouvant être considérées comme composées de points, le premier pas que nous allons faire dans cette matière doit être d'indiquer la manière dont on exprime la position d'un point dans l'espace.

L'espace est sans limites ; toutes ses parties sont parfaitement semblables, elles n'on rien qui les caractérise, et aucun d'elles ne peut servir de terme de comparaison pour indiquer la position d'un point.

Ainsi, pour définir la position d'un point dans l'espace, il faut nécessairement rapporter cette position à quelques autres objets, distincts des parties de l'espace qui les renferme, et qui soient eux-mêmes connus de position, tant de celui qui définit, que de celui qui veut entendre la définition ; et pour que le procédé puisse devenir lui-même d'un usage facile et journalier, il faut que ces objets soient aussi simples qu'il est possible, et que leur position soit la plus facile à concevoir.

3. Parmi tous les objets simples, nous allons rechercher quels sont ceux qui présentent plus de facilité pour la détermination de la position d'un point ; et parce que la géométrie n'offre rien de plus simples qu'un point, nous examinerons dans quel genre de considérations on seroit entraîné, si, pour déterminer la position d'un point, on le rapportoit à un certain nombre d'autres points dont la positions seroit connue ; enfin, pour mettre plus de clarté dans cette exposition, nous désignerons ces points connus par les lettres successives A, B, C, etc.

Supposons d'abord, que la définition de la position du point comporte qu'il soit à un mètre de distance du point connu A.

Tout le monde sait que propriété de la surface de la sphère est d'avoir tous ces points à égale distance de son centre. Ainsi cette partie de la définition exprime que le point que l'on veut déterminer a la même propriété que tous ces de la surface d'une sphère dont le centre seroit au point A, et dont le rayon seroit un mètre. Mais les points de la surface de la sphère sont les seuls dans tout l'espace qui aient cette propriété ; car tous les points de l'espace qui sont au-delà de cette surface par rapport au centre sont plus éloignés du centre que d'un mètre, et tous ceux qui sont entre cette surface et le centre sont au contraire moins éloignés du centre que d'un mètre : donc tous les points de la surface de la sphère non – seulement jouissent de la propriété énoncée dans la proposition, mais encore ils sont les seuls qui en jouissent ; donc enfin cette proposition exprime que le point cherché est un de ceux de la surface d'une sphère dont le centre seroit au point A, et dont le rayon seroit un mètre. Par-là ce point est actuellement distinct d'une infinité d'autres placés dans l'espace ; mais il est encore confondu avec tous ceux de la surface de la sphère, il faut d'autres conditions pour le reconnoître parmi eux.

Supposons ensuite que, d'après la définition de la position du point, il doive être à deux mètres de distance du second point connu B : il est évident qu'en raisonnant pour cette seconde condition comme pour la première, le point doit encore être un de ceux de la surface d'une seconde sphère, dont le centre seroit au point B, et dont le rayon seroit deux mètres. Ce point, devant se trouver en même temps et sur la surface de la première sphère et sur celle de la deuxième, ne peu plus être confondu qu'avec ceux qui sont communs aux deux surfaces, et qui sont dans leur commune intersection : or, pour peu qu'on soit familiarisé avec les considérations géométriques, on sait que l'intersection des surfaces de deux sphères est la circonférence d'un cercle, dont le centre est sur la droite qui joint ceux de deux sphères, et dont le plan est perpendiculaire à cette droite ; donc, en vertu des deux conditions réunies, le point cherché est actuellement distinct de ceux qui sont sur les surfaces de deux sphères, et il ne peu plus être confondu qu'avec ceux de la circonférence de cercle, qui jouissent tous des deux conditions énoncées et qui en jouissent seuls. Il faut donc encore une troisième condition pour le distinguer.

Supposons, enfin, que le point doive se trouver à trois mètres de distance d'un troisième point C, connu. Cette troisième condition le place parmi tous ceux de la surface d'une troisième sphère, dont le centre seroit au point C, et dont le rayon seroit trois mètres. Et parce que nous avons vu qu'il doit être sur la circonférence d'un cercle connu de position, pour satisfaire en même temps aux trois conditions, il faut qu'il soit une des points communs et à la surface de la troisième sphère et à la circonférence du cercle : or on sait qu'une circonférence du cercle et la surface d'une sphère ne peuvent se couper qu'en deux points ; donc, en vertu des trois conditions, le point se trouve distingué de tous ceux de l'espace, et ne peu plus être que l'un de deux points déterminés ; en sorte qu'en indiquant de plus de quel côté il est placé par rapport au plan qui passe par les trois centres, ce point est absolument déterminé, et ne peut plus être confondu avec aucun autre.

