O PENSAMENTO INICIAL DE LEIBNIZ SOBRE AS SÉRIES E O MÉTODO DAS DIFERENÇAS

Marcelo Mattos Antunes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERALDO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA.

Aprovado por:

____
Prof. Tatiana Marins Roque, D.Sc.

____
Prof. Victor Augusto Giraldo, D.Sc.

____
Prof. Luis Mariano Paes de Carvalho Filho, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2005

ANTUNES, MARCELO MATTOS

O Pensamento Inicial de Leibniz Sobre as Séries e o Método das Diferenças [Rio de Janeiro] 2005

VII, 92 p. 29,7 cm (COOPE/UFRJ, M.Sc., HTCE, 2005)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Séries de Diferenças

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (M.Sc.).

O PENSAMENTO INICIAL DE LEIBNIZ SOBRE AS SÉRIES

E O MÉTODO DAS DIFERENÇAS

Marcelo Mattos Antunes

Março/2005

Orientador: Tatiana Marins Roque

Programa: História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia

Este trabalho é um estudo sobre o pensamento inicial de Leibniz sobre as séries numéricas, onde se pretende mostrar que o método das diferenças foi um dos principais fundamentos para o cálculo infinitesimal e que, além disso, esse assunto pode nos proporcionar uma visão histórica, filosófica e metodológica de sua formação científica e da evolução de uma fase amadora, na qual se encontrava Leibniz no início de suas descobertas matemáticas, para uma posição de destaque no meio científico do século XVII.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

THE INITIAL THOUGHT OF LEIBNIZ ON THE SERIES
AND THE METHOD OF THE DIFFERENCES

Marcelo Mattos Antunes

Março/2005

Advisors: Tatiana Marins Roque

Department: Epistemology and History of Science and Technology

This work is a study on the initial thought of Leibniz on the numeric series, where his intend to show that the method of the differences was one of the main foundations for the infinitesimal calculation and that, besides, that subject can provide us a vision historical, philosophical and methodological of his scientific formation and of the evolution of an amateur phase, in the which was Leibniz in the beginning of their mathematical discoveries, for a prominence position in the scientific way of the century XVII.

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos que reconhecem a importância da filosofia e da história para a pesquisa científica.

Agradecimentos

A Tatiana Marins Roque, que me orientou ativamente na elaboração deste trabalho.

Ao grupo do HCTE, pelas valiosas discussões científicas ocorridas durante o curso de mestrado.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 8

CAPÍTULO I: O PENSAMENTO INICIAL DE LEIBNIZ

1. As séries na Arte Combinatória..14

2. As séries e o método das diferenças...29

2.1 O método das diferenças...31

2.2 O problema de Huygens...32

2.3 O triângulo Harmônico..39

CAPÍTULO II: OS FATORES FILOSÓFICOS QUE CONDUZIRAM LEIBNIZ EM SUAS INVENÇÕES...55

1. A Arte Combinatória..57

2. A Lógica da Invenção...64

3. A Aritmética para a arte da invenção...69

4. As relações entre o todo e suas partes...73

5. O princípio da identidade como fundamento da matemática 79

CONCLUSÕES...81

BIBLIOGRAFIA..86

INTRODUÇÃO

Observamos, através de nossos estudos sobre as origens do Cálculo Infinitesimal, que a questão das *séries numéricas*[1] foi um dos principais fundamentos para a noção de Diferencial, proposta por Leibniz em 1675 na invenção do cálculo Infinitesimal. Escolhemos trabalhar sobre as séries numéricas[2] pois, além disso, esse assunto pode nos proporcionar uma visão histórica, filosófica e metodológica da formação inicial do pensamento de Leibniz e da sua evolução, de uma fase amadora, na qual se encontrava no início de suas descobertas matemáticas, para uma posição de destaque no meio científico do século XVII. Foi exatamente na convergência entre os aspectos, histórico, filosófico e metodológico, no que envolvem a questão das séries, que fomos buscar o fio condutor para nossa pesquisa, ou seja, a motivação para realizá-la.

Cremos que uma abordagem histórica e filosófica sobre o estudo das *séries* poderia fornecer uma compreensão mais ampla do pensamento filosófico de Leibniz sobre o cálculo infinitesimal. A própria palavra "Diferencial" é oriunda do "Método das Diferenças", que é um método geral para o somatório de séries através das diferenças entre seus termos e que possibilitou encontrar as tangentes a uma curva e determinar a sua quadratura, ou seja, a sua área. Tal fato pode ser constatado no seguinte trecho da carta [1] de Leibniz enviada para o Marquês de L'Hospital (1661-1704) no ano de 1694:

"*Por muito tempo, eu tive a oportunidade de procurar as somas das séries dos números, e para isso me servi das diferenças em um teorema bastante conhecido, que, numa série decrescente ao infinito, seu primeiro termo é igual à soma de todas as diferenças. [...] Eu também reconheci quase imediatamente que achar as tangentes nada mais é do que diferenciar, e encontrar as quadraturas nada mais é do que somar,*

---

[1] Embora estejamos cientes de que uma série numérica representa uma soma de termos que podem ser finitos ou infinitos, que não é o caso das seqüências, Leibniz emprega, em sua obra, o termo série nas duas situações. Sendo assim, utilizaremos o mesmo em nosso trabalho.

desde que se suponha as diferenças incomparavelmente pequenas" [3].

Em várias passagens das correspondências de Leibniz encontramos evidências de que o método das diferenças foi sem dúvida fundamental para a noção de diferencial. As primeiras correspondências científicas, que ocorreram no período de 1670 a 1674, nos relatam as descobertas iniciais de Leibniz em seus estudos sobre as séries. Nas correspondências que sucederam este período, encontramos relatos do próprio autor confirmando a importância das séries para a invenção do Cálculo. Sendo assim, para que tenhamos uma idéia do desenvolvimento da teoria das séries e das quadraturas antes do século XVII, descreveremos sucintamente algumas idéias e alguns trabalhos que foram desenvolvidos antes da época de Leibniz.[4]

As primeiras idéias sobre séries, quadraturas e tangentes, remontam aos primórdios da história da matemática, mais especificamente à Grécia antiga, onde surgiram alguns trabalhos sobre estas questões que, mesmo que de forma indireta, serviram como ponto de partida para os cientistas dos séculos seguintes. É possível encontrar em Pitágoras os números figurados que foram retomados por Pascal, no triângulo Aritmético, e por Leibniz, no Triângulo Harmônico. O pitagórico Hipócrates de Quios (430 a. C), mostrou, que a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão dos quadrados de seus respectivos diâmetros e, a partir desse resultado, pôde determinar a quadratura do círculo. No entanto, foi Arquimedes (287-212 a.C.), que obteve, de forma rigorosa, a quadratura do círculo através do método da exaustão, que envolve axiomas, definições e proposições. O método da exaustão foi central para o

[2] Chamaremos séries numéricas tanto que conhecemos hoje por esse nome, quanto que conhecemos por seqüência, uma vez que Leibniz empregou essa nomenclatura para os dois casos.

[3] *"J'avais pris plaisir long temps auparavant de chercher les sommes des series des nombres, et je m'étais servi pour cela des différences sur un théoreme assez connu qu'une série decroissant à l'infini son premier terme est egal à la somme de toutes les différences.(...) Je reconnus aussi bientôt que trouver les tangentes n'est autre chose que différentier, et trouver les quadratures n'est autre chose que sommer, pourvu qu'on suppose les différences incomparablement petites"*. Nossa tradução.

[4] Sobre os dados históricos relatados acima, consultar o livro de Margareth E. Baron, History of

desenvolvimento da matemática e particularmente no desenvolvimento das séries e nos métodos de integração que surgiram posteriormente. No século XVII, Johannes Kepler (1571-1630) e Galileo Galilei (1564-1642), abandonaram o método de Arquimedes para o cálculo de áreas e volumes em troca do uso dos indivisíveis ou quantidades infinitamente pequenas. Utilizando o mesmo método de Kepler, encontramos Cavalieri (1598-1647), cujos livros *Geometria Indivisibilis* e *Exercittiones Geometricae* serviram de fonte de consulta para vários matemáticos do século XVII. Roberval (1602-75) também adotou o método dos indivisíveis no qual utilizou amplamente os números figurados e as séries que envolvem os mesmos. Jonn Wallis (1616-1703) investigou em seu livro *Arithmetica Infinitorum*, as séries de Cavalieri, na forma aritmética, livre do embasamento geométrico. Na tentativa de resolver a quadratura do círculo, Wallis pôde obter o número π como um produto infinito de termos. A publicação do livro de Wallis foi fundamental para Newton em seus estudos iniciais, de onde resultaram os seus primeiros êxitos, como a obtenção da quadratura do círculo por meio de uma série infinita. Pierre Fermat (1601-1665), com seus trabalhos sobre as tangentes e sobre máximos e mínimos, permaneceu fiel à estrutura de demonstração dos antigos. James Gregory (1638-75) na obra *A Vera Circuli et Hiperbolae Quadratura* generalizou o método de exaustão de Euclides e no livro *Geometria pars Universalis* elaborou o primeiro tratado sistemático contendo todas as operações para determinação de arcos, tangentes, áreas e volumes. Além disso, Gregory foi o primeiro a mostrar geometricamente a relação inversa entre tangente e quadratura. Isaac Barrow (1630-77) publicou, no ano de 1670, o livro *Lectiones geometricae*, onde apresenta na proposição 11, lição X, a relação inversa entre tangente e quadratura, que deu origem ao que conhecemos atualmente como teorema fundamental do cálculo. Destacamos também o

---

mathematics. *Origins and development of the calculus*, The Open University, p. 48.

nome de Nicolaus Mercator (1620-1687) que, segundo Leibniz, foi o primeiro a determinar a quadratura do círculo por meio de uma série infinita em sua obra *Logarithmotechnia*.

Como acontece para muitos exemplos de grandes matemáticos, a importância de Leibniz deve-se, em grande parte, à generalização que apresentou de seus métodos e dos que estavam disponíveis em sua época, dando uma forma geral a um problema que, até então, possuía diversas facetas particulares. Um dos mais importantes destes foi o problema da Quadratura do Círculo, que pôde ser generalizado, por meio das séries. Em Leibniz, não se trata de encontrar a tangente num único ponto da curva, mas todas as retas tangentes a essa curva. Este pensamento estende-se ao problema dos máximos e mínimos e das integrais, constituindo o cerne do Cálculo Infinitesimal.

A história da matemática nos mostra que os problemas da quadratura e da tangente foram tratados isoladamente, até terem sido definitivamente unificados no século XVII. A partir desse século foi possível realizar as operações de integração e de diferenciação, através da notação criada por Leibniz, que veio substituir os métodos utilizados até então para se calcular as tangentes e as quadraturas de uma curva. Em conformidade com essas primeiras considerações históricas sobre as questões das séries e das quadraturas, nos empenharemos para destacar, dos trabalhos de Leibniz que precederam a invenção do cálculo infinitesimal, os seus primeiros conhecimentos sobre as séries numéricas que, constituíram um dos principais fundamentos dessa invenção. Essa nossa afirmação pode ser confirmada no texto retrospectivo do próprio Leibniz, "História e Origem do Cálculo Diferencial", originalmente escrito em Latim no ano de 1714 com o título "Historia et Origo Calculi Differentialis" [2]. Os trechos desse livro que destacamos em nosso trabalho, encontram-se traduzidos para o Inglês no livro "The

Early Mathematical Manuscripts of Leibniz” [3] de J. M. Child e nas "Correspondências com o Marquês de L'Hospital” [1] e também, em outros artigos e correspondências que enfatizam a questão das séries e a sua importância para o método de leibniziano. Dessa maneira, encontramos na própria obra de Leibniz, a justificativa para a escolha desse tema.

Nossa pesquisa foi orientada pelas das seguintes perguntas:

1. Como ocorreram as descobertas iniciais de Leibniz sobre as séries?
2. Quais os fatores filosóficos que o conduziram neste ponto?

Estas perguntas, evidentemente, só serão respondidas em parte.

Na primeira parte do capítulo I, iremos descrever o pensamento inicial de Leibniz sobre as séries em seus trabalhos sobre combinatória. Para isso, recorreremos inicialmente ao livro “Dissertation Sur L’Art Combinatoire” [4], onde podemos vislumbrar, através da sua aritmética, os enlaces entre os números combinatórios e as séries numéricas. A “Dissertation Sur L’Art Combinatoire”, foi escrita originalmente em Latim com o título Dissertatio de Art Combinatoria, e traduzida em Francês por Jean Pyroux [1], (iremos nos referir a este trabalho como “Arte Combinatória”). Desta obra, destacaremos, neste primeiro momento, somente os trechos que incluem de alguma forma a questão das séries numéricas. Embora a “Arte Combinatória” não seja um texto que trate exclusivamente das séries, Leibniz pôde observar aí o uso das diferenças para obter suas respectivas somas. Para desenvolvermos a segunda parte do capítulo I, onde abordaremos o método das diferenças, utilizaremos como fonte de pesquisa, as correspondências científicas de Leibniz, pois nelas encontramos muitas das informações necessárias à compreensão da sua teoria. O recurso às cartas se justifica pelo fato destas fornecerem um precioso panorama histórico, que nos permite verificar com profundidade a maneira pela qual Leibniz aprimorou seus conhecimentos matemáticos e como ele desenvolveu sua obra diante da comunidade científica européia daquela época. Grande parte destas correspondências foi enviada a partir de 1670 ao físico alemão Henri Oldenburg (1626-1678), membro da Royal Society of London, que as encaminhava ao Comércio Epistolar, através do qual os cientistas se correspondiam freqüentemente. Em 19 de fevereiro de 1673 Leibniz foi aceito formalmente como membro dessa sociedade fato que o beneficiou, pois pôde se comunicar regularmente com toda a comunidade científica através do correspondente matemático, o inglês Jean Collins, que dentre outras coisas articulou através das cartas a disputa entre Leibniz e Newton sobre a invenção do cálculo.

O capítulo II foi escrito com o intuito de levantar os fatores filosóficos que conduziram Leibniz em suas invenções, principalmente aqueles que foram apresentados também na introdução da "Arte Combinatória", como é o caso da questão do todo e das partes, que fundamentou a sua teoria das complexões.

Finalmente, concluiremos nosso trabalho, procurando analisar a importância dessas invenções para a sua recepção na comunidade científica do século XVII, indicando, através de alguns exemplos, a maneira pela qual suas idéias foram difundidas pelo continente europeu e qual foram os avanços científicos obtidos por Leibniz antes de sua invenção mais reconhecida, que foi o cálculo infinitesimal.

CAPÍTULO 1

O PENSAMENTO INICIAL DE LEIBNIZ

1. As Séries na Arte Combinatória

Para que possamos compreender como as séries numéricas estão inseridas no livro "Arte Combinatória", faremos uma explanação concisa sobre as principais características desse texto, pois a consideramos necessária à compreensão do assunto.

Uma das características mais marcantes da "Arte Combinatória" é a mesclagem entre a filosofia, a lógica e a aritmética. Os conhecimentos de Leibniz sobre lógica e filosofia, são oriundos de sua formação acadêmica, pois após ter ingressado na Universidade de Leipzig no ano de 1661, teve a oportunidade de freqüentar as aulas do professor Johann Kuhn sobre a filosofia de Aristóteles e de Euclides. Quanto à filosofia, Leibniz teve bastante sorte com seus professores, especialmente com Jacob Thomasius que fundou o estudo científico de historia da filosofia na Alemanha e o orientou em sua dissertação de bacharelado em filosofia com o título "Disputatio metaphysica de principio individui" ("Discussão metafísica no princípio da individuação")[5], que foi defendida em 1663, quando ele tinha apenas dezessete anos de idade [5]. No entanto, a "Arte Combinatória" só foi levada a termo após Leibniz ter concluído a sua formação acadêmica, na Universidade de Leipzig, onde obteve os títulos de bacharel e mestre em filosofia, respectivamente nos anos de 1663 e 1664. Em seguida, preparou, no ano de 1666, a "Dissertation Arithmétique sur les Complexions" [6] , visando ingressar na Universidade de Altdorf, onde obteve no ano de 1666 o título de doutor em direito com a tese "De casibus perplexis in jure" (Sobre casos difíceis da Lei)[6]. Nesse mesmo ano, Leibniz ampliou a "Dissertação Aritmética sobre as Complexões" dando-lhe o título: (Dissertation sur l´art Combinatorie).

