SENSIBILIDADE DAS CONDIÇÕES INICIAIS SOBRE GEODÉSICAS DE SUPERFÍCIES DE CURVATURA NEGATIVA: UM TEOREMA DE HADAMARD

Daniel Felipe Neves Martins

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA.

Aprovada por:

Profa. Tatiana Marins Roque, D. Sc.

Profa. Walcy Santos, D. Sc.

Prof. Luiz Pinguelli Rosa, D. Sc.

Profa. Gilda de La Roque Palis, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL.
ABRIL DE 2005

MARTINS, DANIEL FELIPE NEVES

Sensibilidade das condições iniciais sobre superfícies de curvatura negativa: um teorema de Hadamard [Rio de Janeiro] 2005

XI, 115 p.29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2005).

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Teoria do Caos
2. Geometria Diferencial
3. História da Matemática
4. História e Filosofia da Ciência

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais, o velho Daniel e a grande mãe e amiga Cilene, pela oportunidade que me deram de viver uma vida colorida por belas passagens.

Aos meus irmãos Marcelo e Raphael Martins, por terem *na minha figura, uma referência.*

Ao pequenino Bernardo por ensinar a mim e a minha família *como se ama incondicionalmente.*

Aos meus avós, tios e primos por uma infância e juventude perfeitas no seio de uma grande família mineira.

A minha amiga Lúcia Maria Bittencourt Oguri, por causa deste ser humano lindo, tudo isso começou.

Ao grande amigo Antonio Carlos Souza Muniz,

por uma amizade ímpar e embasada na dedicação.

“... escolha um determinado assunto e trate de entendê-lo. O sólido, o importante, o principal é o entendimento.”

Prof. Maurício Peixoto

Agradecimentos

À Prof. D. Sc. Tatiana Marins Roque, pela orientação nesta tese, pelo incentivo aos estudos relativos à História da Ciência e à Matemática desde os bancos da Especialização em Matemática no IM-UFRJ. Por ter me permitido, conduzir este trabalho com confiança e grande admiração que um aluno deve desenvolver e ter pela figura de seu orientador.

Ao Prof. Ph.D. Ricardo da Silva Kubrusly pelas aulas na Especialização e no Mestrado... pelo companheirismo, e por saber como entender o outro pelo olhar, pela forma de conduzir um diálogo, por nunca desvalorizar pensamentos e idéias de seus alunos, mesmo que estas estejam equivocadas. Por divulgar e por em prática o amor á vida. Por ter me dado uma excelente dica, um dia, sobre em quem não confiar.

Ao prof. Ph.D. Luis Alfredo Vidal de Carvalho e aos professores do programa, por lutarem muito pela consolidação do *strito-sensu* em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia na UFRJ como um programa independente, possibilitando a realização do sonho de muitos alunos, professores e pesquisadores da área. Todos os alunos do programa sabem que sem a figura deste professor atencioso e que está sempre pronto para resolver “os pepinos” que surgem num curso novo, “não existiríamos” como um programa de pós-graduação interunidades numa universidade cheia de contradições.

Aos professores Ildeu de Castro Moreira e Luis Pinguelli Rosa, por tornarem o primeiro ano do Mestrado, inesquecível. Suas aulas e paixões viscerais pela Física e História da Ciência ficam tatuadas na alma.

Ao maior exemplo de teoria e prática, em como ser um excelente Mestre na arte de ser professor de Matemática, de explicar tudo com clareza e de um modo fácil, por sua gentileza com os alunos, Professora Lúcia Tinoco. Uma incentivadora da aprendizagem constante, principalmente quando se é professor.

A professora Gilda de La Roque Palis, por ter aceitado fazer parte da banca que julgará este trabalho, assim como por suas contribuições muito valiosas para o ensino-aprendizagem da matemática nos diversos níveis de escolaridade de nosso país.

A professora Walcy Santos, por também ter aceitado fazer parte da banca e por ter me apresentado a geometria diferencial na iniciação científica enquanto aluno de graduação.

As secretárias do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE pela eficiência e incansável trabalho junto ao programa, professores e alunos no período em que o programa de HCTE esteve sediado nesta secretaria.

A todos amigos que fiz ao longo do curso, cujo companheirismo em diversas disciplinas tornaram-nas menos áridas; e principalmente pelas experiências ímpares em cursar matérias específicas do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação.

A amiga Isis Coutinho Duboc (com nome e sobrenome!) pelas longas conversas ao telefone, pessoalmente, nas bibliotecas... pelas intermináveis dicas de formatação desta tese segundo as normas técnicas (que mudaram trocentas vezes para o nosso desespero), pelo seu exemplo de força e sucesso na vida que foi muito difícil no início, pelo seu alto astral, beleza e acima de tudo pelas muitas... muitas risadas.

A amiga e excelente professora, com quem trabalhei junto Teresa Cristina Piva... dona de dicas valiosas e de um arsenal de carinho.

À memória da minha tia Neuza Neves das Chagas e à memória do meu tio Dario Martins dos Santos, por sempre acreditarem e confiarem em mim.

Aos meus tios Pedro e Anésia Neves Guedes, Celso e Cirene de Almeida Neves e a minha tia e segunda mãe Iracema Baptista Neves, por terem estado ao meu lado, ao lado do meu pai e dos meus irmãos, nos momentos mais difíceis das nossas vidas.

As minhas avós Maria Vieira Gomes por lembrar a todos, sempre, que eu sou O neto professor e a Vó Maria Alves Baptista Neves, com o respeito eterno de um filho.

Resumo da Tese apresentada á COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

SENSIBILIDADE DAS CONDIÇÕES INICIAIS SOBRE GEODÉSICAS DE SUPERFÍCIES DE CURVATURA NEGATIVA: UM TEOREMA DE HADAMARD

Daniel Felipe Neves Martins

Abril/2005

Orientadora: Tatiana Marins Roque

Programa: História da Ciência e das Técnicas e Epistemologia

Este trabalho mostra um exemplo de um problema determinista hipersensível às condições iniciais. Toma por base o artigo “Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodesiques”, de J. Hadamard, publicado em 1898. Trata das diferentes possibilidades que um ponto material pode descrever como trajetória mínima (as geodésicas da superfície) sobre uma superfície de curvatura negativa, livre de atrito. Insere o problema no conjunto dos sistemas dinâmicos caóticos e discute a compreensão filosófica da grandeza do resultado sob a visão do físico e epistemólogo Pierre Duhem. A análise do artigo de J. Hadamard e sua contextualização histórica o sugerem como sendo um trabalho completo e de base para o conceito de sensibilidade em sistemas dinâmicos sob a óptica da geometria diferencial.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SENSIBILITY OF INICIAL CONDITIONS ON GEODESICS OF SURFACES OF NEGATIVE CURVATURE: A HADAMARD´S THEOREM

Daniel Felipe Neves Martins

April/2005

Advisor: Tatiana Marins Roque

Program: History of Science, Techniques and Epistemology

This work shows up an exemple of a determinist problem hypersensitive on initial conditions. It is based on Hadamard´s article: “Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodesiques”, published in 1898. It discusses the diferents trajectories that a material point can describes over surfaces of negative curvature, without friction. It insert the problem in a chaotics dynamicals systems set and it discusses the theorem’s philosophical comprehension under the physicist and epistemologist Pierre Duhem´s optical. The J. Hadamard´s article analysis and its historical conceptualization, suggest itself as a complete work and the basis for the concept of sensibility in inicial conditions for dynamical systems by the differential geometry viewing.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

Introdução

Você acredita num Deus que joga dados,
e eu em lei e ordem absolutas.

Albert Einstein, carta a Max Born.

Desde o início de meus estudos em Matemática no Instituto de Matemática da UFRJ, encantei-me com o Cálculo Diferencial, com a Geometria, com a Teoria das Equações Diferenciais e com suas diversas aplicações nos diferentes ramos da Matemática. Na Especialização feita na mesma instituição, pude aprofundar meus conhecimentos das mesmas disciplinas e estudar suas relações com as novas tecnologias. Comecei a ler mais artigos sobre os temas e tive o primeiro contato com artigos específicos de historiadores da ciência. Decidi, então seguir meus estudos na área de História da Matemática e História da Ciência na tentativa de entender e resgatar a evolução de conceitos importantes. No Mestrado do programa de HCTE, fui formalmente apresentado a conceitos como *determinismo, previsibilidade, sistemas dinâmicos e Teoria do Caos*. Foi então que meu interesse aumentou e minhas leituras tornaram-se diárias, pois tais conceitos não eram de meu conhecimento e ou domínio. Conclui algumas leituras e fui apresentado, de maneira apaixonante, à figura de Henri Poincaré e a alguns de seus trabalhos. Quis então, desenvolver um trabalho que pudesse reunir a História do Cálculo, a História da Geometria e os Sistemas Dinâmicos. Percebi que é uma linha de pesquisa vasta e com muitos especialistas que trabalham não só em História da Matemática e da Física, mas em Filosofia da Ciência e Epistemologia. Notei, além disso, que respostas à questões variadas da Matemática poderiam ser encontradas em diversos outros ramos do conhecimento, além da própria Matemática.

Apesar das dificuldades para continuar a pesquisa que já foi feita sobre a influência de Poincaré no advento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, devido à falta de embasamento teórico sobre o tema, decidi estudar o artigo *“Les surfaces à* *courbures opposées et leurs lignes géodesiques"*, publicado por Jacques Hadamard em 1898, fazendo a sua conexão com as questões da Física, da Filosofia da Ciência, da Epistemologia e obviamente da Matemática.

Este trabalho procurou apresentar, com base na historia da matemática, uma biografia comentada de Jacques Hadamard a fim de que os leitores pudessem conhecer um pouco da vida, da obra e da personalidade deste matemático que esteve presente em todos os níveis do ensino da Matemática na França, que nunca deixou a pesquisa acadêmica e que participou efetivamente de questões político-sociais de seu país. Trata também, como objeto principal, de um dos resultados mais importantes que une a geometria diferencial e a teoria dos sistemas dinâmicos, que é apresentado por ele em 1898, através do artigo *"Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodesiques"*. O próprio título trás uma curiosidade para quem o lê pela primeira vez, nos dias de hoje. O que Hadamard chama de *"surface à courbure opposée"* é hoje conhecido por superfície de curvatura negativa.

Vários matemáticos já vinham pesquisando e publicando resultados envolvendo as geodésicas ao longo do século XIX. Tais pesquisas marcaram a passagem da análise local para a analise global, e a topologia passa a ter um papel fundamental na construção de conceitos e na obtenção de teoremas em outras áreas da matemática. Os métodos da chamada *"Analysis Situs"* constituíam as principais ferramentas destes matemáticos, incluindo Hadamard. Estes estudos fizeram com que dedicássemos um parágrafo inteiro a evolução histórica do conceito de geodésicas.

Hadamard já vinha trabalhando com a questão das equações das geodésicas há cerca de dois anos, quando da publicação de *"Les surfaces à courbure opposées..."*. Publicou vários outros artigos envolvendo geodésicas fechadas, geodésicas de superfícies de segunda ordem e até mesmo a forma das linhas geodésicas que tendem ao infinito. O resultado obtido no artigo que apresentamos neste texto já estava próximo de ser obtido devido à direção que os seus estudos tomava, e também, devido ao grande desenvolvimento da geometria hiperbólica, em especial a de Lobachevsky.

O primeiro passo de nosso trabalho foi, como já dissemos, conhecer um pouco sobre a vida do autor do artigo, quais eram suas produções em matemática e que caminhos ele desvendava com suas pesquisas. Daí o fato de o Capítulo 1 desta tese, apresentar uma biografia comentada e contextualizada de Hadamard. Como o artigo proposto trata especificamente das geodésicas sobre superfícies de curvatura negativa, procurei descrever, ainda neste capítulo, o objeto do estudo desta geometria e sua importância nos estudos matemáticos. A seguir, abrimos uma seção específica sobre o estudo das geodésicas e a evolução dos resultados sobre o tema nos períodos que antecedem e sucedem a publicação do artigo, comentando em especial, a ligação entre as geodésicas e a mecânica, pois contextualiza o artigo a ser apresentado.

A partir daí, houve uma necessidade natural de buscar uma definição para sistemas dinâmicos sensíveis às condições iniciais. O conceito de que um sistema dinâmico é um conjunto de equações em que se tem uma evolução temporal determinista bem definida aparece gradualmente desde a leitura da idéia geral do artigo e, é fácil constatar que o trabalho de Hadamard se enquadra na definição de sistema dinâmico e ressalta o conceito de imprevisibilidade. O exemplo de sistema dinâmico sensível às condições iniciais, no artigo de Hadamard, aparece a partir da análise do percurso de um ponto material sobre uma superfície de curvatura negativa. Supondo a modificação da condição inicial do movimento da bola, isto é, substituindo a posição e a velocidade real da bola por posição e velocidade imaginárias ligeiramente diferentes (entendamos ligeiramente como “tão pequeno o quanto se queira”), o autor comenta que as trajetórias, que estavam muito próximas no início do movimento, começam a se separar cada vez mais até que sejam completamente distintas. Para este sistema proposto, a pequena incerteza inicial leva à imprevisibilidade, a longo prazo, do futuro do sistema. Em uma tentativa de resgatar na história dos sistemas sensíveis às condições iniciais, propomos a importância do artigo de Hadamard no Capitulo 2. A demonstração feita por Hadamard, no final do século XIX, mostra a importância da compreensão do assunto e os desdobramentos desta questão nas ciências físicas.

O fato de Henri Poincaré analisar o problema da imprevisibilidade de sistemas dinâmicos sensíveis às condições iniciais em seu livro *A Ciência e o Método* de1908, sem citar o artigo de Hadamard que apresentamos, chamou a minha atenção. O que guarda este resultado? Qual o seu valor histórico? Que tipos de questionamentos um resultado como este lega à Matemática, à Física, às ciências em geral? Esta dúvida me motivou a pesquisar uma conexão do artigo com a Filosofia da Física e a compreender melhor o resultado de Hadamard, o seu método e a descobrir se há ligações entre o seu trabalho e os trabalhos de Poincaré. Se há semelhanças ou diferenças substanciais. Nasce daí a necessidade de inserir neste texto uma visão da Física para este resultado. O capítulo 3 desta tese mostra a importância dos resultados de Hadamard para os físicos segundo a visão de Pierre Duhem, que propõe os conceitos de uma dedução útil e de uma dedução inútil à Física. O texto de Hadamard não possuiu um impacto puramente matemático, no entanto traz definições e resultados fortes que usam como ferramentas os conceitos do Cálculo e, principalmente, da Topologia, para abordar a uma discussão maior: a limitação de um modelo matemático e a imprevisibilidade de um sistema determinista.

Esta tese divide-se, então, em quatro momentos, todos interligados e apresenta ainda, um apêndice com as principais definições e resultados que me serviram de base para a compreensão do artigo de Hadamard. Este apêndice aparece devido a minha falta de domínio em assuntos específicos da geometria diferencial contidos no artigo. É um compêndio organizado didaticamente para facilitar o entendimento de um vocabulário muito específico da geometria, com definições e exemplos.

Esperamos, com este trabalho, expor um exemplo de sistema dinâmico que obedece a leis relativamente simples, mas que nem por isso é previsível. Segundo Ian Stewart, em seu livro *"Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos"*, publicado em 1990, "(...) é a ciência do caos que tem forçado cientistas a repensar idéias fundamentais em diversos domínios, como a Matemática, a Física, a Química e a Biologia. É a revelação de um estranho universo em que nada é o que parece(...). Trata-se de um mundo novo de possibilidades que se abrem diante de nossos olhos. Talvez Deus possa realmente jogar dados e criar, no mesmo gesto, um universo de completa lei e ordem."

Capítulo 1

Antecedentes históricos

Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que a
outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz.
Somente na matemática é que cada geração constrói um
novo andar sobre a antiga estrutura.

Hermann Hankel

1.1 - Sobre Hadamard

Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), filho de Amédée Hadamard e de Claire Marie Jeanne Picard, viveu a História da França, desde o período de Napoleão II até o governo do presidente Charles de Gaulle. Enquanto jovem, cresceu em Paris e dedicou-se ao estudo do latim e do grego, antes de tornar-se um matemático eminente. Sua infância foi marcada pela guerra Franco-Alemã que teve início em 19 de Julho de 1870, culminando com a tomada de Paris pelos alemães em 19 de Setembro do mesmo ano. Foi um momento desesperador para os parisienses e para a França em geral, no qual cães, gatos e cavalos foram utilizados como alimento. A capital francesa rende-se em 28 de Janeiro de 1871 e a humilhação histórica para o país é ratificada com a assinatura do Tratado de Frankfurt em 10 de maio de 1871. Muitas insurreições ocorrem nas cidades no período entre a rendição de Paris e a assinatura do Tratado de Frankfurt. Paris, por exemplo, vive uma verdadeira guerra civil. Muitas casas foram incendiadas, inclusive a de Hadamard. A guerra marcou a sua família com perdas materiais e com as mortes de duas irmãs: a mais nova Jeanne, em 1870 e Suzanne em 1874, com apenas quatro anos de idade.

Sua relação com a Matemática, nem sempre foi brilhante. Nos primeiros anos de escolaridade, aluno do Lycée Charlemagne, era muito fraco na disciplina sobre a qual debruçou-se. Segundo Rossat-Mignod e Rossat-Mignod (1969), no ano de 1936, num discurso para pais de alunos, Hadamard os orientou para que não se desesperarem com os baixos rendimentos iniciais de seus filhos, afirmando que em aritmética, até a quinta série, era o pior aluno de sua turma, ou quase isso. Apesar de ter sido um aluno fraco em aritmética ao longo da quinta série, era o segundo aluno do colégio e tal fato não o impediu de torna-se um matemático.

No ano de 1875 recebeu prêmios em diversos assuntos do Concurs Géneral, uma competição nacional francesa entre escolas que testava, através de trabalhos e pesquisas, as competências acadêmicas dos alunos. Desde então, um professor de Matemática o incentiva aos estudos desta disciplina e de Ciências. Em 1876 foi transferido para o Lycée Louis-le-Grand, onde em 1882 graduou-se em *Bachelier en Lettres et en Sciences* e em 1883 completou o *Baccalauréat en Sciences*. No mesmo ano recebeu prêmios em Álgebra e em Mecânica no Concours Géneral. Hadamard foi aprovado em primeiro lugar nos concursos da École Normale Supérieure e da École Polytechnique, optando pela primeira, onde seus mestres foram Jules Tannery, Hermite, Darboux, Appell, Goursat e Émile Picard. Duhem e Painlevé foram seus contemporâneos. Seu primeiro estágio em pesquisa foi investigando e estimando determinantes gerados por coeficientes de série de potências. Graduou-se pela École Normale Supérieure em 30 de outubro de 1888. Enquanto estudava para obter o seu doutoramento, dava aulas no ensino médio. Lecionou no Lycée de Caen, no Lycée Saint-Louis e no Lycée Buffon. Embora seus resultados de pesquisa em Matemática fossem excelentes, suas aulas não eram apreciadas por seus alunos, provavelmente pelo rigor matemático que exigia. Fréchet, um de seus alunos, foi uma exceção à regra. Passou a ser orientado por Hadamard e os dois trocaram correspondências durante nove anos.

Poincaré era onze anos mais velho do que Hadamard, enquanto Émile Borel, Remi Baire e Henri Lebesgue eram mais novos do que ele, mas todos viriam influenciá-lo ou contribuir para muitos de seus trabalhos. Na Alemanha, David Hilbert foi seu contemporâneo. Hadamard foi um dos primeiros a compreender, na França, a Teoria dos Conjuntos criada por Georg Cantor entre 1870 e 1880. Sua obra é marcada pela Teoria das Funções, por sua contribuição à Análise Funcional e por uma releitura das Equações a Derivadas Parciais.

Aos 33 anos, Hadamard possuía uma grande quantidade de resultados fundamentais sobre funções de variáveis complexas. Dois anos antes, os resultados obtidos de suas pesquisas em teoria das funções lhe permitiram receber, da Academia de Ciências de Paris, o Grande Prêmio de Ciências Matemáticas pelo Teorema dos Números Primos cujo título é “Determinação de um número de primos menores do que um dado número”.

TEOREMA:

“O número de números primos inferiores à x é igual à $\frac{x}{\ln(x)}$ *quando o valor de x tende ao infinito”.*

Segundo Reichard (1960), este teorema foi conjeturado no século XVIII por Gauss que, de acordo com relatos da historiografia moderna, o teria encontrado no verso de uma tabela de logaritmos que conseguira quando possuía apenas quatorze anos de idade.

> “Legendre chegara perto de antecipar este teorema, (...), mas o curioso é que, se Gauss escreveu isso (...) ele conservou para si este belo resultado. Não sabemos se ele tinha ou não a prova desse teorema, ou mesmo quando a afirmação foi escrita. (...) Em 1845, quando Gauss era velho, um professor parisiense, Joseph L. F. Bertrand (1822-1900) teve a idéia que se $n > 3$, existe sempre um primo ao menos entre n e $2n$ (ou mais, mais precisamente, $2n – 2$) inclusive. Esta conjectura, chamada postulado de Bertrand, foi provada em 1850 por Pafnuti Tchebycheff (...) na universidade de São Petersburgo. (...) Tchebycheff, evidentemente sem conhecer o trabalho de Gauss sobre primos, conseguiu mostrar que se $\pi(n)(\ln(n))/n$ tende a algum limite quando n cresce indefinidamente, esse limite tem que ser um, mas não conseguiu mostrar a existência de limite. Somente dois anos depois da morte de Tchebycheff veio a ser conhecida uma prova (...)”.(BOYER, 1993, p.372).

O teorema não havia sido provado até 1896, quando Hadamard e o matemático belga Charles de la Vallée Poussin (1866-1962), de forma independente, usam análise complexa para obter a prova matemática do resultado. Esta prova já havia sido rascunhada por Riemann em 1851, mas as ferramentas matemáticas existentes até então eram insuficientes para o êxito da demonstração. Este problema foi um dos maiores motivadores para o desenvolvimento da análise complexa entre 1851 e 1896.

Trabalhos em dinâmica e em geometria diferencial (mais especificamente sobre as propriedades das geodésicas) também são desenvolvidos por Hadamard, valendo-lhe o prêmio Bordin da Academia de Ciências devido a sua grande contribuição à geometria e a física.

De acordo com V Mas´ya e Shaposhinikova (1998), Hadamard concluiu seu doutorado em 1892 com uma tese sobre funções definidas por séries de Taylor. Este trabalho versa sobre as funções de variáveis complexas e foi o primeiro tratado geral sobre a Teoria das Funções Analíticas, em particular, sua tese contém o primeiro estudo geral sobre *singularidades*. Hadamard introduz na Matemática, a partir deste texto, a palavra *funcional.* Maurice Fréchet (1878-1973), discípulo direto de Hadamard, mostra em sua tese de doutoramento de 1906 que a teoria das funções analíticas já não podia passar sem uma visão de teoria dos conjuntos, fundando o *cálculo funcional*. Em 1893, morando em Bordeaux, publica um importante resultado conhecido como desigualdade de Hadamard em matrizes. Este resultado contribui imensamente para a teoria das equações integrais e para a teoria dos códigos.

O primeiro envolvimento político de Hadamard ocorre enquanto ainda morava em Bordeaux. Alfred Dreyfus, um parente de sua esposa, vem da Alsácia e engaja-se na carreira militar. Em 1894, então ministro da guerra, Dreyfus é acusado de vender segredos do Estado francês aos alemães e foi julgado e condenado à prisão perpétua. Seu julgamento fora conduzido de forma irregular e a sentença classificada como anti-semita por muitas pessoas devido a origem judaica de Dreyfus. Após a descoberta de que os documentos produzidos pelos militares para incriminar Dreyfus foram forjados, a sentença imputada a ele foi questionada e foi concluído que o julgamento tinha sido tendencioso. Assim sendo, muitos que acreditavam na culpa de Dreyfus se articularam para corrigir a injustiça cometida. Hadamard é uma destas pessoas. O caráter, o espírito de luta e o espírito de justiça de Hadamard são reconhecidos por muitos intelectuais da época, como descreve Painlevé em uma conversação datada de 1897:

> “Durante quase uma hora, Hadamard tentou convencer-me da inocência de Dreyfus, e no final, diante minha descrença, ele deu o melhor de si mesmo para fazer-me entender o valor intrínseco de seus argumentos e seu completo desprendimento de paixão ou sentimentalismo... ele baseou a inocência de Dreyfus em fatos”. (PAINLEVÉ, apud V MAZ´YA E SHAPOSHINIKOVA, 1998,).

A posição de Hadamard como intelectual engajado no caso Dreyfus, independente da relação familiar deste como parente de sua esposa, chama a atenção de muitos. Assim como Painlevé, Laurent Shwartz escreveu:

> “(...) a partir do momento em que ele [Hadamard] entende a enorme injustiça impetrada contra um homem em nome da razão do Estado, e as conseqüências que o anti-semitismo poderiam trazer, ele dedicou-se passionalmente à revisão do julgamento. Este caso marcou a sua vida”.(SCHWARTZ, apud ROSSAT-MIGNOD E ROSSAT-MIGNOD, 1998)

No ano de 1898, o manifesto *“J´accuse”* de autoria do escritor francês Émile Zola (uma carta aberta acusando o exército de falsificação das provas) é estampado nos jornais e o *Affair Dreyfus* estoura por toda a França. Dreyfus passa de culpado a inocente e como conseqüência, Dreyfus é aposentado compulsoriamente. Émile Zola é condenado a um ano de prisão e a pagar uma multa ao governo, de três mil francos franceses. Ao mesmo tempo, no *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* aparece um artigo que, para muitos, parecia ter um título um tanto esotérico *“Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodesiques”*, cujo autor, Jacques Hadamard, é visto como um dos matemáticos mais brilhantes de sua geração. Ainda no mesmo ano, ao apresentar um trabalho na Academia de Ciências de Paris, Hadamard é surpreendido por Charles Hermite, um matemático eminente de uma geração mais antiga, de direita, com a frase: “-Hadamard, você é um traidor!”. Antes que Hadamard pudesse reagir negativamente, pois pensara ter sido um comentário relacionado à política, Hermite completou: "-Você trocou a Análise pela geometria!"[1]. Esta brincadeira enfatizou o novo ramo da matemática que Hadamard estava se dedicando, a Geometria Hiperbólica. Na verdade, Charles Hermite dedicava-se somente a Teoria das Funções e desprezava a Geometria e Hadamard, analista de longa data, passa a trabalhar em seu artigo sobre superfícies de curvatura negativa, utilizando os métodos qualitativos e as intuições geométricas de Poincaré. O comentário de Charles Hermite não foi totalmente verdadeiro, uma vez que importa da Análise Matemática e da Teoria dos Conjuntos, muitas das ferramentas para os resultados em geometria.

Hadamard foi professor do Collége de France em 1909, onde foi nomeado chefe da cadeira de Mecânica; e membro da Academie des Sciences em 1912, substituindo a cadeira de Poincaré, tarefa de muita responsabilidade para ele, devido à figura de seu antecessor no cenário acadêmico da instituição e da França. No ano seguinte, publica "*Leçons sur le calcul des variations"* que serviu de base para os fundamentos da análise funcional. Foi também professor de Análise da École Polytechnique sucedendo Jordan em 1912. Seus seminários no Collège de France servem até hoje de modelo aos seminários de Matemática na França e no mundo.