On voit qu'en employant, pour déterminer la position d'un point dans l'espace, ses distances à d'autres points connus, et dont le nombre est nécessairement trois, l'on est entraîné dans des considérations qui ne sont pas assez simples pour servir de base à des procédés d'un usage habituel.

4. Recherchons actuellement quelles seroient les considérations auxquelles on seroit conduit, si, au lieu de rapporter la position d'un point à trois autres points connus, on le rapportoit à des droites données de position.

Nous ferons observer auparavant, qu'une ligne droite ne doit jamais être considérée comme terminée, et qu'elle peut toujours être indéfiniment prolongée dans l'un e dans l'autre sens.

Pour simplifier, nous nommerons successivement A, B, C, etc., les droites que nous serons obligées d'employer.

Si de la définition de la position du point il résulte qu'il doive se trouver, par exemple, à un mètre de distance de la première droite connue A, on énonce que ce point est l'un de ceux de la surface d'un cylindre à base circulaire, dont l'axe seroit la droite A, dont le rayon seroit un mètre, et qui seroit indéfiniment prolongé dans les deux sens de sa longueur ; car tous les points de cette surface jouissent de la propriété énoncée dans la définition, et son les seuls qui en jouissent. Par-là, le point est distingué de tous les points de l'espace qui sont en dehors de la surface cylindrique ; il est pareillement distingué des tous ceux qui sont dans l'intérieur du cylindre, et il ne peut être confondu qu'avec ceux de la surface cylindrique, parmi lesquels on ne peut le distinguer qu'au moyen de conditions nouvelles.

Supposons donc que le point cherché doive, en outre, être placé à deux mètres de distance de la seconde ligne droite B : on voit de même que par-là on place ce point sur la surface d'un second cylindre à base circulaire, dont l'axe seroit la ligne droite B, et dont le rayon seroit deux mètres, mais avec tous les points de laquelle il est confondu, si l'on ne considère que la second condition seule. En réunissant ces deux conditions, il doit donc se trouver en même temps et sur la première surface cylindrique, et sur la seconde : donc il ne peut être que l'un des points communs à ces deux surfaces, c'est-à-dire, l'un de leur commune intersection. Cette ligne, sur laquelle doit se trouver le point, participe de la courbure de la surface du premier cylindre, et de la courbure de celle du second, et est, en général, du genre de celles qu'on appelle courbes à double courbure.

Pour distinguer le point de tous ceux de cette ligne, il faut une troisième condition.

Supposons enfin que la définition énonce que le point demandé doive encore être à trois mètres de distance d'une troisième ligne droite C.

Cette nouvelle condition exprime qu'il est un de ceux de la surface d'un troisième cylindre à base circulaire, dont la troisième ligne droite C seroit l'axe, et qui auroit trois mètres de rayon : donc, en réunissant les trois conditions, le point cherché ne peu plus être qu'un de ceux qui sont communs, et à la troisième surface cylindrique, et à la courbe à double courbure, intersection des deux premières. Or cette courbe peut en général être coupée par la troisième surface cylindrique en huit points ; donc les trois conditions réduisent le point cherché à être l'un de huit points déterminés, et parmi lesquels on ne peut le distinguer que par quelques conditions particulières du genre de celles dont nous avons donné un exemple dans le cas des points.

On voit que les considérations auxquelles on est conduit pour déterminer la position d'un point dans l'espace par la connoissance de ses distances à trois lignes droites connues, sont encore bien moins simples que celles auxquelles donnent lieu ses distances à trois points, et qu'ainsi elles peuvent encore moins servir de base à des méthodes qui doivent être d'un service fréquent.

5. Parmi les objets simples que la géométrie considère, il faut remarquer principalement, 1o. le point qui n'a aucune dimension ; 2o. la ligne droite qui n'en a qu'une ; 3o. le plan qui en a deux. Recherchons s'il ne seroit pas plus simples de déterminer la position d'un point par la connoissance de ses distances à deux plans connus, qu'il ne l'est d'employer ses distances à des points ou à des lignes droites.

Supposons donc qu'il y ait dans l'espace, des plans non parallèles, connus de position, et que nous désignerons successivement par les lettres A, B, C, D, etc.