---

[5] O princípio da individuação, serviu anos mais tarde, para compor o sistema filosófico de Leibniz
Traduzido do Latim para o Inglês em Aiton [6].

Antes de iniciar seus estudos universitários, Leibniz já estava ciente da lógica aristotélica, através da qual vislumbrou a possibilidade de construir uma linguagem que pudesse ser entendida por todos e aplicada aos mais diversos ramos do conhecimento. Ele acreditava que, através dessa linguagem, que chamou de característica universal, todo o pensamento humano, poderia ser concebido pela combinação de elementos fundamentais ou termos simples, como as letras do alfabeto e os algarismos. A elaboração dessa linguagem foi iniciada em sua "Arte Combinatória", onde estabelece a sua base teórica e explicita os seus propósitos quanto à aplicação das combinações às mais diversas áreas do conhecimento. Dentre estes propósitos, destaca que as combinações podem ser utilizadas para encontrar as divisões dos registros de um instrumento de música; para resolver os casos jurídicos; para elaborar estratégias de guerra, para construir segredos de cofre; para misturar cores e fazer medicamentos e, principalmente, para combinar e variar as letras do alfabeto a fim de formar proposições, para, em seguida, julgá-las quanto à coerência lógica de seus enunciados.

Ilustrando, de forma sucinta, como uma proposição pode ser formada por combinações de palavras, daremos como exemplo o conjunto formado pelos elementos {casa, homem, fogo, grande}. Determinando as combinações de dois elementos desse conjunto temos: {homem casa}; {homem grande}; {homem fogo}; {casa grande}; {fogo casa}; {grande fogo}. Pode-se observar que, dentre as combinações acima, nem todas fazem sentido, ainda que se considere a variação de posição entre seus elementos, como ocorre nas combinações {homem casa} e {homem fogo}. Como os elementos "fogo" e "homem" são dois substantivos, não há coerência nessas combinações, pois, para Leibniz, uma proposição é formada por um sujeito e um predicado, que não é o caso das combinações {homem casa} e {homem fogo} que, conforme a classificação

---

[6] Traduzido para o Inglês por E. J. Aiton, como "On difficult cases in law".

de Leibniz, teríamos aí um tipo de combinação inútil. Assim, pela combinação de termos simples, as proposições podem ser formadas e, em seguida, julgadas. O modo como Leibniz classifica uma proposição e o seu interesse pelas descobertas, são alguns dos assuntos que abordaremos no capítulo II de nosso trabalho. Sendo assim, nos limitaremos, no presente capítulo, a uma abordagem dos conceitos da aritmética com o objetivo de identificar os primeiros conhecimentos de Leibniz sobre as séries numéricas.

Sabe-se que os estudos iniciais de Leibniz sobre matemática, no momento em que escreve a "Arte Combinatória", eram reduzidos, inclusive devido à falta de literatura corrente na universidade de Leipzig. Também podemos constatar que, na ocasião em que escreveu a "Arte Combinatória", ele ainda não estava ciente dos grandes tratados de matemática da época, dentre estes, o livro *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis e as principais obras de Pascal, de Grégoire de Saint Vincent e de Issac Barrow. Podemos fazer tal afirmação, pois no ano de 1672 Leibniz tinha comunicado alguns de resultados sobre a soma de séries a Huygens que, imediatamente, lhe sugeriu a consulta destes livros. Além desse fato, pode-se confirmar o desconhecimento de Leibniz em relação a certos escritos matemáticos, como alguns de Descartes, no seguinte trecho da correspondência enviada ao Marquês de L'Hospital [1]: *"Até então, eu não era suficientemente versado no cálculo da álgebra de Descartes e não fazia uso de equações para expressar a natureza das curvas, mas, seguindo a recomendação de Huygens, me dediquei a isso e não me arrependi, pois esses estudos deram-me meios de encontrar, logo em seguida, meu cálculo diferencial*"[7].

Sendo assim, cabe-nos perguntar, quais teriam sido as leituras precedentes à "Arte Combinatória" que fundamentaram a aritmética de Leibniz? Para responder a esta

[7] "*Jusqu'alors je n'étais pas encore assez versé dans le calcul de M. Descartes et ne me servais pas encore des équations pour expliquer la nature des lignes courbes, mais sur ce que M. Huygens m'en disait, je m'y mis et ne m'en repentis point, car cela ma donné le moyen de trouver bientôt mon calcul différentiel"*. Nossa tradução.

pergunta, destacaremos, da “Arte Combinatória”, as referências[8] feitas por Leibniz a algumas obras e a alguns cientistas que, possivelmente, lhe serviram de fonte de consulta em seus primeiros trabalhos. Entre essas referências, encontra-se o nome do dinamarquês Erasme Bartholiedo e do holandês Frans van Schootem que foi aluno de Descartes e professor de Huygens e que escreveu, no ano de 1657, o livro *Exercitarum Mathematicanum*, que inclui questões de aritmética e de geometria. Também cita os *Elementos* de Euclides, que foi traduzido por Isaac Barrow. Sobre as combinações, consultou o livro intitulado *Recreações Matemáticas* de Daniel Schwenter e o texto elementar de astronomia, que também envolve combinações, *La Sphère* de Jean Sacrobosco. Finalmente, menciona no texto o livro *Arithmétique Pratique* do matemático italiano Jérôme Cardan e o livro *Nova Scientia* de Nicolo Tartaglia. Como estas referências foram destacadas por Leibniz na “Arte Combinatória”, tudo nos indica que as mesmas tenham fundamentado os seus conhecimentos iniciais de aritmética.

Apesar de seu pouco conhecimento de matemática, Leibniz dedicou-se a essa matéria com toda a avidez de um jovem estudante, que pretende superar suas deficiências para, em seguida, por em prática os seus projetos. Esse ímpeto na aquisição de novos conhecimentos vai se acentuando cada vez mais, na medida em que as lacunas de sua formação de matemática vão sendo eliminadas. Por outro lado, seus conhecimentos iniciais de matemática, foram suficientes para concretizar, no ano de 1666, a “Arte Combinatória”, mais precisamente para gerar idéias e pensamentos pela combinação de termos elementares que são os seus componentes básicos. Assim, cada termo complexo ou composto é formado pela combinação de termos simples que são os “termos irredutíveis e indefiníveis”[9], ou seja, são aqueles que não podem ser decompostos ou reduzidos a termos menores, da mesma forma como as palavras são

[8] As referências destacadas por Leibniz encontram-se nas seguintes páginas da Arte Combinatória:

formadas pelas letras do alfabeto e os números pelos algarismos. Considerando, por exemplo, o conjunto de termos simples {a, d, s, o, r, u, t}, podemos formar, por combinação de três letras, os termos complexos “rua”, “sua” e “tao”. Do mesmo modo, o número 125 é formado pela combinação de três algarismos do sistema decimal. Por outro lado, os termos complexos podem ser decompostos em termos simples, como ocorre, analogamente, na decomposição de um número em fatores primos. Conforme o exemplo de Leibniz citado por Louis Couturat [7], o número 210 pode ser representado pelos seguintes produtos: 42x5, 6x35, 14x15, etc. Decompondo os termos desses produtos em fatores primos, teremos 2x3x5x7, que são os termos simples ou elementares do número 210. Ou seja, o termo complexo 210 foi representado por um produto de termos simples.

Dentro de seu projeto de uma linguagem universal, que Leibniz propõe na “Arte Combinatória”, é preciso, primeiramente, determinar todos os pensamentos que se podem formular a partir de um conjunto de elementos fundamentais ou de termos simples. Para isso, calcula-se o número total de combinações que podem ser formadas com esses termos elementares, não importando se essas proposições são verdadeiras ou falsas ou até contraditórias, pois avaliar as proposições, seria uma outra etapa dentro da arte das combinações, como veremos mais adiante.

O dispositivo elaborado por Leibniz para calcular todas as combinações que podem ser formadas a partir de um determinado número termos, é a tabela das complexões (Tabela I), onde vemos intervir, pela primeira vez, o pensamento sobre *séries* na Arte Combinatória. No entanto, para que possamos compreender, na tabela, como as complexões são obtidas, e as suas relações com a progressão geométrica 1, 2, 4,..., 1024, 2048, 4096, que está situada na última linha da tabela, precisaremos

---

113,115,117, 118, 122 e 144.

[9] Arte Combinatória, p. 137.

conhecer os significados dos termos *complexão*, *número* e *expoente*.

Conforme ressaltamos anteriormente[10], um termo complexo é aquele formado pela combinação de termos simples. Pode-se dizer ainda que um termo complexo ou composto é formado por vários elementos, por exemplo: (*abcdef)*. Enquanto um termo simples[11] é definido por um único elemento, por exemplo: (*c*). A complexidade reside na combinação desses termos simples, ou seja, os mesmos devem ser unidos desde que expressem uma idéia útil. Assim, é preciso que haja um critério que funcione como uma espécie de "filtro" diante da inumerável quantidade de combinações de coisas. Para isso, Leibniz estabeleceu a "lógica da invenção"[12], que permite verificar, dentre todas as combinações possíveis, as úteis e as inúteis. Na arte das combinações, não se trata somente de combinar, mas também de investigar a validade de cada pensamento.

Leibniz define uma complexão como "a união de todo menor em um maior".[13] Em outras palavras, é pela combinação dos termos mais simples que se formam os termos mais complexos. Por outro lado, afim de que uma complexão seja determinada, "o número ou a totalidade é dividida em partes, como totalidades menores, este é o fundamento das complexões"[14]. Neste caso, trata-se de encontrar todos os subconjuntos formados a partir de um conjunto dado, como o conjunto {A,B,C} que pode ser dividido em subconjuntos de um elemento {A}, {B}, {C}; de dois elementos, {A,B}, {A,C}, {B,C}; e de três elementos {A,B,C} (que é a própria totalidade). Na "Arte Combinatória", o total de elementos de um conjunto foi designado pela palavra *número* e os seus subconjuntos, que são as partes de um todo, foram designados pelo termo *expoente*. Assim, uma complexão de *número 5* e de *expoente 3*, corresponde, na

[10] Ver 2º parágrafo da página 10.
[11] Em algumas passagens da "Arte Combinatória" (p.138) e outros artigos, Leibniz também designa os termos simples, como "termos originais ou primitivos".
[12] A "Lógica da Invenção" será mencionada no capítulo II de nossa pesquisa.
[13] "La complexão est l'union de tout plus petit dans un plus grand". Arte Combinatória, definição 9, p.117. Nossa tradução.

linguagem atual, a uma combinação de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja, $C_{5,3}$, onde *n* corresponde ao *número* e *p* ao *expoente* ou então, a quantidade de subconjuntos de três elementos em um conjunto com cinco elementos. Além disso, os *expoentes* designam a classe de cada complexão. Assim, o expoente 1 designa as complexões de 1ª classe ou as *uniões*; o expoente 2 designa as complexões de 2ª classe ou as *com2nações* (combinações) e o expoente 3, as complexões de terceira classe ou as *com3nações* (conternações)[15]. Em outros termos, as combinações de primeira classe são do tipo $C_{n,\ 1;}$ as combinações de segunda classe $C_{n,\ 2}$ e assim por diante.

Analisemos, então, a sua tabela [1]:

Tabela I

	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	l0	11	12	← **Números**
e	2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	
x	3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	
p	4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	49	
o	5	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	462	792	
e	6	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210	462	924	
n	7	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120	330	792	
t	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45	165	49	
e	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	55	220	
s	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	11	66	
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	12	
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	*	0	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	
	†	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	

* (soma das complexões para um expoente dado);
† acrescentando a unidade, coincide com os termos de uma progressão geométrica dupla.

Nesta tabela, as complexões encontram-se distribuídas em treze colunas (da esquerda para direita, excetuando-se a coluna dos expoentes) e nas treze primeiras linhas de cima para baixo de 0 a 12. Cada coluna corresponde às complexões de um número da segunda linha da tabela, a saber: 0, 1, 2,..., 10, 11, 12. Assim a primeira

[14] "...le nombre ou la totalité est partagé en parties, comme le toutes plus petites, cela est le fondement des complexions..." Arte Combinatória, introdução, p.116. Nossa tradução.
[15] Conforme a definição de número 11 da Arte Combinatória p.117.

coluna corresponde às complexões do *número* 0, que, nesse caso, são todas nulas, pois para os casos em que o *expoente* é superior ao *número* dado, o valor da complexão é sempre zero. Por exemplo, com um conjunto de três elementos só podemos formar subconjuntos de um, dois e três elementos. A segunda coluna é formada pelas complexões do *número* 1, a terceira coluna pelas complexões do *número* 2, e assim sucessivamente. Por outro lado, a primeira linha corresponde ao *expoente* 0, a segunda linha, ao *expoente* 1, a terceira linha, ao *expoente* 2, e assim por diante. Isto significa dizer que a primeira linha é formada por combinações do tipo $C_{n,0;}$ a segunda linha por combinações do tipo $C_{n,1;}$ a terceira linha por combinações do tipo $C_{n,2}$ e assim sucessivamente. Sendo assim, para encontrar as complexões de um determinado *número*, basta relacioná-lo com os expoentes menores ou iguais a ele. Por exemplo: o *número* 4 da quinta coluna com o *expoente* 0 da primeira linha corresponde à unidade; o *número* 4 com o *expoente* 1 formam 4 *uniões* ou quatro combinações de um elemento; o *número* 4 com o *expoente* 2 formam 6 *com2nações* ou seis combinações de dois elementos; o *número* 4 com o *expoente* 3 formam 4 *com3nações* ou quatro combinações de três elementos e o *número* 4 com o *expoente* 4 formam uma *com4nação* ou uma combinação de quatro elementos. Logo, a coluna correspondente ao *número* 4, (quinta coluna) é formada pelas complexões 1, 4, 6, 4, 1. Utilizando a notação atual temos: $C_{4,\,0} = 1$, $C_{4,\,1} = 4$, $C_{4,\,2} = 6$, $C_{4,\,3} = 4$ e $C_{4,\,4} = 1$. Em outros termos, podemos dizer que as complexões correspondentes a um determinado *número* estão localizadas nas interseções de sua coluna com as respectivas linhas dos expoentes da tabela. Sendo assim, a complexão localizada na linha de expoente 0 e na coluna do número 4 é igual a 1; a complexão localizada na linha do expoente 1 e na coluna do número 4 é igual a 4; a complexão localizada na linha do expoente 2 e na coluna do número 4 é igual a 6 e assim por diante. Do mesmo modo, as demais complexões estão distribuídas pelos *números* e pelos respectivos *expoentes*.

Uma análise da tabela, através de suas linhas, nos permite compreender como as complexões estão distribuídas por classes. Assim, cada linha da tabela é composta de uma mesma classe de complexões que é determinada pelo expoente da linha. Nesse caso, a segunda linha da tabela, que corresponde ao expoente 1, é formada pelas complexões de primeira classe, que correspondem à série (0, 1, 2,..., 10, 11, 12) que equivalem às combinações do tipo $C_{n,1} = n$. A terceira linha da tabela, que corresponde ao expoente 2, é formada pelas complexões de segunda classe, que por sua vez, determinam a série dos números triangulares (1, 3, 6, ..., 36, 45, 55, 66), cuja lei de formação é dada, na nomenclatura atual, por $C_{n,2} = [n.(n - 1)] / 2$, com $n \geq 2$. A quarta linha da tabela, que corresponde ao expoente 3, é formada pelas complexões terceira classe, que determinam a série dos números piramidais {1, 4, 10, ..., 120, 165, 220}, cuja lei de formação é $[n.(n - 1).(n-2)] : 6$ com $n \geq 3$.

Leibniz não dispunha de uma expressão geral para encontrar o número de combinações de um conjunto, exceto para as combinações de dois elementos, para as quais usou a expressão $[A \cap (A-1)] \cup 2 = B$[16], onde A designa o número total de elementos de um conjunto; o símbolo $\cap$ designa uma multiplicação; $\cup$ designa uma divisão e B é o número de combinações de dois elementos. Essa expressão equivale, na nomenclatura atual, à expressão $\frac{n.(n-1)!}{2!}$. Dentro da tabela, "*as complexões de um determinado número e de um expoente nascem da soma das complexões relativas ao número precedente e do expoente precedente*"[17]. Em outros termos, para encontrar as combinações de um número, basta somar duas combinações consecutivas da coluna

[16]Arte Combinatória, problema I. p. 120.