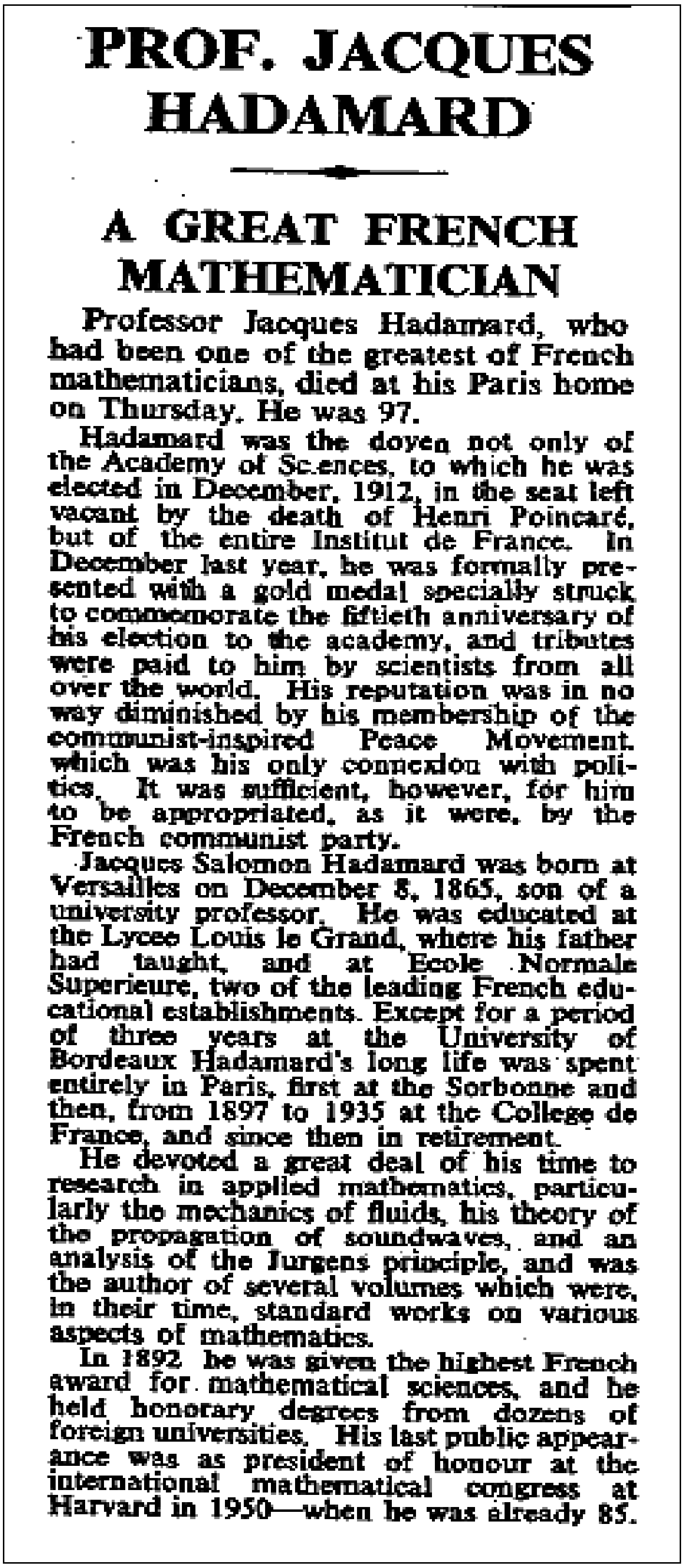
Sua vida pessoal foi recheada de tragédias familiares, tendo como as principais, as perdas de dois de seus três filhos na primeira grande Guerra Mundial. Estas tragédias incentivam-no a dedicar-se ainda mais à Matemática como forma de aliviar sua dor. Visitou, a trabalho, os Estados Unidos, a Espanha, a Tchecoslováquia, a Itália, a Suíça, o Brasil, a Argentina e o Egito. Hadamard produziu livros e artigos de altíssima qualidade, publicando o famoso "*Lectures on Cauchy´s problem in linear partial differential equations"* em 1922, baseado em uma disciplina ministrada na Universidade de Yale, nos Estados Unidos. Escreve também artigos em teoria das probabilidades, em especial sobre as cadeias de Markov.

No período do Entre Guerras, torna-se um ativista político de esquerda, em resposta ao crescimento da força nazista a partir de 1933. Antes da Segunda Guerra Mundial, consegue escapar para os Estados Unidos para não cair nas mãos dos nazistas e recebe em Nova Iorque, onde morava e trabalhava como professor visitante

[1] Esta anedota foi contada por Szolem Mandelbrojt: "Souvenirs à batons rompus", in. *Cahiers du Séminaire d´Histoire des Mathématiques,* Institut Henri Poincaré, t.6, 1985, p.46.

na Universidade de Colúmbia, a notícia da morte de mais um de seus filhos no front. Não conseguindo estabelecer-se nos Estados Unidos, vai para a Inglaterra e, depois da guerra, retorna a Paris. Neste momento, Hadamard torna-se pacifista, mas não deixa de produzir Matemática. Dá um suporte ímpar à matemática norte-americana e, em 1950, organiza o International Congress em Cambridge, Massachusetts, onde foi o presidente de honra. Escreve uma série de livros de Matemática para o Ensino Médio assim como artigos em Educação Matemática e em Educação de uma forma geral. Hadamard deixa um legado de mais de 300 artigos científicos para a comunidade acadêmica. O seu livro *The psycology of invention in the mathematical field* de 1945, mostra um excelente trabalho assim como deixa claro o seu estilo de ensinar esta disciplina.

Quatro anos após a morte de Hadamard, um seminário é organizado para a comemoração do centenário de seu nascimento. Segundo (V Maz´ya e Shaposhinikova, 1998), entre muitos discursos proferidos no seminário, um de seus ex-alunos o descreveu como um professor ativo, vivo e cujo pensamento combinava exatidão e dinamismo. Este aluno ressaltou que suas aulas eram instigantes, uma verdadeira aventura. Neste mesmo seminário, Laurent Schwartz disse que Hadamard moldou direta ou indiretamente todos os analistas daquela época, assim como influenciaria positivamente tantos outros que ainda apareceriam.



PROF. JACQUES HADAMARD

A GREAT FRENCH MATHEMATICIAN

Professor Jacques Hadamard, who had been one of the greatest of French mathematicians, died at his Paris home on Thursday. He was 97.

Hadamard was the doyen not only of the Academy of Sc.ences, to which he was elected in December, 1912, in the seat left vacant by the death of Henri Poincaré, but of the entire Institut de France. In December last year, he was formally presented with a gold medal specially struck to commemorate the fiftieth anniversary of his election to the academy, and tributes were paid to him by scientists from all over the world. His reputation was in no way diminished by his membership of the communist-inspired Peace Movement. which was his only connexion with politics. It was sufficient, however, for him to be appropriated, as it were, by the French communist party.

Jacques Salomon Hadamard was born at Versailles on December 8, 1865, son of a university professor. He was educated at the Lycee Louis le Grand, where his father had taught, and at Ecole Normale Superieure, two of the leading French educational establishments. Except for a period of three years at the University of Bordeaux Hadamard's long life was spent entirely in Paris, first at the Sorbonne and then, from 1897 to 1935 at the College de France, and since then in retirement.

He devoted a great deal of his time to research in applied mathematics, particularly the mechanics of fluids, his theory of the propagation of soundwaves, and an analysis of the Jurgens principle, and was the author of several volumes which were, in their time, standard works on various aspects of mathematics.

In 1892 he was given the highest French award for mathematical sciences, and he held honorary degrees from dozens of foreign universities. His last public appearance was as president of honour at the international mathematical congress at Harvard in 1950—when he was already 85.

Fig 1. Obituário de Hadamard. *The New York Times*, 1963.

1.2– Sobre a geometria diferencial

A Geometria Diferencial utiliza os métodos do Cálculo Diferencial para estudar as propriedades locais de curvas e superfícies, a partir do estudo de propriedades na vizinhança de um ponto. No artigo de Hadamard encontramos conceitos desta geometria cujos precursores são Euler (*Recherches sur la courbures des Surfaces*, de 1760), Monge (*Application de l´analyse à la géometrie*, de 1807), Lagrange, Gauss e Riemann.

Segundo Mlodinow (2004), entre 1816 e 1826, Gauss passou grande parte de seu tempo fazendo o levantamento topológico de algumas regiões da Alemanha, numa tentativa de compor as suas linhas geodésicas. O objetivo principal da pesquisa era medir distâncias entre cidades e outros pontos de referência, e reunir estes dados em um mapa. Muitas dificuldades tinham que ser vencidas, para o êxito do trabalho, como por exemplo: o alcance limitado dos instrumentos de prospecção e a propagação constante dos erros aleatórios nas medidas ao traçar segmentos de reta muito pequenos na tentativa de construir uma curva. Esta tarefa gerou um outro estudo no qual Gauss conclui que "erros aleatórios se distribuem numa curva em forma de sino em torno de uma média", conhecida por curva de Gauss. Outro grande desafio era produzir um mapa em duas dimensões a partir de dados tridimensionais que advinham das diferentes altitudes dos terrenos assim como pela curvatura da Terra. Tais dificuldades são perfeitamente compreensíveis uma vez que a geometria do plano euclidiano não é a mesma geometria do globo terrestre. É a versão do matemático da perplexidade enfrentada por qualquer pessoa que tenha tentado embrulhar uma bola com uma folha de papel retangular. Vencer a dificuldade de tal feito recortando o papel em quadradinhos e depois colando-os na bola, significa resolver o problema da mesma maneira de Gauss, a menos de "detalhes técnicos". Em 1827, Gauss reuniu tais "detalhes técnicos" na publicação do trabalho *"Disquisitiones generales circa superficies curvus".*

> “O novo ramo da geometria que Gauss iniciou é conhecido como **geometria diferencial**, e pertence, talvez mais à análise que ao campo tradicional da geometria. Desde os dias de Newton e Leibniz os matemáticos tinham aplicado o cálculo ao estudo de curvas em duas dimensões, e num certo sentido isso constitui um protótipo da geometria diferencial. Euler e Monge tinham estendido isso de modo a incluir o estudo analítico de superfícies; por isso são as vezes considerados os pais da geometria diferencial. Porém só depois do aparecimento do tratado de Gauss (...) é que se teve um volume importante inteiramente ligado ao assunto. De modo informal, a geometria ordinária se interessa pela totalidade de um dado diagrama ou figura, enquanto que a geometria diferencial se concentra primeiro nas propriedades de uma curva ou superfície nas vizinhanças de um ponto sobre a curva ou a superfície”.(BOYER,1993, p.383, grifo nosso)

Gauss concluiu em seus estudos que se num ponto P de uma superfície bem comportada *S* tomamos a normal *N* à *S*, o feixe de planos por *N* cortará *S* numa família de curvas planas e cada uma destas terá um raio de curvatura. As direções das curvas com raios de curvatura máximo e mínimo, *R* e *r*, são atualmente conhecidas por direções principais sobre *S* em *P*, sendo sempre perpendiculares uma à outra. *R* e *r* são denominados raios de curvatura principais de *S* em *P*, e a curvatura de Gauss de *S* em *P*, definida por $K = \frac{1}{r.R}$. De acordo com Boyer (1993), no mesmo trabalho de Gauss, encontramos fórmulas para *K* em termos das derivadas parciais da superfície com relação a vários sistemas de coordenadas curvilíneas, bem como em termos de coordenadas cartesianas. O autor denomina por “teoremas notáveis” um conjunto de propriedades de famílias de curvas, tais como as *geodésicas* traçadas sobre a superfície.

A Geometria Diferencial apresenta uma nova forma de analisar curvas e superfícies. A principal noção contida nos estudos relativos a este ramo da geometria é a de vizinhança de um ponto, o que nos leva a conceber a idéia de uma geometria local. Muitas vezes, o conhecimento de propriedades locais de uma superfície nos permite ter uma idéia do comportamento global da mesma. Se uma figura geométrica contínua é conhecida por admitir certa propriedade na vizinhança de todos os seus pontos, é possível inferir a validade desta propriedade para toda a superfície. Por exemplo, dado uma superfície S onde se é possível determinar um plano tangente a ela em todos os seus pontos, então se pode provar que esta superfície é diferenciável em todos os seus pontos, ou seja, que esta superfície é regular.

O estudo sobre a vizinhança de um ponto, permitindo explorar as características de uma superfície, foi apresentado por Riemann, em uma conferência no dia 10 de junho de 1854, intitulada *Über die Hypothesen ver geometrie zu grande liegen* (Sobre as hipóteses em que a geometria se baseia), na Universidade de Göttingen. Nela, o autor descreve as propriedades das regiões infinitamente pequenas de uma superfície, ao invés de destacar suas características geométricas em grande escala. Riemann explicou como uma superfície, como a esfera, podia ser interpretada como um espaço elíptico bidimensional fornecendo uma nova definição para ponto, reta e plano. Plano era a própria superfície esférica, o ponto era formado por coordenadas (a latitude e a longitude) segundo o modelo proposto por Descartes e as retas eram círculos máximos sobre a esfera, as *geodésicas*. Esta palestra só foi publicada dois anos depois de sua morte e um ano depois que o livro de Richard Baltzer (*Theorie und Anwendung der Determinanten)* publicado em 1881, popularizou as obras de Bolyai e Lobachevsky.

Gauss e Riemann aprimoraram os estudos da Geometria Diferencial baseados em conceitos do Cálculo (principalmente o de derivadas parciais) e em axiomas que permitiram desenvolver ainda mais o conceito de vizinhança. Da Topologia destacam-se os conceitos de métrica, conjunto aberto e fechado, fronteira, função contínua, espaço topológico e a noção de interior e exterior. Da Geometria Analítica, utiliza-se a representação de formas geométricas em um espaço orientado. Um aspecto central da geometria proposta por Gauss e Riemann é o estudo da curvatura e sua relação com a topologia. Desta relação entre geometria e topologia, Gauss chega a dois resultados importantes: (1) afirma que uma superfície pode ser considerada um espaço e que (2) a curvatura pode ser estudada na própria superfície, isto é, a geometria de uma superfície curva pode ser estudada sem referência a um espaço euclidiano de dimensão superior onde a superfície está imersa. O conceito de que o espaço podia “se curvar”, embora não se curvando dentro de algo, foi um conceito que, mais tarde, se mostraria necessário na física.

Sabe-se que a geometria está relacionada a problemas relativos a medidas: distâncias, longitudes, ângulos, áreas, volumes, etc. Para se obter êxito nos cálculos relativos a tais medidas, em geometria diferencial, e para torná-la ferramenta de grande uso na resolução de problemas da física, variedades diferenciáveis que possuem produto interno em seus espaços foram introduzidas. Segundo Río (1999), dado que a forma do produto interno considerado pode variar de um ponto a outro, é esperado que o mesmo aconteça com as magnitudes citadas que queremos medir. Assim, um mesmo segmento pode ter diferentes comprimentos dependendo de sua posição na variedade considerada ou um pedaço de uma superfície poderá ter área diferente, dependendo do lugar em que o situemos. Um experimento simples que ilustra tais afirmativas pode ser feito: imagine uma rosquinha em que um pedaço de sua região exterior convexa seja retirado. Ao amassá-lo sobre uma mesa, o pedaço se estreita, se afunila, e abre fendas à medida que o comprimimos. Esta simplória experiência permite visualizar que a região da rosquinha possui uma área menor do que a correspondente região do plano que a porção amassada ocupará. A fim de entender estas variações, a geometria diferencial passa a estudar a *curvatura* de um espaço. Em geral existem dois tipos de curvaturas: a extrínseca e a intrínseca. A curvatura extrínseca de uma curva em R^3 foi a primeira a ser estudada e deu margem aos estudos de Frénet, que descreveu uma curva em função de sua curvatura, de sua torção, de um ponto inicial e de sua direção. Em termos de estudos das superfícies, as mais importantes são a curvatura média e a curvatura de Gauss, que descreveremos mais adiante.

1.3 – Sobre a história das geodésicas

Dada superfície *X(u(t),v(t))* parametrizada regular, uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma *geodésica* da superfície se para todo *t* , $\alpha''(t)$ é um vetor normal à *X* em *(u,v)*.

Geometricamente, podemos definir uma geodésica de uma superfície como sendo a curva de menor comprimento que liga dois pontos sobre esta superfície.

Pensemos na Terra. O caminho mais curto para sair do pólo norte e chegar ao pólo sul é seguir sobre um meridiano. Generalizando, todo grande círculo (intersecção da esfera com um plano que passa pelo centro) define uma geodésica da esfera e reciprocamente toda geodésica da esfera é um arco de um grande círculo. Notemos que todo círculo máximo parametrizado pelo comprimento de arco tem o vetor $\alpha''(t)$, apontando para o centro da esfera, portanto normal à esfera. As geodésicas da esfera são curvas fechadas, mas há muitas outras superfícies convexas cujas geodésicas são fechadas. As geodésicas fechadas são aquelas que ao serem percorridas, sempre é possível voltar ao ponto inicial do movimento; não possuem "bicos" e nem auto-intersecção. Os exemplos mais óbvios são as superfícies de revolução.

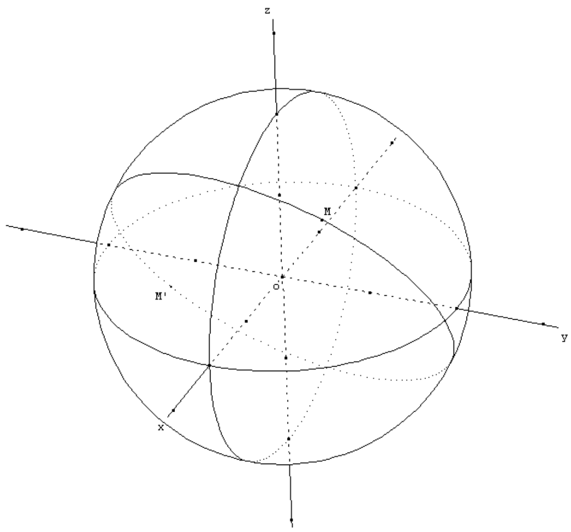


Fig 2. As geodésicas da esfera

As equações que determinam uma geodésica de uma superfície são definidas por equações diferenciais parciais cujos coeficientes são conhecidos por símbolos de Christoffel e estes símbolos são expressos em função da primeira forma quadrática e suas derivadas. Este fato nos mostra que se duas superfícies são isométricas, então as geodésicas de uma superfície são levadas em geodésicas da outra superfície por isometria. O teorema de existência para geodésicas afirma que por cada ponto de uma superfície passa uma única geodésica tangente a qualquer vetor dado para um intervalo $\left]-\varepsilon.\varepsilon\right[$. Considerando o plano do espaço R^3 suas retas são suas geodésicas. No cilindro, os meridianos e os paralelos são suas geodésicas, mas fixado um (u_0, v_0) as hélices são geodésicas de X, passando por $X(u,v)$.

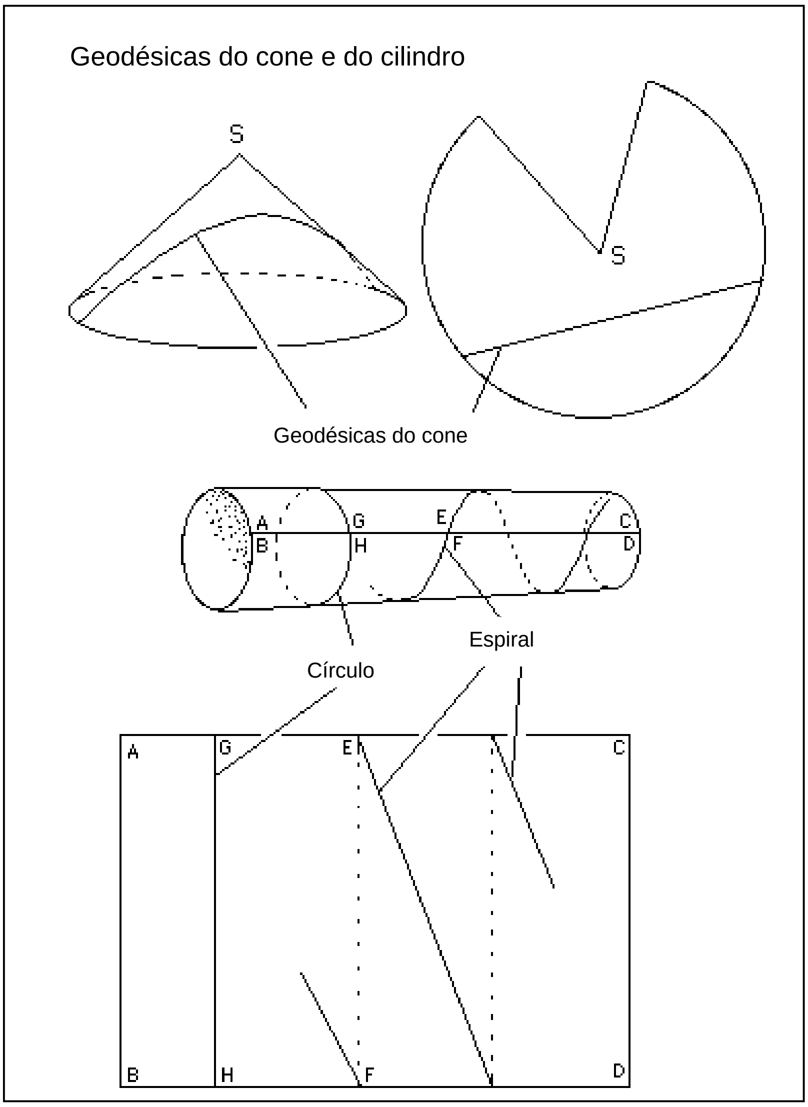


Fig 3. As geodésicas do cilindro e do cone

De fato, entre as três linhas de uma superfície (linhas de curvatura, linhas assintóticas e geodésicas), as geodésicas são as mais importantes. Além de ser o menor caminho entre dois pontos de uma superfície que une pontos suficientemente próximos; dados dois pontos p_1 e p_2 de uma superfície S, se existe uma curva da superfície que liga p_1 a p_2 e cujo comprimento é menor ou igual que qualquer outra curva da superfície que liga tais pontos, então esta curva é uma geodésica.

As geodésicas possuem um significado fundamental para a interpretação das propriedades intrínsecas de uma superfície.Todas as propriedades intrínsecas de uma superfície, como a curvatura de Gauss, podem ser determinadas através das geodésicas e das medidas de seus comprimentos de arcos.

Uma outra característica das geodésicas é que o movimento infinitesimal sobre ela é feito sobre um “segmento de reta”. Assim sendo, a geodésica é a curva sobre a superfície que possui a menor curvatura entre todas as curvas que ligam dois pontos desta superfície e que possuem o mesmo ponto de tangência que o da geodésica.

Vejamos algumas outras definições de geodésicas, todas elas são equivalentes:

(a) Na mecânica, uma geodésica é a trajetória de um ponto material sobre uma superfície, submetida a uma única reação normal, podemos representá-la a partir de pequenas bilhas deslizando pela superfície à velocidade constante;

(b) São curvas traçadas sobre a superfície de tal modo que em cada ponto, a normal principal à curva (se ela existir) coincide com a normal à superfície (isto é, o plano osculador à curva contém a normal à superfície, ou ainda; que o plano retificador da curva é o plano tangente à superfície);

(c) São curvas traçadas sobre a superfície de curvatura geodésica nula;

(d) São curvas traçadas sobre a superfície tal que em todo ponto a torção geodésica da superfície é igual à torção da curva.

Segundo Nabonnand (1995) a teoria das geodésicas é uma intersecção entre vários assuntos que transformam profundamente a teoria das superfícies, o cálculo das variações e a mecânica, assuntos estes que já vinham sendo repensados e reestruturados desde a revolução analítica do século XVII. A palavra *geodésica*, acompanhada de sua definição, aparece pela primeira vez no *Traité de Mécanique Céleste* de Laplace[2]. Falaremos brevemente, a seguir, da evolução histórica deste conceito.

Em 1697, Jean Bernoulli propõe o problema de determinar o caminho mais curto entre os que ligam dois pontos de uma superfície. Em uma carta a L´Hospital, ele diz ter determinado as equações diferenciais destes caminhos. Em 1698, seu irmão Jacques Bernoulli, mostra que as geodésicas de um cilindro ou de um cone planificados são retas. Euler retoma esta questão e descobre a equação diferencial desta geodésica. No artigo, "*Mechanica sive motus scientia analytice"*, Euler mostra que, na ausência de forças, o caminho de um ponto material sobre uma superfície é uma geodésica desta superfície.

Gauss estuda a teoria dos caminhos mais curtos sobre superfícies em seu artigo *"Disquisitiones generales circa superfícies curvas"*, de 1828. Ele se interessa pelas propriedades locais e globais da curvatura de uma superfície munida de uma métrica geral definida pela expressão da primeira forma quadrática e dá uma interpretação geométrica para os coeficientes que conhecemos hoje como E, F e G, da primeira forma quadrática. Assim sendo, considera dois sistemas de curvas definidas por u e v constantes. Cada ponto da superfície é denotado como a intersecção de duas linhas particulares deste sistema. A distância entre os pontos de coordenadas (u,v) e $(u+du,v)$ é igual a du e a distância entre os pontos de coordenadas $(u, v+dv)$ é igual a dv, deste modo, sendo ω o ângulo entre as linhas do sistema podemos escrever $\cos(\omega) = \dfrac{F}{\sqrt{E.G}}$.

2 "Ainsi les lignes tracées par les mesures géodésiques ont la propriété d´être les plus courtes que l´ont puisse mener sur la surface du sphéroïde, entre deux de leurs points quelconques; [...] elles seraient décrites par un mobile mû uniformément dans cette surface. [...] nous désignerons cette ligne sous le nom de ligne géodésique" *Traité de Mécanique Céleste*, t.2, Paris,1799; *Oeuvres complètes*, t.2, Paris: Gauthier-Villars, 1878.

Sob tais condições, Gauss pôde estudar certas propriedades das geodésicas propondo o problema de descobrir o caminho mais curto entre dois pontos de uma superfície em termos de variacionais e estabelece que x, y e z são pontos de uma geodésica desde que dx, dy e dz representem a diferença infinitesimal entre as coordenadas sobre a curva contida na superfície; e ∂x, ∂y e ∂z a diferença das coordenadas em relação as variações. Gauss interpreta as fórmulas geométricas encontradas considerando sobre uma esfera, os pontos λ e L, respectivamente definidos pela direção tangente à curva e pela direção da normal principal à curva. Desta maneira, se ξ, η e ζ são as coordenadas de λ e X, Y e Z as de L, temos uma caracterização das geodésicas em função do raio de curvatura ρ da curva, definida por $\rho d\xi = X.dr$, $\rho d\eta = Y.dr$ e $\rho d\zeta = Z.dr$, sendo *dr* o elemento de comprimento da curva. Destas fórmulas, Gauss destaca duas propriedades fundamentais que servem de base para definir as coordenadas geodésicas de uma superfície:

(1) A curva formada pelas extremidades de geodésicas de mesmo comprimento a partir de um mesmo ponto é normal às geodésicas.

(2) A curva formada pelas extremidades de geodésicas de mesmo comprimento e normais a uma curva dada é normal a estas geodésicas.

Considerando a superfície munida da métrica geral $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, Gauss estabelece equações das geodésicas, mas estas tratam-se de equações muito complicadas. Caso o sistema definido possua as curvas coordenadas *u* e *v* ortogonais, as fórmulas simplificam-se muito, assemelhando-se às coordenadas polares onde um ponto é definido por uma distância à um ponto fixo e por um ângulo φ que forma uma geodésica dada com a geodésica minimizante entre este ponto e o ponto fixo. Neste caso temos E=1, F=0 e a equação das geodésicas são escritas por $k = \frac{-1}{m} . \frac{dd\sqrt{G}}{dr^2}$, sendo *k* a curvatura da superfície. A partir desta fórmula, Gauss demonstra que a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico é maior do que 180^o para uma superfície de curvatura positiva e respectivamente menor do que 180^o para o caso de superfícies de curvatura negativa. Gauss generaliza este resultado para polígonos definidos por *n* segmentos geodésicos. Este teorema é de suma importância para a passagem para uma visão global do comportamento das geodésicas.

O problema de determinar sob que condições a minimização global de geodésicas é ou não possível de ser feita é um exemplo, entre outros, que marcam a tentativa da passagem da análise local para a análise global. Há dois aspectos do problema de minimização que devem ser explicitados: o primeiro é *analítico*, e consiste em estudar a propriedade de minimização de uma geodésica entre todos os caminhos infinitamente vizinhos; e o segundo, puramente *geométrico*, consiste em analisar a propriedade global da minimização de uma geodésica no conjunto de todos os caminhos.

Uma das questões mais importantes nos estudos que passam de uma análise local para uma análise global das superfícies desenvolvidos pelos matemáticos do século XIX, é a de determinar as conseqüências geométricas, métricas ou topológicas de uma hipótese global sobre um objeto infinitesimal. Um dos primeiros artigos que evocam esta passagem é o de Sturm sobre a análise qualitativa das equações diferenciais lineares do segundo grau. Nele, Sturm[3] afirma que a dificuldade em integrar tais equações, ou mesmo em determinar a primeira integral em certos casos particulares ou obter a expressão da solução da equação por uma forma finita (seja ela por séries, integrais definidas ou indefinidas), faz com que as características globais das equações diferenciais lineares do segundo grau sejam difíceis de serem analisadas. As exigências internas do problema também são fatores importantes que contribuem para a dificuldade de sua análise global, uma vez que, em muitos casos, somente a análise quantitativa não é a mais suficiente e será necessário desenvolver uma análise qualitativa.

Sturm estuda a dependência de certos aspectos qualitativos do comportamento das soluções em relação aos coeficientes da equação e às suas condições iniciais. Dedica-se também ao número e à posição relativa das raízes das soluções, assim como à comparação quando seus coeficientes variam em função de um parâmetro. Estes resultados mostram que uma hipótese global sobre os coeficientes das equações diferenciais demonstra uma propriedade qualitativa. É a partir do confronto da definição das soluções que se anulam para $x = a$, obtidas por técnicas locais, com a hipótese global, que se deduz as propriedades qualitativas das soluções.

---

[3] "Mémoires sur les équations différentielles linéaires du second ordre", *Journal des Mathémathiques Pures et Appliquées,* (1836), pp. 106-186.

Hadamard, na introdução do artigo *"Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique"*, enfatiza os dois conceitos:

> "O estudo das equações diferenciais segue em duas direções diferentes. Pode-se ter uma visão sobre a natureza das funções procuradas, e considerá-las em todo o campo dos reais ou dos complexos em relação a variável independente. Mas pode-se também, situar-se somente no campo dos números reais e seguir a linha dos trabalhos de Sturm, Poincaré e Picard, que propõem somente a discussão sobre a variação dos incomuns, e onde as relações de desigualdade atuam de formam preponderante". (Hadamard, 1897).