Si, d'après la définition de la position du point, il doit être, par exemple, à un mètre de distance du premier plan A, sans qu'il soit exprimé de quel côté il doit être placé par rapport à ce plan, on énonce qu'il est un de ceux de deux plans parallèles au plan A, placés l'un d'un côté de ce plan, l'autre de l'autre, et tous deux à un mètre de distance du premier : car tous les points de ces deux plans parallèles satisfont à la condition exprimée, et sont, de tous ceux de l'espace, les seuls qui y satisfassent.

Pour distinguer, parmi tous les points de ces deux plans, celui dont on veut définir la position, il faut donc encore avoir recours à d'autres conditions.

Supposons, en second lieu, que le point cherché doive être à deux mètres de distance du second plan B : par-là on le place sur deux plans parallèles au plan B, tous deux à deux mètres de distance de ce plan, l'un d'un côté, l'autre de l'autre. Pour satisfaire en même temps aux deux conditions, il faut donc qu'il se trouve, et sur l'un des deux plans parallèles au plan A, et sur l'un des deux plans parallèles au plan B ; et par conséquent, qu'il soit l'un des points de la commune intersection de ces quatre plans. Or, la commune intersection de quatre plans parallèles deux à deux, et de position connue, est l'assemblage de quatre lignes droites également connues de position ; donc, en considérant en même temps ces deux conditions, le point n'est plus confondu avec tous ceux de l'espace, ni même avec tous ceux des quatre plans, mais seulement avec ceux de quatre lignes droites. Enfin, si le point doit être aussi à trois mètres de distance du troisième plan C, on exprime qu'il doit être l'un de ceux de deux autres plans parallèles au plan C, et placés de part et d'autre, par rapport à lui, à trois mètres de distance. Ainsi, en vertu des trois conditions, il doit être en même temps, et sur l'un des deux derniers plans, et sur l'une des quatre lignes droites, intersections des quatre premiers plans : il ne peut donc être que l'un des points communs et à l'un de ces deux plans et à l'une des quatre droites. Or, chacun des deux plans ayant un point commun avec chacune des quatre lignes droites, il y a huit points dans l'espace qui satisfont à la fois aux trois conditions : donc, par ces trois conditions réunies, le point demandé ne peut plus être que l'un des huit points déterminés, et parmi lesquels on ne peut les distinguer qu'au moyen de quelques conditions particulières.

Par exemple, si, en indiquant la distance au premier plan A, on exprime aussi dans quel sens, par rapport à ce plan, la distance doit être prise ; au lieu de deux plans parallèles au plan A, il n'y en a plus qu'un qu'il faille considérer, c'est celui qui est placé par rapport à lui, du côté vers lequel la distance doit être mesurée. De même, si on indique dans quel sens, par rapport au second plan, la distance doit être prise on exclut la considération d'un des deux plans parallèles au second ; et il n'y en a plus qu'un dont tous les points satisfassent à la seconde condition ; et en réunissant ces conditions, le point ne peut plus être sur les quatre droites d'intersection de quatre plans parallèles deux à deux, mais seulement sur l'intersection de deux plans, c'est-à-dire, sur une ligne droite connue de position. Enfin, si l'on indique aussi de quel côté le point doit être placé par rapport au troisième plan, de deux plans parallèles au troisième il n'y en aura plus qu'un dont tous les points satisfassent à la dernière condition ; et pour satisfaire n même temps à ces rois conditions, le point devra se trouver à l'intersection de ce troisième plan avec la droite unique, intersection des deux premiers. Il ne pourra donc plus être confondu avec aucun autre dans l'espace, et il sera par conséquent entièrement déterminé.

On voit donc que, quoique, par rapport au nombre de dimensions, le plan soit un objet moins simple que la ligne droite qui n'en a qu'une, et que le point qui n'en a pas, il présent cependant plus de facilité que le point et la ligne droite pour la détermination d'un point dans l'espace : c'est ce procédé que l'on emploie ordinairement dans l'application de l algèbre à la géométrie, où, pour chercher la position d'un point, on a coutume de chercher ses distances à trois plans connus de position.

Mais dans la géométrie descriptive, qui a été pratiquée depuis beaucoup plus longtemps par un beaucoup plus grand nombre d'hommes, et par des hommes dont le temps étoit précieux, les procédés se sont encore simplifiés ; et au lieu de la considération de trois plans, on est parvenu, au moyen des projections, à n'avoir plus besoin explicitement que de celle de deux.