[17] *"Les complexions d'un nombre et d'un nombre et d'un exposant donné naissent de la somme des complexions relatives au nombre précédent donné et à l'exposant précédent". Arte Combinatória, Problème I, p. 118*. Nossa tradução.

antecedente. Por exemplo: observando a tabela, verifica-se que a combinação referente ao *número* 7 e ao *expoente* 4, a saber, 35, foi obtida pela soma das combinações 20 e 15, que são relativas ao *número* 6 e aos expoentes 3 e 4 respectivamente. Logo as combinações de 7 elementos 4 a 4 são dadas pela soma 20 + 15 = 35, que na notação atual equivale à expressão $C_{7,4} = C_{6,3} + C_{6,4}$. De um modo geral poderíamos escrever $C_{n,p} = C_{n-1,\, p-1} + C_{n-1,\, p}$.

A penúltima linha da tabela, que é indicada pelo símbolo (*), foi reservada para fornecer o total de complexões particulares, que são aquelas formadas pelos expoentes de 1 até 12, ou seja : $C_{n,1}$; $C_{n,2}$; $C_{n,3}$; ...; $C_{n,12}$. Esses totais correspondem à série (0, 1, 3, 7, 15..., 511, 1023, 2047, 4095). Por exemplo: a soma das combinações particulares do número 4 é dada por $C_{4,1} + C_{4,2} + C_{4,3} + C_{4,4} = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$, cujo total corresponde ao quinto termo da série {0, 1, 3, 7, 15..., 511, 1023, 2047, 4095}. De uma forma geral, os termos dessa série são definidos pela expressão, $2^n - 1 = C_{n,1} + C_{n,2} + C_{n,3} + ... + C_{n,n}$ que equivale a $\sum_{i=1}^{n} c_{n,i} = 2^n - 1$. Cabe observar que as combinações de expoente zero, ou seja, $C_{n,0} = 1$, não foram incluídas neste somatório. Estas são incluídas nos totais dados pelos termos da série geométrica que constitui a última linha da tabela (de cima para baixo)(†), que é a série (1, 2, 4, 8, ..., 512, 1024, 2048, 40960). Resulta que esta operação nos dá o termo geral da série geométrica, definido pelo acréscimo da unidade na expressão $2^n - 1$, isto é: $(2^n - 1) + 1 = 2^n$. Como cada termo da série geométrica corresponde à soma de todas as combinações de um número, temos: $2^n = C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + C_{n,3} + ... + C_{n,n}$ ou $\sum_{i=0}^{n} c_{n,i} = 2^n$. Daí, a soma de todas as combinações de um *número*, incluindo a combinação de expoente zero, é determinada pelo termo da série geométrica, que está situado na coluna correspondente a esse número. Por exemplo, a soma de todas as complexões correspondentes ao *número* 4 (quinta coluna da esquerda para direita), é dada pelo termo da série situada na coluna relativa ao número 4... linha (†), isto é: $C_{4,0} + C_{4,1} + C_{4,2} + C_{4,3} + C_{4,4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 = 16$. Por outro lado, para encontrar a soma das complexões particulares do número 4, ou seja, sem a inclusão da combinação de expoente zero ($C_{n,0}$), basta subtrair uma unidade do termo da série geométrica[18]. No caso do número 4, temos 16 – 1 = 15 complexões particulares.

Uma outra propriedade indicada por Leibniz no problema II da Arte Combinatória, refere-se aos expoentes dos termos da série geométrica designando a parte em relação ao todo. Isso significa dizer que, se o expoente do termo da série for ímpar, o número de complexões será par e, se o expoente for par, o número de complexões será ímpar. Por exemplo: o sexto termo da série geométrica, que é $32=2^5$, e que tem como expoente o número 5, compreende seis complexões (conforme a sexta coluna da Tabela I), a saber:1, 5, 10, 10, 5, 1. Por outro lado, se expoente do termo da série é um número par, verifica-se que o número de complexões ímpar. Por exemplo, o quinto termo da série geométrica, que é 16 e que tem como expoente o número 4, compreende cinco complexões, que são: 1, 4, 6, 4, 1, conforme a coluna 5. A fundamentação dessas propriedades, que envolvem o conceito de divisão e as relações entre as combinações e a progressão geométrica simultaneamente, é dada no problema II da "Arte Combinatória" da seguinte forma: *"... o termo da progressão geométrica deve ser dividido em um certo número de partes que é determinado pelo seu respectivo expoente, de tal forma que a primeira parte seja igual à última, a segunda à penúltima, a terceira à antepenúltima etc., se o expoente for par, o número de partes será ímpar, e se for ímpar o número de partes será par..."*. Em seguida, mostra através de um exemplo, que as partes as quais se refere, são exatamente os números combinatórios

[18] Arte combinatória, problema II, p.121.

correspondentes a um determinado termo da série:

"*... o termo 128 da progressão geométrica que tem como expoente o número 7 será dividido em 8 partes, a saber, 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1, conforme a tabela I*".[19] A originalidade de Leibniz está na percepção das propriedades que envolvem tanto as séries quanto as combinações, que não foram notadas por outros matemáticos que o precederam, sabendo explorar a harmonia existente entre as combinações e as séries numéricas que, tempos depois, serviram como ponto de partida na construção do triângulo harmônico. Conforme salientou Michel Serres[20], "*o termo harmonia [para Leibniz] refere-se à natureza dos números manipulados, dentro das tabelas com suas respectivas regras*"[8].

Esperamos ter mostrado como Leibniz pôde, através da tabela I, estabelecer as bases de sua teoria das complexões. Esta teoria foi rigorosamente construída segundo os seguintes teoremas[21], que apresentamos com comentários nossos que pretendem interpretá-los na simbologia atual, com o acréscimo de exemplos introduzidos por nós. Seguindo a numeração da Arte Combinatória temos:

1- *Se o expoente (p) for maior que o número (n), o resultado da combinação será zero.*

Comentários: Decorre daí, que as combinações de um determinado número de coisas só poderão ser obtidas quando os expoentes forem menores ou iguais a esse número, isto é, quando $p \leq n$. Caso contrário, as combinações são todas nulas.

Exemplo: para o *número* 4 teremos: $C_{4,5} = 0$, $C_{4,6} = 0$, $C_{4,7} = 0$,..., $C_{4,12} = 0$.

2- *Se o expoente de uma complexão é igual ao número, a complexão é igual a 1.*

Comentários: de uma forma geral $C_{n,n} = 1$:

---

[19] "... Le terme de la progression géométrique soit partagé en même temps dans davantage de parties qu'il a d'unités de son exposant, ce qui est de nombre des choses; dont, toujours la première soit égale à la dernière, la seconde à l'avant–dernière, la troisième à l'antépénultème, etc., jusqu' à ce qu'encore s'il a été partagé dans un nombre pair de parties, l'exposant ou le nombre de choses existant impair,..." *Arte Combinatória*, Problema II, pp.121. Nossa tradução.

[20] Le Système de Leibniz, p.191.

Demonstração: se p = n então $C_{n,n} = C_{n,n} = n!/ [(n-n)!n!] = n!/ (0!n!) = 1$.

Exemplo: $C_{4,4} = 4! / (4 – 4)! 4! = 4! / 0! 4! = 1$ com $0! = 1$.

3- *Se o expoente difere do número de uma unidade, a complexão é o próprio número.*

Comentários: de uma forma geral $C_{n,n-1} = n$.

Demonstração: $C_{n,n-1} = n!/ [n-(n -1)]!(n-1)!] = n! / [1! (n-1)!] = n. (n-1)!/ 1!(n-1)1= n$.

Exemplo: $C_{4,3} = 4! / (4 – 3)! 3! = 4! / 1! 3! = 4.3! / 1!3! = 4$.

4 - S*e dois expoentes são mutuamente complementares em relação ao número dado, as complexões relativas a esses expoentes são iguais.*

Comentários: nesse caso as combinações do tipo $C_{n,p}$ e $C_{n,n-p}$ são complementares, pois $p + (n – p) = n$.

Demonstração: desenvolvendo $C_{n,p}$ temos $C_{n,p} = n! / (n - p)! p!$ Procedendo da mesma forma para $C_{n,n-p}$, segue que $C_{n,n-p} = n! / [n- (n- p)]! (n - p)! = n! / [n- n + p]! (n - p)! = n!/ p! (n - p)!$ Decorre daí que os números $C_{n,p}$ e $C_{n,n-p}$ são iguais.

Exemplo: desenvolvendo o binômio $C_{4,3}$ e o seu respectivo complementar $C_{4,4-3} = C_{4,1}$ temos $C_{4,3} = 4! / (4 – 3)! 3! = 4! / 1! 3! = 4.3! / 1!3! = 4$ que é igual a $C_{4,1} = 4! / (4 – 1)! 1! = 4! / 3! 1! = 4.3! / 3!1! = 4$.

5- *Se o número de uma complexão é ímpar, os números combinatórios estão ordenados de tal forma que o primeiro é igual ao último, o segundo igual ao penúltimo, o terceiro ao antepenúltimo etc.*

Comentários: isso ocorre porque os termos eqüidistantes dos extremos são números combinatórios complementares logo e, pelo teorema 4, são iguais.

Demonstração: observando a seqüência $C_{n,0}$, $C_{n,1}$, $C_{n,2}$, $C_{n,3}$, ... , $C_{n,n-2}$, $C_{n,n-1}$, $C_{n,n}$ pode-se verificar, pelo teorema 4, que os binomiais eqüidistantes, $C_{n,0}$ e $C_{n,n}$, $C_{n,1}$ e $C_{n,n-1}$, $C_{n,2}$ e $C_{n,n-2}$ são complementares , por conseguinte, iguais.

[21] Arte Combinatória, p.119.

Exemplo: no caso do número 5 teríamos as seguintes combinações: $C_{5,\,0}$, $C_{5,\,1}$, $C_{5,\,2}$, $C_{5,3}$, $C_{5,\,4}$, $C_{5,\,5}$ = 1, 5, 10, 10, 5, 1.

6- *As complexões de um número são crescentes até o termo central da série de complexões, a partir daí, decrescem novamente.*

Exemplo: as complexões correspondentes ao número 6 são 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Pode-se reparar que a série é crescente até o termo central (20) e decrescente após o mesmo.

Demonstração: na seqüência $C_{n,\,0}$, $C_{n,\,1,}$ $C_{n,\,2}$ ... $C_{n,\,n-2}$, $C_{n,\,n-1}$, $C_{n,\,n}$ temos, pelo teorema 4, que $C_{n,\,0} = C_{n,\,n}$; $C_{n,\,1} = C_{n,\,n-1}$; $C_{n,\,2} = C_{n,\,n-2}$. Como $C_{n,\,0} < C_{n,\,1} < C_{n,\,2} \ldots C_{n,\,n-2} > C_{n,\,n-1} > C_{n,\,n.,}$ então a seqüência é crescente até o termo central e decrescente a partir dele.

7- *Todos os números primos são divisores de suas complexões particulares.*

Exemplo: o *número* 7 é divisor das complexões 7, 21, 35, 21, 7. Nesse caso, podemos verificar que a combinação $C_{7,3,}$ = 7! / 4!3! = 7.6.5 / 3.2 = 35, é divisível por 7. O mesmo não ocorre para as combinações de um número que não é primo, como o 9 por exemplo. Nesse caso, pode-se constatar que o número de combinações de nove elementos três a três não é divisível por nove, ou seja: $C_{9,\,3}$ = 84 não é divisível por 9.

Demonstração: Se $C_{n,\,p}$ = n!/ (n – p)!p!, então n.(n-1)...1 / [1.2...p x 1.2...(n-p)]. Como *n* é primo, não será divisível, logo será fator primo de $C_{n,\,p.}$

8-*Todas as "complexions simplement", são sempre números ímpares.*

Comentários: o termo *"complexions simplement"* foi utilizado, por Leibniz, para denominar os termos da série {0, 1, 3, 7, 15, ..., 511, 1023, 2047, 4095}, sendo que, cada termo dessa série corresponde a soma de todas complexões particulares de um número da tabela, sem a inclusão da combinação $C_{n,\,0}$ = 1.

Demonstração: de uma forma geral, os termos dessa série são definidos pela expressão,

$2^n - 1 = C_{n,1} + C_{n,2} + C_{n,3} + ... + C_{n,n}$ que equivale a $\sum_{i=1}^{n} c_{n,i} = 2^n - 1$, onde $2^n - 1$ é um número ímpar.

Exemplo: podemos verificar que a soma das combinações do número 3 é o número ímpar 7, isto é: $C_{3,1} + C_{3,2} + C_{3,3} = 3 + 3 + 1 = 7$, cuja *complexion simplement* corresponde ao quarto termo da série {0, 1, 3, 7, 15..., 511, 1023, 2047, 4095}.

___ x ___

Até aqui exploramos o conceito de complexão e seus respectivos enlaces com as séries geométricas. Abordaremos a seguir, o conceito de variação, conforme as definições dadas por Leibniz na Arte Combinatória, e com algumas informações complementares do livro *Le Système de Leibniz* de Michel Serres[8].

Na linguagem corrente, a palavra variação é empregada a muitas de situações, como variação de temperatura, de pressão, de altura e etc. No que concerne às combinações, trata-se de uma mudança de posição[22] (*situs*), entre as partes que a compõe. Assim, para a combinação ABC, podemos obter seis variações de posição entre seus elementos, a saber: ABC; ACB; BAC; BCA; CAB e CBA. Nesse caso, as variações[23], correspondem ao que chamamos hoje de permutações.

Apesar de não se aprofundar no assunto das séries dentro da Arte Combinatória, tanto as geométricas quanto as aritméticas, a inclusão das mesmas nessa obra nos permite certificar de que, naquela ocasião, já começa a despontar o interesse de Leibniz pelo assunto das séries.

---

[22] "La variation, c'est la position d'une ou plusieurs parties fixes dans une permutation quelconque". Art Combinatoire, definição 15, p.117, problema VII, p.162, etc.Conforme foi traduzido do Latim para o Francês por M. Serres em "Le Système de Leibniz", p.413.

[23] Leibniz dispõe, dentro do problema IV da Arte Combinatória, de uma tabela que fornece o número de variações dos valores de 1 até 24.

Dessa forma, procuramos exemplificar, na “Arte Combinatória”, os conhecimentos iniciais de Leibniz que envolvem as séries numéricas. Ainda que trabalhados de modo incipiente, esses temas, que se encontram nos Problemas I, II e IV da “Arte Combinatória”, foram fundamentais para Leibniz colocar em prática a sua lógica da invenção, pois através das questões desenvolvidas em cada um deles, foi possível determinar o número total de combinações que podem ser formadas a partir de um conjunto de termos simples para, em seguida, encontrar todas proposições que estes termos podem fornecer através da variação de ordem entre eles.

Embora seja possível saber, através de algumas obras que antecederam a “Arte Combinatória”, que nem todos os resultados apresentados por Leibniz eram originais, um de seus grandes méritos estava na sua capacidade para descobrir novas aplicações para antigas teorias, reunindo, dessa maneira, vários conceitos numa única proposta de trabalho, como foi o caso da “Arte Combinatória”. Seu objetivo profundo, como já mencionamos, era o de chegar a uma linguagem universal que pudesse ser aplicada às mais diversas áreas do conhecimento humano. Os traços dessa linguagem já se manifestam nessa obra, quando Leibniz propõe aplicar a aritmética, mais especificamente a teoria das combinações, em questões jurídicas, políticas, artísticas e científicas, como relatado no plano de sua dissertação.

Passamos assim à segunda seção deste capítulo onde veremos como os estudos iniciais de Leibniz sobre as propriedades dos números combinatórios e das séries geométricas, propiciaram o desenvolvimento de sua teoria das séries.

2. As Séries e o Método das Diferenças

Na seção anterior, destacamos da “Arte Combinatória” os conhecimentos iniciais de Leibniz sobre as séries numéricas. Nessa seção, investigaremos os aspectos matemáticos e históricos que envolveram o desenvolvimento da teoria das séries de Leibniz e a transição de uma fase de matemático amador, na qual Leibniz se encontrava no início de seus estudos (analisados na seção anterior), para uma fase de destaque no meio científico europeu do século XVII.