Jacobi é um dos primeiros a estudar o comportamento global das geodésicas de uma superfície. A importância da existência de pontos conjugados (pontos de intersecção entre geodésicas infinitamente próximas) é posto em evidência a partir de seus estudos baseados no cálculo das variações. Em seu tratado de dinâmica, *"Vorlesungen über Dynamik"* de 1843, mostra que as dificuldades em estudar o tema já aparecem desde a resolução de questões que envolvem máximos e mínimos. Na sétima parte descreve o caso particular do movimento de um ponto material sobre uma superfície sem estar sujeito a nenhuma força, produzindo como caminho uma geodésica sobre esta superfície. Jacobi enuncia dois resultados:

(1) duas geodésicas infinitamente próximas descritas a partir de um mesmo ponto jamais possuem um ponto em comum estando sempre uma ao lado da outra, pois a geodésica é sempre um caminho mínimo. Este é o caso do estudo das geodésicas no plano ou em superfícies classificadas como côncava-convexas. As superfícies côncavo-convexas são aquelas que possuem ao longo de suas direções principais de curvaturas, sinais opostos, possuindo curvatura de Gauss negativa como os hiperbolóides

(2) duas geodésicas infinitamente próximas a partir de um mesmo ponto podem ter um ponto de intersecção sobre o conjunto da família de geodésicas seguidas pelo mesmo

ponto, pois a geodésica é o caminho mínimo somente até o ponto de contato com tal conjunto, como é o caso dos elipsóides de revolução.

O conjunto de geodésicas descrito por Jacobi (*l´enveloppe de courbes géodesiques*), a envoltória de curvas geodésicas, é o conjunto de pontos conjugados.

Ossian Bonnet dá continuidade aos estudos de Jacobi a partir da análise das condições sobre as quais uma geodésica pára de minimizar a distância. Ele aborda a questão utilizando os resultados qualitativos de Sturm ao estudar as equações diferenciais de segunda ordem do tipo: $\frac{d^2 p}{ds^2} + \frac{p}{RR'} = 0$, onde p é a função que exprime a distância variável MM´ entre duas linhas geodésicas infinitamente vizinhas AM e AM´; e R e R´ são os raios de curvatura principais da superfície. Limitando o coeficiente e aplicando os resultados de Sturm, Bonnet encontra o resultado enunciado, e não provado por Jacobi, que diz que em uma superfície de curvatura negativa, uma linha geodésica é mínima em todo o seu comprimento. Bonnet faz uma análise para o caso em que $0 \langle \frac{p}{RR'} \langle \frac{1}{a^2}$, concluindo que neste caso uma linha geodésica não pode ser geralmente um linha mínima numa extensão superior a $\pi . a$. Em estudos futuros, Bonnet demonstra o teorema de Jacobi, cujo resultado obtém informações sobre o comportamento das geodésicas numa vizinhança de uma dada geodésica γ. Atualmente, este mesmo teorema é provado através de técnicas do cálculo variacional. A relação entre o local e o global em questão neste resultado é semelhante ao trabalho de Sturm e é característico de enunciados que unem resultados geométricos e propriedades métricas, fazendo aparecer uma propriedade métrica global da superfície.

Christoffel dedica o artigo *“Allgemaine Theorie der geodästichen Dreieck”* à teoria das geodésicas e dos triângulos geodésicos. Na primeira parte, escreve a equação geral das geodésicas de maneira formal e introduz os “coeficientes de Christoffel”, que são as derivadas dos coeficientes da métrica na direção das coordenadas, assim como introduz a noção de comprimento reduzido de uma geodésica, a fim de exprimir e interpretar geometricamente a expressão da métrica em coordenadas polares geodésicas. O comprimento reduzido *m* é definido como a derivada angular do comprimento de arco de um círculo geodésico e a equação

$ds^2 = dr^2 + md\phi^2$, onde *r* define o comprimento do arco geodésico e ϕ o ângulo que caracteriza a geodésica dada, *exprime a métrica em coordenadas polares geodésicas*.

Na terceira parte de seu artigo, Christoffel demonstra novamente o teorema de Jacobi da mesma maneira que Bonnet e mostra que *a distância do ponto conjugado até a origem satisfaz a uma equação diferencial de terceira ordem*.

Os problemas apresentados por Christoffel em seu artigo são diferentes e conduzem a questão de determinar o lugar onde as geodésicas deixam de ser o caminho mais curto entre todos os caminhos próximos e àqueles onde as geodésicas deixam de ser minimizantes entre todos os caminhos. Porém, os dois problemas descrevem o comportamento global das geodésicas. O problema dos pontos conjugados é abordado a partir da equação diferencial das geodésicas de acordo com as técnicas e os resultados de Sturm. O segundo problema, que relaciona a distância do ponto conjugado com uma equação diferencial, está ligado à geometria global da superfície, não podendo ser abordado somente com as técnicas das equações diferenciais.

O tratado de mecânica de Jacobi impulsiona significativamente os estudos sobre a teoria das geodésicas. J. Bertrand, após estudá-lo, mostra a distinção entre os pontos onde as geodésicas descritas por um mesmo ponto deixam de ser minimizantes entre caminhos infinitamente próximos e os pontos que são extremidades de dois ou mais caminhos minimizantes a partir de um mesmo ponto, completando o estudo.

A discussão acerca da teoria se alarga com Mangoldt, que direciona seus estudos às superfícies de curvatura negativa. Mostra que somente duas geodésicas que partem de um mesmo ponto e que são infinitamente vizinhas não se cruzam jamais, mas a questão fica em aberto em relação a duas linhas geodésicas que se cortam uma vez com um ângulo de grandeza finita posto que estas podem se cortar novamente. Mangoldt afirma que a curvatura total de uma região da superfície fechada e limitada por *n* segmentos geodésicos é igual ao excesso ou a falta da soma dos ângulos interiores. Se a superfície possui curvatura negativa e é simplesmente conexa, como o parabolóide hiperbólico, duas geodésicas descritas por um mesmo ponto não podem se cortar e em particular, não há geodésicas fechadas sobre uma superfície conexa de curvatura negativa. Caso contrário, duas geodésicas descritas por um mesmo ponto podem se cortar limitando duas partes não fechadas da superfície e não entra em contradição com o Teorema de Gauss porque diz respeito somente a parte fechada da superfície.

O primeiro teorema que remonta à figura de Mangoldt diz respeito a geodésicas infinitamente próximas sobre uma superfície de curvatura negativa e não faz intervenções sobre as condições topológicas da superfície. Mangoldt o demonstra da mesma maneira que Bonnet e Christoffel, analisando qualitativamente as soluções da equação diferencial. A seguir, utiliza o Teorema de Gauss sobre triângulos geodésicos para descrever o conjunto de geodésicas de uma superfície de curvatura negativa. O primeiro teorema é um resultado de mínimo local e usa os resultados qualitativos sobre as trajetórias de uma equação diferencial e o segundo, resultado de minimalização global, utiliza o teorema de Gauss, que pode ser traduzido por uma expressão global da equação diferencial.

Mangoldt aborda também o problema de pontos conjugados de superfícies de curvatura positiva sob uma outra óptica, dividindo os pontos de uma superfície em duas categorias: (1) as geodésicas descritas por pontos de primeira categoria são minimizantes sobre todos os seus comprimentos e (2) os pontos de segunda categoria são aqueles por onde duas geodésicas infinitamente próximas se cortam. Assim, mostra que sobre uma superfície regular de curvatura positiva todos os pontos não podem ser de primeira categoria e seu lugar é uma parte fechada da superfície. Os pontos de primeira categoria são encontrados sobre superfícies de segundo grau. Desta forma, sobre o hiperbolóide de revolução este lugar é um domínio que contém o topo da superfície cujo bordo é um círculo paralelo a ele. Quando um hiperbolóide de revolução é deformado em um hiperbolóide de três eixos, este lugar se deforma ao redor do topo e pode se dividir em duas partes contendo pontos onde todas as direções são principais e a curvatura normal é constante, isto é, contendo os pontos umbílicos da superfície. Sobre o parabolóide, o lugar dos pontos de primeira categoria se reduz a um conjunto discreto. Nos parabolóides de revolução, o único ponto de primeira categoria é o topo e sobre os parabolóides elípticos os únicos pontos desta categoria são os seus pontos umbílicos.

Gaston Darboux dedica o capítulo 5 do livro VI de sua obra intitulada *“Leçons sur la théorie générale des surfaces”* ao estudo das propriedades das geodésicas. Destaca que ao redor de um ponto *A* há duas curvas distintas: uma será o lugar do primeiro ponto onde cada linha geodésica é encontrada por uma outra geodésica de comprimentos iguais e outra será o "*enveloppe"* (ou a envoltória) das linhas geodésicas. O primeiro caso considera a determinação de uma geodésica como uma questão global e o segundo o restringe a um problema local de natureza diferencial relacionando somente caminhos infinitamente vizinhos.

Entre 1879 e 1882, Braunmühl estuda o comportamento global das geodésicas de uma superfície de segundo grau escrevendo dois artigos. O primeiro, *“Ueber Enveloppen geodätischer Linien”* é dedicado às superfícies de revolução e o segundo, *“Geodästiche Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades”* enfoca o elipsóide de três eixos diferentes, reencontrando as equações de Jacobi e Liouville, interpretando-as geometricamente e enfatizando que o que nela aparece é o parâmetro da linha de curvatura a qual a geodésica é tangente. Em seguida, ele mostra que por cada ponto passam duas geodésicas tangentes a uma linha de curvatura dada. Ao tratar numericamente a equação das geodésicas, obtém resultados qualitativos sobre seus comportamentos. Um ponto alto de seu trabalho está no estudo e na discussão da equação do “*enveloppe*” de linhas geodésicas que partem de um mesmo ponto, mostrando que este se divide em quatro caminhos e que duas geodésicas seguidas de um mesmo ponto, tangentes a uma mesma linha de curvatura, se cortam antes do ponto de contato com o “*enveloppe”*. Uma curiosidade no texto de Braunmühl é o fato de não fazer menção às questões que envolvem mínimos e máximos locais, exceto quando destaca as três geodésicas que pertencem aos planos principais.

Um outro exemplo para ilustrar a passagem do local para o global é o estudo das linhas geodésicas fechadas sobre superfícies convexas. Poincaré insere o artigo “*Sur les lignes géodesiques des surfaces convexes”*, de 1905, em uma problemática de pesquisa da mecânica celeste. O estudo das geodésicas de superfícies convexas pode modelar de forma mais simples o problema dos três corpos e o problema das linhas geodésicas é um problema de dinâmica. Há, portanto, uma certa dificuldade em resolvê-lo. Mesmo assim, trata-se de um dos problemas mais simples em dinâmica, porque há somente dois graus de liberdade nas equações que o modelam e, se considerarmos uma superfície sem pontos de singularidade, pode-se compará-lo a problemas de dinâmica nos quais a velocidade é nula. Na primeira parte de seu artigo, Poincaré mostra a diferença de natureza entre o problema do ponto de intersecção de geodésicas infinitamente próximas e o ponto de interseção de geodésicas que partem de um mesmo ponto. O primeiro é um problema puramente local onde se aplicam as ferramentas do cálculo diferencial à geometria a partir de métodos analíticos. O segundo é de natureza global devido às considerações gerais que envolvem o conceito de caminho mais curto, obtendo uma descrição topológica do que chamou de *"lignes de partage*" (focos). Poincaré utiliza, assim como Christoffel e Mangoldt, as coordenadas geodésicas polares. A métrica desta superfície é dada por $ds^2 = du^2 + \lambda^2 dv^2$, onde λ é uma função descrita por coordenadas polares. Poincaré descobre os pontos conjugados de Mangoldt; prova as propriedades de regularidade dos pontos conjugados utilizando resultados demonstrados em *"Les Méthodes Nouvelles de Mécanique Céleste"* sobre a dependência das soluções de uma equação diferencial em relação a um parâmetro; descreve a natureza dos pontos singulares (que chamou de *caustiques)*, estuda as formas das *lignes de partage* e as classifica em *foyers ordinaires*, *foyer en pointe*, *foyers en talon* e *foyers singuliers*. As expressões "en pointe" e "en talon" são analogias com a arte de construir ferrovias. Mostra sua estrutura em forma de árvore e por fim, suas interligações. Em particular, demonstra que, fora dos pontos conjugados, nas equações dos "caustiques", as coordenadas são funções holomorfas das coordenadas x, y, z escolhidas sobre a superfície. Por fim termina seu artigo mostrando que as extremidades dos ramos são pontos conjugados de primeira ordem, isto é, um ponto de geodésicas de mesmo comprimento que se confrontam.

Neste mesmo artigo, Poincaré demonstra a existência de uma geodésica fechada sem ponto de intersecção sobre toda a superfície de um esferóide, uma superfície um pouco diferente da esfera. O interessante é que Poincaré desenvolve seu trabalho usando uma métrica variável, uma maneira totalmente diferente daquela desenvolvida nos trabalhos relativos ao mesmo assunto, na primeira metade do século XIX: o uso de uma métrica fixa. Após uma análise local do comportamento das geodésicas fechadas na vizinhança da esfera, Poincaré estuda as linhas geodésicas fechadas que mantém suas propriedades topológicas ao longo de uma deformação contínua para todas as superfícies convexas. Estuda o problema linearizado, sobre um parâmetro real μ, de modo que obtém a esfera quando tal parâmetro é igual a zero. Desta forma pôde aplicar o teorema da função implícita, mas deixa ao leitor o encargo de terminar a demonstração aplicando rigorosamente o teorema. Poincaré anuncia que está estudando as geodésicas de uma superfície muito pouco diferente de uma esfera, o esferóide, e que vai aplicar o método de variação das constantes de Lagrange presente em *“Les Méthodes Nouvelles de Mécanique Céleste".* Dedica-se também ao estudo da estabilidade das geodésicas sobre o esferóide, usando o mesmo método e conclui que o problema proposto sobre superfícies do tipo do esferóide é uma perturbação do mesmo problema sobre a esfera. Segundo (Devaney, 1989), esta passagem para uma análise global sobre toda a superfície convexa, elaborada a partir dos estudos da mecânica celeste, marca também um dos primeiros esboços da teoria das bifurcações.

Segundo Nabonnand (1995), os resultados obtidos por Poincaré descritos no artigo *“Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes”*, sobre geodésicas fechadas em superfícies convexas são de extrema importância para a geometria, pois retratam o comportamento das geodésicas sobre tais superfícies utilizando os métodos qualitativos elaborados em *“Les Méthodes Nouvelles de Mécanique Céleste”.* Neste artigo, Poincaré admite um princípio heurístico que justifica a pesquisa das soluções periódicas de um sistema de equações diferenciais e estabelece que as soluções periódicas desaparecem aos pares. Este último resultado será estendido para as geodésicas fechadas sobre superfícies de curvatura positiva. Seus estudos neste artigo tratam o problema das geodésicas sobre um esferóide como uma perturbação do mesmo problema sobre uma esfera. O hamiltoniano T é escrito da forma $T = T_0 + \mu . T_1$, onde T_0 corresponde ao caso da esfera , μ é um parâmetro muito pequeno e T_1 um hamiltoniano quadrático qualquer. As equações de Hamilton são escritas por Poincaré negligenciando sistematicamente os termos de ordem igual ou superior a dois em μ e exprime estas equações em função das derivadas da função $S_1 = \frac{T_1}{\omega^2}$, onde ω é a velocidade angular do movimento. O significado geométrico desta função é dado por Poincaré, como sendo a expressão da diferença entre as métricas da esfera e do esferóide. Cabe ressaltar que tal equação intervém nas equações do movimento (descrição local do problema) e, para fazer uma análise global da questão, Poincaré se guia pelas propriedades geométricas que ele mesmo descobriu; lança mão das diversas propriedades de periodicidade destas equações do movimento e estabelece que as geodésicas fechadas possuirão um máximo e um mínimo de uma função *R* definida como o valor médio de S_1. Esta função significa geometricamente a diferença de comprimento entre um grande círculo da esfera e a curva *C* correspondente sobre o esferóide. A função S_1 possui uma interpretação geométrica local e sua média *R* possuiu uma interpretação geométrica global.

Os trabalhos de Poincaré são baseados no princípio geral da continuidade analítica definido em seu tratado sobre mecânica celeste. Um dos resultados mais expressivos, no tocante ao estudo das geodésicas fechadas, é o fato de que, dadas duas superfícies regulares *S* e *S´* de curvaturas positivas, tais que seja possível passar de uma a outra por transformações continuas, é possível estudar a evolução das geodésicas fechadas na passagem de uma superfície à outra. Sobre cada superfície (para um tempo $t \in [0,1]$ fixo), sabemos que cada geodésica é construída a partir de uma posição e de seu vetor velocidade saindo da origem. Fixando um dado inicial para diferenciar a geodésica em questão de todas as outras geodésicas da superfície, pode-se obter relações analíticas entre os parâmetros iniciais. Estas relações analíticas definem uma curva C e cada caminho que compõe a curva C representa a evolução de uma geodésica fechada fazendo parte de uma mesma série contínua. O número de geodésicas fechadas que fazem parte de uma, duas ou mais séries contínuas determinadas é constantemente par ou constantemente ímpar. O estudo qualitativo desta curva C nos permite encontrar as propriedades globais das geodésicas. Assim, Poincaré obtém as propriedades topológicas das geodésicas fechadas utilizando as propriedades de regularidade da curva C. Conclui que, sobre uma superfície convexa qualquer, há pelo menos uma geodésica fechada sem pontos duplos e sempre em número ímpar. Termina o seu artigo estudando as propriedades de estabilidade das geodésicas periódicas.

O estudo das geodésicas sobre as superfícies de segundo grau mostra a evolução matemática do conceito de geodésicas, assim como mostra uma visão mais geral da teoria. As soluções de suas equações sobre tais superfícies, embasados nos conceitos de integrais abelianas, renascem em 1880 após alguns trabalhos de Weierstrass cujos resultados não foram muito além dos já conhecidos até então. Nesta fase do desenvolvimento da teoria das geodésicas surgem interesses novos para uma problemática global e passa-se a levar em conta as propriedades geométricas e topológicas das superfícies com o conceito de variedades riemanianas.

Com o desenvolvimento do cálculo das variações, no início do século XIX, numerosos resultados sobre pontos conjugados foram obtidos ao longo do século subseqüente. Como exemplos podemos citar os artigos *“Zur Variationsrechnung”*, publicado em 1906 por David Hilbert e o artigo *“Leçons sur le calcul des variations”*, publicado em 1910 por Jacques Hadamard.

A ligação entre a noção de geodésica e o determinismo, em Física, é traduzida pela extensão da lei da inércia em mecânica sob a qual o corpo se move em movimento retilíneo uniforme. Partindo para o conceito einsteiniano desta lei de inércia, podemos dizer que um ponto material livre, isto é, livre de qualquer força que atue sobre ele, descreve uma reta do universo, universo este que o contém. Admite-se neste caso o universo como sendo curvo, munido de uma métrica riemaniana que compõem as forças de gravitação. Tais retas são curvas geodésicas que descrevem o caminho mais curto entre dois pontos relativos a esta métrica definida.

No artigo de Hadamard, este último conceito não está associado, uma vez que sua publicação é anterior ao conceito de curvatura do universo proposto por Einstein. No artigo, um corpo material desliza sobre a superfície de curvatura negativa, a única força que age sobre ele é a força que o mantém preso à superfície e a métrica desta superfície mergulhada no espaço tridimensional R^3 usual é a métrica euclidiana clássica.

Desde a sua origem, os problemas que descrevem o caminho mais curto entre dois pontos de uma superfície e outros problemas que envolvem o conceito de geodésicas estão estreitamente ligados à mecânica clássica.

Além de Hadamard, Jacobi e Liouville desenvolveram trabalhos associando a teoria das geodésicas e a mecânica newtoniana. Liouville escreveu em 1844[4]:

[4] “De la ligne géodésique sur un éllipsoïde quelconque”, *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées., vol. 9 (1844), pp.401-408.*

> “La ligne géodésique pour une surface est celle que décrirait, à la suite d´une impulsión quelconque, un mobile assujetti à demeurer sur la surface et dont le mouvement ne serait altéré par aucune force accéleratrice.” (LIOUVILLE, apud NABONNAND, 1995)

Historicamente, mesmo quando tais problemas não se relacionavam diretamente com a mecânica, as deduções das equações das geodésicas eram pinçadas das equações de Lagrange, de Hamilton ou do princípio da menor ação. Um exemplo desta afirmativa é a solução do problema que determina a família de curvas cujas trajetórias são perpendiculares às linhas geodésicas proposto por Darboux no artigo *“Analogie entre la dynamique des mouvements dans le plan et la théorie des lignes géodésiques”,* no qual métodos de equações a derivadas parciais e técnicas de cálculo das variações foram muito utilizados.

Como já dissemos, a justificativa para o desenvolvimento dos trabalhos de Poincaré relativos ao estudo das geodésicas de superfícies convexas está na sua aplicação ao problema dos três corpos. Ele afirma em seu artigo *“Sur les lignes géodesiques des surfaces convexes”*, que as dificuldades encontradas aparecem na tentativa de encontrar as equações das linhas geodésicas sobre tais superfícies e por isso se faz necessário um estudo mais detalhado das propriedades geométricas destas superfícies. Mesmo sendo um problema difícil do ponto de vista da matemática, o problema ainda continuava sendo um dos problemas mais simples da dinâmica.

Até então, na primeira metade do século XIX, os estudos das propriedades geométricas de uma superfície eram essencialmente locais. Somente com o desenvolvimento dos métodos qualitativos das equações diferenciais, com o aparecimento da topologia e com a solução da questão da minimização de funcionais é que emerge o questionamento sobre o comportamento global das linhas geodésicas sobre superfícies em função de hipóteses topológicas e geométricas.

Para descrever os movimentos sobre a superfície da Terra e, conseqüentemente, desenvolver mais os estudos físicos e as geociências, houve uma necessidade de definir precisamente mapas que permitissem encontrar uma correspondência entre superfícies. O problema da construção de mapas geográficos consistiu em encontrar uma maneira de representar uma superfície sobre outra, isto é, de determinar uma forma de fazer correspondências, ponto a ponto entre duas superfícies de modo que cada linha geodésica de uma superfície fosse levada sobre a linha geodésica da outra superfície (no caso, o plano). Tal problema também exemplificou de forma marcante a passagem do estudo local para o global, e nesta nova geometria, passou a ser possível descrever as formas das trajetórias dos corpos em movimento.

Capítulo 2

O artigo de Hadamard

Quanto maior a multidão e maior a anarquia aparente, mais perfeita é a sua variação. É a lei suprema da desrazão. Em qualquer lugar onde uma grande amostra de elementos caóticos seja colhida e escalonada segundo a sua magnitude, uma forma de irregularidade insuspeitada e das mais belas, prova ter estado latente todo o tempo. Os pontos mais altos da fileira escalonada forma uma curva harmoniosa de proporções invariáveis; e cada elemento, ao ser posicionado, encontra como um nicho predeterminado, cuidadosamente adaptado para contê-lo.

Francis Galton, *Herança Cultural*.

O artigo que apresentaremos neste capítulo descreve e constrói uma superfície S, uma superfície S´ finita obtida a partir de S, e seus ramos infinitos *évasées*. Hadamard descreve, de uma maneira completa, as geodésicas sobre tais superfícies como trajetórias de um ponto material em movimento sob certas condições iniciais. Adotando o ponto de vista qualitativo de Poincaré e utilizando alguns conceitos propostos por Jordan, destaca três tipos de categorias de geodésicas sobre a superfície construída: (1) as geodésicas fechadas e as geodésicas que lhes são assintóticas, ou seja, que se aproximam infinitamente das geodésicas fechadas, (2) as geodésicas que tendem ao infinito e (3) as geodésicas de um novo tipo, que justificam o artigo em questão.

Antes de iniciarmos a apresentação do artigo, que é o objeto principal de nosso trabalho, achamos necessário apresentar o tipo de superfície que o autor aborda. Assim, na seção 2.1, faremos algumas definições e daremos alguns exemplos, usando a linguagem atual da geometria diferencial. Esta linguagem não difere em nada da linguagem utilizada por Hadamard em seu texto. A justificativa da presença deste item no corpo desta tese é a de responder a uma simples pergunta *“o que é uma superfície de curvatura negativa?”*. Cremos então que esta seção tem um caráter elucidativo até mesmo para o título do artigo que apresentamos.

Procuramos a seguir, localizar o problema que este artigo coloca, no contexto da teoria dos sistemas dinâmicos, como é atualmente conhecida. Mostraremos também a relação entre determinismo e imprevisibilidade presentes no trabalho. A partir deste item, conservamos os títulos originais de cada seção do artigo, desde as considerações pertencentes à Introdução feitas por Hadamard até a última seção.

Nas seções seguintes, a forma geral da superfície estudada é descrita: uma superfície de curvatura negativa com ramos em espécie de tubos que vão se alargando. As definições de *nappes évasées*, *nappes não évasées* e de ordem de conexão serão destacadas e a apresentação de uma nova categoria de geodésicas encontradas por Hadamard será exposta. Esta categoria de geodésicas faz a ligação do trabalho com a mecânica e com a teoria dos sistemas dinâmicos.

Mostraremos que os conceitos contidos no artigo e o resultado final do trabalho de Hadamard são embasados na *Analysis Situs*, o que conhecemos atualmente por topologia.

2.1 - Uma visão geral do artigo de Hadamard e os sistemas dinâmicos

O artigo intitulado *"Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodesiques"* trata de uma geometria conhecida hoje por geometria hiperbólica. Publicado em 1898 no *"Journal des Mathématiques Pures et Appliquées"*, o artigo aborda superfícies que parecem localmente com a sela de cavalo. Tais superfícies admitem somente uma maneira de repousar sobre elas um fio estendido entre dois pontos dados, como no plano, e diferente da esfera ou do cilindro.

Denotando por $k(q)$ a curvatura de Gauss de uma superfície em um ponto q, podemos estudar o comportamento desta superfície em pontos suficientemente próximos de q. Assumindo a curvatura de Gauss de uma superfície como sendo a medida escalar da taxa de variação da direção de um vetor normal unitário em torno da superfície, a superfície estudada por Hadamard apresenta pontos com $k(q) \langle 0$. Sabemos que um ponto q de uma dada superfície parametrizada regular *X* é dito ***hiperbólico***, se $k(q) \langle 0$. Assim sendo, a presença de pontos hiperbólicos é o que caracteriza a superfície estudada no artigo que apresentamos. Sobre tais superfícies, chamadas por Hadamard de superfícies de curvaturas *"opposées"* e conhecidas atualmente por superfícies de curvatura negativa, que Hadamard propõe o seguinte problema:

> *"A partir de um ponto dado da superfície, lança-se um ponto material em uma direção dada, qual será a forma de sua trajetória, que sabemos ser uma geodésica desta superfície?".*

Segundo Kahane (1998) Hadamard mostra que a resposta para o problema será obtida dependendo da direção dada D, e de maneira completamente surpreendente: se a geodésica correspondente à direção D permanece a distância finita, existem duas outras direções D´ e D´´ tão próximas de D quanto queiramos, tais que a geodésica correspondente a D´ tende ao infinito, enquanto aquela correspondente a D´´ permanece a uma distância finita. Como conseqüência, perturbando[5] D, não se pode responder a questão, ou seja, não se pode prever a forma da trajetória que o ponto material percorrerá: se uma trajetória fechada ou uma trajetória que tenderá ao infinito. Hadamard classifica este problema como um problema *“mal-posé”*. Esta expressão não quer dizer que o problema seja mal proposto no sentido de sua formulação, mas um problema tal que a mínima variação destas condições iniciais muda radicalmente sua solução. Assim sendo, a imprecisão no conhecimento das condições iniciais, torna a solução é imprevisível.

Fazendo uma comparação com a definição de Hadamard, Kahane (1998) levanta a seguinte questão: “O problema matemático da estabilidade do sistema solar, reduzido ao modelo newtoniano de *n* corpos sujeitos à atração gravitacional, não seria um problema *mal-posé*?”. Este problema ocupou as mentes de grandes matemáticos desde o século XVII e Henri Poincaré, através de seus métodos de topologia, a *“Analysis Situs”*, como era chamada na época trouxe uma nova abordagem. O estudo de Hadamard é relativo a um modelo mais simples, mas a questão que coloca sobre o sistema solar, mais precisamente, sobre a imprevisibilidade fundamental de seu comportamento a longo prazo, é extremamente pertinente.

A partir do resultado obtido por Hadamard estuda-se um modelo simplificado da mecânica celeste: o movimento de um ponto material deslizando com velocidade constante sobre uma superfície do espaço, sem atuação de força exterior. Sobre superfícies de curvatura negativa, a questão pode ser descrita da seguinte maneira: ***“Dado uma posição e uma velocidade inicial cuja direção é pré-determinada, a trajetória correspondente está contida em uma parte limitada da superfície?”.*** Hadamard possibilita, com seu artigo, a discussão do conceito de sensibilidade de sistemas dinâmicos sujeitos às condições iniciais para um sistema dinâmico.

Em verdade, um sistema se identifica como a coleção de todos os seus estados concebíveis. Um *sistema dinâmico* é um tipo de sistema que se modifica com o tempo. Assim, podemos dizer que o sistema capitalista, segundo Marx, pode ser classificado como um sistema dinâmico, o que já não ocorre com o sistema métrico-decimal. No

---

[5] Entende-se “perturbar” no vocabulário matemático, por alterar as condições iniciais de forma tão pequena o quanto se queira.

sentido matemático, um sistema dinâmico, vem descrito por sua regra dinâmica. Esta regra dinâmica é que permite determinar o estado de um tempo futuro, partindo do estado do tempo presente. Desde as mais antigas civilizações até a Teoria da Relatividade Geral, o sistema dinâmico mais importante tem sido o Universo e o principal problema é encontrar a sua dinâmica.