Os registros mais significativos a respeito de sua teoria das séries, surgiram a partir de 1670, quando ele começou a se corresponder com Henri Oldenburg. Acrescentam-se a essas correspondências alguns textos escritos após a invenção do cálculo diferencial, como o livro “História e Origem do Cálculo Diferencial” [4]. Neste último texto, também pode-se constatar que os fundamentos do *método das diferenças* foram obtidos a partir de seus conhecimentos de lógica e filosofia, como o axioma do todo e das partes de Euclides, que Leibniz extraiu do livro *De corpore* I de Thomas Hobbes[24], e o princípio da identidade, inserido em seus estudos sobre a lógica aristotélica[25].

Nessa seção veremos operar a transição entre o estudo das séries finitas para as séries infinitas que é, como sabemos, um ponto crucial no desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Em 1666, com vinte anos de idade, Leibniz tentou obter o grau de doutor em direito pela Universidade de Leipzig, que era sua cidade natal, mas esse lhe foi negado por causa da sua pouca idade. Logo após esse acontecimento, dirigiu-se à Universidade de Altdorf, em Nuremberg, onde foi formalmente aceito recebendo o grau de doutor em 22 de fevereiro de 1667. Nessa mesma universidade lhe foi oferecido um cargo de professor em direito, que ele recusou. Dois anos mais tarde ocupou um cargo político na

[24] Consultar *Leibniz in Paris*, p.12, nota 4.

Corte de Mainz e, em 1672, viajou a Paris cumprindo uma missão diplomática. Nessa viajem ele têve tempo suficiente para se dedicar a vários estudos, dentre estes, o de matemática. Nessa sua passagem por Paris, Leibniz encontrou com um dos maiores cientistas da Europa, o holandês Christiaan Huygens, que naquela ocasião prestava seus serviços para Real Academia de Paris. A primeira sugestão marcante proposta por Leibniz em sua teoria das séries foi um método geral para somar as séries de diferenças (item 2.1). A segunda, uma conseqüência da primeira, foi a proposta de um método para determinar a soma da série formada pelos inversos dos números triangulares (1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 +...), que veremos no item 2.2. Finalmente, veremos como tais métodos, levaram à invenção do triângulo harmônico, para o qual reservamos o item 2.3 desta seção.

2.1. O Método das Diferenças

Conforme foi relatado em "História e Origem do Cálculo Diferencial" [4], o método das diferenças está fundamentado no princípio da identidade, (sobre o qual voltaremos a falar no capítulo II). Pelo princípio de identidade, tem-se que: se A = A, então A – A = 0. Em seguida, Leibniz definiu a série A, B, C, D, E, com A < B < C < D < E, ou seja, uma série crescente e aplicou o princípio de identidade a cada um dos termos da série (A = A, B = B, C = C, D = D, E = E). Conseqüentemente, determinando a diferença entre eles, A – A = 0, B - B = 0, C - C = 0, D - D = 0, E – E = 0. Obviamente, a soma dessas diferenças será igual a zero (A - A + B - B + C - C + D - D + E - E = 0). Passando o primeiro e o último termo da soma para o lado direito da igualdade, obtêm-se: - A + B - B + C - C + D - D + E = E – A, que pode ser escrito

[25] Estes conhecimentos, já tinham sido utilizados na "Arte Combinatória" para fundamentar a teoria das complexões.

como E – A = (B – A) + (C – B) + (D – C) + (E – D). Deste modo, Leibniz deduziu o método das diferenças estabelecendo que "*a soma dos termos consecutivos da série de diferenças é igual à diferença dos termos extremos da série original*".[26]

Como exemplo, Leibniz utilizou a série dos números quadrados (0, 1, 4, 9, 16, 25) e observou que as diferenças entre os termos consecutivos dessa série correspondiam aos números ímpares, isto é: 1 - 0 = 1; 4 – 1 = 3; 9 – 4 = 5; 16 – 9 = 7; 25 – 16 = 9. Conseqüentemente, a soma desses números ímpares pode ser dada pela diferença entre o último e o primeiro termo da série dos números quadrados, isto é: 25 – 0 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9. Da mesma forma, podemos somar qualquer tipo de série finita, desde que seus termos sejam obtidos pelas diferenças dos termos consecutivos de uma outra série. Por exemplo, as diferenças entre os termos da série (1, 8, 27, 64, 125, 216) são, (7, 19, 37, 61, 91). Pode-se constatar, que a soma dessas diferenças é dada pela diferença entre os extremos da série original, ou seja, 7 +19 + 37 + 61+ 91 = 216 – 1= 215.

Ainda no livro "História e Origem do Cálculo Diferencial", Leibniz utilizou a álgebra cartesiana e o método das diferenças para fornecer a expressão geral de várias séries numéricas. Os termos da série dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...) seriam expressos por x e os termos da série dos números quadrados por x.x. Sendo assim, o consecutivo de x será x + 1 e o seu quadrado, xx + 2x + 1. Daí, a diferença entre os quadrados de dois números consecutivos será: (xx + 2x + 1) – (xx) = 2x +1, que corresponde ao termo geral da série dos números ímpares[27]. Dessa forma, se x for 0, 1, 2, 3, 4, a diferença dos quadrados será a série dos ímpares 1, 3, 5, 7, 9.... . No entanto, o mesmo método pode ser aplicado para os números cúbicos 0, 1, 8, 27, ..., expressos

[26] "that is, the sum of consecutive terms of difference-series is equal to the difference of the two extreme terms of the related series". Hofmann, J. *Leibniz in Paris*, capítulo 2, pp. 14-15. Nossa tradução .

[27] Em outros termos, se um número natural é n, o seu consecutivo será n+1 e os seus respectivos quadrados serão n^2 e $(n+1)^2$ e a diferença entre eles é $(n+1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n +1) - n^2 = 2n +1$, que é o termo geral para a série dos números ímpares.

por x^3; para a série dos números triangulares 0, 1, 3, 6, 10,..., expressos por $\frac{xx+x}{2}$; e para a série dos números piramidais 0, 1, 4, 10, 20,..., expressos por $\frac{x^3+3xx+2x}{6}$.

Após estabelecer um método geral para somar séries de diferenças, Leibniz enxergou a possibilidade de somar qualquer tipo de série, inclusive as séries infinitamente decrescentes, como veremos a seguir.

2.2. O problema de Huygens

Em 1672, no já mencionado encontro com Huygens, Leibniz apresentou seu método para somar séries finitas formadas por diferenças afirmando que, pelo mesmo processo, poderia somar as séries infinitas, desde que estas fossem formadas por algum tipo de regra. Sendo assim, Huygens sugeriu-lhe, como um teste, um problema que até então não tinha sido resolvido e que no ano de 1665 já tinha sido motivo de discussão entre Huygens e o matemático Jean Hudde. O problema era determinar *a soma da série dos recíprocos dos números triangulares*[28], isto é, 1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + ... + $\frac{2}{n.(n+1)}$.

No entanto, percebendo que Leibniz não possuía um conhecimento teórico muito aprofundado do que já se sabia sobre as séries, naquele momento, recomendou-lhe, como fonte de consulta, um livro muito relevante, em particular para o somatório das séries geométricas: *Opus Geometricum,* de Gregoire de Saint-Vicent's. Consultando este livro, Leibniz percebeu que as séries geométricas de Gregoire poderiam ser somadas pelo método das diferenças, bastando para isso fazer uma pequena adaptação do método utilizado no *Opus Geometricum*.

[28] A maneira como Huygens falou da soma da série dos inversos dos números triangulares é conhecida

Para somar uma progressão geométrica de segmentos, Gregoire utiliza[29], um procedimento geométrico intuitivo. Inicialmente, marca-se sobre uma linha reta os segmentos AB e BC, e, a partir destes, marca os pontos C, D, E,..., de tal forma que AB : BC = BC : CD = CD : DE = ...(Figura 1).

.____________________.__________.______.___.__.

A B C D E K

Figura 1

Em seguida, determina o ponto K pela proporção AB : BC = AK : BK. E estabelece que (AB : BK = BC : CK = CD : DK = DE: EK = ...). Gregoire afirma então, que, se AK é maior do que a soma dos segmentos AB, BC, CD e DE, certamente AK não será menor do que a soma completa de uma série infinita de segmentos, visto que estes convergem para zero. Logo, AK seria exatamente igual à soma de todos os segmentos.

A partir dos resultados acima, estabelecidos por Gregoire no *Opus geometricum*, Leibniz percebeu que, ao invés de marcar os segmentos de reta, um após o outro, isto é, com os segmentos consecutivos e adjacentes AB, BC, CD,..., como fizera Gregoire, poderia-se marcar todos os termos da série a partir do ponto A, ou seja, AB, AC, AD, AE,..., determinando, dessa forma, a proporção AB /AC = AC / AD = AD /AE = ... Leibniz definiu a série geométrica fazendo AB = 1; AC = AB / 2; AD = AB / 4; AE = AB / 8. Sendo assim, AB = 1; AC = 1/2; AD = 1/4; AE = 1/8; ..., e Leibniz irá determinar que as diferenças entre esses termos são BC = 1/2; CD = 1/4; DE = 1/8; EF = 1/16;..., concluindo dessa forma, *que os termos da série de diferenças são proporcionais aos termos da série original* [9]. Esta propriedade das séries, ou seja, a proporcionalidade entre os termos das séries geométricas, passou desapercebida por Gregoire. Por outro lado, como era típico do modo de pensar de Leibniz, ele consegue perceber a possibilidade de generalizar um método que era apenas aplicado a um caso em particular, ou seja, à soma das séries geométricas.

---

pelo anexo da versão holandesa do tratado "De Ratiociniis in ludo aleae" publicada no tomo XIV des Oeuvres de Huygens, p. 148-150 (nota 2 de Pierre Costabel do livro Leibniz a Paris).

[29] Para maiores detalhes ver o livro de *Leibniz in Paris,* de Joseph Hofmann [9], e a correspondência Leibniz – Bernoulli, 1703, postscript (LMG iii: 72).

A proporcionalidade entre os termos da série original e a série das diferenças pode ser vista nos seguintes casos dados por Leibniz. Primeiramente ele aplicou seu método na série infinita (1, 1/2, 1/4,1/8...).

(1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16,...) = 2 x (1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32,...) (Figura 2).

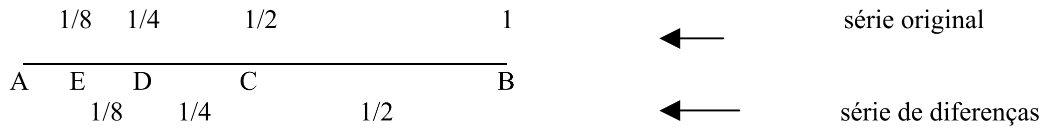

Figura 2

Considerando que BC + CD + DE + EF +...= AB, Leibniz determinou a soma da série de diferenças, ou seja: 1/2 +1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32...= 1.

Procedendo do mesmo modo, Leibniz pôde somar um grande número de séries infinitas, como a soma da série 1, 1/3, 1/9, 1/27,..., por exemplo (Figura3), que foi determinada da seguinte forma. Primeiramente Leibniz determina a soma da série de diferenças, isto é 2/3 + 2/9 + 2/27 +...= 1 pois, BC + CD + DE + EF +...= AB (Figura 3). Em seguida, aplica a proporcionalidade entre a série original a série de diferenças obtendo, dessa maneira, a soma da série (1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + ...), ou seja: (2/3) .(1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + ...) = (2/3 + 2/9 + 2/27 + 2/81 + ...). Como a soma da série de diferenças é igual a 1, pode-se concluir que (2/3).(1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + ...) =1. Daí, a soma da série original é dada por (1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + ...) =3/2.

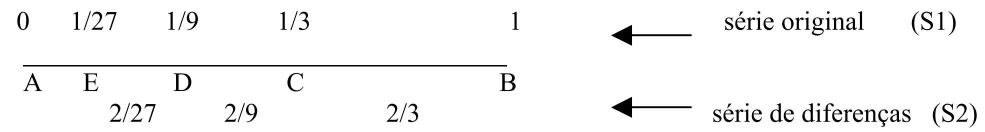

Figura 3

Deste mesmo modo, poderia-se somar diversas séries a partir de outras, desde que os termos da segunda fossem proporcionais aos da primeira. O reconhecimento de que a série obtida pelas diferenças dos termos de uma progressão geométrica é sempre proporcional à série original foi generalizado por Leibniz em “História e Origem do Cálculo Diferencial” da seguinte maneira: Sendo dada uma progressão geométrica 1, b, b^x, com x natural, podemos obter, por meio da expressão $b^x - b^{x+1} = b^x.(1 - b)$, uma nova progressão geométrica, proporcional à série original.

Como exemplo desse teorema, pode-se mostrar que os termos da série de diferenças 2/3, 2/9, 2/27..., são proporcionais aos termos da série 1, 1/3, 1/9, 1/27,... , ou seja:

$b^x – b^{x+1} = b^x.(1- b)$

$1 – 1/3 = 1.(1 – 1/3) = 2/3$

$1/3 – 1/9 = 1/3.(1 – 1/3) = 2/9$

$1/9 – 1/27 = 1/9.(1 – 1/3) = 2/27$

E assim sucessivamente.

Identificar a proporcionalidade entre as séries geométricas foi fundamental para Leibniz obter a soma de várias séries numéricas geradas pelas diferenças entre os termos de uma série dada. Por recorrência, podem ser obtidas outras séries de diferenças e suas respectivas somas, conforme nos mostra os esquemas abaixo.

Série original	1		1/3		1/9		1/27		1 /81
Primeira série de diferenças		2 / 3		2 / 9		2 / 27		2 / 81...	
Segunda série de diferenças			4 / 9		4 / 27		4 / 81...		
Terceira série de diferenças				8 / 27		8 / 81...			
Quarta série de diferenças					16 / 81...				

Conforme vimos em nosso exemplo anterior, a soma da primeira série de diferenças 2/3 + 2/9 + 2/27 + ..., é igual a um, ou seja, é igual ao primeiro termo da série original. Observando esta propriedade das séries geométricas proporcionais, Leibniz deduziu o seguinte teorema: Dessa forma, Leibniz chega ao seguinte teorema: "*que em uma série decrescente ao infinito, seu primeiro termo é igual à soma de todas as diferenças dessa série*." [30]

Sendo assim, esse teorema pode ser aplicado a muitas séries, desde que as mesmas sejam proporcionais entre si, como nos mostra o esquema abaixo:

(S1) 1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + 1/143 + ... = 3/2

(S2) 2/3 + 2/9 + 2/27 + 2/81 + 2/143 + ... = 1

(S3) 4/9 + 4/27 + 4/81 + 4/143 +... = 2/3

(S4) 8/27 + 8/81 + 8/143 + ... = 4/9

(S5) 16/81 + 16/143 + ... = 8/27

Como exemplo, podemos verificar que a soma da seqüência (S3) é igual a 2/3. Para isso, basta considerar a proporcionalidade entre as séries (S2) e (S3) e escrever (S3) como (2/3) x (S2). Como a soma da série (S2) (2/3 + 2/9 + 2/27 + 2/81 + 2/143 + ...) é igual a 1, temos que (2/3) x (2/3 + 2/9 + 2/27 + 2/81 +...) = 2/3 x 1 = 2/3. Esse procedimento será válido para as demais séries geométricas apresentadas no esquema acima.

Fica claro, no esquema acima, que cada série de diferenças tem como soma o primeiro termo da série anterior. Nesse caso, pode-se mostrar, que as somas das séries proporcionais podem ser obtidas através da expressão definida por Leibniz como1/(p – 1). Para isso, tomemos como exemplo a série 1/1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32,...e a série de suas diferenças, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32. Temos que, pela conclusão de Leibniz, 1/2 + 1/4 +1/8 + 1/16 +1/32 = 1/(2-1) = 1.

A partir dessas descobertas iniciais sobre o somatório das séries geométricas infinitas, Leibniz buscou uma solução para o problema proposto por Huygens, que é

[30] Leibniz an L'Hospital, pp.259-260.

encontrar a soma dos recíprocos dos números triangulares, ou seja, (1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 +...). Para isso, aplicou o método das diferenças entre os termos sucessivos da série harmônica 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5,... e chegou ao seguinte resultado:

1 – 1+ 1/2 - 1/2 + 1/3 – 1/3 + 1/4 –1/4 +...= 0

1 – (1 - 1/2) – (1/2 - 1/3) – (1/3 - 1/4) – (...) = 0

– (1 - 1/2) – (1/2 - 1/3) – (1/3 - 1/4) – (...) = -1

1/2 + 1/6 + 1/12 +1/20 +...= 1.