Em Física e em Matemática, os sistemas podem ser classificados em sistemas lineares e sistemas não-lineares. Tais sistemas podem ser modelados por equações diferenciais ordinárias, por equações a derivadas parciais, por equações a diferenças finitas, por equações integrais ou por sistemas de equações combinando as anteriores. Em ambos os casos, se conhecemos uma equação que o modela e seu estado inicial, se pode conhecer o estado futuro do sistema. Tanto para sistemas lineares quanto para sistemas não lineares, se está modelado por uma equação diferencial ou por uma equação de diferenças finitas, este sistema será classificado como um sistema *determinista*. Isto é, é possível determinar as suas condições futuras conhecendo as suas condições iniciais.

O que posteriormente se chamou de comportamento irregular ou *caótico* é precisamente aquele cujos pontos próximos do instante atual podem ter comportamentos muitos díspares em instantes futuros.

Em 1963, Lorentz encontrou um sistema de três equações diferenciais não lineares, extremamente sensíveis e cujas trajetórias se verificam a imprevisibilidade futura. Na Física, o fenômeno da imprevisibilidade foi batizado com o nome sugestivo de *caos determinista*. A não linearidade é uma condição necessária, mas não suficiente para a presença do caos determinista. Ele está presente na equação do pêndulo forçado, nos fluidos em problemas de turbulência, nos problemas de óptica não linear, nas equações de muitas reações químicas, no problema clássico dos n corpos, nos aceleradores de partículas, nos modelos biológicos que destacam as dinâmicas das populações entre outros tantos exemplos.

Em linguagem Matemática moderna, um sistema dinâmico é um terno ordenado (X, G, ϕ) que consiste em um espaço de fases X (que pode ser descrito como um espaço topológico, um espaço métrico ou uma variedade com alguma estrutura diferencial), um semigrupo de escalares G ou um conjunto de tempos (geralmente um subgrupo aditivo de *R*) e um fluxo do sistema ϕ que é uma função de GxX em *X* verificando as seguintes propriedades:

(1) ϕ é uma função contínua;

(2) $\phi(0,x) = x$ para todo $x \in X$;

(3) $\phi(t,\phi(s,x)) = \phi(t+s,x)$ para todo $t,s \in G$ e todo $x \in X$.

A função ϕ nos dá para cada valor de *t* o *estado* ou a *fase* do sistema para todas as condições iniciais. Por outro lado, se para um certo valor de *x* nós variamos *t*, obtemos toda a evolução de *x* pela dinâmica. Quando a função é aplicada a todas as condições iniciais nos é fornecido um quadro global do conjunto das trajetórias. O espaço onde estas trajetórias habitam é denominado *espaço de fases*.

Se $G = IN \cup \{0\}$ ou $G = Z$ (respectivamente para $G = IR^+ \cup \{0\}$ ou $G = IR$) temos um sistema dinâmico discreto (ou um sistema dinâmico contínuo). Em qualquer um dos casos citados, a função $\phi(t,x)$ ou a função $\phi_x(t)$ com $t \in G$ é uma solução do sistema dinâmico e a sua imagem é denominada *órbita* associada a tal solução.

De acordo com Roque (2001), o artigo *“Quelques théorèmes sur le mouvement des systémes dinamiques”*, publicado em 1912 por Birkhoff é o primeiro documento em que se fala explicitamente de sistemas dinâmicos. Nele encontramos a seguinte definição:

> “Um **sistema dinâmico**, em uma concepção ampla, pode ser considerado como definido por um sistema qualquer de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem $\frac{dx_1}{X_1} = ... = \frac{dx_n}{X_n} = dt$, onde $X_1, X_2, ..., X_n$ são funções dadas, reais e uniformes de $x_1, x_2, ..., x_n$, analíticas em relação a estas variáveis, e onde *t* é a variável independente. As variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ são as coordenadas do movimento, e ***t* indica o tempo**”. (BIRKHOFF, apud ROQUE, 2001, p.35, grifo nosso).

Se representarmos as coordenadas do movimento como um ponto no espaço *n*-dimensional, as curvas que são soluções do sistema de equações diferenciais serão também curvas do mesmo espaço. De acordo com Roque (2001), **"a consideração de que cada solução varia com um parâmetro que é tomado pelo *tempo* é uma das características do ponto de vista que irá fundar a teoria dos sistemas dinâmicos, como o próprio nome indica".**

A partir da definição de Birkhoff para sistemas dinâmicos, ou seja, um sistema definido pelas soluções de uma equação diferencial através do tempo, nos questionamos se o sistema estudado por Hadamard em seu artigo é um exemplo de sistemas dinâmicos. A resposta é positiva, pois *S* é uma superfície mergulhada em IR^3 munida de uma métrica induzida e as geodésicas de *S* são as soluções de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem sobre a superfície *S*. Mas, todo sistema de equações diferenciais de segunda ordem sobre *S* se traduz por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem sobre o seu espaço tangente.

O sistema dado pelas soluções da equação diferencial $\frac{dv}{dt} + \phi(v,v)n = 0$ onde *v* é a velocidade do ponto material sobre a superfície *S* que relaciona o espaço percorrido pelo ponto material num dado intervalo de tempo , tendo *dn* como a aplicação linear tangente da aplicação de Gauss $x \to n$ e $\phi : (v,w) \mapsto \langle dn(v), w \rangle$ a segunda forma quadrática da superfície *S* é um **sistema dinâmico**. As equações que acabamos de descrever são chamadas de *equações geodésicas de uma superfície*. Resolver estas equações significa encontrar as curvas de menor comprimento que unem dois pontos dados sobre a superfície *S*. Uma vez descrevendo as trajetórias que a solução do sistema nos oferece, Hadamard estuda, sobre a superfície *S*, os tipos de caminhos que o ponto material poderá percorrer sob certas condições, para um tempo *t* grande[6].

---

[6] Para uma leitura completa e a construção matemática do conceito de equações das geodésicas sugerimos a leitura do artigo "*A propos de géodésiques*", de Patrick Iglesias, publicado no *Journal des Mathématiques des élèves* da Universidade de Lyon, em 1994, 1ª Edição, volume 1.

A formulação natural é calcular o comprimento (este é um “fenômeno natural observável”) segundo um tensor métrico (g_{ij}) de um caminho de um ponto a outro e buscar a minimização do funcional obtido. Veja:

“Seja x a linha que passa por dois pontos A e B, e que pertence a uma superfície para a qual deseja-se conhecer os caminhos de menor comprimento $\begin{cases} x(t) = (x^1(t), x(t)), a \leq t \leq b \\ x(a) = A, x(b) = B \end{cases}$”. Seu comprimento é dado por $S = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}} dt$ ”.

Minimizando o funcional *S* em função de *x* obtém-se a(s) linha(s) de menor comprimento que ligam os pontos A e B. Esta solução pode ser obtida via Teorema de Euler-Lagrange usado no cálculo variacional, conjugado à manipulação tensorial.

Resolver este problema significa encontrar a solução de um sistema de equações diferenciais de segunda ordem não lineares acopladas que podem ser reduzidas à equação $g_{ij} . \frac{d^2 . x^j}{ds^2} + \Gamma . \frac{dx^j}{ds} . \frac{dx^k}{ds} = 0$, onde Γ é o símbolo de Christoffel de primeira ordem escrito somente em função do tensor métrico.

2.2 – A Introdução do artigo de Hadamard

O sinal da curvatura de uma superfície determina de forma muito particular a sua geometria, permitindo abordar o problema da análise qualitativa das geodésicas.

Em um artigo publicado em 1897, *“Sur certaines trajectoires en dynamique”*, Hadamard estuda as geodésicas sobre uma superfície de curvatura positiva concluindo que, em tais superfícies, toda geodésica fechada é interceptada infinitas vezes por outra geodésica, isto é, que duas geodésicas fechadas sobre uma superfície de curvatura positiva se interceptam necessariamente. Neste artigo o autor aplica as considerações elementares sobre máximos e mínimos no domínio dos números reais ao estudo das geodésicas.

Na introdução do artigo que nos propomos a apresentar, publicado no ano seguinte, Hadamard enfatiza que continua a trabalhar no domínio dos números reais com superfícies que estão mergulhadas no espaço usual IR^3. A analiticidade das funções que determinam as superfícies de curvaturas negativas é descartada e destaca-se que, neste caso, é possível chegar a resultados muito mais completos do que em seu artigo anterior a uma discussão mais geral sobre o tema. Estudando as superfícies de curvatura negativa, Hadamard desvenda as principais propriedades de suas geodésicas e descobre uma nova categoria, até então desconhecida. Os princípios matemáticos em questão são os mesmos daqueles aplicados às superfícies de curvatura positiva, embora reconhecendo que o Teorema de Gauss sobre os polígonos geodésicos substitui na maioria de suas demonstrações, os resultados do Cálculo Diferencial usados no artigo anterior.

O conhecimento e a aplicação do que hoje é denominado por Topologia[10], a *Analysis situs*, foi de extrema importância para a fundamentação teórica do trabalho e

[10] A topologia também é conhecida por geometria de situação. Estuda as propriedades das formas: de contigüidade, de conexões, isto é, propriedades conservadas por transformações contínuas. Poincaré diz que o fato de pensar a geometria como a arte de raciocinar de maneira correta, sobre o desenho de uma forma, mal feito, possui uma condição: embora as proporções das formas possam ser grosseiramente alteradas, seus elementos não devem ser transpassados e devem conservar suas situações relativas. O conhecimento da topologia de uma superfície é que garante a passagem do local para o global. Os estudos de Poincaré em espaços de dimensão maiores do que três servem de base para o que se conhece atualmente por topologia algébrica.

Hadamard agradece a Brunel pelo auxílio na demonstração do resultado alcançado, segundo o rigor que a topologia exige. Cita também a influência das leituras dos textos de Poincaré ao longo do artigo que passamos a analisar.

Hadamard observa, desde já, que embora os métodos do Cálculo Diferencial e da Geometria Diferencial aplicados no artigo sejam relativamente simples, os resultados alcançados são muito complexos e muito diferentes do que se estava habituado a encontrar até então. A partir destes resultados, Hadamard alerta ao leitor que as complicações matemáticas que encontrou não foram enfadonhas, pelo contrário, elas foram instrutivas e chama atenção para o fato de que em Matemática, discussões simples dão uma falsa idéia do que se passa quando é feita uma análise global de uma situação-problema apresentada.

> “C´est cette complication même qui est instructive, en mettant en evidence ce qu´a d´exceptionel la simplicite des discussions obtenues par l´intégration directe, dans les cas où elle est possible, et en montrant combien ces discussions simples donnent une idée fausse de ce qui se passé dans le cas general”. (HADAMARD, 1889, p. 730)

2.3 - Forma geral da superfície. *“Nappes infinitas évasées”* e *“nappes infinitas non évasées”*.

Hadamard constrói uma superfície com o que ele chama de *“nappes”* infinitos que possuem uma forma évasée. A escolha de tal superfície, o permitiu encontrar uma categoria de geodésica que tende ao infinito.

A superfície *S* do espaço tridimensional considerada por Hadamard é desprovida de singularidade à distância finita. Uma superfície como esta é divisível em regiões que se sobrepõem de maneira que todo ponto da superfície seja interior a pelo menos uma destas regiões. Estas superfícies possuem suas coordenadas cartesianas expressas por parâmetros α e β , isto é, por funções contínuas e deriváveis até uma ordem determinada e com os determinantes funcionais $\frac{D(y,z)}{D(\alpha,\beta)}, \frac{D(z,x)}{D(\alpha,\beta)} e \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}$ diferentes de zero.

Hadamard assinala que o fato dos determinantes funcionais citados serem diferentes de zero implica no elemento diferencial de área em função da primeira forma quadrática, a quantidade EG – F^2, ser também diferente de zero. Os pontos de curvatura nula, caso existam, são isolados e se apresentam em número finito, de modo que dado um número positivo ε tão pequeno quanto se queira e uma região limitada da superfície, a curvatura será sempre menor do que $-\varepsilon$. Não é necessário saber se a superfície é algébrica ou analítica. De toda forma, as hipóteses simples feitas pelo autor para a superfície em questão são verificadas sobre superfícies algébricas. O parabolóide hiperbólico e o hiperbolóide de uma folha são os exemplos mais clássicos de tais superfícies.

Ao analisar a forma da superfície considerada por Hadamard, observa-se que sobre os exemplos clássicos de superfícies de curvatura negativa, como os citados acima, há a presença de **ramos** que tendem ao infinito. Decidimos, provisoriamente, traduzir *“nappes”* por ramos para sermos o mais fiéis possíveis à imagem escolhida por Hadamard.

A presença de ramos é um fenômeno geral: a superfície S estudada por Hadamard possui, necessariamente, ramos que tendem ao infinito.

Para que Hadamard obtivesse êxito em seus resultados, superfícies diferentes das superfícies clássicas tiveram que ser consideradas, mas todas elas com ramos que se estendem ao infinito, o que é conseguido com o fato de a curvatura ser negativa.

Hadamard precisa que o número de ramos que tendem ao infinito pode ser grande. A existência de ramos infinitos na superfície considerada pelo autor pôde ser estabelecida a partir da relação de Gauss-Bonnet, que está escrita na forma $\int d\omega - \int \frac{ds}{\rho g} = \iint \frac{d\sigma}{RR'}$ Este fato é discutido e demonstrado no item 6 da primeira parte do artigo e utiliza como ferramenta matemática o método do triedro de Darboux que consiste em um sistema composto por três vetores unitários $T(s) = \alpha'(s)$, $N(s) =$ vetor normal à superfície *S* em $p = \alpha(s)$ e $V(s) = N(s) \Lambda T(s)$, onde *S* é uma superfície regular orientada e $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Estas fórmulas que compõem o triedro de Darboux são análogas as fórmulas que compõem o triedro móvel de Frénet *T, V e N.*[11] O teorema de Gauss-Bonnet relaciona a curvatura de uma superfície com sua topologia, possibilitando a determinação de sua curvatura. É um teorema de caráter global da Geometria Diferencial e atualmente pode ser enunciado por:

TEOREMA:

"Seja S uma superfície compacta orientada com uma métrica de Riemann, então $\int_S K.dA = 2\pi . X(s)$ *onde X(s) é a característica de Euler da superfície".*

---

[11] Há relações matemáticas entre os sistemas de Darboux e Frénet, definindo o que conhecemos por torção geodésica, curvatura geodésica e a curvatura normal. Veja em DO CARMO, Manfredo P. - *Differential Geometry of Curves and Surfaces,* Prentice Hall, Englewood Cilffs, N. Jersey, 1976. P. 261- ex.14.

Este resultado, que serviu de ferramenta para Hadamard, diz em linguagem atual que a integral da curvatura de Gauss de uma superfície compacta é um invariante topológico da superfície. Há outras formas de enunciar o mesmo resultado e muitos outros teoremas surgiram da generalização do teorema de Gauss-Bonnet, como o teorema de Cartan-Hadamard e o teorema de Chern-Gauss-Bonnet, provado por S. S. Chern em 1944.

Hadamard passa então a construir uma superfície com ramos que tendem ao infinito, sugerindo os seguintes passos: Sejam P e P´dois pontos situados sobre o eixo Oy, simétricos em relação à origem do sistema cartesiano tridimensional. A todo ponto M, associa a sua projeção M_0 sobre o plano horizontal xOy. Denota por δ e por δ' as distâncias de M_0 à P e a P´.

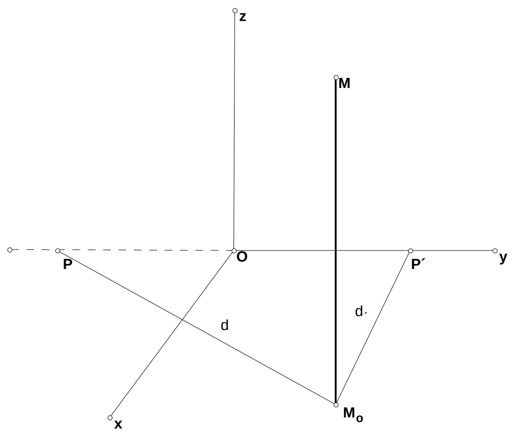


Fig.4. Construção de superfícies com ramos infinitos

A superfície de equação $z = k.\log\left(\frac{\delta}{\delta'}\right)$ onde *k* é uma constante, constitui uma superfície de curvatura negativa que possui três ramos que se estendem ao infinito, um a partir dos valores estritamente positivos de *z*, outro a partir de valores estritamente negativos de *z* e o terceiro, estendendo-se sobre o plano horizontal. O traço desta superfície possui um plano de simetria, o plano vertical gerado por PP´, um eixo de simetria (a perpendicular ao meio de PP´) e um centro de simetria. Sobre a esfera, este último ponto descrito, corresponde a um ponto O (não singular) que é uma ramificação riemanniana da representação esférica.

Para aumentar o número de ramos que tendem ao infinito, é necessário aumentar o número de pontos P e P´. Sejam P_1, P_2 , ..., P_m e P'_1, P'_2, ..., P'_n pontos quaisquer do plano horizontal xOy e $\delta_1, \delta_2 ... \delta_m$, $\delta'_1, \delta'_2, ... \delta'_n$ as distâncias respectivas de M_0 a estes pontos. A superfície de equação $z = k.\log\left(\frac{\delta_1 ... \delta_m}{\delta'_1 ... \delta'_n}\right)$, onde k é uma constante, **é uma superfície de curvatura negativa**. Esta superfície possui também $m+n+1$ ramos que se estendem ao infinito, sendo m nas direções dos z positivos, n dos z negativos e uma se estendendo no sentido horizontal.

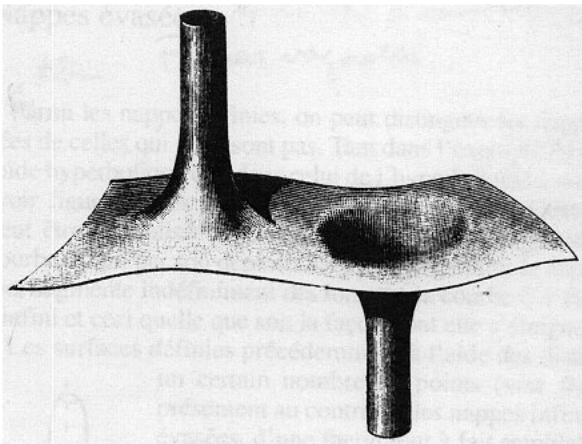


Fig. 5 Superfície estudada por Hadamard. Retirada de seu artigo.

Hadamard formula uma hipótese bastante geral sobre as superfícies de curvatura negativa que permitiu reduzir o estudo da superfícies infinitas ao estudo das superfícies finitas e a conceituar *ordem de conexão*.

Tomemos a superfície *S* da figura 5. É possível, por cada um de seus três ramos infinitos N_i, traçar sobre *S* uma curva C_i de tal maneira que o ramo infinito N_i , limitado pela curva C_i , possa ser construída a superfície, por C_i , quando C_i se distancia ao infinito sobre o ramo. Além disso, exige-se que, após retirar da superfície *S* os ramos infinitos, a superfície restante *S´* limitada por C_i , seja finita. Veja a figura 6 abaixo para $i = 3$.

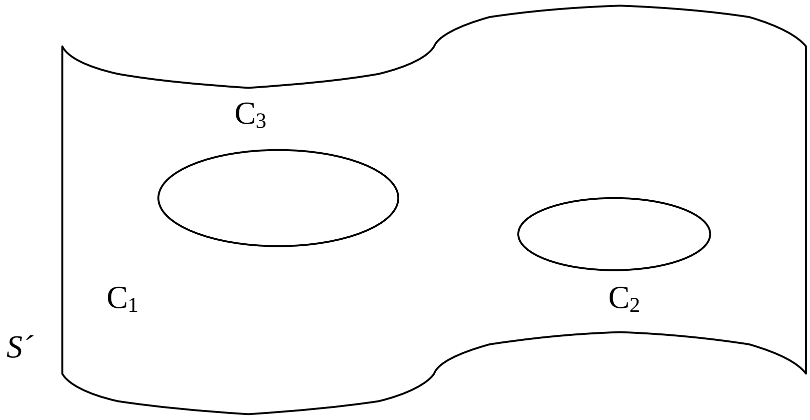


Fig.6 Curvas sobre a superfície *S*

Hadamard diz que, sendo as curvas C_i escolhidas de maneira conveniente, há uma parte finita *S´* da superfície *S*, que é limitada por essas curvas, fazendo-as variar continuamente, de maneira que se distanciem ao infinito. Leva-se *S´* em *S* sem que, nesta variação, a superfície *S´* percam as propriedades que importam do ponto de vista da geometria do artigo. Fica claro que, nestas condições, o que resta de *S* após a retirada de *S´* se compõe de partes infinitas, as chamadas ***nappes***, já traduzidas por **ramos**.

Há, porém, superfícies de curvatura negativa para as quais a hipótese de Hadamard para tornar a superfície finita não pode ser verificada, como o caso da superfície mínima de Neovius, citada como exemplo, no parágrafo 8 da primeira parte do artigo. Esta superfície apresenta uma infinidade de buracos eqüidistantes uns dos outros em três direções retangulares. No artigo, estas superfícies são descartadas por Hadamard momentaneamente, não havendo necessidade de um estudo particular para elas, uma vez que a conclusão final que se obtém em sua pesquisa pode ser generalizada, segundo ele, “sem muita dificuldade” para quaisquer superfícies de curvatura negativa.

De acordo com Brakke (2004), superfícies como a *Superfície de Neovius* são hoje conhecidas por superfícies mínimas triplamente periódicas e foram descobertas pela primeira vez por Schwarz em 1856. Schwarz foi professor de Neovius e o influenciou em seus estudos. Noevius escreveu o artigo *Bestimmung zweier speciellen Minimalflächen* em 1883, descrevendo as propriedades de tais superfícies.

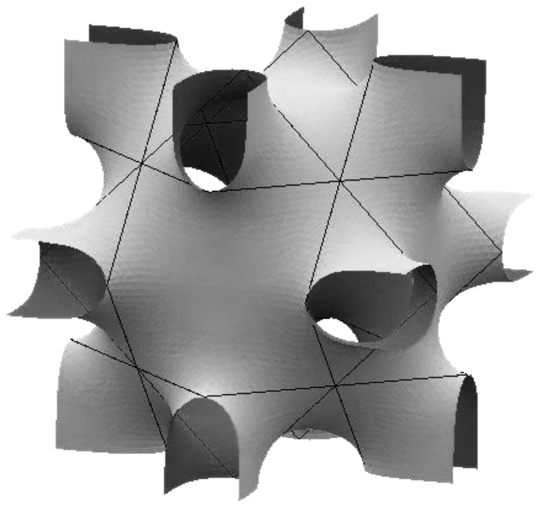


Fig. 7 A superfície de Neovius gerada computacionalmente

O que é importante para Hadamard, em linguagem atual, é que as propriedades topológicas da superfície *S* são as mesmas de *S´*. Estas propriedades são caracterizadas por dois números. O primeiro é denotado por ***n*** e representa o número de bordos C_i , equivalente ao número de ramos infinitos N_i da superfície *S*. O segundo número, denotado por ***g***, é definido deformando-se continuamente *S´* de maneira que, cada bordo C_i seja reduzido a um ponto. Desta forma, obtém-se uma nova superfície *S´´*, finita como *S´*, que por sua vez não possui bordo. As propriedades topológicas de *S´´* são caracterizadas pelo número de buracos ***g*** , denominado ***genus*** da superfície.

Sabemos, após os estudos de Riemann, que o *genus* da superfície é igual a *2g* , se for exatamente igual ao número maximal de secções que podemos traçar na superfície *S´´*, sem que ela seja cortada em duas partes. Hadamard utiliza a terminologia de Riemann e define a ***ordem de conexão*** de uma superfície S pela expressão *2g + n*. Isto é, o número, aumentado em uma unidade, de secções que é necessário efetuar sobre a superfície S para transformá-la em uma superfície simplesmente conexa, composta por uma única parte, e sem buracos.

Hadamard analisa em seguida, os tipos de ramos que uma superfície pode ter. Podemos destacar dois tipos: os ramos infinitos *évasées* e os ramos infinitos não *évasées*[8]. Hadamard define formalmente os ramos infinitos *évasées* no parágrafo 12 da primeira parte de seu artigo da maneira a seguir.

DEFINIÇÃO 1:

"*Consideremos um determinado ramo como sendo originado pelo deslocamento de uma curva móvel C. O ramo é dito évasé se o comprimento desta curva aumenta indefinidamente à medida que ela se desloca".*

O parabolóide hiperbólico e o hiperbolóide de uma folha são exemplos de superfícies que possuem ramos infinitos *évasés*, segundo a definição contida no artigo.

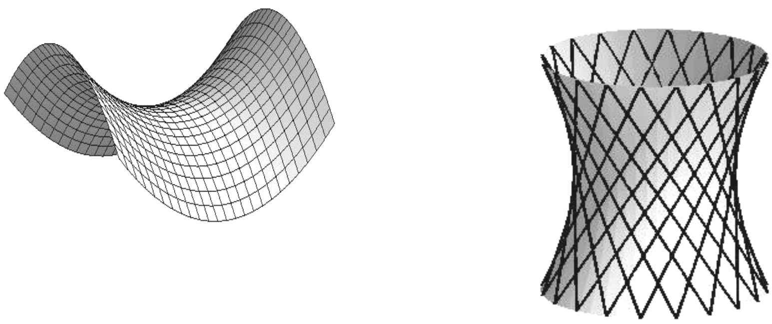


Fig..8 O parabolóide hiperbólico e o hiperbolóide de uma folha

[8] Segundo o dicionário *Le Nouveau Petit Robert*, Éd. Hachette, 2000, a definição de *évasée* é "objet cylindrique tubulaire qui va s´enlargissant", isto é "objeto cilíndrico e tubular que vai se alargando".

DEFINIÇÃO 2:

"As folhas infinitas non évasées são aquelas em que uma curva móvel C possui um perímetro inferior a um limite determinado e esta série de posições não é necessariamente contínua".

Um exemplo de superfície que possui folhas *non évasées* é a superfície de revolução cujo meridiano possui uma assíntota paralela ao eixo[9].

Hadamard afirma que as superfícies que possuem ramos infinitos *non évasés* são um caso singular e, para evitar as dificuldades que elas podem trazer, assume a hipótese de que a superfície *S* estudada em seu artigo possui somente ramos infinitos *évasés*.

É possível modificar ligeiramente a definição da superfície de equação $z = k.\log\left(\frac{\delta}{\delta'}\right)$, cuja ordem de conexão é $3+2.0=3$, a fim de que os ramos infinitos tornem-se *évasés*. Basta, por exemplo, aumentar o raio de cada secção horizontal de uma quantidade proporcional a $z = \frac{k.x}{x^2+y^2}$ que equivale a parte real de $z = \frac{k}{x+iy}$. Assim, torna-se possível criar superfícies de curvatura negativa possuindo um número qualquer de ramos infinitos évasés.

Em seguida, Hadamard, irá transformar os ramos infinitos *évasés* descritos anteriormente em buracos.

9 Hadamard conclui a presença de uma direção assintótica e remetendo-se ao parágrafo 5 da primeira parte do artigo, mostra que ocorre um fato geral nas superfícies por ele estudadas: a existência de um cilindro vertical convexo Γ cujas folhas infinitas estão contidas em seu interior.

> “Nous venons d´obtenir des surfaces à courbure négative présentant un nombre quelconque de nappes infinies; le procédé suivant va nous fournir, au contraire, des surfaces offrant un nombre plus ou moins grand de trous.”(HADAMARD, 1898, p.743).

Para obter superfícies com buracos, Hadamard sugere, no parágrafo 18 da primeira parte do artigo, a construção seguinte. Considere dois hiperbolóides de equações: $U \equiv \frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2-1}=0$ e $V \equiv \frac{(x+\alpha)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2-1}=0$.

A parte da superfície $U.V=\varepsilon$, com $\varepsilon>0$ representa uma superfície composta por duas superfícies parciais, uma situada na região $U>0$ e $V>0$ e outra na região $U<0$ e $V<0$. O caso da segunda região será descartado, pois o artigo aborda somente as superfícies conexas. Assim sendo, para $U>0$ e ,$V>0$ temos uma superfície que possui curvatura negativa, com dois ramos infinitos, com ordem de conexão igual a 2 + 2.1 = 4 e um buraco.

Obteremos duas folhas infinitas e um número qualquer de buracos, considerando um número qualquer de hiperbolóides iguais, que possuem um eixo transverso seguindo uma mesma reta.

Um resultado análogo é conseguido associando à superfície $z=k.\log(\delta_1\delta_2...\delta_m)$ com a sua superfície simétrica em relação a um plano paralelo ao plano xOy e z positivo, obtendo-se uma superfície com duas folhas infinitas e com m – 1 buracos. Analogamente podemos obter um numero maior de folhas infinitas seguidas por buracos, combinando a superfície $z=\frac{k.\log(\delta_1\delta_2...\delta_m)}{\delta'}$ com suas superfícies simétricas sucessivas em relação a um certo número de planos paralelos.