Chegando a esse resultado, Leibniz observou que a seqüência dos recíprocos dos números triangulares é duas vezes a seqüência (1/2, 1/6, 1/12, 1/20,...), isto é: 1, 1/3, 1/6, 1/10, ...) = 2.(1/2, 1/6, 1/12, 1/20,...). Sendo assim, Leibniz resolveu o problema de Huygens, multiplicando por 2 a série 1/2 + 1/6 + 1/12 +1/20 +...= 1, ou seja, 1/2 + 1/6 + 1/12 +1/20 +... é igual a 1, a soma dos recíprocos dos números triangulares pôde ser encontrada da seguinte forma: (1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + ...) = 2.(1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 +...) = 2.(1) = 2.

Conforme podemos examinar[31] no livro " Arithmetical Triangle" [14], Leibniz observou que poderia chegar ao mesmo resultado, se representasse os recíprocos dos números triangulares pelas diferenças dos termos consecutivos da série 2.(1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 +...), ou seja $\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$. Assim, para n = 1 temos $\frac{2}{1}-\frac{2}{2}=1$; para n = 2 $\Rightarrow$ $\frac{2}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$; para n = 3 $\Rightarrow$ $\frac{2}{3}-\frac{2}{4}=\frac{1}{6}$; para n = 4 $\Rightarrow$ $\frac{2}{4}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$ e daí sucessivamente. Pode-se observar, que ao somarmos os inversos dos números triangulares como uma diferença de dois termos, isto é $\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$, $\frac{2}{1}-\frac{2}{2}$ + $\frac{2}{2}-\frac{2}{3}$ + $\frac{2}{3}-\frac{2}{4}$ + $\frac{2}{4}-\frac{2}{5}$+... =

[31] Arithmetical Triangle, p.105.

$$2.(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots) = 2.(1-0) = 2,$$ como queríamos mostrar[32].

Após ter resolvido o problema de Huygens, Leibniz reuniu seus conhecimentos iniciais sobre as séries infinitas, numa tabela que foi denominada por ele como Triângulo Harmônico. Esta tabela contém as séries das diferenças tomadas a partir da série harmônica infinita 1, 1/ 2, 1/3, 1/ 4, 1/ 5, 1/6,..., cuja construção veremos no próximo item.

2.3. O Triângulo Harmônico

Para construir o triângulo harmônico abaixo, Leibniz toma como base a série harmônica, ou seja, ele considera as diferenças entre os termos da série 1, 1/2, 1/3, 1/ 4, 1/ 5, 1/6,..., determinando, dessa forma, a primeira série de diferenças: 1/2, 1/6, 1/12, 1/20 , 1/30, e, em seguida, Leibniz determina as diferenças entre os termos dessa série[33] obtendo a segunda série de diferenças que é 1/3, 1/12, 1/30, 1/60, etc. Procedendo da mesma maneira, ele ordena as séries, de tal forma que a primeira linha seja igual à primeira coluna, a segunda linha igual à segunda coluna e assim sucessivamente.

[32] Aplicando o limite para resolver o somatório dessa série, podemos chegar ao mesmo resultado:

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{2}{n(n+1)} = {}_{n}\lim_{\infty} \sum_{n=1}^{n} 2.(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}) = 2.(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}) + 2.(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + 2\ .(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) +$$
$$2.(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}) + \ldots = 2.(1 - \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots\ \frac{1}{n+1}) = {}_{n}\mathrm{Lim}_{\infty}(2-\frac{2}{n+1}) = 2$$

[33] Para descrever o soma dos recíprocos dos números triangulares utilizamos as seguintes referências: *From the calculus to set Theory* de H.J.M.Bos, p.61. *Pascal´s Arithmetical Triangle* de A.W.F. Edwards.

Triângulo Harmônico

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \frac{1}{140} & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{105} & & &
\end{array}$$

Como cada série do Triângulo Harmônico é obtida pelas diferenças dos termos da série anterior, a soma de cada uma delas será sempre o primeiro termo da série precedente, pelo cancelamento dos termos simétricos. Por exemplo, somando as diferenças entre os termos consecutivos da série harmônica $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} ...)$, temos: $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + ... = 1$. Como essas diferenças correspondem à série 1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + 1/30 + ... = 1, pode-se, pelo mesmo processo, obter as somas de todas as outras séries do triângulo harmônico.

Após ter construído o triângulo harmônico, Leibniz observou que a série de diferenças (1/2, 1/6, 1/12, 1/20,...) multiplicada por 2, resulta na série dos inversos dos números triangulares, isto é, 2.(1/2, 1/6, 1/12, 1/20, ...) = (1, 1/3, 1/6, 1/10, ..) e que a série de diferenças $(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{60}, \frac{1}{105})$ multiplicada por 3, resulta na série dos recíprocos dos números piramidais, 3.(1/3, 1/12, 1/30, 1/60, ...) = (1, 1/4, 1/10, 1/20, ...). Em outros termos, basta multiplicar cada série, pelo inverso do seu primeiro termo para obter as demais séries formadas pelos inversos dos números figurados.

Triângulo Harmônico		Triângulo dos inversos dos números figurados
1x $\left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \ldots\right)$	=	1 1 / 2 1/ 3 1/ 4 1/5 1/ 6 1/7...
2 x $\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{42} \ldots\right)$	=	1 1 / 3 1/ 6 1/10 1/15 1/21...
3 x $\left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{105} \ldots\right)$	=	1 1 / 4 1/10 1/20 1/35 ...
4 x $\left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{140} \ldots\right)$	=	1 1 / 5 1/ 15 1/ 35 ...
5 x $\left(\frac{1}{5} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{105} \ldots\right)$	=	1 1 / 6 1/21 ...

Como as séries dos inversos dos números figurados são proporcionais às séries das diferenças do triângulo harmônico, conseqüentemente, suas respectivas somas também serão proporcionais. Sendo assim, a soma das séries dos inversos dos números figurados serão obtidas pelas somas das séries do triângulo harmônico. Por exemplo, sabendo que a soma da série de diferenças 1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + ... é igual a 1, como vimos anteriormente na página 37, a soma da respectiva série proporcional 1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + ... será igual 2, visto que 1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + ... = 2.(1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + ...) = 2.1. Daí, 1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + ...= 2. (1) = 2. Procedendo do mesmo modo para as demais séries dos recíprocos dos números figurados, temos:

1 + 1/4 + 1/10 + 1/20 + 1/35... = 3. (1/3 + 1/12 + 1/30 + 1/60 + ...) = 3.(1/2) = 3/2; 1 + 1/5 + 1/15 + 1/35 + ...= 4.(1/4 + 1/20 + 1/60 + 1/140 + ...) = 4. (1/3) = 4/3.

Em “História e Origem do Cálculo” [4], Leibniz organiza essas somas da seguinte maneira:

1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 + 1/15 + 1/21 + 1/28 + ... = 2/1

1 + 1/4 + 1/10 + 1/20 + 1/35 + 1/56 + 1/84 + ... = 3/2

1 + 1/5 + 1/15 + 1/35 + 1/70 + 1/128 + 1/210 + ... = 4/3

Veremos, a seguir, os motivos pelos quais Leibniz denominou o triângulo formado pelos dos inversos dos números figurados de "triângulo harmônico", recíproco do triângulo aritmético de Pascal [12].

A reciprocidade entre o triângulo aritmético e o harmônico aparece na própria construção dessas duas tabelas[34]. Conforme relatou Leibniz em "Nova Algebra Promotio"[11], *"a base do Triângulo Aritmético, são os números naturais dados pela progressão aritmética 1, 2, 3, 4, 5, etc., e a base do Triângulo Harmônico são os recíprocos dos naturais, que formam a série harmônica 1, 1 / 2, 1/ 3, 1/ 4, 1/5, etc."* Em seguida ele esclarece o significado do termo recíproco: *"os números harmônicos são recíprocos dos naturais, pois da mesma forma que 1/2 está para 1/5, 5 está para 2*".[35]
No Triângulo Aritmético, cada termo de uma determinada série é obtido pela adição dos termos das séries precedentes. Assim, cada termo da série dos números triangulares, fornece a soma dos números naturais, ou seja, 1+2+3+4 =10. Os piramidais dão a soma dos triangulares, 1+3+6+10 = 20, e assim, todas as séries serão obtidas. Por outro lado, no Triângulo Harmônico, os recíprocos dos naturais dão a soma dos recíprocos dos triangulares, os recíprocos dos triangulares dão a soma dos piramidais, e assim daí por diante.

No Triângulo Aritmético, a soma dos números de uma coluna, do primeiro até o último termo inclusive, é dada pelo número da coluna seguinte que está localizado na mesma linha do último termo da coluna antecedente. Por exemplo: os números naturais de 1 até 5 têm como soma o número triangular 15, os triangulares de 1 até 21 têm como soma o número piramidal 56, todos os piramidais de 1 até 56 têm como soma o número

[34] As analogias entre o triângulo aritmético e o harmônico, foram relatadas por Leibniz no texto *Nova Algebra Promotio* e nas correspondências com Oldenburg de 3 de fevereiro, 16/26 abril e 14/25 de maio, todas do ano de 1673.
[35] Traduzido do texto *Nova Algebra Promotio* do Latim para o Francês por Michel Serres em *Le Système de Leibniz*, pp. 187; 188.

bitriangular 126 e daí por diante.

Triângulo Aritmético

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6.
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252

No texto "Nova Algebrae Promotio" [11], Leibniz mostra que a soma de uma coluna ou de uma determinada linha do triangulo aritmético é dada pelo termo da linha ou da coluna seguinte. Por exemplo: a soma da segunda coluna que contém os números naturais de 1 até 6 é igual a 21, que é o último te termo da terceira coluna da esquerda para direita. Leibniz também dá como exemplo a soma dos números triangulares de 6 até 21 que é dada da seguinte forma: 56 – 4 = 6 + 10 + 15 + 21, ou seja, é a diferença entre os extremos da coluna seguinte.

Quanto ao Triângulo Harmônico, já tivemos a oportunidade de verificar as suas principais propriedades. Porém, para dar prosseguimento a nossa comparação com o Triângulo Aritmético de Pascal retomaremos aqui algumas de suas propriedades.

Enquanto que no Triângulo Aritmético as suas séries são determinadas por somas, no Triângulo Harmônico as séries são obtidas por diferenças sucessivas dos termos da série harmônica 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, e por intermédio da multiplicação de cada uma dessas séries das diferenças por um número natural diferente de zero. Assim, multiplicando as diferenças da série harmônica por 2, temos a seqüência dos recíprocos dos triangulares, isto é 2x ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$...) = 1, 1/3, 1/6, 1/10, 1/15...

Para os piramidais temos $3x\,(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{60}, \frac{1}{105} ...) = 1, 1/4, 1/10, 1/20, 1/35$ ...

e assim por diante. Como cada série do Triângulo Harmônico foi obtida pelas diferenças dos termos da série anterior, a soma de cada uma delas será sempre o primeiro termo da série precedente. Por exemplo, a soma da seqüência 1, 1/3, 1/6, 1/10, 1/15... é igual ao primeiro termo da seqüência antecedente, a saber o número 1/2. Assim, a reciprocidade entre os triângulos aritmético e harmônico aparece na determinação de seus termos. Enquanto, no triângulo aritmético, cada termo é obtido pela soma de dois termos antecedentes da linha anterior (1 + 3 = 4), no triângulo harmônico cada termo é a diferença de dois termos da linha anterior à direita (1/ 6 = 1/2 - 1/3). Pelo reconhecimento das propriedades de cada um desses triângulos, Leibniz pôde obter um instrumento de grande utilidade para somar vários tipos de séries de números inteiros, fracionários, finitos e infinitos.

Triângulo Harmônico.

$$
\begin{array}{llllll}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\[2ex]
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} \\[2ex]
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & \\[2ex]
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \frac{1}{140} & & \\[2ex]
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{105} & & &
\end{array}
$$

No ano de 1673, Leibniz redigiu uma importante carta para Oldenburg [13], através da qual relatou o seu encontro com alguns membros Royal Society of London, numa reunião que ocorreu em Londres, na casa do químico Robert Boyle (1626-1691). Nesse encontro, Leibniz têve a oportunidade de falar sobre seus conhecimentos das propriedades dos números e de seu método das diferenças. Entretanto, o matemático Jean Pell (1610-1685), endereçou-lhe uma crítica, alegando que alguns resultados similares ao seu já tinham sido obtidos pelo matemático François Regnauld e divulgado por Gabriel Mouton (1618-1694) em seu livro *Obsevationes diametrorum solis et lunae apparentium* (Observações dos diâmetros aproximados do sol e da lua) e que, por este motivo, ele deveria consultar os livros desse autor. Consultando o livro de Mouton, Leibniz confirma a afirmação de Pell e, por recomendação de Oldenburg, redige uma carta, para ser inserida no comércio epistolar de Londres, fazendo uma descrição resumida de seus conhecimentos sobre as séries numéricas, visando refutar as possíveis acusações de plágio.

"[...] Para mim há um método de um certo gênero de diferenças, que chamei, geratrizes, de obter os termos de uma série qualquer continuamente crescente ou decrescente. Por outro lado, chamo as diferenças, geratrizes, se as dadas diferenças da série, a diferença das diferenças e as próprias diferenças das diferenças etc. entre os termos sucessivos. Em seguida toma-se as diferenças das diferenças, repetindo-se o processo sucessivamente. Após terem sido obtidas todas as diferenças possíveis, a seqüência das diferenças geratrizes será formada pelos primeiros termos de cada uma das seqüências das diferenças..."[36]

---

[36]"... j'ai rappelé a l'ocacasion de la conduite de la conversation, que pour moi il a une méthode d'un certain genre des différences que j'appelle génératrices, de recueillir les termes d'une série quelconque continuellement croissante ou décroissante. D'autre part j'appelle les différences, génératrices, si les différences donnés de la série, la différence des différences et les différences elles-mêmes des différences des différences etc. sont trouvées, et si la série est établie d'après le premier terme, et la première différence des différences des différences etc., cette série sera celle des différences génératrices; comme si la série continuellement croissante ou décroissante était a, b, c, d." Correspondência de Leibniz a Oldenburg de 3 de fevereiro 1673, p.11. Minha tradução.

Nessa carta Leibniz ele também menciona que, de acordo com uma descoberta feita em Paris no ano de 1672 de que as diferenças entre os números quadrados são os números ímpares, procurou um modo da encontrar as diferenças de todo tipo de potências. Baseado nesse resultado, pôde proceder da mesma forma em relação à série dos números cúbicos, como nos mostra o esquema abaixo.

0 0 0...

6 6 6 6...

6 12 18 24 30...

1 7 19 37 61 91...

série cúbica → 0 1 8 27 64 125 216...

Pode-se observar no esquema acima, que as diferenças dos números cúbicos (1- 0) = 1; (8 - 1) = 7; (27- 8) = 9; (64-27) = 37; etc não geram uma série regular como no caso dos números quadrados. Sendo assim, Leibniz tirou novamente as diferenças da primeira série de diferenças 1, 7, 19, 37, 61,... e encontrou a série 6, 12, 18, 24... que, por sua vez, fornecem as diferenças 6, 6, 6,... a partir das quais as demais diferenças serão todas nulas. Apesar de não ter encontrado nenhuma categoria específica de números, Leibniz pôde tirar as seguintes conclusões: na medida em que a série dos números cúbicos cresce infinitamente, as diferenças geratrizes determinam a série finita (0, 1, 6, 6) e que esses números são suficientes para produzir todos os termos da série cúbica infinita, desde que os mesmos sejam multiplicados e somados ordenadamente pelos números combinatórios que estão dispostos no Triângulo Aritmético. Assim, para encontrar o quarto termo da seqüência cúbica, que é 27, basta multiplicar cada uma das geratrizes 0, 1, 6, 6 pelos respectivos números combinatórios da quarta linha do triângulo aritmético, (1, 3, 3, 1). Em seguida soma-se cada um dos produtos para encontrar o número procurado, ou seja 0x1 + 1x3 + 6x3 + 6x1 = 27. Esse procedimento pode ser generalizado para qualquer termo da seqüência cúbica como pode ser visto no triângulo aritmético de Pascal[37]:

Triângulo Aritmético

Série cúbica {0, 1, 8, 27, 64, 125} **geratrizes {0, 1, 6, 6}**

1	1								**0**x1=0
2	1	1							**0**x1 + **1**x1=1
3	1	2	1						**0**x1 + **1**x2 + **6**x1= 8
4	1	3	3	1					**0**x1 + **1**x3 + **6**x3 + **6**x1=27
5	1	4	6	4	1				**0**x1**+1**x4 **+ 6**x6 **+ 6**x4 **+ 0**x1= 64
6	1	5	10	10	5	1			**0**x1 + **1**x5 + **6**x10 + **6**x10 + **0**x5 + **0**x1=125 .
7	1	6	15	20	15	6	1		**0**x1 + **1**x6 + **6**x15 + **6**x20 + **0**x15 + **0**x6 + 0x1=216
.									
8	1	7	21	35	35	21	7	1	.
9	1	8	28	56	70	56 ...		1	
10	1	9	36	84	126	126 ...		1	
11	1	10	45	120	210	252...		1	

Leibniz afirma que "prova por análise que o seu método é universal", porém, não apresenta, na carta [13], uma expressão geral para definir os termos da série cúbica através da seqüência das geratrizes. Ele apenas descreve esse procedimento, conforme nos mostra o seguinte trecho carta:

"... o primeiro termo, 0 *, é composto da primeira diferença geratriz tomada uma vez; o segundo termo, 1, é composto do segundo uma vez e da segunda uma vez. O terceiro termo da série, que é o 8, é igual a primeira diferença, que é 0, uma vez, a segunda duas vezes e a terceira 6 uma vez: de modo que 0 x 1 + 1 x 2 + 6 x 1 = 8. O quarto termo 27 é a primeira diferença 0 uma vez, a segunda 1 três vezes, a terceira 6 três vezes, a quarta 6 uma vez: assim, 0 x1 + 1x 3 + 6 x 3 + 6 x 1 = 27 etc., eu provo por*

[37] Nessa carta, Leibniz refere-se ao triângulo aritmético como sendo de Pascal, referência que não aparece na Arte Combinatória e em outras correspondências.

análise que isto é universal...".[38] Entretanto, podemos representar os termos da série cúbica utilizando a notação atual $0.C_{n,0} + 1.\, C_{n,1} + 6.\, C_{n,2} + 6.\, C_{n,3} + 0.\, C_{n,4} + ... + 0.\, C_{n,n} = n^3$.

Na ocasião em que Leibniz apresentou seus resultados sobre as séries, alguns cientistas como Wallis, Briggs, Newton e Pascal, já tinham desenvolvido alguns trabalhos nesta área. Não obstante, ele argumenta que não poderia ser acusado de plágio, pois não tinha conhecimento das obras desses cientistas[39]. *"... Por outro lado eu reivindico minha honestidade por dois motivos. Primeiramente eu mostrarei meus esquemas, nos quais não aparece somente minha invenção, mas o modo e a facilidade de inventar; em seguida se eu acrescentei certas coisas de muito importância anunciadas por Regnald e Mouton, não me parece verdade que eu as tenha incluído após ontem à tarde, pois não seria fácil nem mesmo para um tradutor".*

Nessa carta Leibniz fez uma crítica a Mouton e a Pascal, por eles não terem percebido as propriedades do triângulo aritmético e da harmonia existente entre os números combinatórios que o compõem. Ele diz que essas propriedades foram observadas em sua dissertação sobre a Arte Combinatória, onde a primeira coluna da tabela é a coluna das unidades, a segunda dos números naturais, a terceira dos números dos triangulares e assim por diante. Ele acrescenta que qualquer termo de uma coluna do triângulo aritmético é formado pela soma dos termos da coluna precedente, e que por

[38] "... le premier terme 0 est composé de la première différence génératrice prise une fois; le deuxième 1 d'aprés la première 0 et la seconde 1 une fois. Le troisième 8 d'aprés la première 0 une fois, la seconde 1 deux fois et le troisième 6 une fois: en effet 0 x 1 + 1 x 2 + 6 x 1 = 8. Le quatrième 27 d'aprés le première terme 0 une fois, la seconde 1 trois fois, le troisième parti 6 trois fois, la quatrième 6 une fois: en effet, 0 x1 + 1x 3 + 6 x 3 + 6 x 1 = 27 etc., je prouvé pour analyse que c'est universel... ". Correspondência de Leibniz a Oldenburg de 3 de fevereiro 1673, p.13. Minha tradução.

[39] D'autre part je revendiquerai mon honnêteté par deux arguments. D'abord je montrerai mes schémas même répandus, dans lesquels apparait non seulement mon invention, mais le mode et la facilité d'inventer; ensuite si j'ajoute certaines choses de tres grande importance annoncées par Regnald et Mouton qu'il n'est pas vraisemblable que j'ai attachées depuis hier au soir et qui ne peuvent facilement être réclamées d'un Trancripteur. Correspondência de Leibniz a Oldenburg de 3 de fevereiro 1673, p.12.

isso não é necessário fazer um cálculo desagradável para continuar a tabela, como sugeriu Mouton, visto que, as séries dos números da tabela já são previamente dados e calculados. Leibniz encerra esse trecho da carta com o seguinte comentário: "*...eu me admirei que uma propriedade tão evidente em relação a esses tipos de números não tivesse sido observada. Mas este é, certamente, um caso raro em que as grandes idéias não aparecem só para os grandes espíritos, mas também para alguns espíritos medíocres...*".[40]

Em relação a Pascal, essas críticas não estão corretas, pois como se sabe, as propriedades mencionadas por Leibniz em sua carta [13] já tinham sido estabelecidas por Pascal, em 1654, em seu "Tratado do Triângulo Aritmético" [12].

Esta correspondência além de nos remeter ao ambiente científico daquela época, também nos permite compreender de que maneira ocorreram os estudos iniciais de Leibniz sobre seus primeiros resultados, dentre os quais podemos destacar:

1) O reconhecimento de que a diferença entre os termos extremos de uma série finita é igual à soma de todas as suas diferenças.

2) O reconhecimento de que a soma de uma série de diferenças decrescente ao infinito é sempre igual ao primeiro termo da série original.

3) O reconhecimento de que as diferenças entre os termos de uma série geométrica são sempre proporcionais aos termos da série original.

4) A invenção do Triângulo Harmônico, recíproco do Triângulo Aritmético.

5) A descoberta de que as diferenças geratrizes devidamente combinadas com os

[40] "...ces nombres sont ceux que j'ai coutume d'appeler combinatoires, au sujet desquels j'ai beaucoup traité dans une petite dissertation au sujet de L'Art combinatoire, et que les uns apellent ordres numériques, les autres dans l'espèce première colonne des unités, second des nombres naturels, troisième des triangulaires, au sujet desquels le traité de Pascal demeure sous le tritre de Triangle Aritmétique; dans lequel pourtant je m'étonne qu'une propriété si remarquable et si naturelle des nombres de ce mode n'ait pas été observée. Mais c'est certainement un certain cas dans la recherche qui n'offre pas toujours la plus grande chose aux plus grands esprits, mais souvent encore quelqu'une aux médiocres". Correspondência de Leibniz a Oldenburg de 3 de fevereiro 1673, p.14. Minha tradução.

números figurados podem gerar os termos de uma série finita.

Após desenvolver seu método, Leibniz estava convicto de que poderia somar tanto as séries finitas quanto as infinitas, formadas por números inteiros ou fracionários. Para isso basta aplicar as operações fundamentais de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Nos trabalhos de Leibniz sobre as séries, observamos o quanto pode ser útil encontrar um novo ponto de vista para um antigo problema, ou seja, há pensamento e criatividade também em observar aquilo que já foi inventado e, a partir daí, descobrir novas relações que podem ser generalizadas.

Nesse primeiro capítulo, visamos destacar os primeiros conhecimentos de Leibniz referentes às séries numéricas, que começam a surgir, primeiramente, na "Arte Combinatória", onde ele empregou a série geométrica de razão dois para determinar a soma de todas as combinações de um número e utiliza, em sua teoria das variações, uma conversão de uma progressão aritmética em uma progressão harmônica. Essa inserção das séries em sua teoria das combinações foi o primeiro exemplo de seu interesse por esse assunto, o que viria ser confirmado quatro anos mais tarde em suas primeiras correspondências científicas.

No que tange à originalidade de suas descobertas, pode-se observar algumas peculiaridades na tabela das complexões que não se encontram no triângulo aritmético de Pascal. Por exemplo, a inclusão das séries numéricas nas duas últimas linhas da tabela, fornecendo o total de combinações através de seus termos; a obtenção dos números combinatórios pela soma dos números combinatórios da coluna precedente; e uma fórmula para as combinações de n elementos tomados dois a dois [n. (n-1)] / 2. No entanto, alguns dos teoremas utilizados por Leibniz na "Arte Combinatória", já tinham sido abordados anteriormente por outros matemáticos, como Cardano que, no ano de

1570, em seu livro *De proportionibus,* utilizou para soma dos números combinatórios $C_{n,\,r}$ a regra $2^n - 1$, embora não se saiba se essa regra foi originalmente descoberta por ele[41]. Pode-se citar também os nomes de outros matemáticos que contribuiriam para padronizar a moderna teoria das combinações como Stifel, Pappus, Wallis, Schooten e Pascal[42].

Em suma, podemos destacar os seguintes resultados da Dissertação sobre a Arte Combinatória como sendo originais.

1. A regra da adição para se determinar de forma direta um número combinatório da tabela aritmética. Exemplo: o número de combinações de 7 elementos 4 a 4, a saber, 35, é obtida pela soma das combinações de 6 elementos tomados 3 a 3 e de 6 elementos 4 a 4 respectivamente. Logo, a combinação formada pelo *número* 7 e o *expoente* 4 será igual a $C_{6,3} + C_{6,4} = C_{7,4} \Rightarrow 20 + 15 = 35$. De uma forma geral uma combinação é obtida pela relação $C_{n,\,p} = C_{n-1,\,p} + C_{n-1,\,p-1}$.[43]
2. Uma tabela[44] explicando como as dez combinações referentes a cinco elementos tomados três a três, isto é, $C_{5,\,3}$ pode ser derivada das combinações de dois, três e quatro elementos tomados dois a dois; $C_{5,3} = C_{2,2} + C_{5,2} + C_{4,2} \Rightarrow 10 = 1 + 3 + 6$.
3. Uma observação (sem prova)[45] de que se n é um número primo, então divide as combinações $C_{n,r}$ com $1 < r < n - 1$. Exemplo: seja $n = 5$, pode-se mostrar que os números $C_{5,\,1}$, $C_{5,\,2}$, $C_{5,3}$ e $C_{5,4}$ são divisíveis por 5, pois $C_{5,1} = 5$; $C_{5,2} = 10$; $C_{5,3} = 10$ e $C_{5,4} = 5$ são todos múltiplos de 5.

Em relação às séries geométricas, Leibniz não apresentou nenhuma grande descoberta na "Arte Combinatória", levando em conta que as mesmas já tinham sido

[41] Conforme a observação feita por A. Edwards no livro *Pascal's Arithmetical Triangle* [14].
[42] Para um maior aprofundamento dessas questões, consultar Pascal's A. Triangle de A. W. F. Edwards; edit. C. Griffin,, London
[43] Arte Combinatoria, p. 118.
[44] Idem, nota 2, pp. 119 .
[45] Idem, teorema 7, p. 120.

exploradas por alguns matemáticos que o precederam como Jonn Wallis (1616-1703) que investigou esse tipo de série em seu livro *Arithmetica Infinitorum*. Gregoire de Saint Vicent, que no livro *Opus geometricum* determinou a soma de várias séries geométricas. Destacamos também o nome de Nicolaus Mercator (1620-1687) que, segundo Leibniz, foi o primeiro a determinar a quadratura do círculo por uma série infinita. Não obstante, o método das diferenças foi, sem dúvida, a primeira grande descoberta de Leibniz em sua passagem por Paris. Este método, que foi fundamentado pelas considerações da lógica e da filosofia, surgiu de uma percepção singular de Leibniz, como freqüentemente ocorria em suas descobertas e invenções.

Conforme já havíamos destacado anteriormente, outro resultado relevante em relação às séries foi o reconhecimento de que as diferenças obtidas entre os termos sucessivos termos de uma série geram uma nova série proporcional à série dada. O reconhecimento da proporcionalidade entre os termos das séries das diferenças e da série original permitiu-lhe generalizar essa propriedade para outros resultados; não somente para a soma dos recíprocos dos números triangulares, como tinha proposto Huygens, mas também para sistematizar no triângulo harmônico as somas de outras séries.

Como vimos no início deste capítulo, Gregorie obteve um método que permitia somar várias séries geométricas, no entanto, não percebeu que o mesmo poderia ser sistematizado e generalizado para somar vários tipos de séries numéricas além das geométricas, como o fez Leibniz. O que diferenciava Leibniz de outros matemáticos, que até possuíam um conhecimento teórico maior do que o seu, não estava relacionado somente aos resultados obtidos, mas sobretudo o método pelo qual chegava a tais resultados, como podemos constatar em sua carta para Galloys no ano de 1678 quando ele diz que "*minhas soluções são sempre universais, isto é, eu posso relacioná-las a um* *número infinitos de exemplos...*"

A carta de Leibniz [13], enviada a Oldenburg no ano de 1673, nos relata alguns dos obstáculos com os quais deparou em sua passagem por Londres, que era o reduto de Newton e de seus seguidores. Nessa carta, Leibniz descreveu propriedades do seu método das diferenças aos cientistas que estavam presentes ao encontro, na casa de Robert Boyle, dentre estes, o matemático inglês Jean Pell, que criticou Leibniz por não ter ciência dos progressos alcançados no assunto das séries numéricas de sua época. No entanto, conforme destacou J. Hofmann em *Accessio ad Arithmeticam Infinitorum*, o matemático Jean Pell, embora fosse considerado um dos principais matemáticos daquela época, trabalhou especificamente nos métodos de aproximação numérica para solução de equações e, demonstrava seus resultados frequentemente, por meio de exemplos particulares, nunca expondo de forma generalizada suas idéias. Hofmann acrescenta que soma-se a isso a melancolia de seus sessenta anos e o seu mau humor, que não lhe permitia facilidade para se expressar. Ao contrário, o jovem Leibniz era dotado de extrema facilidade de comunicação. Embora a sua primeira visita a Londres não tenha sido um grande sucesso, em conseqüência das críticas recebidas por Pell e Hooke, ele foi formalmente aceito como um membro da Royal Society of London.

CAPÍTULO 2

OS FATORES FILOSÓFICOS QUE CONDUZIRAM LEIBNIZ EM SUAS INVENÇÕES.

No primeiro capítulo de nossa pesquisa nos empenhamos para destacar dos trabalhos iniciais de Leibniz, seus escritos sobre a questão das séries, que precederam a invenção do cálculo diferencial. No entanto, podemos observar que esses trabalhos não eram de caráter estritamente matemático devido ao enlace estabelecido por Leibniz entre a filosofia e a matemática e que permeou tanto o método das diferenças, quanto a Arte Combinatória. No caso do método das diferenças, Leibniz obteve a soma das séries numéricas a partir de dois princípios filosóficos: o princípio de identidade e o axioma de Euclides (que relaciona o todo com suas partes). Já na Arte Combinatória, Leibniz retoma antigos conceitos da filosofia grega, como os silogismos de Aristóteles, e os associa às combinações desenvolvidas pelos matemáticos italianos do século XVI, como Tartaglia e Cardano por exemplo. Contudo, o recurso a esses pensadores não implica numa falta de originalidade em suas invenções ou em suas descobertas, pelo contrário, a retomada dos conceitos desses pensadores, sejam eles matemáticos ou filosóficos, foi feita sob novos pontos de vista, de tal forma que os mesmos passam a se distinguir daqueles que lhe deram origem pela possibilidade de aplicá-los a uma infinidade de problemas, e não somente a problemas particulares como ocorria com grande parte dos métodos elaborados até então. Um traço marcante do pensamento leibniziano reside na sua abordagem a certos conceitos científicos, como as combinações e as séries, que não é somente quantitativa, mas também qualitativa e que não é somente matemática, mas também filosófica, e isto propiciou uma transitividade entre a ciência e a filosofia como pode ser constatado no seguinte pensamento: "*... à medida que os espíritos dominam a matéria, produzem nela combinações maravilhosas.*

Isso aparece pelas mudanças que os homens fizeram para esclarecer a superfície da terra, como pequenos deuses que imitam o grande arquiteto do universo, embora seja apenas pelo emprego dos corpos e suas leis" [46]

Nesse trecho do livro Novos Ensaios[15], Leibniz coloca, com rara elegância, a sua visão científica do mundo, que inclui, dentre outras coisas, o aspecto filosófico das combinações e a maneira pela qual as mesmas estão diretamente relacionadas com a sua *arte da invenção* quando compara os homens a pequenos deuses. Assim, todas as coisas concebidas no universo, foram geradas por combinações. Essa predileção por um pensamento sempre abrangente e nunca particular, que foi um dos pontos marcantes da filosofia de Leibniz, se confirma na Arte Combinatória pela composição entre diferentes conceitos da matemática, da lógica e da filosofia. A pesquisa sobre as variações, por exemplo, é justificada por passagens como a seguinte: "... *a doutrina profunda das variações, que é a única a conduzir imediatamente o espírito obediente a si através de todo infinito, abrange, ao mesmo tempo, a harmonia do mundo as construções íntimas das coisas e a série das formas"* [47].