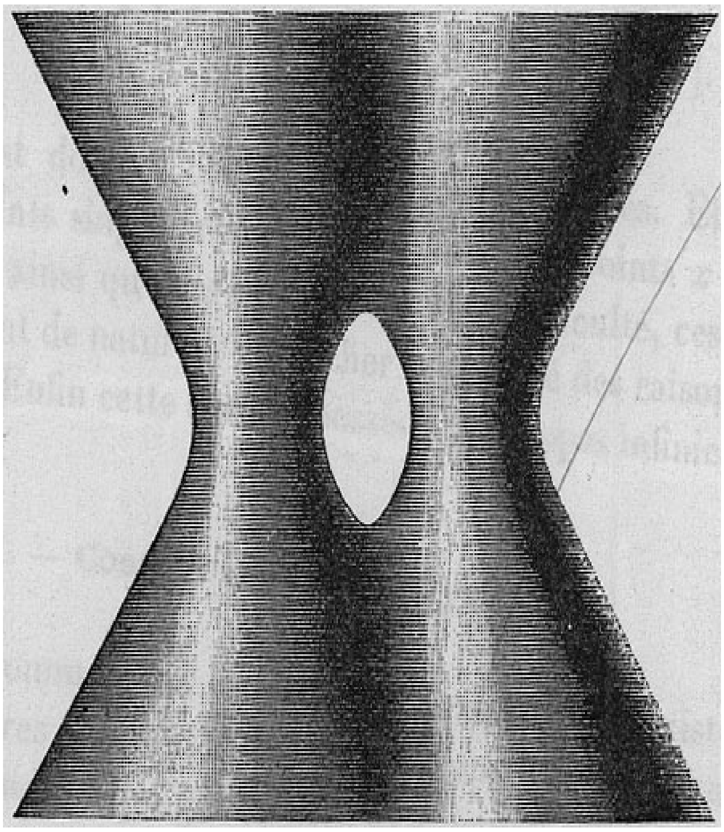


Fig.9 Hiperbolóide com um buraco. Retirado do artigo de Hadamard

Hadamard termina a primeira parte de seu artigo obtendo uma superfície de curvatura negativa com mais de dois ramos infinitos a partir de um hiperbolóide de revolução de uma folha[12], cortando esta superfície por diferentes planos que passam por um diâmetro determinado Oy do maior circulo e fazendo girar cada secção ao redor de Oy, de um ângulo igual a metade do ângulo φ . Este é o ângulo que o plano da primeira secção faz com o plano equatorial. Mais genericamente, ao invés de diminuir o ângulo que faz uma secção qualquer com o plano equatorial entre 1 e 2, pode-se diminuir este mesmo ângulo entre 1 e *p*, com $p \in Z$. A nova superfície assim obtida é representada parametricamente em função de φ e de um vetor-raio de

[12] No parágrafo 9 de seu artigo, Hadamard afirma que o método usado para construir uma superfície de curvatura negativa, a partir do hiperbolóide de revolução de uma folha foi desenvolvido depois de assistir a uma conferência proferida por Brunel, em 4 de março de 1897, na *Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*

valor ρ, através das fórmulas: $x = \rho.sin\theta$, $y^2 = a^2 + \rho^2.\cos(2p\varphi)$ e $z = \rho.\cos\varphi$. A equação do plano tangente à esta superfície será definida por $(dx.sin\varphi + dz.\cos\varphi).\cos(2p\varphi + p.(dz.sin\varphi - dx.\cos\varphi).sin(2p\varphi) - \frac{y.dy}{\rho} = 0$ e a curvatura definida por $D.D´´-D^2 = -\frac{a^2}{y^2}\left[p^2.sin^2(2p\varphi) + (2p^2 - 1).\cos^2(2p\varphi)\right]$.

Esta superfície possui curvatura negativa. Ela admite como únicos pontos singulares à distância finita: os pontos *x=z=0*, $y = \pm a$. Segundo Hadamard estes pontos de singularidade não interferem no resultado obtido. Esta superfície possui, além da curvatura negativa, *2p* ramos infinitos.

2.4 - Considerações da *Analysis Situs*.

Hadamard utiliza diversas noções da *Analysis situs* em seu artigo. Por exemplo,ele afirma em sua terminologia que:

(1) duas curvas fechadas traçadas sobre uma mesma superfície são de "mesma espécie" se são redutíveis uma a outra por uma deformação contínua efetuada sobre esta superfície;
(2) duas curvas **C** e **C´** que unem dois pontos ***a*** e ***b*** são do "mesmo tipo" se é possível passar de uma a outra por deformação contínua de maneira que os pontos **a** e ***b*** permaneçam fixos;
(3) duas curvas **C** e **C´** que unem um ponto ***a*** à uma curva ***L*** são do "mesmo tipo" se é possível passar de uma a outra por deformação contínua de tal modo que a extremidade ***a*** permaneça fixa, enquanto a outra extremidade descreve a linha ***L*** e que
(4) as diferentes espécies de curvas fechadas constituem as *curvas elementares*.

Hadamard chama a atenção para o fato de que muitas vezes, a escolha dos contornos elementares possui um certo grau de arbitrariedade, mas que um contorno de um tipo pode se reduzir a um contorno de um outro tipo por transformações contínuas. Cada contorno é equivalente a um bordo determinado da superfície, correspondendo a um ramo infinito da superfície.

Os contornos elementares não são todos independentes, há entre eles uma relação que permite observar um contorno elementar como uma combinação de outros. Um contorno qualquer ABCD... é redutível a uma série de contornos elementares C_i^m $C_{i'}^{m'}C_{i''}^{m''}$... O valor de *m* indica o sentido pelo qual se percorre a curva.

Em alguns casos não se considera essencialmente distintos de um contorno determinado os seus diferentes múltiplos. Sob este ponto de vista, uma superfície de ordem de conexão igual a dois terá somente uma espécie de contornos não redutíveis. Se a ordem de conexão for maior do que dois, os contornos diferentes uns dos outros são infinitos. Por outro lado, há um número finito de espécies de contornos cujo comprimento é inferior a um comprimento qualquer. Esta observação é fundamental para a definição de geodésica como o caminho mais curto

Um arco de geodésica unindo dois pontos ***a*** e ***b*** é o mais curto de todos os caminhos com as mesmas extremidades e do mesmo tipo. Pensemos num cilindro. Sobre um cilindro, um arco de geodésica que liga dois pontos ***a*** e ***b*** é um arco de hélice. Há uma infinidade de maneiras de se obter arcos de hélices unindo dois pontos de um cilindro. Todos são arcos de geodésicas e seus comprimentos são diferentes. Na verdade eles não são redutíveis uns aos outro por uma transformação contínua. Para verificar tal fato basta marcar sobre um retângulo que representa a planificação de um cilindro (obtido segundo o corte por uma de suas geratrizes) dois pontos **a** e **b** e traçar o segmento $\overline{AB}$. Ao recompor o cilindro, obtemos uma hélice. Se o retângulo é duplicado, podemos traçar um segmento que une os pontos ***a*** e ***b*** com um comprimento mais longo. Ao recompor este cilindro, a partir do retângulo duplicado, obtemos um novo arco de hélice, de comprimento mais longo, que é também um arco de geodésica, pois, entre todas as curvas que unem *a* e *b* do mesmo tipo (dando uma volta completa) esta é a mais curta.

2.5 – Teoremas fundamentais, linhas geodésicas fechadas e linhas geodésicas assintóticas.

Sabemos que a geometria de uma superfície muda radicalmente de acordo com o sinal da curvatura desta superfície. No artigo *"Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique"* de 1897, Hadamard estuda as geodésicas sobre superfícies de curvaturas totais positivas. O resultado obtido diz que "sobre uma superfície de curvatura total positiva, toda geodésica fechada é cortada uma infinidade de vezes por outra geodésica". Hadamard demonstra este resultado considerando uma geodésica fechada L e tomando por coordenadas um arco *v* de L, contado a partir de uma origem fixa até o pé de uma geodésica normal à primeira, e o arco *u* desta última geodésica, contada a partir de seu pé. O elemento linear será $ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$. A curvatura da superfície é expressa por $\frac{1}{RR'} = -\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}$ [11] e o mínimo de *u* é necessariamente 0. O mais interessante é que este mínimo é alcançado uma infinidade de vezes se o ponto variável percorre uma geodésica.

Sobre uma esfera, dois pontos diametralmente opostos são unidos por uma infinidade de semigrandes círculos e estes são do mesmo tipo. Em superfícies de curvatura negativa não existem duas geodésicas de mesma extremidade que sejam do mesmo tipo, como também, obviamente, geodésicas fechadas redutíveis a um ponto por deformação contínua, pois pontos *a* e *a'* unidos por uma linha determinada, as assíntotas obtidas por *a*, segundo o tipo *aa'* , a duas geodésicas distintas por *a* não podem coincidir. Desta forma, cada tipo de curva que une dois pontos *a* e *b* corresponde a um único arco de geodésica possuindo as mesmas extremidades e do mesmo tipo. A cada espécie de curva fechada, corresponde uma única geodésica desta espécie. Em superfícies como o parabolóide hiperbólico, uma superfície simplesmente conexa, não há geodésicas fechadas, pois estas seriam redutíveis a um ponto. Sobre uma superfície de conexão igual a dois, como o hiperbolóide de uma folha, há somente uma geodésica fechada. Logo, para que o estudo das geodésicas

---

[11] Esta relação produz uma conseqüência fundamental para o objeto de estudo do artigo de Hadamard que expomos. Nas superfícies de curvatura negativa, supondo C positivo, temos $\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} \geq 0$.

fechadas passe a ser interessante é necessário que a ordem de conexão seja no mínimo três. Neste caso, o número de geodésicas fechadas passa a ser infinito, mas este conjunto infinito é enumerável. Estuda-se, em seguida, as geodésicas assintóticas às geodésicas fechadas de modo análogo ao estudo das trajetórias assintóticas aos ciclos limites feito por Poincaré.

Assumindo a superfície de curvatura negativa como uma generalização do plano hiperbólico e trazendo deste plano os conceitos de retas secantes, não secantes e paralelas, Hadamard conclui que duas geodésicas L e L´ podem apresentar três situações diferentes. Imaginemos um ponto material *m* se deslocando sobre uma linha L, a distância de *m* à L´, medida usando as geodésicas de um tipo dado, pode:

(1) Crescer constantemente de $-\infty$ a $+\infty$ ou decrescer constantemente de $+\infty$ a $-\infty$ (podemos dizer que as duas linhas se cortam segundo o tipo considerado)

(2) Partir de $\pm\infty$ e retornar a após ter passado por um mínimo

(3) Partir de $\pm\infty$ e tender a zero sem jamais mudar de sinal nem de sentido de variação (ou a variação inversa). Neste caso, as geodésicas L e L´serão assintóticas.

A possibilidade de ocorrência dos dois primeiros casos é evidente. Já o terceiro caso se estabelece através de considerações da geometria hiperbólica. Seja ***a´*** um ponto da superfície, Λ uma geodésica que liga este ponto a um ponto **a** de uma geodésica **L**. Consideremos um ponto *m* que se desloca indefinidamente sobre **L** de maneira determinada a partir do ponto **a** e tracemos a geodésica *a´m* do tipo Λ.

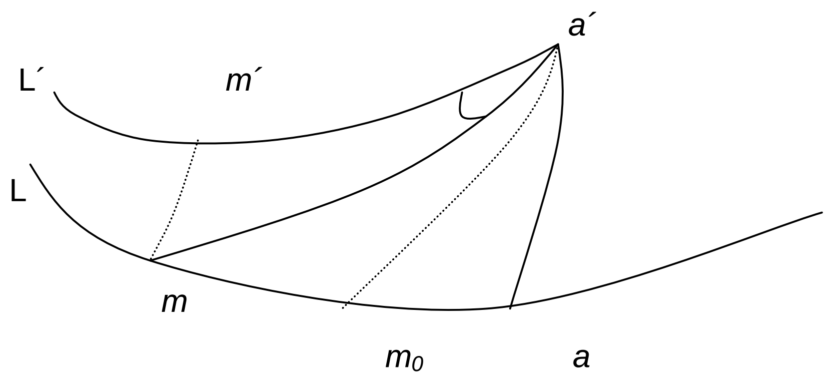


Fig 10. Geodésicas assintóticas. Reprodução do artigo de Hadamard.

O ângulo *ma´a* cresce constantemente, mas é constantemente inferior a um limite determinado a saber, o ângulo exterior em *a* do triângulo *maa´* . Logo, *a´m* tende a um limite L´. Dizemos que a geodésica L´ é uma geodésica *assintótica* à geodésica L. Reciprocamente, se duas geodésicas L e L´ são assintótica, ou seja, se a distância entre elas contada a partir de um determinado tipo tende a zero, a linha L' é assintótica à L pelo método anterior. Em seguida, Hadamard enuncia alguns corolários importantes:

- Corolário 1: "Se uma geodésica L´ é assintótica a uma geodésica L, reciprocamente, esta última é assintótica à primeira, segundo o mesmo tipo".

- Corolário 2: "Duas geodésicas assintóticas a uma terceira são assintóticas entre si".

- Corolário 3: "Se a linha L´ é a geodésica fechada de espécie ε, uma mesma assíntota não pode ser originada de dois tipos diferentes.

Este último resultado nos remete ao estudo das geodésicas fechadas. Podemos destacar que este tipo de geodésica L será obtido quando for dado: (a) a espécie da geodésica fechada corresponder à L_0, (b) um ponto *a* de L e (c) um tipo de linha que parte de *a* em direção a L_0. Assim as geodésicas fechadas e as geodésicas assintóticas são reunidas por Hadamard em uma mesma categoria. As primeiras podem ser vistas como um caso particular das segundas. Esta reunião é imposta pelo corolário 1, o que permite organizar em uma mesma classe, as geodésicas assintóticas entre si.

Hadamard termina o estudo das geodésicas assintóticas provando que a curvatura do triângulo *aa´m* é inferior a uma quantidade fixa, que podemos assinalar, desde que conheçamos o comprimento *aa´* mesmo sem conhecer a posição do ponto *a* e sem conhecer a posição da geodésica L, quantidade que tende a zero, juntamente com o comprimento *aa´*. O mesmo fato ocorre para a diferença entre o ângulo *a´ay* e o ângulo que faz a assíntota L´ com o comprimento *aa´* uma vez que esta diferença é o limite da curvatura que será estudada.

2.6 – As geodésicas que tendem ao infinito.

Para descrever esta categoria de geodésicas, Hadamard retoma o estudo da superfície *S* e de sua parte finita *S´* limitada por curvas fechadas C_i.

Sabemos que, se os ramos são *évasées*, o que é suposto por Hadamard, para cada C_i há uma única linha do mesmo tipo. Hadamard supõe que as geodésicas γ_i (na figura 11, denotada por Γ_i) limitam *S´*. Ele conclui que uma geodésica γ, que penetra em uma folha infinita, encontra necessariamente uma geodésica fronteiriça γ_i infinitamente vizinha da primeira. Por conseqüência, a distância à γ_i de um ponto *m* que se move sobre γ pode somente continuar a crescer indefinidamente. Como esta distância não pode possuir um máximo sobre a geodésica, e deve crescer constantemente e indefinidamente, esta geodésica sobre o ramo infinito da superfície, tenderá ao infinito. Estas fronteiras, geodésicas fechadas γ_i, são estudadas com as curvas fechadas transversas utilizadas por Poincaré, curvas chamadas ciclos sem contato, que uma vez interceptadas por uma trajetória, não podem mais ser interceptadas novamente.

Precisemos a situação destas geodésicas que tendem ao infinito com base na figura a seguir. Partiremos de um ponto O pertencente à parte finita *S´* da superfície e consideremos uma geodésica γ_i fronteira do ramo infinito η_i. Uma geodésica γ, que sai de O e que penetra no ramo infinito η_i, intercepta γ_i em um ponto *m*, pois ela tende ao infinito sobre o ramo infinito. Quando *m* varia e descreve a curva fechada γ_i, a geodésica que contém O varia e descreve um ângulo α formadas pelas duas geodésicas que partem do ponto O, assintóticas à γ_i. Estas geodésicas são do mesmo tipo da linha O*m*. Como este ponto se movimenta continuamente descrevendo γ_i de um modo ou de outro, a geodésica O*m* gira em torno do ponto o sem cessar de tender ao infinito sobre a folha η_i.

Se a superfície *S* for simplesmente conexa, como o parabolóide hiperbólico, não há geodésica fechada. A distância a um ponto fixo O de um ponto *m* que se move sobre uma geodésica cresce indefinidamente e todas as geodésicas tendem ao infinito. A distribuição das geodésicas, neste caso, lembra a distribuição das retas de um plano hiperbólico.

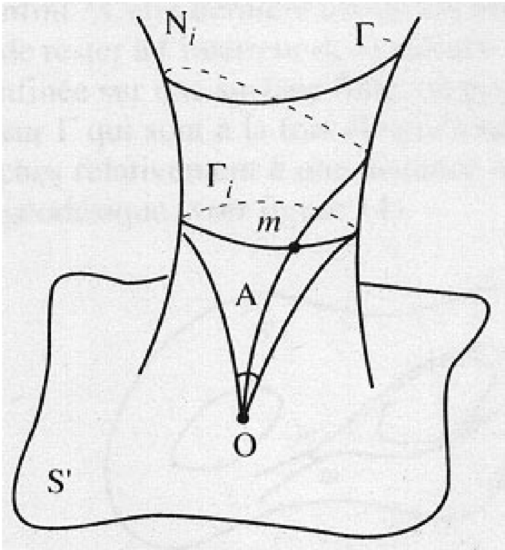


Fig.11 Geodésicas que tendem ao infinito. Reprodução do artigo de J.L. Chabert.

Se a superfície *S* possui uma ordem de conexão igual a dois, haverá somente um contorno elementar, a geodésica fechada correspondente a uma das folhas infinitas divide a superfície em duas folhas infinitas. Não há parte finita *S´*: todas as geodésicas tendem ao infinito com exceção das que são assintóticas à geodésica fechada, que passam duas vezes pelo mesmo ponto da superfície.

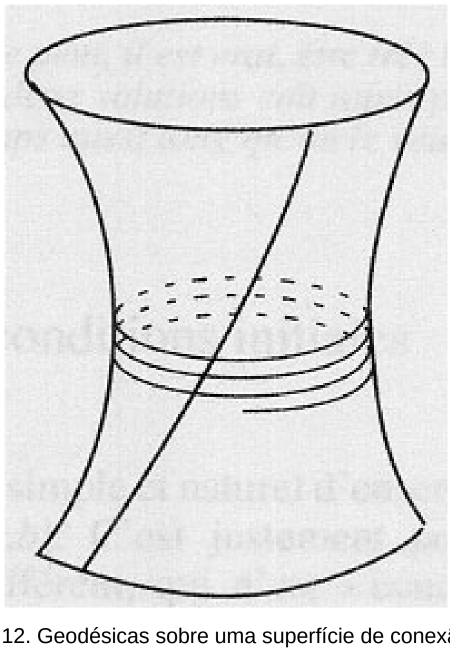


Fig 12. Geodésicas sobre uma superfície de conexão igual a 2.

A natureza do resultado obtido por Hadamard nos informa que se a ordem de conexão for superior a dois, os contornos fechados distintos são infinitos e que estes mesmos contornos relativos aos diferentes ramos infinitos são todos distintos uns dos outros.

2.7 – A terceira categoria de geodésicas. Uma classificação geral.

Hadamard mostra a existência das geodésicas estudadas nesta seção e as classifica como geodésicas de terceira categoria, com argumentos puramente retirados da Analysis Situs. No artigo intitulado *“Sur les lignes géodesiques”*, publicado um ano antes do artigo estudado nesta dissertação, Hadamard já enunciava a existência de tais geodésicas.

> “L´éxistence des trois prémières catégories est incontestable, mais nous ne pouvions rien dire, jusqu´ici, relativement à la dernière. (...) l´ensemble E étant parfait, est de la seconde puissance, et se compose des lignes issues de O et appartenant aux catégories 1, 2 et 4. Or les lignes partant de O et correspondant aux deux premières catégories forment une infinité dénombrable. Donc il existe des lignes de la quatrième catégorie”.(HADAMARD, 1897, p117).

Hadamard apresenta, entre os parágrafos 53 e 58, as geodésicas que não pertencem às categorias estudadas anteriormente (as que são fechadas, as assintóticas às geodésicas fechadas e as que tendem ao infinito). Esta nova categoria de geodésicas é a base para o resultado final enunciado em seu artigo. O estudo de tais geodésicas é enunciado tomando-se as superfícies cuja ordem de conexão é estritamente superior a dois. Como exemplo de tais superfícies, podemos destacar a superfície da figura 3 deste texto, uma vez feitas as retificações necessárias para transformar os seus ramos em ramos *évasés.*

A necessidade de uma nova categoria de geodésicas advém da distinção posta em evidência por Cantor entre conjuntos infinitos enumeráveis e conjuntos infinitos não-enumeráveis[12]. Hadamard fixa um ponto O na parte finita de *S´* e considera um conjunto **E** das direções iniciais das linhas geodésicas partindo de O e não se distanciando infinitamente. O conjunto **E** é formado pelas direções não contidas no interior dos ângulos α limitados por duas assíntotas que partem de O em direção a uma das geodésicas fronteiriças γ_1. Este conjunto **E** contém em particular estas assíntotas que definem os ângulos e é idêntico ao conjunto de seus pontos de acumulação, logo é um conjunto perfeito. Pelos trabalhos de Cantor um tal conjunto é necessariamente não-enumerável. Como, no interior deste conjunto não-enumerável de geodésicas que não tendem ao infinito, as geodésicas fechadas e as geodésicas que lhes são assintóticas constituem um conjunto enumerável, há necessariamente geodésicas de uma outra categoria. Como são estas geodésicas? O que podemos dizer sobre elas? Fica evidente que o fato desta nova categoria de geodésicas não pertencer a nenhuma das destacadas anteriormente impõe sua localização no interior da superfície finita *S´* e, como este tipo de geodésica fica confinada sobre uma superfície finita, podemos encontrar pontos *m* e *m´* sobre a geodésica γ que afastados ao mesmo tempo sobre esta geodésica e muito próximos se tomamos uma distância medida sobre uma outra geodésica, como esboçado na figura a seguir.

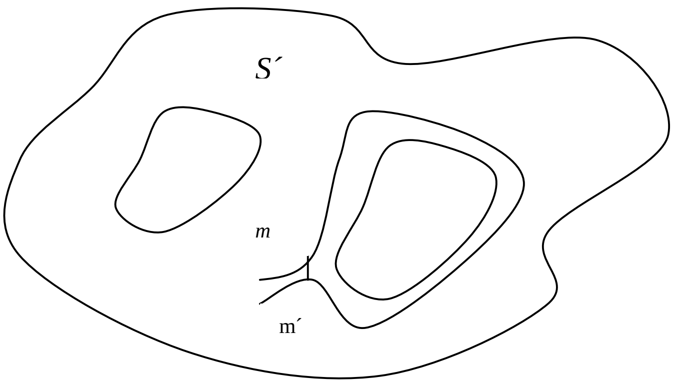


Fig 13. As geodésicas de terceira categoria

[12] Segundo a linguagem moderna da Análise matemática, um conjunto E é dito *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : IN \to E$. No segundo caso, E é denominado *infinito enumerável* e cada bijeção é chamada de uma enumeração dos elementos de E. O principal exemplo de conjunto *não-enumerável* é o conjunto dos números reais. Cantor mostra a existência de conjuntos não-enumeráveis a partir do conceito de cardinal.

À esta situação podemos associar uma geodésica fechada de modo que ela e a geodésica γ se aproximem. Como γ não pode lhe ser assintótica, após se aproximar até um certo valor mínimo, ela se afastará. Este mesmo experimento repetido, mostra que ao se afastar, γ se aproxima em seguida de uma outra geodésica fechada para depois se afastar dela novamente e assim sucessivamente aproximando-se umas das outras cada vez mais, de maneira considerável. Este tipo de comportamento se assemelha àquele que foi descrito por Poincaré nos *Méthodes Nouvelles de Mécanique Céleste*, no qual equações do problema, do tipo $\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{1}{C}.\frac{\partial C}{\partial u}\left[1 - \left(\frac{du}{ds}\right)^2\right]$, admitem uma solução periódica, cujo período pode ser muito grande e tal que a diferença das soluções pode ser tão pequena quanto queiramos durante um tempo tão grande o quanto queiramos.

A partir das propriedades do conjunto **E**, Hadamard conclui que:

(1) na vizinhança de uma linha L, a partir do conjunto E, encontram-se geodésicas que tendem ao infinito sobre ramos infinitos, uma vez que o ponto P pode ser tomado sobre qualquer ramo infinito.

(2) na vizinhança desta mesma linha, existem também outras linhas que permanecem à distância finita, em particular as assíntotas à todas as geodésicas γ_i.

Hadamard observa que, ao passo que toda geodésica que tende ao infinito está envolta por um *continuum* de geodésicas caracterizadas pelas mesmas propriedades, ao contrário, *qualquer mudança, por menor que seja, na direção inicial de uma geodésica que permanece a uma distância finita, é suficiente para levar a uma variação qualquer no comportamento final da curva.*

Este exemplo é, portanto, um caso do que chamamos nos dias de hoje de sensibilidade das condições iniciais para um sistema dinâmico.

Segundo Nabonnand (1995): “A classificação foi obtida a partir de uma compreensão refinada da geometria das superfícies de curvatura negativa e de uma análise qualitativa da equação das geodésicas. A partir desta classificação, Hadamard considera o conjunto das geodésicas como um objeto matemático a descrever. As propriedades topológicas do conjunto das geodésicas são deduzidas de considerações gerais sobre o comportamento global das geodésicas, que levam em consideração a geometria e a topologia da superfície (...)”.

Ainda de acordo com Nabonnand (1995), Poincaré comenta o artigo anterior de Hadamard numa conferência proferida na *Académie des Sciences de Paris*, em 1897, dizendo que Hadamard estava desenvolvendo seus estudos sobre geodésicas, restringindo-se às superfícies de curvatura negativa e que esta restrição o permitirá eliminar dificuldades, o que não aconteceria se tivesse trabalhando sobre uma superfície de curvatura qualquer ou sobre uma superfície convexa; e que este era um bom sinal, pois poderia alcançar resultados mais completos. Este comentário do ilustre matemático torna-se realidade com a publicação do artigo de Hadamard no ano seguinte.

O resultado de Hadamard, aqui apresentado, suscita muitos questionamentos na filosofia da matemática e na filosofia da física. Segundo Poincaré (1905b) “A matemática tem um tríplice objetivo. Deve fornecer um instrumento para o estudo da natureza. Mas não só isso: tem um objetivo filosófico e, ouso dizer, um objetivo estético. Deve ajudar o filósofo a aprofundaras noções de número, espaço e tempo. Seus adeptos, sobretudo, encontram nela fruições análogas às proporcionadas pela pintura e a musica. Admiram a delicada harmonia dos números e das formas, maravilham-se quando uma nova descoberta lhes abrem uma perspectiva inesperada; e a alegria que assim experimentam não tem o caráter estético, embora os sentidos não tenham nela nenhuma participação? Poucos privilegiados são chamados a gozá-la plenamente, é verdade, mas não acontece o mesmo com os mais nobres antes? Por isso, não hesito em dizer que a matemática merece ser cultivada por si mesma, e que as teorias que não têm aplicação na física devem sê-lo, tanto como as outras. Mesmo que o objetivo físico e o objetivo estético não fossem solidários entre si, não deveríamos sacrificar nenhum dos dois. (...) esses dois objetivos são inseparáveis e o melhor meio de atingir um é visar o outro, ou ao menos jamais perde-lo de vista. (...) O matemático não deve ser para o físico um simples fornecedor de fórmulas; é preciso que haja entre eles uma colaboração mais íntima. A física matemática e a análise pura não são apenas potências limítrofes, que mantêm relações de boa vizinhança; penetram-se mutuamente, e seu espírito é o mesmo. Isso será melhor compreendido quando eu tiver mostrado o que a física recebe da matemática e o que a matemática, em compensação, toma da física".

Quais as implicações deste resultado para a física? Passaremos a seguir a uma discussão que analisa esta questão a partir da visão do físico e filósofo da física, Pierre Duhem, um dos primeiros a se dar conta da profundidade das conseqüências dos resultados obtidos por Hadamard que acabamos de analisar.

Capítulo 3

Uma visão filosófica do artigo de Hadamard segundo Pierre Duhem.

Um tolo não vê a mesma árvore que um sábio.

William Blake, *Proverbs of Hell*

Vamos neste capítulo descrever em linhas gerais a obra de Pierre Duhem: *"La Théorie Physique. Son object et sa Structure"* publicada em 1906, para a seguir concentrar a nossa atenção especial na segunda parte do texto que detalha a *"Estrutura da Teoria Física"*, mais especificamente, no terceiro capítulo, o qual se dedica à dedução matemática e a sua ligação com a teoria física. Em 4.1 não temos como objetivo analisar nem apontar opiniões sobre os tópicos abordados pelo autor ao longo do seu texto, apenas situar o leitor desta dissertação, na contextualização teórica sobre a qual o parágrafo intitulado *"Exemples de déduction mathématiques à tout jamais inutilisable"* se encontra; parágrafo este, como dito anteriormente, objeto principal deste capítulo.

3.1 – O objeto da teoria em Física e sua estrutura.

Em seu livro *“La Théorie Physique. Son object et sa structure”* [13] publicado em 1906, o físico e filósofo da física Pierre Duhem faz uma análise lógica do método sob o qual se baseia a Física Teórica como ciência.

Antes de aplicar um instrumento ao estudo de um fenômeno, o experimentador cheio de certezas, demonstra este instrumento, examina cada passo da experiência que realizará com este instrumento, testa-o várias vezes e propõe novas variáveis até descobrir, de uma maneira exata, o valor real deste instrumento, assim como sua precisão. Os fatores para os quais este instrumento é, ou não, utilizável também servem de base para os estudos de um experimentador, podendo fazer um uso mais seguro deste.

Como um experimentador com o seu instrumento, Pierre Duhem faz a análise da Física Teórica em seu livro. Pesquisa um objeto e a sua precisão, e após identificá-lo e desvendá-lo, procura conhecê-lo, ordená-lo e examinar a sua estrutura. A partir da identificação da estrutura, o autor estuda sucessivamente cada operação para as quais ela se constitui e como cada uma se reporta ao objeto da teoria física em questão.

Ao longo do texto vemos muitas exposições de teorias sobre os fenômenos naturais esclarecidas através de exemplos simples, de fácil compreensão pelo leitor e organizados de maneira didática. São exemplos retirados do dia-a-dia de um físico teórico ou experimental. Não é um texto onde se expõe um sistema lógico seguido de simples contemplações gerais, nem por uma contemplação em que o concreto não se faz presente, ele nasceu e se desenvolveu através da prática cotidiana da ciência.

A primeira parte tem como título “*Do objeto da teoria em Física”* e trabalha com a questão “qual é o objeto de uma teoria em Física?”. Encontramos duas respostas. A primeira diz que este objeto é a *explicação* de um conjunto de leis experimentais estabelecidas, entendendo por explicação, a depuração da realidade das aparências que as envolvem como um véu, a fim de ver esta realidade nua face-a-face. A

[13] P.Duhem.*La théorie physique. Son object et as structure.,*Paris:Chevalier et Rivière,1906.

observação dos fenômenos físicos não nos leva à realidade que se esconde sob as aparências sensíveis, mas a estas próprias aparências sensíveis, presas sob uma forma particular e concreta. As leis experimentais passam a não ter vantagens sobre o objeto da realidade material, elas tratam das próprias aparências sensíveis sob uma forma abstrata geral. Ao desfazer o véu que encobre a realidade das aparências sensíveis, a teoria vai procurar o que realmente existe no corpo da estrutura. A segunda resposta nos diz que uma teoria em Física é um sistema abstrato que tem por objetivo *resumir* e *classificar logicamente* um conjunto de leis experimentais, sem, portanto, ter a pretensão de explicar tais leis.

O autor esclarece ao leitor as duas respostas através dois exemplos. O primeiro toma por base os instrumentos de corda. Descreve os efeitos que as combinações das notas nos dá aos sentidos, questiona a emoção, a sensação auditiva e logo a seguir descreve informações gerais e abstratas baseadas na Acústica, como as noções de oitavas, de acordes maiores e menores, da intensidade do som, dos movimentos periódicos, amplitude, freqüência, isto é, conceitos que estão sob o véu que encobre a realidade da aparência sensível e que não interessa ao simples apreciador (aquele sem conhecimento da teoria) da música. Um outro exemplo proposto por Duhem advém da teoria vibratória da luz, que dá uma explicação hipotética para os fenômenos da visão. Ela supõe que todos os corpos que nós vemos, que nós sentimos, que nós pensamos estão mergulhados em um *meio inacessível* aos nossos sentidos e de uma certa forma imponderável, nomeado *éter*. A este éter a teoria vibratória da luz atribui algumas propriedades mecânicas, admitindo que toda luz simples é uma vibração transversal muito pequena e muito rápida do próprio éter, determinando a freqüência e a amplitude desta vibração e caracterizando a cor e o brilho desta luz. De toda forma, não se pode perceber este éter a não ser pelo movimento da vibração luminosa. Esta teoria se esforça para mostrar que estes postulados nos levam aos conceitos primitivos da óptica experimental. O autor diz que, segundo esta opinião, a Física teórica está subordinada à Metafísica, que o valor de uma teoria física depende do sistema metafísico que se adota; mas que ao mesmo tempo, nenhum sistema metafísico é suficiente para edificar uma teoria física. Assim, descreve a teoria física como uma representação econômica de leis experimentais considerando a teoria como classificação e afirmando posteriormente que a teoria tende a se transformar em uma classificação natural, isto é um conjunto de operações intelectuais que se baseia sobre o abstrato e não sobre indivíduos concretos. Duhem diz no segundo parágrafo do capítulo I da primeira parte:

> "Si une théorie physique est une explication, elle n´a pas atteint son but tant qu´elle n´a pas écarté toute apparence sensible pour saisir la réalité physique". DUHEM,1906,p.4)

Duhem completa a primeira parte de seu livro descrevendo as teorias representativas, o papel das classificações naturais e as explicações de fenômenos de acordo com a evolução das teorias físicas desde os estudos de Descartes até os estudos que permearam os primeiros cinco anos da década de 1900, descrevendo várias opiniões de físicos e filósofos sobre a natureza das teorias físicas. Dedica grande parte de suas conclusões às teorias abstratas e aos modelos mecânicos. As idéias expostas no fechamento da primeira parte são desenvolvimentos de escritos contidos em um artigo intitulado: *"L´école anglaise et les théories physiques"* publicado em outubro de 1893 pela Révue des Questions Scientifiques.[14]

Na segunda parte do livro encontramos um detalhado texto que descreve a estrutura da teoria física. Conceitos que envolvem: quantidade e medida, quantidade e qualidade e a Física puramente quantitativa, estão presentes nesta parte do livro, vindo culminar com o capítulo cujo exemplo é exatamente a interpretação o resultado obtido por Hadamard.

Duhem chama atenção para conceitos como: dedução, aplicação e precisão em Física e em Matemática.

Nos capítulos subseqüentes dedica-se à experiência em Física. Afirma que uma experiência em Física não é simplesmente a observação de um fenômeno, mas também a interpretação teórica deste fenômeno, assim como o resultado de uma experiência em Física é um julgamento abstrato e simbólico. Mesmo assim, a experiência em Física continua sendo mais precisa e mais detalhada do que a simples constatação não científica de um fato.

[14] Uma leitura interessante, que deve ser feita de maneira cuidadosa, encontra-se no nono parágrafo do quarto capítulo da primeira parte, intitulado *"L´usage des modèles mécaniques est-il fécond en découvertes?"*.

Os dois últimos capítulos tratam da teoria Física e de como trabalhar com as hipóteses que se relacionam com um fenômeno natural. Em especial, o fechamento do livro faz um passeio sobre os pensamentos dos cientistas que ajudaram a construir e a questionar a Teoria em Física.

Muitas das idéias relativas ao *objeto da teoria* já eram difundidas por outros pensadores como Henri Poincaré, mas quanto aos conceitos relativos à *estrutura* e à *organização* da Física levam-nos a crer que Duhem compilou e descreveu muito bem as bases sobre as quais a Teoria Física se estabeleceu no período de tempo estudado.

3.2 – A dedução matemática e a teoria física

3.2.1 – Mais ou menos Física e precisão matemática

Segundo Pierre Duhem, quando propomos construir uma teoria física devemos escolher as *propriedades* que revelam algo à observação, aquelas para as quais podemos olhar como “qualidades primeiras”. A seguir, devemos *representá-las* por símbolos algébricos ou por símbolos geométricos e, por fim, estabelecer *relações* entre eles que servirão de princípios às deduções para as quais a teoria se desenvolverá. O enunciado de hipóteses sobre a teoria em questão deve ser analisado de maneira natural conhecendo o terreno sobre o qual a teoria se fundamenta. Somente ao fim de um estudo é que se pode precisar as condições que se impõem à escolha das hipóteses.

O desenvolvimento matemático é visto por Duhem como o exame constitutivo de toda teoria física. Para ele a dedução matemática é um intermediário cujo objetivo é nos ensinar que mesmo plenos de hipóteses fundamentais sobre a teoria, podemos chegar a uma dada circunstância, assim como analisar mais precisamente que efeitos foram produzidos a partir do fenômeno. Para ilustrar a afirmativa, o autor cita uma experiência em termodinâmica: “ao submeter um bloco de gelo a uma dada compressão este bloco derreterá para uma dada temperatura”.

Duas questões são levantadas por Duhem em relação à dedução matemática:

(1) A dedução matemática contém em seus cálculos as circunstâncias primeiras (propriedades que revelam à observação) de maneira concreta de modo que seja possível observá-las?

(2) Retiram-se dela os fatos que nomeamos conseqüências ou estes são facilmente constatáveis?

As respostas de Duhem para tais questões são negativas. Um aparelho de compressão, um bloco de gelo e um termômetro são objetos que um físico manipula em seu laboratório e não elementos sobre os quais o cálculo algébrico se efetua, pois este somente combina números. Para que um matemático possa introduzir nestas fórmulas as circunstâncias concretas de uma experiência, é necessário que elas sejam introduzidas por meio de medidas traduzidas por números. Expressões, como por exemplo, *uma dada pressão*, devem ser definidas por um determinado número de atmosferas para serem introduzidas em uma equação matemática, e mesmo assim, o que o matemático obterá através de cálculos será um outro número. Ficam as perguntas: o que este número está representando? Será necessário, então, recorrer aos métodos de medida para estabelecer uma correspondência entre uma certa indicação do termômetro e o valor numérico assumido pela variável que representa a temperatura na equação algébrica estabelecida? A resposta é sim. Volta-se, então, ao ponto de partida. O desenvolvimento matemático da teoria física não expressa exatamente o fenômeno físico, mas somente a sua tradução simbólica.

Para que circunstâncias de uma determinada experiência sejam introduzidas nos cálculos é necessário fazer uma nova versão da linguagem de observação concreta para a linguagem dos números; é importante que um tema transforme um valor numérico em uma indicação formulada na linguagem da experiência. Assim, os métodos de medidas passam a ser o vocábulo que torna possível fazer estas duas traduções num sentido inverso. Duhem escreve em seu próprio texto que *"quem traduz, trai"*, não havendo jamais uma adequação perfeita entre os dois textos ou situações de modo que uma versão faça corresponder exatamente à outra. Há, portanto, uma diferença extrema entre um fato observado por um físico e uma equação matemática que o modela. É mais uma vez a experiência opondo-se à teoria. Esta afirmativa de Duhem é muito forte, e antes que o leitor pudesse se opor a esta opinião, mais um exemplo vem ilustrar a sua teoria: a distribuição de uma determinada temperatura, de uma dada maneira ao longo de um determinado corpo.

Em termos teóricos tudo é determinado de maneira precisa: o corpo estudado é determinado pela geometria, todos os seus pontos são conhecidos, para cada ponto do corpo há uma temperatura associada a ele; e esta temperatura é para cada ponto um número que se confunde com algum outro número, pois pontos diferentes podem ter temperaturas iguais.

Sendo o corpo em questão um bloco de concreto, convexo, de arestas sem espessura, com medidas de suas dimensões e medidas de seus ângulos bem definidas, é possível determinar a temperatura deste bloco, mas se o bloco for côncavo, com arestas denteadas, com “esquinas” arredondadas, com pontos irregulares, não será possível determinar novamente a temperatura do bloco, mesmo que tais alterações sejam muito pequenas. O termômetro passará a determinar uma espécie de temperatura média para o bloco, relativa a um certo volume cuja extensão não pode ser exatamente fixada. Não é possível saber se esta temperatura[15] é a temperatura real, ou seja, não é possível dizer, por exemplo, que a temperatura do bloco é 10^{o}, mas pode-se conjecturar que a diferença entre esta temperatura e 10^{o} não ultrapassa uma certa fração da temperatura medida; além disso, esta afirmação irá depender da precisão dos métodos de medida e da aferição do termômetro.

Este exemplo nos mostra que pequenas alterações na descrição do objeto em questão, que o transformam em outro, mas que remetem ao original por estas transformações, fazem com que seja impossível descrever o resultado físico sem que se use a expressão “mais ou menos”. Para decorar o texto com um exemplo matemático mais elementar, Duhem afirma que, num enunciado teórico, segmentos de 0.999cm, ou de 0.993cm, ou de 1.002cm, ou de 1.003cm de comprimento, são essencialmente diferentes para o matemático, mas que não mudam em nada se, em termos práticos, nós precisamos somente analisar comprimentos inferiores a um décimo de milímetro. É claro que dizer que a temperatura de um corpo é igual a 5^{o}, ou 4.99^{o} ou 5.01^{o} significa formular três fatos teóricos não compatíveis, que passam a corresponder a um mesmo fato prático desde que a precisão do termômetro não seja de cinqüenta graus, por exemplo.

Desta maneira, o autor conclui a seção do texto dizendo que um fato prático não se traduz por um fato teórico único, mas por um conjunto de fatores que compreendem uma infinidade de fatos teóricos diferentes. Cada um dos elementos matemáticos que se reúnem para compor um destes fatos, pode variar de um fato a outro sem exceder um certo limite de erro, limite este que se torna muito pequeno quando há mais perfeição nos métodos de medida, mas sem jamais desaparecer da resposta final dada ao experimento.

---

[15] Em seu texto, Pierre Duhem não determina qual a unidade de medida de temperatura, levando-nos a acreditar que tenha dado o exemplo usando a escala Celsius.

3.2.2 – Deduções matemáticas fisicamente úteis e deduções matemáticas fisicamente inúteis

Neste parágrafo, Duhem afirma que trabalhará com uma relação simples da termodinâmica para ilustrar o título proposto, pois além de representar uma experiência simples, ela é familiar a um físico. O fato importante e novo é que a não interpretação de um resultado deixa de ser banal para o desenvolvimento matemático de uma teoria física, trazendo graves conseqüências quando desconsideradas.

Uma vez fixados de maneira precisa todos os dados numéricos iniciais para uma experiência, assim como diferentes dados correlatos ao mesmo problema (implicando em várias variáveis associadas a ele), o número encontrado depois de cálculos longos e exaustivos, traduz de maneira exata o que se busca com o experimento. É como se o número final, um símbolo, fosse a expressão real da conclusão do experimento. Este número passa a ter uma identidade, é possível identificá-lo, "fichá-lo", dizer o que ele representa sem deixar dúvidas.

Trocando os dados iniciais por outros valores, é claro que o valor final do resultado é alterado. Isto quer dizer que se trocamos os fatos teóricos que traduzem as condições iniciais de uma experiência, o resultado muda e passa a representar as condições de um fato teórico diferente do fato proposto inicialmente. Por exemplo: sabe-se que segundo as leis e fórmulas que envolvem a termodinâmica, o ponto de fusão de um bloco de gelo e a pressão sofridas por ele estão diretamente relacionados. Uma vez trocando o valor numérico atribuído à pressão sofrida por um determinado corpo, altera-se também o valor numérico que corresponde ao ponto de fusão deste corpo.

Segundo o que foi descrito na seção anterior, mesmo que as condições iniciais de uma experiência estejam bem definidas, não é possível traduzir um fato teórico determinado sem ambigüidade. Em termos práticos, o autor quer dizer que a experiência de uma simples medida de pressão sobre um corpo depende das condições iniciais deste corpo, como também das condições materiais do instrumento que medirá tal grandeza. Ao dizer que a pressão encontrada é de 10atm, devemos ter em mente que este valor pode estar compreendido entre 9.95 atm e 10.01atm, embora para cada um destes valores a fórmula que determina o valor do ponto de fusão obtenha valores diferentes. Assim, as condições de uma experiência, dadas de uma maneira concreta, se traduzem por um conjunto de fatos teóricos, e este conjunto (de coisas abstratas parecidas) faz com que o desenvolvimento matemático da teoria passe a corresponder a um segundo fato, destinado a figurar como o resultado da experiência. É necessário traduzir e colocar sob a forma prática o resultado encontrado.

Somente o conhecedor da experiência conhece o real significado do número encontrado, pois conhece a teoria sobre a qual aplicou uma fórmula matemática. A interpretação do resultado é muito importante, somente ela poderá afirmar se o valor encontrado é compatível com o problema proposto. Um problema não termina a partir do momento em que um número foi encontrado. O experimentador deve interpretar o resultado, deve procurar a quais indicações realmente observáveis e legíveis o número encontrado se aplica.

No caso do termômetro da experiência que determina o ponto de fusão do gelo, é necessário procurar em sua escala graduada que situação real correspondente à indicação obtida. A impressão é que o fato teórico se transforma em um fato prático experimental. Na verdade, o conjunto de fatos teóricos em número infinito para o qual a dedução matemática serviu de ferramenta para a experiência, assegura a própria experiência. O resultado que ela produzirá, deve nos garantir que haja um único fato prático, conhecido como a solução do problema. Nesta hora, é observado que mesmo sendo a diferença entre duas marcações de temperatura do termômetro “apenas” de um décimo de milésimo de grau, há uma solução “mais certa” do que a outra, pois esta diferença é a sensibilidade limite do termômetro. Se assim não fosse, interpretar-se-ia todas as temperaturas que diferem entre si de 0.01^{o} como números iguais, isto é, números que traduzem uma *mesma leitura*.

A dedução matemática nesta hora atinge o seu objetivo: ela nos permite afirmar que em virtude das hipóteses sobre as quais repousam a teoria, a experiência, feita segundo certas condições dadas, deve fornecer um resultado concreto e observável; ela permite estabelecer uma comparação entre as conseqüências da teoria e os fatos. Mas nem sempre isso acontece. Infinidades de fatos teóricos podem se apresentar como conseqüências possíveis de uma experiência. Às vezes, os fatos teóricos traduzidos em linguagem concreta nos dão mais de um fato teórico prático, além daqueles que a sensibilidade do instrumento nos permite observar. Este fato é demonstrado uma vez que diversos valores numéricos dados por uma fórmula encontram-se em dissonância com o material usado pelo experimentador.

Suponhamos que a experiência de medição do ponto de fusão de um bloco a uma temperatura dada seja realizada duas vezes e que a diferença entre elas ultrapasse um centésimo, mas sem que chegue a um décimo de grau. A dedução matemática será útil ao físico cujo termômetro trabalha com escala decimal e completamente inútil àquele cujo termômetro define medidas precisas em ordem centesimal.

A interpretação do resultado de um experimento, assim como a sua validade, passa a depender da época de sua realização, das condições laboratoriais, da habilidade do experimentador, da perfeição do instrumento, de a quem se destina o resultado, das próprias convicções do experimentador e muito da sensibilidade dos meios de medida que servem para traduzir em números as condições definidas pela experiência.

Henri Poincaré comenta este pensamento no capítulo cinco, na segunda parte do livro *"O valor da ciência"*, publicado em 1905:

> "O físico não pode pedir ao analista que lhe revele uma nova verdade; quando muito, este último poderia ajudá-lo a pressenti-la. (...) Todas as leis provém, pois, da experiência, mas para enunciá-las é preciso uma língua especial; a linguagem corrente é demasiado pobre, e, aliás, muito vaga para exprimir relações tão delicadas, tão ricas e tão precisas. Eis, portanto, a primeira razão pela qual um físico não pode prescindir da matemática; ela lhe fornece a única língua que ele pode falar. E uma língua bem-feita não é uma coisa indiferente; para nos limitarmos à física, o homem que inventou a palavra calor destinou muitas gerações ao erro (...). Compreendemos então como o analista, que persegue um objeto puramente estético, contribui para criar uma língua mais apta a satisfazer o físico".(POINCARÉ, 1905, p.90-91).

Esta citação de Poincaré mostra que uma fórmula que traduz uma lei vem da experiência, que é individual; e a lei que dela se tira é geral. Para ele, a experiência é apenas aproximada e a lei é precisa. A experiência se realiza sempre em condições complexas, como vimos no exemplo proposto por Duhem ao medir a temperatura de um bloco de gelo, e o enunciado da lei corrige os erros. Vimos nas palavras de Poincaré e no exemplo de Duhem que para extrair da experiência a lei é preciso generalizar; é uma necessidade que se impõe ao experimentador, admitindo-se aqui experimentador como um observador; e para generalizar é preciso estar imbuído do espírito matemático.

Poincaré descarta a expressão "inutilidade matemática". Segundo seu pensamento se a Física não se servisse prontamente à matemática, muitos assuntos seriam vistos como um "devaneio ocioso", como foi o caso da utilização do conjunto dos quatérnios pelos físicos ingleses.

Na mesma obra de Poincaré supracitada, encontramos um parágrafo em que o autor defende e define a pesquisa matemática e a sua relação com a Física:

> "São estes os serviços que os físicos devem esperar da análise, mas para que esta ciência possa prestar-lhes este serviço, é preciso que ela seja cultivada de modo mais amplo, sem preocupação imediata de utilidade: é preciso que o matemático tenha trabalhado como artista.". (POINCARÉ, 1905, p.92).

As palavras de Poincaré em relação à inutilidade das conclusões matemáticas diferem das de Duhem sutilmente. O primeiro interpreta a matemática como uma linguagem que ajuda a descrever as leis naturais observadas e experimentadas. Ressaltando ainda, que a criação matemática é uma arte e que sempre possui um fim maior. O segundo mostra que a interpretação desta linguagem deve ser questionada e testada quando usada como tradução de uma realidade física. Desta forma, segundo Duhem, há deduções matemáticas que são úteis à Física e outras não. No sentido positivo, isto é, de expressar exatamente o fato observado através da própria linguagem matemática (incluindo o resultado do experimento), a dedução matemática torna-se útil; e inútil, quando esta linguagem não atende aos objetivos do experimentador e da experiência em si.

3.2.3 – Um exemplo de dedução matemática para sempre inutilizável.

O titulo desta seção é o mesmo do texto original de Duhem e tem por objetivo preservar a idéia central e o conceito de “utilidade”, idéia e conceito esta que perpassam por grande parte de seu trabalho neste e em capítulos subseqüentes.

Segundo Ruelle (1991)[16], Duhem foi um dos intelectuais da Física que compreendeu a importância filosófica do resultado obtido por Hadamard ao trabalhar com superfícies de curvatura negativa. Duhem tinha idéias muito à frente de sua época em muitos campos, mas suas convicções políticas eram claramente reacionárias para o momento histórico da França.

O título do terceiro parágrafo do capítulo que trata da dedução matemática e a teoria física parece, a primeira vista, contundente, expressivo e até grosseiro para muitos, mas encontra-se de acordo com os seus conceitos de utilidade e inutilidade em uma dedução matemática, presentes na obra. Além disso, está muito bem esclarecido ao longo do desenvolvimento do texto.

Como Duhem explica, essa dedução matemática é o cálculo de uma trajetória sobre uma superfície semelhante a uma mesa de bilhar retorcida que hoje é conhecida por muitos matemáticos como o “bilhar de Hadamard”. A prova desta dedução é “para sempre inutilizável” porque uma pequena incerteza, necessariamente presente na condição inicial, dá lugar a uma grande incerteza sobre a forma da trajetória calculada quando analisamos o movimento do corpo por um tempo suficientemente longo. Este fato torna impossível a predição futura do fenômeno observado.

Duhem retoma neste parágrafo o exemplo que descreve a medição da temperatura de um bloco de gelo, falando sobre o aumento da precisão nos processos de medida, assim como sobre a qualidade dos instrumentos de medida que servem como tradução em fatos teóricos das condições dadas por uma experiência. Ao afirmar que instrumentos mais precisos expressam melhor os resultados de um

[16] David Ruelle conta em seu livro *“Hasard et Caos”*, Ed. Odile Jacob, 1991 que a leitura deste trecho do livro de Pierre Duhem, *“Exemple de déduction mathématique à tout jamais inutilisable”* foi-lhe indicada pelo matemático René Thom.

experimento, passa a restringir a um conjunto menor os fatos teóricos que esta tradução pode corresponder, isto é, vai restringindo as variáveis iniciais do problema até que o fato teórico seja único e até que a dedução matemática torne-se uma dedução matemática útil. Duhem não teoriza o fato inicial, apenas procura eliminar variáveis que tornam a dedução matemática não utilizável à física.

Em um primeiro momento ele acredita que fatos teóricos únicos fazem com que a dedução matemática seja igualmente única, chegando a intuir que uma restrição bem conduzida faz com que a dedução matemática seja sempre uma boa representação para fatos teóricos que representam os dados. Se esta intuição atinge a verdade, uma dedução matemática seguida de hipóteses sobre as quais repousam uma teoria física não pode jamais ser inútil, somente numa visão relativa e provisória. Este é o momento no texto de Duhem em que as suas idéias lembram as de Poincaré, dizendo que deduções que parecem inúteis se revelarão úteis a partir do momento em que houver instrumentos mais adequados para a apreciação da experiência.

> "Une déduction, aujourd´hui inutile, deviendrait utile le jour où, l´on accroîtrait notablement la sensibilité des instrument qui servent à apprecier les conditions de l´expérience". (DUHEM, 1906, p.102).

Mesmo defendendo brevemente e explicando como obter uma dedução matemática útil à Física, Duhem diz que matemáticos modernos que não concordam com o seu pensamento sobre como fazer de suas deduções, deduções úteis, fazem com que o que foi evocado como uma solução passe a ser um engodo. Isto quer dizer que se não houver uma restrição às condições iniciais do problema, um certo conjunto de fatos teóricos produzirá um outro conjunto de fatos teóricos, que comprometerão a descrição futura da solução do problema. A justificativa está baseada no fato de que se a limitação não for adequada, isto é, se não puder ser restringida convenientemente, o tanto quanto se queira, um segundo conjunto de fatos teóricos próximos poderá divergir do primeiro. Assim, uma dedução matemática desta categoria é, e será sempre, inútil ao físico. Isto é, qualquer que seja a precisão do instrumento de medida para as quais as condições da experiência forem analisadas, haverá a uma dedução com uma infinidade de resultados práticos diferentes, não permitindo relatar previamente o que irá acontecer futuramente com o resultado da experiência. No futuro, os dados iniciais que foram traduzidos por números relativos à condição inicial da experiência, corresponderão a uma dedução com uma infinidade de resultados, como se o experimentador tivesse introduzido no problema inicial uma infinidade de dados práticos diferentes.

Duhem descreve, então, a sua interpretação para a instabilidade em uma dedução matemática. Para ilustrar sua explanação com um exemplo de dedução matemática inútil utiliza as pesquisas de Hadamard envolvendo a mecânica. O problema já é de nosso conhecimento e descrito no capítulo 2 desta tese. Nas palavras de Duhem, a descrição do problema é a seguinte:

> “Uma massa material desliza sobre uma superfície, nenhuma força atua sobre ela, nada impede o seu movimento. Se a superfície sobre a qual ela se movimenta for um plano, ela descreve uma linha reta com velocidade uniforme; se a superfície for uma esfera, ela descreve um arco de um grande círculo, também com velocidade uniforme. Se o ponto material se movimenta sobre uma outra superfície qualquer, ele descreve uma linha que os geômetras denominam **linha geodésica** da superfície considerada. Uma vez definida a posição inicial do ponto material e a direção de sua velocidade inicial a linha geodésica que ele deve descrever é bem determinada”.(DUHEM, 1906, p.102, tradução nossa, grifo nosso).

As características da superfície sobre a qual Hadamard desenvolve sua pesquisa já foram definidas anteriormente. Alegoricamente, Duhem propõe, para a compreensão do leitor, uma figura que se assemelha a uma cabeça de touro, de onde partem as orelhas que tendem ao infinito, a região por trás da cabeça e os chifres, que podem também ser “alongados sem limites”, até o infinito. Eis a descrição alegórica de uma superfície de curvatura negativa para Duhem.

Sobre uma superfície desta natureza as geodésicas podem apresentar características diferentes. Há geodésicas que se fecham sobre elas mesmas. Há outras que nunca se cruzam, porém não tendem ao infinito. Há geodésicas com movimentos circulares que giram sem cessar ao redor de cada “orelha do touro” ou ao redor de cada “chifre”. Há ainda geodésicas mais complicadas cujos traços se alternam segundo determinadas regras matemáticas e que caminham alternadamente entre “os chifres” ou entre “o chifre e uma das orelhas”. Por fim, há ainda as geodésicas que tendem ao infinito quando repousam sobre os “chifres ou sobre as orelhas ilimitadas do touro”.

Apesar desta complexidade e variedade de resultados, se nós conhecemos com exatidão a posição inicial do ponto material sobre esta superfície e a direção da velocidade inicial, a linha geodésica que este ponto seguirá em seu movimento será determinada sem ambigüidade, da mesma forma que saberemos de maneira exata se o ponto percorrerá uma trajetória finita ou se tenderá ao infinito.