Este trecho pode ser visto como uma síntese filosófica da Arte Combinatória, pois Leibniz refere-se às variações como uma multiplicidade obtida a partir das combinações de coisas. Numa primeira etapa, trata-se de encontrar todas as combinações possíveis de coisas, ou seja, todas as misturas, todos os encadeamentos, todas as possibilidades de união. Sendo estabelecidas todas as combinações possíveis, deve-se obter, dentro de cada uma delas, as variações de relação entre as partes que a compõe. Com esses dois instrumentos, as variações e as combinações, mais o recurso à aritmética, Leibniz encontrou o suporte necessário para por em prática a sua arte da invenção, da qual

---

[46] Novos Ensaios, p.268.

[47] "...la doctrine profonde des variations qui seule conduit bientôt l'esprit obéissant à soi à travers tout l'infini, embrasse en même temps et l'harmonie du monde et les constructions intimes des choses et la série des formes." Arte Combinatória, pp.130-131. Minha tradução.

falaremos mais adiante.

Na Arte Combinatória já começam a despontar os primeiros princípios de seu sistema filosófico, que já foi plenamente estabelecido tempos depois.

No item 1, investigaremos a fundamentação filosófica de suas descobertas iniciais sobre as séries na "Arte Combinatória". Ainda neste item, veremos como as combinações e os silogismos foram utilizados para constituir uma *Lógica da Invenção,* que serviu como base para desenvolver a sua *arte da Invenção,* que analisaremos no item 2. No item 3, veremos como Leibniz emprega a *aritmética* na construção de uma *linguagem característica*, que foi o principal instrumento para *arte da invenção* e, no item 4 faremos uma breve revisão da questão que envolve as relações entre *o todo e as partes,* buscando examinar os fundamentos filosóficos que possibilitaram o desenvolvimento da *teoria das complexões.* E, finalmente, no item 5, examinaremos o *princípio da identidade,* que foi o principal fundamento para do *método das diferenças*.

1. A Arte Combinatória

Como vimos no capítulo I do nosso trabalho, a idéia central da Arte Combinatória é a proposta de uma escritura universal[48], através da qual seria possível solucionar os mais diversos problemas, sejam eles morais, científicos, políticos ou teológicos. Além disso, as combinações seriam de grande utilidade para a arte da invenção, pois, segundo Leibniz "*basta saber combinar as noções simples para poder encontrar todas as verdades que exprimem suas relações*. [7]

Leibniz pretendia utilizar a sua Arte Combinatória nas mais diversas áreas do pensamento. Para isso, era preciso identificar julgar as infinitas combinações de coisas,

---

[48] Arte Combinatória, p.112.

diferenciando uma combinação útil de uma combinação inútil. Mas, para compreendermos a maneira pela qual esses dois tipos de combinações são distinguidos, tomaremos como ponto de partida o seguinte fato: em Leibniz, as idéias e os pensamentos são manifestados por proposições que, por sua vez, são formadas pela combinação de letras e de palavras que constituem os termos destas proposições. Logo, se uma combinação de termos não expressar uma idéia contraditória, a combinação é *possível.* Porém, dentro das combinações possíveis, é preciso, em alguns casos, obter variações, para adequar o sujeito ao predicado e vice-versa. Por exemplo, tomemos a combinação formada por dois termos "homem racional". Podemos afirmar que a mesma é possível, pois os termos que a compõe não envolvem nenhuma contradição. No entanto, deve-se observar que a combinação dos termos {homem, racional}, permite duas variações: "homem racional" e "racional homem" sendo que a segunda é uma variação inútil. Dessa maneira, a variação de ordem entre os termos de uma proposição, define a adequação entre o sujeito e o predicado. Segundo Leibniz, "*este procedimento (a variação de ordem) é fundamental para a arte inventiva das proposições, na escolha das combinações úteis dentre as inumeráveis misturas das coisas*".[49]

Para ilustrar, de forma sucinta, como as *variações* obtidas dentro das *combinações* podem expressar uma idéia útil ou inútil, daremos os seguintes exemplos: Seja o conjunto composto pelas seguintes letras {u s r a o}. A partir dessas letras, que são os termos simples, podemos obter cinco combinações de quatro elementos: usra, usro, usao, urao, srao, suao. Variando, por exemplo, as letras da primeira e da segunda combinação, obtemos as palavras "ruas e urso" que exprimem uma idéia possível e, conseqüentemente uma combinação útil. As palavras "ruas" e "urso" são apenas duas das 120 *variações* possíveis que podem ser obtidas pelas cinco combinações dadas, pois

[49] Arte Combinatória, p. 131.

cada combinação permite 24 *variações* ou permutações que multiplicadas pelas cinco combinações dá um total de 120 palavras distintas. Utilizando agora as palavras do conjunto {pessoa, toda, forte, pensa, azul} podemos formar as seguintes combinações de quatro elementos; pessoa pensa toda forte; pessoa toda forte azul; pessoa toda pensa azul; pessoa forte pensa azul; toda forte pensa azul. Destacando a primeira combinação - pessoa toda forte pensa – pode-se notar que os termos que a compõe não implicam uma contradição, logo a combinação é possível. No entanto, é preciso dar sentido à proposição, para isso, basta trocar a ordem da primeira palavra pela segunda, de tal forma que a combinação fica modificada para: toda pessoa forte pensa, que é uma idéia possível. Assim, obtivemos uma *combinação útil* que foi gerada pela *variação* dos termos da combinação inicial (pessoa pensa toda forte). Em suma, podemos dizer que uma combinação útil é aquela cujos termos ou elementos que a compõe, não implicam nenhuma contradição, caso contrário a combinação será impossível.

Os exemplos colocados acima nos dão uma amostra da habilidade de Leibniz em lidar com as combinações e as variações de caracteres, por esse motivo, ele considerou a arte combinatória como uma *arte característica*, ou seja, "*a partir da combinação de termos simples (a,b,c,d, etc.) pode-se formar todo tipo de idéias possíveis*" [16]. Por este motivo, Leibniz considerou a combinatória "*como uma ciência mais geral do que a álgebra que serve, basicamente, para resolver alguns tipos de equações enquanto, a combinatória, que está fundamentada na aritmética, pode ser aplicada de uma maneira mais generalizada, isto é, na geometria, nos jogos, nas codificações, etc*" [17].

Vejamos agora como Leibniz tratou as combinações que envolvem contradição, ou seja, as combinações *inúteis* e suas respectivas implicações dentro da Arte Combinatória. Para isso destacaremos a décima terceira definição da *Arte Combinatória*: "*Quatro elementos podem ser combinados dois a dois de seis modos,* *sendo que duas dessas combinações são inúteis, quer dizer aquelas que são combinadas de contrários, como o fogo e a água, o ar e a terra...*"[50]. Assim, é preciso avaliar primeiramente a possibilidade de uma combinação, isto é, verificar se os termos combinados não são contraditórios, pois havendo contradição de termos a *combinação é impossível*, logo *inútil* [16]. Decorre daí, que uma combinação não deve ser estabelecida de maneira arbitrária ou sem critério, pois, para que a mesma seja possível, é necessário, antes de tudo, compreender suficientemente as qualidades particulares das coisas que combinamos. Nesse sentido, a qualidade[51] é o modo ou a maneira pela qual uma coisa se manifesta, que pode ser sua forma, seu peso, sua cor, a voz de uma pessoa ou o seu pensamento, etc. Sendo assim, é através da qualidade que cada coisa possui, que podemos distinguí-la de outra coisa qualquer. É aquilo que nos faz diferenciar com clareza os pássaros dos peixes, pois o modo pelo qual o peixe respira, através das guelras, é uma de suas qualidades, que nos permite distingui-lo, por exemplo, de um pássaro, por exemplo. Por outro lado, a pele recoberta de penas é uma das qualidades que encontramos nos pássaros, e não nos peixes. No que tange as questões da geometria, podemos dizer que aquilo que distingue o triângulo de outras figuras geométricas é a sua propriedade, ou a sua qualidade, de possuir três lados e três ângulos e que essas qualidades são necessária à sua compreensão. Em outros termos, três ângulos e três lados são essenciais ao triângulo. Sendo assim, podemos dizer que a *essência* de uma certa coisa é o conjunto de todas as qualidades indispensáveis para sua existência. Isso pode ser observado na seguinte passagem do livro Da Origem Primeira das Coisas [18], que Leibniz escreveu em 1697, quando já havia estabelecido por completo, o seu sistema filosófico: "*... todas as coisas possíveis, ou que exprimem a*

[50] A. Combinatória, p.117. "4 eléments peuvent être combinés en con 2 naisons de 6 modes; mais deux con 2 naisons sont inutiles, c'est-a-dire auxquelles sont con2nés des contraires, le feu et l'eu, le air et la terre." Minha tradução.
[51] Arte Combinatória, introdução, p.117 e L'art d'inventer et de juger, p.137.

realidade possível, tendem com igual direito à existência conforme a quantidade de essência [...]. Daí, claramente se entende que das infinitas combinações possíveis e séries possíveis existe aquela pela qual o máximo de essência ou possibilidade é levado a existir"[52].

Para que tenhamos a garantia da existência real de uma coisa, ela deve conter todos os componentes necessários para isso, que são suas qualidades, e o conjunto de todos esses componentes indispensáveis formam a sua essência. Sendo assim, não se pode conceber que um homem exista sem um coração ou sem antes respirar, pois essas qualidades são essenciais para sua existência. Na medicina, por exemplo, toda a variedade dos medicamentos compostos e da criação dos médicos surgem da mistura de ingredientes variados, logo é necessário saber julgar devidamente para escolher as misturas úteis que são aquelas que irão contribuir para a essência de uma certa substancia.

Tempos mais tarde, Leibniz deu seu parecer sobre a Arte Combinatória no livro Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano, onde ele diz que: "*... a Arte Combinatória foi fruto de sua adolescência e que embora existam ali teses que ainda aprovo, existem outras que só podem convir a um jovem estudante*"[15].

Quando ele nos diz que existem teses que só podem convir a um jovem estudante, está se referindo, por exemplo, à idéia central da Arte Combinatória que é a proposta de um alfabeto do pensamento pelo qual seria possível solucionar os mais diversos problemas. Essa proposta não foi adiante, pois a aplicação da mesma às mais diferentes áreas do conhecimento dependeria, dentre outras coisas, de sua aceitação pelas diferentes sociedades, com seus costumes, culturas, crenças, etc. Por outro lado, ele pôde extrair desse texto os fundamentos necessários para a construção de seu sistema

[52] Da Origem Primeira das Coisas, p.394.

filosófico. Isso se confirma em suas obras posteriores, através das quais podemos identificar algumas idéias que já estavam presentes na Arte Combinatória, como a arte de inventar, a harmonia do mundo, os infinitos pontos de vista, a lógica inventiva e outras. Essas idéias constituíram o seu projeto de uma *poligrafia universal,*ou de um alfabeto dos pensamentos. "*Nessa poligrafia universal, todas as noções seriam derivadas das combinações das noções fundamentais, como as palavras e as frases que são originadas pelas combinações e pelas permutações entre as 25 letras do alfabeto*"[53].

Para construir a "Arte Combinatória", Leibniz inspirou-se em vários autores e em várias obras, dentre estas podemos citar: a *Grande Arte* (Ars Magna) e a *L'Arte Cabbalastique*[54] de Raymond Lulle; *Encyclopédie* de Johann Henrich Alsted; *Polygraphya nova et universalis ex combinatoria arte detecta* de Athanase Kircher; a *Arte dos Sinais* de Jorge Dalgarno[55] e o livro *De corpore* de Thomas Hobbes, de onde extraiu a idéia de que *todo raciocínio é um cálculo*, do qual o próprio Hobbes não tirou proveito. Leibniz, ao contrário, desenvolveu e aprofundou esta idéia e a utilizou para expor sua própria invenção, que no fim das contas, quanto à originalidade, parece dever pouca coisa a seus antecessores.

Leibniz também observou que os chineses utilizavam símbolos e figuras para escrever, assim como fizeram os antigos egípcios. Surge, então, a idéia da construção de uma linguagem simbólica, porém mais universal do que a dos chineses. Para Leibniz,

---

[53] Leibniz, Arte Combinatória, p.144. Para desenvolver essa espécie de alfabeto, Leibniz consultou as obras de alguns de seus precursores cujas idéias foram fundamentais nesse empreendimento, sobretudo a obra do padre jesuíta Athanase Kircher, que publicou a *Pollygraphia et universalis ex combinatoria arte detecta* (Roma, 1663)

[54] Este livro tratava, mais especificamente, da "cabala dos nomes" que surgiu no século XII sob a autoria de d'Abrahan Aboulafia, que atribuiu as letras do alfabeto uma significação especial e que são reunidas para formar as idéias através das combinações.

[55] Esse livro foi publicado no ano de 1666, e exerceu grande influência sobre os projetos de Leibniz. Poderíamos também citar obra do Padre Labbé, jesuíta francês, inventou uma língua cuja base é o latim: esta língua é mais fácil e tem menos complicações que o próprio latim. Essa obra foi intitulada de *Gramática da Língua Universal* e foi publicada em 1663 – (livro III, Novos Ensaios, cap. II, p.171-179).

"*esta escritura é bem mais simples que a linguagem dos chineses, pois esta requer muita instrução para poder ser utilizada*"[56]. Dessa maneira, ele pretendia que a sua linguagem pudesse ser empregada pelas mais distintas civilizações com o uso de uma simbologia mais acessível, que seria entendida por todos. Leibniz denominou essa linguagem de "característica universal", ou simplesmente "linguagem característica". Ele pretendeu aplicá-la às diversas áreas do conhecimento, como a geometria por exemplo. Foi com o uso dos caracteres que, no ano de 1679, ele desenvolveu o seu livro "Characteristique Geométrique" [19] que, segundo Javier Echeverria, foi uma das bases para a topologia desenvolvida hoje em dia:

"*Leibniz trabalhou toda sua vida no projeto de construir uma nova geometria, diferente de Euclides e de Descartes e mais geral do que elas [...]. Para nomear este projeto, que está incluído dentro de seu desejo maior de uma Característica Universal, ele utilizou várias expressões: Analysis situs, geometria situs, Characteristica Geometria, Speciosa situs, etc.*"

Echeverria acrescenta*: "logo pode-se afirmar que a primeira recepção da geometria característica de Leibniz foi por intermédio de Grassmann; [...] uma segunda linha de influência da geometria Característica será centrada em Euler [...] Assim nos limitaremos à quatro pontos particulares e significativos do ponto de vista da matemática moderna e notadamente a topologia, que constitui, a nosso ver, o verdadeiro quadro do desenvolvimento do projeto de Leibniz.*" [19]

Conforme o próprio Leibniz disse, a *linguagem característica* é uma espécie de "*fio condutor dentro de um labirinto*" e acrescenta que "*o principal objetivo em utilizar os caracteres é servir à invenção*" [17]. Manipulando os caracteres com o uso das combinações, Leibniz criou a arte de inventar, dentro das várias ciências, formando uma

[56] *Carta de Leibniz a Galloys,* 1675, p.187. "Car cette écriture est instructive bien plus que celle des Chinois où il faut être savant pour savoir écrire." Minha tradução.

composição entre a lógica e a combinatória e gerando uma nova lógica adaptada à multiplicidade dos conhecimentos. Para isso ele utiliza linguagens distintas para elaborar uma linguagem própria.