Mas se as condições iniciais fossem dadas experimentalmente, isto é, se houvesse uma alteração pequena, “imperceptível” da posição inicial em um disco fechado ***d***, a direção da velocidade inicial não seria mais uma reta definida sem ambigüidade, mas uma reta qualquer dentro do disco. Haveria então, uma infinidade de interpretações dadas pelos geômetras em relação ao destino final do ponto material, uma vez que para ele a pequena alteração sofrida por tal ponto passaria ser interpretada como uma infinidade de dados iniciais diferentes. Isto não interessa ao experimentador, pois nada poderia ser concluído sobre o seu experimento para um tempo ***t*** muito grande. A direção da velocidade não poderia ser definida sem ambigüidade. Qualquer uma das retas no interior do disco poderia assumir tal direção. Para os geômetras, tais dados iniciais correspondem a uma infinidade de dados iniciais diferentes. Um destes dados pode, inclusive, ser uma das linhas geodésicas que tendem ao infinito ou uma das linhas geodésicas que giram sem cessar ao redor de uma região da superfície (como a região das “orelhas do touro”, por exemplo). Haveria então, inúmeras interpretações matemáticas para um único fato prático. Notemos que apesar de haver uma região previamente escolhida que limita o fato teórico experimental, a sua interpretação futura passa a ser desconhecida.

A primeira idéia é restringir ainda mais a região ***d*** do disco de onde partirá o ponto material, isto é, aumentar a precisão de determinação dos dados experimentais, limitando ainda mais a direção da velocidade inicial. Mesmo assim, haverá a impossibilidade de prever o caminho descrito pelo ponto material. Mesmo que uma condição inicial corresponda a uma linha geodésica que não tende ao infinito, há em sua vizinhança uma quantidade não enumerável de pontos que correspondem aos mesmos fatos teóricos dos quais algum descreverá uma geodésica que se afastará indefinidamente do seu ponto de partida. O único efeito que poderá se obter com a restrição aplicada ao disco ***d*** é fazer com que as geodésicas descrevam um número maior de voltas ao redor de um dos "chifres" antes de tender ao infinito.

Sob certas condições definidas pela geometria, a dedução matemática de Hadamard pode determinar a trajetória deste ponto e até mesmo dizer se ela tenderá ou não ao infinito. Porém, esta dedução é dita "inutilizável à física" segundo Pierre Duhem, uma vez que fatos teóricos bem definidos e bem determinados por procedimentos da física experimental, tão precisos o quanto se possa supor, passam a ter comportamentos imprevisíveis, impedindo-nos de responder a questões que envolvem o futuro das trajetórias para um tempo muito grande.

3.3 – A Matemática do mais ou menos, segundo os físicos.

O exemplo que ilustrou uma dedução matemática inútil para a Física, proposta por Duhem, vem de um dos assuntos mais simples das teorias físicas, a mecânica, ou melhor, o ramo menos complexo e com mais embasamentos teóricos existentes. Esta simplicidade do assunto permitiu a Hadamard dar um salto muito além do esperado em sua pesquisa. Ao associar a geometria diferencial, a topologia e os conceitos primeiros do cálculo diferencial ajudou a fundamentar um novo conceito na matemática moderna: o de sistemas dinâmicos sensíveis às condições iniciais. Foi um resultado muito forte e poderoso para a matemática, mas também serviu de subsídio à filosofia da física, como para exemplificar o conceito polêmico de deduções que não se aplicam às ciências experimentais.

Na última década do século XIX, o número de estudos relacionados aos sistemas hipersensíveis às condições iniciais, assim como os resultados publicados, eram relativamente pequenos. Mas o resultado obtido por Hadamard fez com que Duhem escrevesse que os problemas com esta característica, a de serem hipersensíveis às condições iniciais, deveriam ser numerosos, e que o progresso das ciências matemáticas provariam sua intuição. De toda forma, tais problemas, mesmo bem definidos pelos geômetras, perdem todo o sentido para os físicos. O que não foi assimilado é que *afirmar a imprevisibilidade futura de um sistema dinâmico é também dar uma solução para o problema proposto*.

> "(...) matemáticos e físicos comportam-se muitas vezes como irmãos inimigos e gostam de exagerar as suas diferenças. (...) **A física se exprime em linguagem matemática** (...) e um físico teórico é sempre, de certa maneira, um matemático. A física, de fato, é ao mesmo tempo intimamente ligada à matemática e profundamente diferente dela. (...) **O objeto da física é explicar o mundo que nos cerca**. Normalmente, o físico não tenta compreender tudo de uma só vez, mas se limita a um pedaço de realidade de cada vez. Procede por

> idealização deste pedaço de realidade e tenta descrevê-lo por meio de uma teoria matemática. Portanto para começar, **ele delimita um conjunto de fenômenos e define operacionalmente certos conceitos físicos**. Estando o fato físico assim delimitado ele deve escolher uma teoria matemática e estabelecer uma correspondência entre os objetos desta teoria e os conceitos físicos. Esta correspondência constitui uma teoria física. Sem dúvida, a teoria física é tanto melhor quanto mais precisa for a correspondência entre as grandezas físicas e grandezas matemáticas, e quanto mais vasto for o conjunto dos fenômenos descritos. No entanto, a dificuldade dos problemas matemática a resolver, desempenha também seu papel e os físicos geralmente se contentarão com uma teoria simplificada, se sua precisão for suficiente para uma dada aplicação. (...) O estudo da física põe-nos[17] diante do fato paradoxal de que temos menos controle sobre um objeto físico que podemos pegar com a mão do que sobre um objeto matemático sem existência material". (RUELLE, 1995, p.19-20).

O segundo exemplo de dedução inutilizável apresentado por Duhem exemplifica e esclarece a citação de Ruelle assim como justifica o que o que Duhem chama de "a matemática do mais ou menos".

Duhem define o problema mais famoso da mecânica celeste tratado por Henri Poincaré, o problema dos três corpos. Num tom crítico, afirma que para estudar a estabilidade deste sistema, os geômetras substituem o sol, os planetas e satélites por pontos materiais, mas o fato teórico em si possui uma infinidade de variáveis atuantes sobre os corpos que não estão presentes quando o sistema real é reduzido a pontos. Sabemos que, se conhecemos para um determinado tempo t_0, a posição e a velocidade de cada um dos astros com precisão matemática, pode-se afirmar que cada astro descreverá uma trajetória definida a partir deste instante. A determinação efetiva desta trajetória pode contrariar os cálculos matemáticos dos geômetras quando um terceiro corpo interage. Os matemáticos passam a questionar se as atuais posições e se as atuais velocidades dos astros que compõem o sistema solar permitirão continuar seus percursos ao redor do sol sem chocar-se ou talvez sem perder-se na imensidão. Esta é a questão da estabilidade do sistema solar que

[17] Ruelle escreve este trecho dirigindo-se aos matemáticos, como ele mesmo.

Poincaré mostrou ser de extrema dificuldade e que Laplace pensou ter resolvido. Este problema coloca um confronto entre a óptica do matemático e a de um astrônomo, pois os resultados encontrados por Poincaré para o problema da estabilidade do sistema solar são análogos à situação tratada por Hadamard, portanto um outro exemplo de dedução inutilizável à física.

Tantas críticas e tantos exemplos para reforçar o conceito de dedução inutilizável fazem com que queiramos saber o que é o conceito oposto. Qual dedução matemática é útil à física?

Uma dedução matemática, como a dedução de Hadamard, passa a não ser útil à física quando afirma que uma proposição absolutamente verdadeira tem por conseqüência a imprevisibilidade.

Para que a dedução matemática seja útil ao físico é necessário provar que a segunda proposição (a conclusão) exata uma vez que a primeira também o é. Mesmo assim não é o suficiente. É preciso determinar a grandeza destes dois mais ou menos. É necessário limitar os possíveis erros que serão supostamente cometidos sobre o resultado final, uma vez que se conhece o grau de precisão dos métodos que serviram de medidas para os fatos teóricos.

É necessário, para Duhem, definir o grau de incerteza que pode ocorrer aos dados quando se quer conhecer o resultado com uma aproximação determinada. Isso tudo deve ocorrer sem que haja uma traição à linguagem do físico, já que esta linguagem é e será sempre vaga e imprecisa como as percepções que o físico quer expressar para que tenha valor a matemática do mais ou menos. Uma matemática que, mesmo sendo do mais ou menos, não se engana e tão pouco é uma forma grosseira de se fazer matemática. Ela é mais completa e refinada. Resolve problemas difíceis e com ferramentas complexas como a álgebra e a topologia. Mas, o matemático não deve se enganar ao trabalhar com ela ao crer que "resolveu" uma questão pertencente à física.

Cremos com a análise do texto de Duhem que uma experiência em física não é simplesmente a observação de um fenômeno, mas a interpretação deste fenômeno pela própria física que utilizará ferramentas matemáticas segundo as necessidades e a realidade de seus fatos teóricos.

O objetivo de toda teoria física é a representação das leis experimentais. Palavras como verdade e certeza expressam a concordância entre as conclusões da teoria e as regras estabelecidas pelos observadores. A análise criteriosa da natureza dos dados enunciados pelos experimentadores, assim como o domínio dos fatos que podem tornar o resultado de uma experiência não utilizável à física são pontos indispensáveis para a sustentação de uma teoria física, pois o resultado de uma experiência em física é um julgamento abstrato e simbólico.

Entre os fenômenos realmente constatados ao longo de uma experiência formulada por um físico e o resultado de um experimento, se intercala uma elaboração intelectual complexa que contém um rol extenso de fatos concretos que se manifesta segundo os meios sobre o qual trabalha o experimentador.

3.4 – Fechando conceitos e descrevendo o futuro do passado

Em uma teoria física a dedução matemática assume um papel de intermediária, não podendo, muitas vezes, introduzir em seus cálculos os fatos sob a forma concreta de onde eles são observados e nem tirar conseqüências sob a forma concreta em que eles são constatados. O fato teórico, visto como um conjunto de dados matemáticos, corresponde a qualquer coisa precisa e determinada. Já o fato prático vem acompanhado da expressão “mais ou menos”, pois este fato é representado pelo resultado de uma medida e de uma infinidade de fatos teóricos observáveis diferentes.

O pensamento matemático deduz de um fato teórico um outro fato teórico, mas como as condições de uma experiência podem ser somente traduzidas por um conjunto de fatos teóricos, os cálculos matemáticos, a partir deste conjunto, conduzirão a um outro conjunto de fatos teóricos. Este novo conjunto de fatos pode apresentar resultados variados e não poderia ter seus comportamentos descritos com exatidão no futuro, seja pela restrição sofrida ao conjunto de dados iniciais, seja pela sensibilidade do instrumento de medida ou até mesmo por uma mudança imperceptível em relação às condições iniciais do problema. Devido a esta imprevisibilidade, a dedução matemática torna-se inútil ao físico. De qualquer maneira, o caráter de utilidade ou não utilidade de uma dedução matemática não é absoluto, pois depende dentre outros fatores, do instrumento de medida. Além disso, podemos pensar num refinamento dos dados iniciais, restringindo os fatos teóricos da experiência e redefinindo seus novos parâmetros e variáveis. Esta idéia se baseia no principio da continuidade dos efeitos em relação as suas causas. Assumindo a aplicação de tal principio, uma dedução matemática será sempre suscetível de tornar-se uma dedução matemática útil em um determinado momento. Quem decidirá qual será o momento será aquele que utilizará tal dedução como ferramenta de resolução de um problema encontrado em um experimento.

O trabalho de Hadamard é um exemplo adotado por Duhem como “inútil” ao físico, pois há o caso de que mesmo restringindo-se matematicamente o tanto quanto se queira o fato teórico primeiro, o segundo fato (neste caso as geodésicas descritas pelo ponto material sobre a superfície de curvatura negativa) tem um comportamento imprevisível num futuro longínquo sob certas condições. Devemos precisar também, que na experiência de Hadamard, a existência da imprevisibilidade não é total. Deste modo, quando as condições iniciais correspondem a um conjunto de fatos teóricos que contém uma geodésica que permanece a uma distancia finita temos um futuro completamente incerto; se, ao contrário, o conjunto de fatos teóricos contém uma geodésica que tende ao infinito, restrita a um disco *d* sobre “os chifres infinitos” ou sobre “as orelhas infinitas” da “cabeça do touro”, pode-se afirmar certamente que este ponto material tenderá ao infinito. Eis então um sistema que pertence à classe dos sistemas de entropia positiva onde certas observações são previsíveis uma vez que outras não são.

Segundo Chabert (1992) este resultado fortíssimo de Hadamard foi evocado por Birkhoff em seu artigo de 1912 publicado no *Bulletin de la Societé Mathematique de France* e posteriormente por H. M. Morse em 1921 num artigo do *American Journal of Mathematics* em seus estudos sobre movimentos recorrentes. Os conceitos da Teoria Ergógica foram introduzidos ao resultado de Hadamard mostrando que ao definir uma métrica finita e transformando a superfície dada em uma superfície compacta não há mais geodésicas que tendem ao infinito. Em 1934, G. Hedlund prova esta ergodicidade para o caso de uma superfície compacta de curvatura negativa constante.

Mandelbrojt em suas aulas de matemática e mecânica no Collége de France expunha os resultados de Hadamard antes de tratar do principio ergódico explicando que o único caso conhecido onde o principio ergódico se apresenta de maneira muito típica é no caso do estudo do fluxo geodésico sobre superfícies de curvatura negativa constante. E. Hopf estende os resultados de Hadamard para o caso de uma superfície de curvaturas variáveis, publicando um artigo em 1940 no *Mathematische Annalen*. Por fim, Anosov resolve a questão da ergodicidade para o caso de variáveis compactas em superfícies de curvatura negativa não constante em dimensões maiores do que dois em 1962.

O estudo do movimento sobre as superfícies de curvatura negativa constitui um verdadeiro exemplo pragmático de sistemas dinâmicos sensíveis às condições iniciais e o modelo teórico de Hadamard expressa bem este conceito; que apesar de possuir equações bem definidas não nos permite saber o que acontecerá futuramente.

Capítulo 4

Considerações Finais

O sistema considerado por Hadamard é uma espécie de bilhar retorcido, em que a superfície plana da mesa é substituída por uma superfície de curvatura negativa. Hadamard se interessou por um ponto ligado à superfície, que se desloca sobre estas livre de atrito. O bilhar de Hadamard é o que se chama em termos técnicos de *fluxo geodésico sobre uma superfície de curvatura negativa.* Este fluxo geodésico é relativamente fácil de se analisar matematicamente, permitindo a Hadamard provar o teorema sobre a dependência hipersensível em relação às condições iniciais das geodésicas de superfícies de curvatura negativa. O teorema correspondente para um bilhar com obstáculos convexos é muito mais difícil, e só foi demonstrado na década de setenta do século passado.

O caso mais fácil para se obter um resultado semelhante ao resultado de Hadamard, é estudar o caso das superfícies compactas de curvatura *constante* negativa. Tais superfícies têm apenas, em relação à de Hadamard, a desvantagem de não poderem ser realizadas no espaço euclidiano de três dimensões, uma vez que o conceito de paralelismo entre retas no espaço euclidiano se chocaria com o resultado encontrado. Assim, no plano de Lobachevsky, dois pontos que se movem sobre retas paralelas em geral, se afastam um do outro. O bilhar de curvatura constante negativa é obtido recortando-se um pedaço do plano de Lobachevsky e recolando suas bordas de maneira que se obtém uma superfície fechada lisa. Sobre o bilhar assim obtido, é possível imaginar, sem muita dificuldade que o movimento retilíneo e uniforme apresenta o fenômeno da dependência sensível das condições iniciais. Vemos então, que a superfície sobre a qual Hadamard trabalha proporciona um resultado distinto das superfícies compactas de curvatura constante negativa devido a presença de uma nova categoria de geodésicas que é conseqüência da presença das *"nappes évasées".* O caminho perseguido por Hadamard foi direcionado por sua "intuição" de geômetra, que facilitou a escolha do plano hiperbólico para o desenvolvimento de sua pesquisa, assim como da construção da superfície sobre a qual trabalhou. Esta escolha está relacionada aos conceitos de paralelismo, de ângulos, de retas e assíntotas no plano hiperbólico.

O resultado de Hadamard nos permite inferir que outros resultados semelhantes podem ser encontrados em outros problemas da Mecânica, nem que seja pela sua complexidade. Abre-se então, um espaço para a discussão da imprevisibilidade, para um tempo longo, dos sistemas dinâmicos. De acordo com Rosa (1995), a questão do determinismo *versus* indeterminismo na ciência ganhou espaço, nos últimos anos, estimulada por problemas como o proposto por Hadamard. Na verdade, problemas interdisciplinares e a difusão do uso de computadores abrem um novo campo experimental para a matemática, e a questão deixa de ser prioritariamente filosófica ou epistemológica. Mesmo havendo uma forma de determinar, por uma relação matemática, o comportamento futuro de um sistema dinâmico a partir do conhecimento de seu estado inicial, na prática, jamais conhecemos este último com precisão, o que limita a nossa capacidade de previsão no caso de haver sensibilidade às condições iniciais. Se, com uma pequena variação no estado inicial, houver um pequeno desvio na trajetória, mesmo a longo prazo, pode-se fazer predições. Mas o mesmo não ocorre quando uma mínima incerteza inicial leva a um desvio enorme e crescente com o passar do tempo. No artigo de Hadamard, vemos que a trajetória resultante do desvio inicial assume uma forma totalmente diferente da original, logo o desconhecimento do estado inicial implica na impossibilidade de fazer predições. A modificação da condição inicial, no problema de Hadamard, substituindo a posição e a velocidade, por uma posição e velocidade imaginárias, "ligeiramente" diferentes, e que de início estavam muito próximas, fará com que as trajetórias comecem a divergir cada vez mais rapidamente, até que, logo, elas não terão mais nada a ver uma com a outra. Este é o principal conceito de sensibilidade às condições iniciais contido no artigo. O movimento sobre a superfície de Hadamard é determinado sem ambigüidade pela condição inicial, e, no entanto, estamos fundamentalmente limitados na predição de sua trajetória. Temos ao mesmo tempo determinismo e imprevisibilidade. Encontramos em outros ramos da física a mesma dualidade.

“A mecânica foi a grande teoria determinista, prevendo com precisão muito boa as órbitas dos planetas e a trajetória de um projétil. A partir da termodinâmica desenvolveu-se a mecânica estatística, que trata um gás como um conjunto composto de grande número de moléculas em movimento, colidindo umas com as outras. A expressão, caos molecular, foi introduzida no século passado neste sentido. Sem ter todas as trajetórias e as velocidades das moléculas, podemos atribuir uma distribuição de probabilidade a elas e calcular médias, relacionando grandezas coletivas do sistema termodinâmico como temperatura e pressão, interpretadas em termos de grandezas microscópicas. Fazendo assim uso da probabilidade, se obtém boas predições sobre o sistema dinâmico microscópico. No século XX, no estudo da física microscópica, a mecânica quântica foi levada a introduzir a probabilidade na interpretação das soluções da equação de Schroedinger, que substituiu a de Newton. O preço a pagar foi uma teoria pouco intuitiva. Não se deve confundir a incerteza quântica com o erro nas medições experimentais, sempre considerado na física, (...). Um só elétron em torno de um núcleo atômico não possui uma trajetória determinada como estabelecia a mecânica newtoniana. Há uma distribuição de probabilidade para encontra-lo em uma posição e as relações de Heisenberg não autorizam determinar, com precisão, ao mesmo tempo, a velocidade e a posição.

Entretanto, a mecânica quântica apesar da interpretação estatística calcula grandezas, como a energia do elétron no átomo, com boa precisão. A novidade das duas últimas duas décadas foi que o uso dos computadores permite resolver equações deterministas newtonianas não lineares, produzindo soluções estranhas extremamente sensíveis à condição inicial. Ou seja, ao contrário da mecânica quântica, que é indeterminista, mas faz predições, **parte-se agora de uma teoria determinista e chega-se a uma situação de imprevisibilidade**. Daí o nome de ***caos determinista***. Isto já fora antecipado analiticamente por Henri Poincaré, no inicio do século no problema de três corpos interagindo gravitacionalmente, como o Sol, a Terra e a Lua. Foi redescoberto por Edward Lorenz na meteorologia com o uso de computadores”. (Rosa, 1995, pp.7-9, grifo nosso).

Desta forma, num modelo matemático podemos dizer que ***determinismo*** e ***imprevisibilidade*** podem coexistir. Na Matemática contemporânea, podemos identificar três linhas diferentes de pesquisas que foram desenvolvidas a partir do artigo de Hadamard:

(1) a ***geometria***, admitindo as superfícies de curvatura negativa como um paradigma da geometria hiperbólica e que a encontramos como base de teorias múltiplas e de múltiplas aplicações, indo até a concepção de computadores paralelos,

(2) a ***teoria do controle***, que para a navegação interestrelar fez-se necessário desenvolver um novo conceito para as equações de evolução, uma vez que a falta de previsão com precisão das trajetórias, torna-se necessário que estas trajetórias sejam ratificadas constantemente e

(3) *a* **teoria das equações diferenciais** que estudando o comportamento de trajetórias para um tempo t grande, gerou conceitos importantes como o de atratores estranhos. O caos-determinismo é um dos termos técnicos que aos poucos vêm sendo compreendido pelas pessoas e repassado à linguagem corrente fazendo com que muitos passem diferenciar corretamente imprevisibilidade de indeterminismo.

O nosso conhecimento da condição inicial está sempre afetado por uma certa imprecisão, nos impossibilitando de distinguir a condição real de inúmeras condições imaginárias próximas à ela. Conseqüentemente, não sabemos qual das predições possível é a correta. Hadamard mostra que além do ponto material poder percorrer como trajetória uma geodésica fechada (ou uma que lhe seja assintótica), também pode percorrer uma geodésica que tende ao infinito ou até mesmo geodésicas classificadas como de terceira categoria e cuja principal característica é ser o limite das geodésicas fechadas ou das geodésicas assintóticas. A natureza das propriedades reside em estudar precisamente as linhas que se encontram ao redor do ponto material. Dado um ponto material fixo, são estudadas as propriedades das geodésicas para direções próximas umas das outras. É necessário conhecer a distribuição das linhas geodésicas na vizinhança do ponto. O que Hadamard chama de estudo da *ordem circular*. A partir desta análise, como dissemos no capítulo 2, é que Hadamard conclui sensibilidade às condições iniciais.

A importância dos resultados de Hadamard para a matemática está no fato de que, dizer que um fenômeno é imprevisível a longo tempo, é uma forma de solucionar o problema. A questão maior é saber a quem interessa esta resposta.

Para a matemática, segundo Roque (2001) está em jogo, o **ponto de vista qualitativo** fundado por Poincaré, a questão relativa à determinação: determinação do problema e determinação da solução. O ponto de vista qualitativo "inventa" um novo sentido para a palavra *solução* quando se refere às equações diferenciais. A análise qualitativa parte de um retorno às condições iniciais do problema para instaurar, a partir daí, novas condições de determinabilidade para as soluções. As condições do problema fornecem as condições de resolubilidade que são, por sua vez, distintas, para cada maneira diferente de se conceber a palavra solução. Os casos de solução já estão presentes no problema, em potência; resolver é atualizar tais potencialidades. De modo fiel à natureza do problema, na sua qualidade de ser determinável. Uma teoria é tanto mais acabada, quanto mais ela permite antecipar resultados desconhecidos. Desde as justificativas da abordagem qualitativa, faz-se presente o seu talento para entrever seus próprios limites e as condições de possibilidades de seus próprios resultados, sem necessidade do cálculo efetivo das soluções. A descrição qualitativa é considerada uma solução bem determinada qualitativamente e este é o fundamento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Para os físicos, um resultado como o obtido por Hadamard, é "para sempre inutilizável", como analisa Pierre Duhem, porque a tal pequena incerteza, necessariamente presente na condição inicial, gerando uma grande incerteza sobre a trajetória calculada para um tempo suficientemente grande, torna sem valor a predição. O sistema dinâmico apresentado por Hadamard é determinista, pois possui um conjunto de equações que o modela (as equações das geodésicas), porém não é previsível, não servindo ao físico por isso.

Todas estas questões de caráter filosófico ou epistemológico envolvendo o determinismo e a imprevisibilidade já haviam sido preconizadas por Poincaré. Ele sabia o quanto as probabilidades são úteis no mundo da física. Sabia que o acaso faz parte da vida cotidiana. No entanto, o fato novo é descobrir, a origem da imprevisibilidade. Ele observou vários mecanismos pelos quais a descrição determinista clássica do mundo poderia dar lugar a uma idealização probabilista, mesmo antes da existência do conceito da incerteza quântica. Um destes mecanismos é a própria dependência hipersensível das condições iniciais em sistemas dinâmicos. O que nos impressiona até hoje é o caráter moderno das idéias de Poincaré, e a proximidade entre o que podemos chamar de "intuição" e os resultados dos estudos modernos da matemática e da física.

Numa citação de David Ruelle, no livro "Acaso e caos", encontramos uma resposta a uma questão natural posta ao estudar o resultado obtido por Hadamard: "Qual a importância e as conseqüências deste resultado para a teoria dos sistemas dinâmicos, nos dias de hoje?". Ruelle (1995) afirma que o estudo recente do que agora chamamos de caos não se beneficiou da compreensão física penetrante adquirida por Hadamard, Duhem ou Poincaré. As matemáticas de Poincaré (ou aquilo que elas se tornaram) certamente desempenharam o seu papel, mas suas idéias tiveram que ser redescobertas independentemente. Hadamard, Duhem e Poincaré vieram muito cedo no tempo e trouxeram "intuições" muito além do entendimento da ciência vigente na época. Faltavam-lhes ferramentas como *a teoria da medida*, *o teorema ergódigo* ou *os computadores* que nos auxiliam tratar numericamente um problema. Suas brilhantes idéias intuitivas não puderam ser expressas em uma linguagem precisa atual, mas a *Analysis Situs* desempenhou um papel essencial e propedêutico estudo do caos determinismo. Quando um cientista de hoje lê as obras de Hadamard ou de Poincaré interpreta as idéias ali contidas baseados num sistema de conceitos familiares esquecendo que tais conceitos não estavam à disposição deles na época. Daí a grandeza dos resultados, das pesquisas das personalidades do mundo da matemáticas e do mundo da física, cujas idéias e resultados passam a fazer parte de nossas vidas e que deixaram um legado rico sobre o qual matemáticos modernos passam longo tempo se dedicando a desvendar, e conseguindo, encontrar soluções que, na maioria das vezes, *"surgem como que conduzidas pelo vento"*, depois de muito trabalho árduo...

Referências Bibliográficas

A A BRENNER, "La nature des hypothèses physiques selon Poincaré, à la lumière de la controverse avec Duhem", in **Henri Poincaré : Science et Philosophie**, in: Nancy, 1994 (Berlin, 1996) pp. 389-396; 584.

BELL, E. T., **"Men of mathematics"** (2 vols), Harmondsworth, Penguin Books, 1965.

BELL, E. T., **"The developpement of mathematics"**, New York, McGraw Hill, 1945.

BERCOVICH, C., SMILANSKY, U., FARMELO, G. P., "Demonstration of Classical Chaotic Scattering", **Eur. J. Phys**., t.12 p. 122-128, 1991.

BENDIXON, I. "Sur les courbes définies par des équations différentielles", in **Acta Mathematica**, n. 24, pp 1-88, 1901.

BIRKOFF, G. D. "Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques", **Bulletin de la Société Mathématique de france,** n. 40, pp.305-323. in: Birkhoff, 1950, t.1, pp.654-672.

BIRKOFF, G. D. "Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques", **Memoriae Pont. Acad.Sci. Novi Lyncaei,** 1(3), pp.65-216. In: Birkhoff, 1950, t.2, pp.530-661.

BIRKOFF, G. D. "The mathematical nature of physical theories", **American scientist,** n.31, pp. 281-310. In: Birkhoff, 1950, t.2, pp.890-919.

BOYER, C. B., **"História da Matemática"**, 10ª edição, São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda, 1993.

BOURBAKI, N. **"Éléments d´histoire des mathématiques",** Paris, Herman, 1960.

CARTWRIGHT, M. L., **“Jacques Hadamard, Biographical memoirs of fellows of the Royal society of London”**, n.2, 1965.

CARTWRIGHT, M. L., **“Jacques Hadamard, Biographical memoirs of fellows of the Royal society of London”**, n.11, pp.65-98, 1965.

CARTWRIGHT, M. L., **“Jacques Hadamard, Biographical memoirs of fellows of the Royal society of London”**, n.40, pp.722-748, 1965.

CHABERT, J-L., ”Hadamard et les géodésiques des surfaces à courbure négative”, in: **Dahan Dalmedico et al.**, pp.306-330, 1992.

CHABERT, J-L., DALMEDICO, A.D., “Les idées nouvelles de Poincaré”, in: **Dahan Dalmedico et al.**, pp.274-305, 1992.

CHABERT, J-L., DALMEDICO, A.D, CHEMLA, K. , **“Chaos et déterminisme”**, Points Sciences, paris, Seuil, 1992.

DEVANEY, R. L., **“An introduction to chaotic Dynamical Systems”**, Menlo Park, Benjamin-Cummings, 1986.

DIACU, F. “The solution of the n-body problem”, **The mathematical intelligencer**, vol. 18 (3), pp.66-70, 1996.

DO CARMO, M., **“Differential geometry of curves and surfaces”**, New York, prentice-Hall, 1976.

DUHEM, P. **“La théorie physique. Son objet et sa structure.”**, Paris, Chevalier et rivière, 1906.

EISENHART, L. P., **“A treatise on the differential geometry of curves and surfaces”**, Dover Publications, New York, 1960.

HADAMARD, J., “Sur certaines proprétés des trajectoires in dynamique”, **Journal de Mathématiques pures et appliquées,** t.3, pp 331-387, 1897.

HADAMARD, J., “Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodésiques”, **Journal de Mathématiques pures et appliquées,** t.4, pp. 27-73, 1898.

HADAMARD, J., “Sur l´itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles”, **Boulletin e la Société Mathématique de france**, 29, pp. 224-228, 1901.

HADAMARD, J., “Le calcul fonctionnel”, **L´enseignement mathématique,** t.4, pp. 1-18, 1912a.

HADAMARD, J., “L´oeuvre mathématique de Henri Poincaré”, **Acta Mathematica,** 38, pp 203-287, 1912b.

HADAMARD, J., “The later scientific work of Henri Poincaré”, **The Rice Institut Pamphlet,** 20, pp 1-118, 1933.

HADAMARD, J., “**Oeuvres de Jacques Hadamard**”, Paris, Éditions du CNRS, 1968.

HADAMARD, J. MANDELBROJT, S., **“La série de Taylor et son prolongement analytique”,** Paris, Gauthiers-Villars, 1926.

HADAMARD, J., “L´ouevre de Duhem dans son aspect mathématique”, **Mémoires de la Société de Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux,** vol1, pp. 635-665, 1927.

HADAMARD, J., “Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodésiques”, **Oeuvres de Jacques Hadamard,** vol. 2**, pp. 729-775,** Paris, CNRS, 1968.

HILBERT, H. E COHN-VOSSEN, S. **“ Geometry and Imagination”**, Chelsea Publishing Company, Inc. , New York, 1962.

KAHANE, J-P., “Jacques Hadamard”, **The mathematical Intelligencer**, 13, pp. 1-21,, 1991.

KAHANE, J-P., “ Hadamard et la stabilité du systéme solaire”, **Travaux de mathématiques XI**, pp.33-48, Luxembourg, 1998.

KOEHLER,C., **“Origens históricas e conceituais do determinismo na dinâmica clássica”**, Tese de doutorado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 1995.

LAGRANGE, J. **“Mécanique analytique”**, Paris, Jacques Gabay, (1788)1989.

LAGRANGE, J. “Essay sur le probléme de trois corps”, in: **Lagrange, 1867-1892,** t.6, pp. 335-399.

LEIBNIZ, G. W., **“Naissance du calcul différentiel”**, Paris, Vrin, 1989.

LORENZ, E. N. “Deterministic non-periodic flow”, **Journal of Atmosferic Science,** n.20, pp. 130-141, 1963.

MANDELBROJT, B., **“The fractal geometry of nature”**, San Francisco, W. H. Freeman, 1982.

MAZ´YA, V. E SHAPOSHINIKOVA, T. **“Hadamard: a universal mathematician”**, London, 1998.

MLODINOW, L. **“ A janela de Euclides. A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço”**, Geração editorial, São Paulo, (Tradução de *Euclids Window- The Story of geometry fromparallel lines to hyperspace* por Enézio E. de Almeida), 2004.

MOREIRA, I. **“Integrabilidade e caos em sistemas físicos com poucos graus de liberdade”,** Tese de doutorado, IF-UFRJ, Rio de janeiro, 1996.

MOREIRA, I. “Os primórdios do caos deterministico”, **Revista Ciência Hoje**, vol 14, n.80, pp.10-16, 1992.

MOSER, J., “Is the solar system stable?”, **The Mathematical Intelligencer**, vol. 1, n.2, pp. 65-71, 1978.

NABONNAND, P. “ Contribution à l´histoire de la théorie des géodésiques au XIXe siècle”, **Révue d´histoire des mathématiques**, Société Mathématique de France,v. 1, pp. 159-200, 1995.

PALIS, J., DE MELO, W., **“Introdução aos sistemas dinâmicos”,** IMPA, CNPq, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1977.

POINCARÉ, H., “Sur certaines solutions particullières du probleme de trois corps”, **Bulletin Astronomique, 1,** pp.63-74, 1883.

POINCARÉ, H., “ Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique”, **Acta mathematica, 13,** pp.1-270, 1890.

POINCARÉ, H., **“Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste”,** Paris, Gauthier-Villars, 1892.

POINCARÉ, H., “Analysis Situs”, **Journal de L´école Polythechnique,** t.1, pp.1-121, 1895.

POINCARÉ, H., **“**Sur les rapports entre la physique experimentale et la physique mathématique**”, in: Rapports présentées au Congrés international de physique de 1900,** pp. 1-29, 1900.

POINCARÉ, H., **“Science et méthode”,** Paris, Flammarion, 1908.

POINCARÉ, H., **“La science et l´hypothèse”,** Paris, Flammarion, 1918.

POINCARÉ, H., **“O valor da ciência”,** Rio de Janeiro, Contraponto, 1995.

PRIGOGINE, I. **“O fim das certezas: Tempo, Caos e as leis da natureza”**, Editora Unesp, 1996.

RÍO, A. **“Una introdución à la crvatura”**, texto disponivel na web em www.google.com a partir da busca: “curvatura negativa”. Acesso em 02 de março de 2004.

ROSA, L. P., “Determinismo, Indeterminismo, acaso e caos”, in: **Caos, acaso e determinismo**, Rio de Janeiro, Editora UFRJ, Introdução, 1995.

ROSA, L. P., “Notas de aula da disciplina Teoria do conhecimento Científico II”, COPPE-UFRJ, 1º trimestre, 2002.

ROSSAT-MIGNOT, S. E ROSSAT-MIGNOT, A., “Jacques Hadamard”, **Les cahiers rationalistes**, n. 269, pp. 306-358, 1969.

ROQUE, T., **“Ensaio sobe a gênese das idéias matemáticas: exemplos da teoria dos sistemas dinâmicos”**, Tese de doutorado, COPPE-UFRJ, 2001.

RUELLE, D. **“Acaso e caos”**, São Paulo, Editora Unesp, (Tradução de *Hasard et Caos*, Paris, Odile Jacob, 1991, por Roberto Leal Ferreira), 1993.

STEWART, I., **“Oh! Catastrophe!”**, Paris, Berlin, 1982.

STEWART, I., **“Les Fractals”**, Paris, Berlin, 1982.

STEWART, I., “The nature of stability”, **Speculations in science and technology,** vol.10, pp. 310-324, 1988.

STEWART, I., **“Does God play dice? The new mathematics of caos”**, Penguin Books, England, 1989.

TENENBLAT, K., **“Introdução à geometria diferencial”**, Editora Universidade de Brasília, 1988.

APÊNDICE 1

Construindo e compreendendo as principais definições, conceitos e propriedades contidos no artigo de Hadamard.

Neste apêndice os conceitos evocados serão explicados e o leitor terá a possibilidade de tornar este vocabulário acessível à compreensão desta dissertação e de uma futura leitura do artigo de Hadamard e ou de muitos outros envolvendo conceitos da geometria.

O artigo que nos propusemos a analisar não trata de um conteúdo simples e requer o conhecimento de definições precisas, de propriedades das superfícies e da definição formal de geodésicas de uma superfície.

1.1- Superfície e curvatura

Assumiremos um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) em R^3 e uma função $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ de duas variáveis u,v que variam em um aberto U contido em R^2. Para cada (u,v) de U, a função $X(u,v)$ determina um ponto de R^3. Denotamos por S o subconjunto de R^3 definido por $X(u,v)$ e denominamos este subconjunto de ***superfície***. Com o objetivo de utilizar as técnicas do Cálculo Diferencial ao estudo das superfícies, assumiremos a diferenciabilidade da função $X(u,v)$.

Uma superfície parametrizada regular, ou simplesmente uma *superfície* é uma função $X : U \subset R^2 \to R^3$, onde U é um aberto de R^2 tal que X é infinitamente diferenciável (têm derivadas parciais contínuas em todas as ordens em relação as funções x, y e z) e para todo $q = (u,v) \in U$ a diferencial de X em q é injetora. Esta condição garante a existência de um plano tangente em cada ponto da superfície. As variáveis u,v são parâmetros da superfície. O subconjunto S de R^3 obtido pela imagem da função X, é denominada de *gráfico* ou *traço* de X.

Uma *superfície* é dita *parametrizada regular* quando:

i) a diferencial de X em q é injetora;

ii) a matriz Jacobiano $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_{0,}v_0) \frac{\partial y}{\partial v}(u_{0,}v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}$ tem posto 2 (quando tal fato não ocorre, dizemos que (u_0,v_0) é um ponto singular de X, e se o posto da matriz é 1 então X representa uma curva)[5]

iii) os vetores X_u e X_v em (u_0,v_0) são linearmente independentes

iv) o produto vetorial entre X_u e X_v em (u_0,v_0) é diferente de zero.

Todas as afirmações acima são equivalentes.

Sendo a função X uma superfície parametrizada , então, ao fixar um (u_0,v_0) de U, as curvas $u \to X(u,v_0)$ e $v \to X(u_0,v)$ são chamadas curvas coordenadas de X em (u_0,v_0) e os vetores X_u e X_v em (u_0,v_0) são vetores tangentes as curvas coordenadas. Se f(u,v) é uma função real diferenciável onde U é um aberto de R^2, então a função $X(u,v) = (u,v, f(u,v))$ é uma *superfície parametrizada regular* que determina o traço de f.

Duas superfícies parametrizadas X e Y podem ter o mesmo gráfico. Isto acontece quando existe uma função $h: \overline{U} \subset R^2 \to U$ diferenciável, cujo determinante da matriz Jacobiano é diferente de zero , $h(\overline{U}) = U$ e $Y = Xoh$. A função Y é denominada *reparametrização* de X por h e h é dita uma *mudança de parâmetros*, que não precisa ser necessariamente injetiva.

[5] Podem aparecer pontos singulares pela escolha da função X ou pela natureza da superfície, assim sendo, devemos escolher de forma conveniente a função X. Superfícies como a esfera e o elipsóide devem ser considerados como união de gráficos de superfícies parametrizadas regulares.

Sendo X uma superfície e $(u,v) \in U \subset R^2$ uma superfície parametrizada regular, com u e v em função de um parâmetro t, dizemos que $\alpha(t) = X(u(t),v(t))$ é uma curva contida na superfície X. Por definição, dizemos que um *vetor tangente* a uma superfície é um vetor tangente a uma curva da superfície. Desta maneira podemos inferir que os vetores X_u e X_v em (u_0,v_0) são vetores tangentes a superfície X em (u_0,v_0), já que são tangentes as curvas coordenadas da superfície X.

Ao conjunto de todos os vetores tangentes a superfície X em (u_0,v_0), denominamos *plano tangente a superfície*, este plano de R^3, é o plano gerado pela combinação linear dos vetores X_u e X_v em (u_0,v_0). Por definição de superfície parametrizada regular, notamos que X_u e X_v são vetores linearmente independentes e em geral X_u e X_v não são ortogonais nem unitários.

Um vetor de R^3 é denominado *vetor normal a X em q*, se é ortogonal ao plano tangente de *X* em *q*, isto é, se é ortogonal a todos os vetores tangentes a *X* em *q*. Existe uma única direção normal ao plano tangente de *X* em *q* e portanto existem dois vetores normais e unitários a *X* em *q.* Fixaremos o vetor normal unitário a X em q por $N(q) = \dfrac{X_u x X_v}{|X_u x X_v|}(q)$. Se o domínio da superfície X é um aberto $U \subset R^2$ então, variando $(u,v) \in U$ temos uma função diferenciável $N: U \to R^3$ denominada *aplicação normal de Gauss*, cuja imagem está na esfera unitária centrada na origem.

Se $Y = Xoh$ é uma reparametrização da superfície *X*, pela mudança de parâmetros h, então o plano tangente a *Y* em $\overline{q}$ é igual ao plano tangente a *X* em $h(\overline{q})$, entretanto a aplicação normal de Gauss será positiva ou negativa, e este sinal acompanha o sinal do determinante da matriz Jacobiano de *h*.

Quando se considera subvariedades bidimensionais mergulhadas em *R*^{3}, o invariante básico é também a curvatura, mas com interpretação e cálculos um pouco mais complexos quando comparado às curvas planas, pois uma superfície pode curvar-se de modo diferente para distintas direções.

No estudo das curvas planas, a curvatura é interpretada fisicamente como o módulo do vetor aceleração quando a curva considerada possui velocidade unitária, e definida por $k(t) = 1/R$, onde *R* é o raio do círculo osculador.

1.2 - As formas quadráticas de uma superfície

A primeira forma quadrática e a segunda forma quadrática de uma superfície, relacionam respectivamente:

(1) o comprimento de curvas em uma superfície, ângulos entre vetores tangentes e áreas de regiões da superfície;

(2) curvaturas das curvas da superfície.

O estudo destas formas quadráticas permite determinar localmente uma superfície a menos de sua posição no espaço.

1.2.1 - A primeira forma quadrática

Denomina-se primeira forma quadrática de uma superfície a função que transforma um vetor *w* do plano tangente de *X* em *q* em $I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2$.

Considerando uma superfície dada por $X(u, v)$ e um ponto $q = (u_0, v_0)$ então um vetor *w* pertencente ao plano tangente a esta superfície é da forma $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$ com $a, b \in R$ e assim sendo, aplicando sobre *w* a função $I_q(w)$ teremos:

$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle (u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle (u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle (u_0, v_0)$ que passará a ser notado por: $I_q(w) = a^2E(u_0,v_0) + 2abF(u_0,v_0) + b^2G(u_0,v_0)$. E (u ,v), F(u,v) e G(u,v) são funções diferenciáveis denominadas coeficientes da primeira forma quadrática da superfície *X*.

Pela definição de primeira forma quadrática notamos que E(u,v) e G(u,v) são estritamente positivas para todo (u,v) uma vez que X_u e X_v são diferentes de zero. É também estritamente positivo o valor da expressão E (u,v).G(u,v)–F^2(u,v), pois $|X_u|^2|X_v|^2 - \langle X_u, X_v\rangle^2 = |X_u x X_v|^2 \rangle$ 0. Uma mudança de parâmetros, embora modifique os coeficientes da primeira forma quadrática, mantém invariante a primeira forma quadrática.

Uma região D do plano é um subconjunto de R^2 fechado e limitado, cujo interior é homeomorfo a uma bola aberta de R^2 e cujo bordo, homeomorfo a uma circunferência, é formado por um número infinito de traços de curvas regulares. Se *X* é uma superfície regular tal que $X : U \subset R^2 \to R^3$ e $D \subset U$ então *X(D)* é uma *região* da superfície *X*.

A área da região *X(D)* , escrita em função dos coeficientes E, F e G da primeira forma quadrática de *X* é dada por $A(X(D)) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv$ e esta área é invariante por mudança de coordenadas[6].

Superfícies parametrizadas que possuem os mesmos coeficientes da primeira forma quadrática formam uma classe especial de funções que admitem esta propriedade. São superfícies parametrizadas regulares descritas por funções injetivas.

Estas superfícies são chamadas de *superfícies simples* e são obtidas restringindo de maneira conveniente o domínio de *X.* Duas superfícies simples são

[6] Pode-se demonstrar esta afirmação através do Teorema de Mudança de Variáveis para Integrais Duplas. Assim sendo, duas superfícies isométricas possuem suas propriedades preservadas por isometria se estas propriedades dependem apenas da primeira forma quadrática.

chamadas de *isométricas*[7] se os seus coeficientes da primeira forma quadrática coincidem para todo (u,v) de $U \subset R^2$. Se duas superfícies simples têm o mesmo domínio, então pode-se definir uma correspondência biunívoca entre os traços das superfícies e sendo estas superfícies isométricas a função φ que leva uma na outra é chamada de isometria. Por definição de isometria conclui-se que φ preserva distância entre pontos correspondentes nos traços das superfícies.

1.2.2 - A segunda forma quadrática

A segunda forma quadrática de uma superfície está associada ao estudo das curvaturas de curvas da superfície. Este estudo é extremamente importante para a compreensão matemática do artigo de J. Hadamard, uma vez que este versa sobre as superfícies de curvatura negativa.

Denomina-se segunda forma quadrática de uma superfície a função que transforma um vetor *w* do plano tangente de *X* em *q* em $II_q(w) = \left\langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \right\rangle$ onde N é o vetor normal a *X* e $\alpha(t)$ é uma curva diferenciável da superfície tal que q = (u(t_0), v(t_0)) e $\alpha'(t_0) = w$. A segunda forma quadrática da superfície não depende da curva escolhida.

Aplicando a definição a um vetor *w* de *X* e efetuando os cálculos de maneira semelhante aos cálculos desenvolvidos na primeira forma temos que:

$$II_q(w) = \left\langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \right\rangle = a^2 \left\langle X_{uu}, N \right\rangle (u_0, v_0) + 2ab \left\langle X_{uv}, N \right\rangle (u_0, v_0) + b^2 \left\langle X_{vv}, N \right\rangle (u_0, v_0)$$

A última expressão, não depende da curva α, e passaremos a notar a segunda forma quadrática por $II_q(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2abf(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0)$. e(u ,v), f(u,v) e

[7] Uma proposição forte diz que *X* e *X´*são isométricas se e só se a função $f : X(U) \to X'(U)$ definida por $f = X' o X^{-1}$, preserva comprimento de curvas, isto é, para toda curva α de *X* é igual ao comprimento da curva $f o \alpha$.

g(u,v) são funções diferenciáveis denominadas coeficientes da segunda forma quadrática da superfície parametrizada *X*.

Relacionamos a primeira forma quadrática da superfície com a segunda forma quadrática da superfície para definir *função curvatura normal*. É uma função que associa cada vetor não nulo do plano tangente a superfície a $k_n(w) = \dfrac{II_q(w)}{I_q(w)}$.

Sendo *w* um vetor normal unitário do plano tangente de uma superfície *X* e $\alpha(s)$ uma curva regular da superfície parametrizada por comprimento de arco em s_0, então $k_n = k(s_0)\cos\theta$, onde $n(s_0)$ é o vetor normal a α em s_0 e θ é o ângulo formado pelos vetores $n(s_0)$ e $N(u(s_0), v(s_0))$.

Como $II_q(w)$ e $k_n(w)$ não dependem da curva escolhida, pode-se aplicar a relação $k_n = k(s_0)\cos\theta$ para uma curva conveniente. Esta curva é chamada de secção normal da superfície determinada por *w* , que é obtida pela intersecção do traço da superfície para pontos suficientemente próximos de (u_0, v_0), com o plano que passa por $X(u_0, v_0)$, ortogonal a $wXN(u_0, v_0)$. Assim, a secção normal é o traço da curva $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco.

Se $k(s_0) = 0$ então $k_n(w) = II_q(w) = 0$. Se $k(s_0)\rangle 0$ então $n(s_0) = \pm N(u_0, v_0)$ e $k_n(w) = II_q(w) = \pm k(s_0)$, de onde conclui-se que *w* ´w um vetor unitário tangente à superfície em *q*, então $|k_n(w)|$ é igual à *curvatura* da secção normal em *q* determinada por pelo vetor *w*. Notamos que se *w* é um vetor não nulo ao plano tangente a *X* em *q* então $|II_n(w)|$ é igual à curvatura da secção normal de *X* em *q*, determinada por *w*, multiplicada por $|w|^2$.

1.3 As curvaturas principais

As curvaturas principais dão muitas informações sobre a geometria de uma superfície. Elas nos permitem discernir a geometria intrínseca da mesma. De um modo algébrico, expressando as curvaturas principais como autovalores da diferencial da aplicação de Gauss, é possível construir duas funções invariantes da mesma. Assim, surgem duas definições de curvaturas que são essenciais:

i) A *curvatura de Gauss*, definida como o determinante da aplicação de Gauss, que é o equivalente a $K = k_1.k_2$

ii) A *curvatura média*, definida como um múltiplo do plano da diferencial da aplicação de Gauss, que é equivalente a $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$.

Mesmo sendo as curvaturas principais não intrínsecas, Gauss descobriu de maneira surpreendente que uma combinação particular das mesmas é intrínseca. Este resultado é conhecido por Teorema Egregium de Gauss.

TEOREMA:

“A curvatura de Gauss só depende da primeira forma quadrática”

A partir deste teorema, conclui-se que superfícies isométricas possuem a mesma curvatura de Gauss em pontos correspondentes. A recíproca desta propriedade não é sempre verdadeira. Porém no caso particular de superfícies com mesmas curvaturas de Gauss constantes, prova-se que se restringindo convenientemente o domínio das superfícies existe uma isometria entre os traços das superfícies. Este teorema permite verificar que determinadas superfícies não são isométricas.

O fato de a curvatura média não ser intrínseca é imediatamente comprovado bastando considerar uma função sobre o cilindro que, sendo localmente isométrico ao plano tem curvatura média diferente de zero.

Uma vez conhecendo-se os conceitos de curvatura normal e de curvatura média, a classificação de superfícies com curvaturas constantes passa ser natural. São representantes desta classe de superfícies: a esfera, o plano, o cilindro, o cone e a superfície de Sievert.

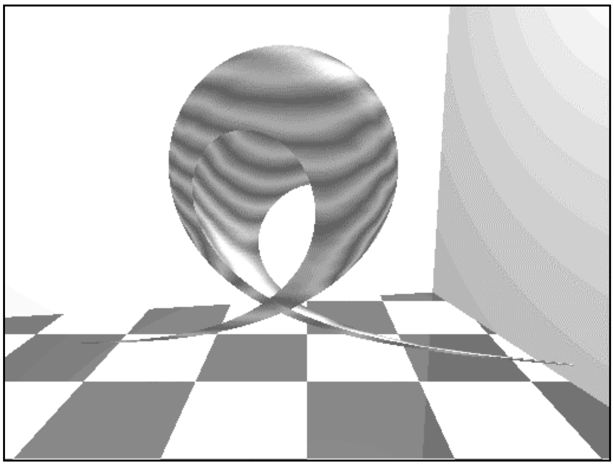


Fig 12. Superfície de Sievert. Sua curvatura é constante e igual a a^2.

1.4 - Classificação de pontos de uma superfície

O sinal da curvatura de Gauss em um ponto *q* permite estudar o comportamento de
uma superfície em pontos próximos de *q*.

Dado uma superfície parametrizada regular *X,* dizemos que um ponto *q* é um ponto:

(1) elíptico se $k(p) > 0$
(2) hiperbólico se $k(q) < 0$
(3) parabólico se $k(q) = 0$ e $H(q) \neq 0$
(4) planar se $k(q) = 0$ e $H(q) = 0$

Desta forma podemos dizer que todos os pontos de uma esfera são elípticos, a origem de um ponto hiperbólico é hiperbólico, todo ponto de um cilindro é parabólico e todo ponto do plano é planar.

1.5 - Classificação de superfícies segundo a curvatura.

Uma interpretação física para a curvatura de Gauss de uma superfície, é a medida escalar da taxa de variação da direção de um vetor normal unitário em torno da superfície. Assim sendo:

- Um plano tem curvatura zero: tem direção normal constante.
- Uma esfera tem curvatura constante: o seu vetor normal unitário varia a uma taxa constante em todos os pontos.

Convencionalmente, diz-se que uma esfera tem curvatura positiva, pois, qualquer que seja o ponto da esfera, ela encontra-se sempre do mesmo lado do plano tangente a esse ponto. Numa sela, isto já não acontece. Qualquer que seja o ponto da sela, a superfície atravessa sempre o plano tangente em torno desse ponto e por isso a curvatura é negativa.

Temos aqui temos um exemplo simples dado por $z = x^2 - y^2$, e a sua curvatura. Podemos mostrar que a curvatura é igual a -4 na origem, mas converge para zero à medida que nos afastamos desse ponto. Existem superfícies de sela mais complicadas como a superfície de equação $z = x^3 - 3xy^2$ que possui curvatura zero na origem. Veja os traços das selas esboçados abaixo.

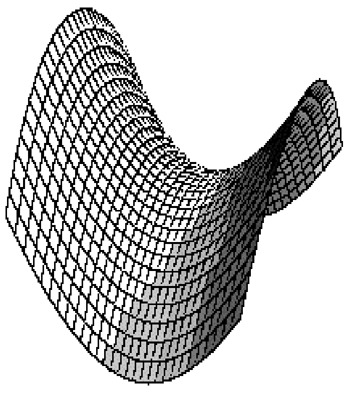


Fig 13. A sela de equação $z=x^2-y^2$.

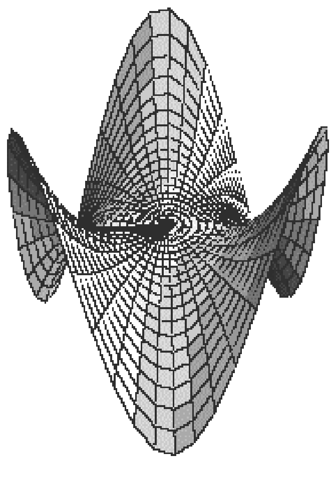


Fig 14. A sela de equação $z=x^3-3xy^2$.

Sabemos então que uma esfera tem curvatura constante positiva e que, numa sela, a curvatura é negativa. Assim, se quisermos curvatura constante negativa, podemos esperar que em torno de qualquer ponto, a superfície se pareça com uma sela. Ao contrário da esfera, uma superfície deste tipo, não se fecha nem é limitada.

1.5.1 Outros exemplos de superfícies de curvatura negativa

Vamos explora outros exemplos superfícies de curvatura negativa para que possamos entender a natureza da superfície sobre a qual Hadamard desenvolve o seu trabalho.

(a) A pseudo-esfera é uma superfície de revolução obtida ao girar a tractriz em torno de sua assíntota.

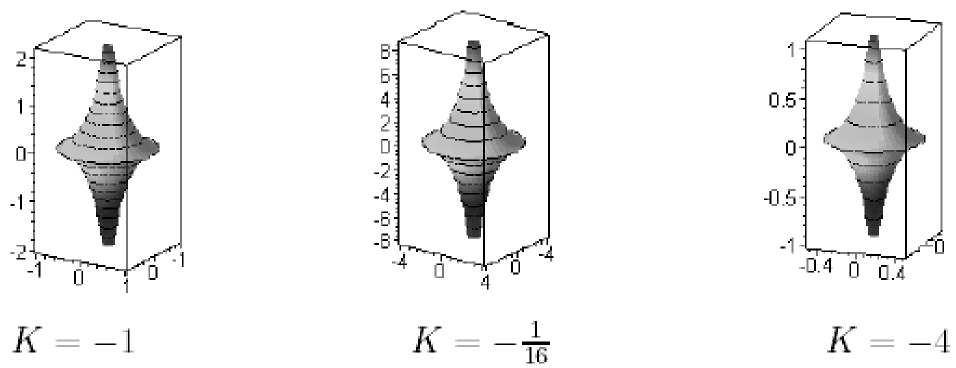


Fig 15. A revolução da tractriz gerando a pseudo-esfera

(b) A superfície de Dini também é uma superfície de curvatura negativa. A curvatura de Gauss é $K = \dfrac{-1}{a^2 + b^2}$ e a curvatura média $H = -\dfrac{\cot g(2v)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, para a parametrização $(u, v) \to (a\cos(v)\operatorname{sen}(v), a\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), a(\cos(v) + \ln(tg(\frac{v}{2}))) + bu)$ em $]0, 4\pi[X]0, 2[$.

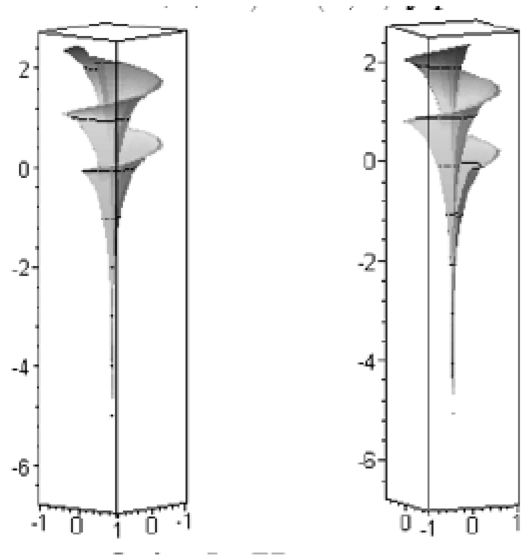


Fig16. A superfície de Dini

(c) Um outro exemplo conhecido é a superfície de Kuen, a curvatura desta superfície é dada por $K = -\dfrac{1}{a^2}$.

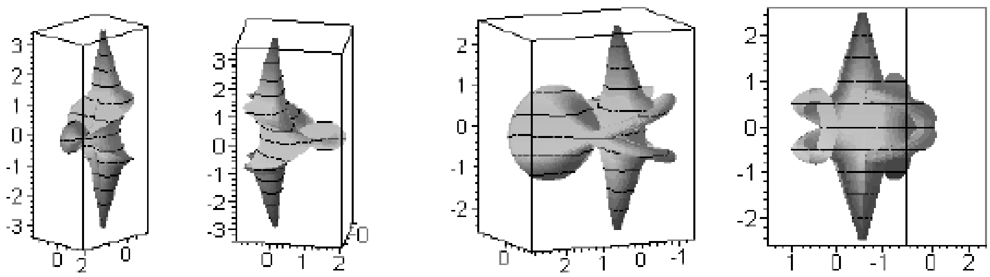


Fig 17. A superfície de Kuen