Os cientistas anteriores a Leibniz utilizaram a teoria das combinações com o intuito de aplicá-las aos jogos de azar, como pode ser visto no *Tratado do Triângulo Aritmético* de Pascal [12]. Mas Leibniz foi além desses propósitos, pois utilizou as combinações como principal ferramenta na arte de inventar, associando-a aos *silogismos* para fornecer a ordem e a conexão dos pensamentos e estabelecer a *lógica da invenção*, que verificaremos a seguir.

2. A Lógica da Invenção

Vimos na seção anterior como Leibniz estabeleceu os critérios qualitativos para avaliar as combinações quanto à sua utilidade. Falta verificar de que maneira Leibniz utilizou os silogismos para ordenar logicamente as proposições que representam as idéias. Não entraremos aqui nos pormenores que envolvem os silogismos, como suas regras, formas, divisões e modos, pois não é nosso objetivo fazer um estudo mais detalhado desse assunto, somente averiguar a sua pertinência e aplicação na lógica da invenção, que Leibniz considerou como uma nova espécie de lógica, mais abrangente do que a de Aristóteles. Porém, antes de examinarmos a Lógica da Invenção, cabe-nos esclarecer que este assunto não está concentrado numa única obra, mas disperso através de vários fragmentos e correspondências ou comentada dentro de alguns de seus livros. Como exemplo, podemos mencionar os fragmentos "L'Arte D'Inventer et de Juger" (1683); " Sur la Caractéristique et la Science" (1685); " L'Art Combinatoire" (1666); " Novos Ensaios" (1701), além da correspondência de Leibniz para Galloys durante o ano de 1678.

Segundo Aristóteles (384-322 a.C.), o silogismo é uma série de palavras em que, sendo admitidas certas coisas, delas resultará necessariamente alguma outra, pela simples razão de se terem admitido aquelas. Mas para se ter uma idéia da formalidade de um silogismo, é preciso analisar seus elementos constituintes, que são suas proposições, para, em seguida, julgar a utilidade de cada silogismo[57]. Uma proposição é a expressão verbal de uma idéia que pode ser constituída de um sujeito, um verbo e um predicado. Entretanto, uma proposição pode estar mal formulada se o predicado for incompatível com o sujeito. É evidente que a proposição "o pássaro tem escamas" contém uma incompatibilidade entre o sujeito e o predicado, logo, é preciso avaliar, como já vimos, se existe uma adequação do predicado ao sujeito ou do sujeito ao predicado. O mesmo ocorre nos silogismos, então, é preciso verificar se a combinação entre seus termos é possível. Se for possível, aplica-se o silogismo e, em seguida, faz-se a variação de ordem para adequar o sujeito ao predicado, como nos mostra o seguinte exemplo de Leibniz [15]: "o animal é um ser vivo, o homem é um animal, logo o homem é um ser vivo"[58]. Em seguida, Leibniz indica uma outra variação de ordem que, segundo ele, é uma ordem mais natural, isto é: "o homem é um animal, o animal é um ser vivo, logom o homem é um ser vivo". Por outro lado, podemos encontrar no exemplo que se segue uma forma inadequada de silogismo: "Todo animal é racional; algum animal é irracional; logo, algum inteligente é irracional". Essa forma de silogismo, resultante da combinação das palavras {todo, algum, animal, irracional, inteligente}, seria *inútil*, pois a conclusão apresenta uma combinação com dois termos contraditórios: inteligente e irracional.

---

[57] Geralmente, um silogismo é composto de duas proposições, denominadas premissas, das quais se tira uma conclusão. Assim, no silogismo categórico simples Todo A é B; todo B é C, logo todo A é C, a premissa maior é A é B, a menor B é C e a conclusão, A é C.

[58] Novos.Ensaios, p. 345.

O emprego dos silogismos na obra de Leibniz se justifica pela necessidade lógica da criação das coisas, isto é, pela necessidade de ordenar as idéias de forma coerente e conexa:*"Sempre vigora nas coisas um princípio de orientação[...]. Do mesmo modo acontece em alguns jogos em que todas as casas do tabuleiro devem ser preenchidas segundo certas leis; aí, a menos que se empregue determinado truque, acabar-se-á sendo levado a lugares indesejados e deixar-se-ão vazias algumas casas que se poderiam ocupar, ao passo que o jeito certo leva facilmente ao preenchimento máxima*"[59].

Trinta e oito anos após ter escrito a Arte Combinatória, Leibniz escreveu o livro Novos Ensaios, onde abre, no capítulo XVII, uma ampla discussão em torno dos silogismos, principalmente no que tange às aplicações. Embora os tenha utilizado em boa parte de suas obras, em particular na Arte Combinatória, ele reconhece que os mesmos, aplicados isoladamente, isto é, sem as combinações e as variações, não são suficientes para dar conta das infinitas composições de idéias e de pensamentos. Daí a necessidade de uma lógica mais universal do que a de Aristóteles: "*Acredita-se geralmente que o silogismo é o grande instrumento da razão e o melhor meio para pôr esta faculdade em exercício. Quanto a mim, tenho dúvida, pois o silogismo serve apenas para ver a conexão das provas num só exemplo e não vai além disso, ao passo que o espírito vê conexão facilmente, e talvez melhor sem o silogismo [..] essas formas não são o único nem se quer o melhor instrumento para o raciocínio...*"[60].

Ainda que reconheça que o silogismo não é aplicado a todas as coisas do mundo, por ser uma forma de raciocinar excessivamente longa e complicada, ele os considera como uma das mais belas invenções do espírito humano, desde que se saiba e se tenha capacidade para usá-lo.

[59] Origem e princípio das coisas, p.394.

Na “Arte Combinatória”, Leibniz deixa bem claro que a lógica da invenção está fundamentada na teoria das combinações[61]. Uma das principais utilidades da ciência das combinações é servir à arte de inventar, que é a arte de saber combinar as noções simples para, em seguida, julgar as relações que essas combinações podem exprimir. Isso nos remete a um jogo de “quebra-cabeça” onde as peças devem ser unidas corretamente para atingir o todo pelas partes. Assim, a arte de inventar requer uma lógica, que Leibniz denominou “lógica da invenção”, que une as combinações aos silogismos de Aristóteles e podem ser aplicadas a diversas áreas do conhecimento científico, estabelecendo, dessa forma, uma ciência mais geral do que a álgebra, a aritmética e a geometria. A definição dessa ciência geral seria a seguinte: “*Eu entendo por ciência geral a ciência que ensina somente a inventar e a demonstrar a partir dos dados suficientes. Os dados suficientes para encontrar as verdades são os princípios que já estão disponíveis e a partir dos quais pode-se concluir sobre o que está em questão sem nenhuma suposição adicional* ”[62]. Por exemplo, sabendo-se que três pontos A, B e C não estão situados sobre a mesma reta isso é o suficiente para determinar um único círculo.

A construção teórica dessa ciência geral tem sua origem em várias linhas filosóficas, como pôde ser confirmado na Arte Combinatória. No entanto, a originalidade de Leibniz está exatamente na conciliação dessas várias correntes filosóficas em uma única obra e na invenção de um novo ramo da matemática envolvendo combinações, permutações, silogismos e teoria dos números.

Segundo Leibniz, para aplicar a lógica da invenção, deve-se partir dos conceitos

---

[60] Novos Ensaios. p.345.
[61] Arte Combinatória p.121.
[62] Leibniz, *Projets de préface à la science générale*. Extraído dos Textos Lógicos e Metafísicos, p.124. “J’entends par science générale cette science qui enseigne seulemenet à inventer et à démontrer à partir des donnés suffisants. Les donnés suffisants pour trouver des vérités sont les principes qui sont déjà disponibles et à partir desquels on peut, sans supposer quoi que ce soit de plus, conclure sur ce qui est en

mais elementares ou irredutíveis, que são as combinações de um elemento ou de primeira ordem, para em seguida obter as combinações de ordens mais elevadas. Por exemplo, a partir dos termos simples a, b, c, d várias outras expressões podem ser obtidas como ab, af, abd, cbf, abcd, etc. Assim, pela combinação e pelas permutações desses elementos, podemos obter vários tipos de proposições, considerando que cada um desses termos elementares podem corresponder a uma palavra, um número, ou até uma frase. Nesse caso teríamos uma espécie de codificação ou uma criptografia[63]. Para simplificar ainda mais essa linguagem, Leibniz representou cada classe de combinação com apenas um símbolo. Então, um conjunto de termos simples {a,b,c,d} e a sua respectiva combinação de quatro elementos pode ser representada por uma única letra ou símbolo, isto é, $y = abcd$. Da mesma forma, as combinações de dois e de três elementos, podem ser representadas por um único elemento: $m = ab; l = ac; n = ad; p= bd; r = cd; s = abc; v = abd; w = acd$ e $x = bcd$. Nesse caso, a combinação que envolve todos os elementos, ou seja, *abcd,* foi denominada como sujeito da proposição, e as combinações que contém menos elementos ab, ad, abc, bcd, etc, são os seus predicados Por outro lado, os predicados podem ser conjugados para representar o mesmo "sujeito y" de tal forma que *ax, bw, cv, ds, lr*, etc, representam a mesma combinação *abcd*. Para verificar a equivalência das diversas expressões, basta decompor em termos simples cada uma delas, para retornar a expressão original. Assim, decompondo a expressão *mr,* em termos simples, encontramos a expressão original *abcd, pois* $m = ab$ *e* $r = cd$*.*

Leibniz afirma que o problema fundamental da lógica da invenção é o seguinte: "sendo dado um sujeito, encontrar todos os predicados possíveis; sendo dado um predicado, encontrar todos os sujeitos possíveis"[64]. Em outras palavras, encontrar todas

---

question." Minha tradução.

[63] Nas páginas 144 e 145 da Arte Combinatória, onde comenta sobre a linguagem universal, Leibniz cita o livro de Gustave Selenus *La Cryptographie*.

[64] Arte Combinatória, pp. 134-135.

as proposições verdadeiras que incluam em seu enunciado um conceito, seja como sujeito, seja como predicado. Por exemplo, a proposição “todo gavião é um pássaro” é verdadeira, pois o sujeito, “gavião”, acha-se incluído no predicado “pássaro”. Por outro lado, a proposição “todo pássaro é gavião” não é verdadeira, pois o conceito de pássaro não se resume ao conceito de gavião, que é apenas um de seus casos particulares.

3. A Aritmética para a lógica da invenção

A aritmética foi um instrumento primordial para a lógica da invenção. Do mesmo modo que as letras do alfabeto serviram para expressar as proposições, os algarismos serviram de codificadores para os enunciados do pensamento. Para isso, deve-se analisar todos os conceitos, reduzindo-os a um certo número de termos absolutamente simples e irredutíveis, que são aqueles que representam uma única idéia, como uma pedra, um carro, uma casa, etc. Logo, esses termos podem ser representados por um único símbolo, como os números por exemplo. A partir dessa idéia, Leibniz separou os termos em diferentes classes formadas por um elemento, por dois elementos, por três elementos, etc. Sendo assim, a primeira classe é formada pelas combinações de um elemento, e foi designada pelo número 1. A segunda classe é formada pelas combinações de dois elementos e foi designada pelo número 2. A terceira classe é formada por três elementos e foi designada pelo número 3, e assim por diante.

Para reduzir a escritura das definições, uma combinação de três elementos pode ser produzida a partir de uma combinação de um elemento ou de dois elementos; já uma combinação de 4 elementos pode ser produzida a partir das combinações de 1, 2 e 3 elementos. Para isso Leibniz fez uso de frações cujos denominadores indicam o número de elementos de cada combinação e o numerador, a ordem da combinação. Assim 1/2 designa a 1ª combinação de 2 elementos, 2/2 a 2ª combinação de 2 elementos, 3/2 a 3ª combinação de dois elementos e assim por diante. Por exemplo: seja o conjunto {a, b, c, d} e suas respectivas combinações de dois elementos numeradas pela ordem: (1) ab; (2) ac; (3) ad; (4) bc; (5) bd.; (6) cd. Daí, uma combinação de 3ª classe, que é formada pela combinação de três elementos, pode ser representada por (1/2)d. Daí, a combinação abd pode ser escrita como (1/2)d, onde o numerador 1 indica a combinação ab e o denominador 2 indica uma combinação de dois elementos, ou seja de segunda classe. Uma outra maneira de representar essa mesma combinação seria (5/2)a que é igual a bda. Já a combinação c.d.a seria representada por ou (6/2)a .

Conforme a codificação definida por Leibniz na "Arte Combinatória"[65], cada número e cada fração podem possuir vários significados. No caso da geometria por exemplo, o número 1 significa ponto, 2 espaço , 3 lado , ..., 7 infinito, 8 incluir uma região, ..., 15 vários, 16 distância,..., 21 região,..., 26 lugar comum, etc. Assim, a notação 3(3/8) representa três lados de uma região, que pode ser um triângulo. Já a notação 4(3/8) representa 4 lados de uma região, que pode ser um quadrado.

Uma outra questão envolvendo a aritmética apresentada por Leibniz na Arte Cominatória, refere-se aos predicados e aos sujeitos de uma proposição. No primeiro caso trata-se de encontrar todos os predicados de um sujeito. O número de predicados corresponderá às combinações particulares de um número, que são aquelas cujos expoentes são diferentes de zero, ou seja, $C_{n,1}$, $C_{n,2}$, $C_{n,3}$,...,$C_{n,n-1}$, $C_{n,n}$, formadas a partir de um certo número de termos simples. Logo, se *n* é o número de termos simples de uma proposição, teremos tantos predicados diferentes quantas forem às combinações desses n termos, ou seja, $2^n - 1$ predicados. Por exemplo, uma proposição formada por três termos, admite $2^3 - 1 = 7$ predicados. Logo, o conjunto *abc,* que é o sujeito, tem

[65] Arte Combinatória, pp. 137-143.

como predicados as combinações *a, b, c, ab, ac, bc* e o próprio *abc* que é a sua identidade. Os termos elementares de cada combinação podem corresponder a palavras, números, conceitos, e outros, dependendo de cada situação.

Um outro caso tratado por Leibniz é o inverso do anterior: sendo dado um predicado, achar todos os sujeitos possíveis. Neste caso, basta encontrar todas as combinações possíveis que contenham a combinação dada. Por exemplo, a combinação *ac,* que é um predicado, tem como sujeito todas as combinações dentro das quais está incluída. Assim, as combinações *abcd* e *acd* são sujeitos para o predicado *ac*. Decorre daí que, se n é o número total de elementos de um conjunto e k é o número de termos de uma combinação dada, (que é o predicado), então o número de sujeitos procurado é dado por $2^{n-k}-1$. Esta expressão indica que a combinação de expoente zero ($C_{n,0}$) foi subtraída, pois esta corresponde ao próprio sujeito ou a uma proposição idêntica[66]. Vejamos o exemplo dado por Leibniz:

Seja 5 o número total de termos simples: **a, b, c, d, e**, *se o termo dado é uma combinação simples de um elemento, por exemplo, a, o número dos sujeitos possíveis é* $2^{5-1}-1=15$*; se o predicado é uma combinação de dois elementos, ab por exemplo, o número dos sujeitos possíveis é* $2^{5-2}-1=7$*, a saber: cdeab, cdab, ceab, deab, cab, dab, eab, ou seja , são todas as combinações onde entra o predicado ab, exceto ela própria"* [1].

No entanto, como a combinação dada pode ser seu próprio sujeito, pelo princípio da identidade, e que nesse caso corresponde à combinação de expoente zero, para se obter o número total de combinações (sujeitos), acrescenta-se uma unidade à expressão $2^{n-k}-1$, obtendo-se a expressão 2^{n-k}. Seguindo o exemplo dado por Leibniz na arte Combinatória, "seja 5 o número total de termos simples: *a, b, c, d, e*. Se o termo dado é

[66] *La Logique de Leibniz*, p. 43, parágrafo 8.

uma combinação simples, *a*, o número de sujeitos possíveis é $2^{5-1} = 2^4=16$. Se o termo dado é uma combinação dupla, ab, o número de sujeitos é $2^{5-2} = 2^3=8$, e assim segue".

Um outro exemplo da utilização da aritmética na arte da invenção é a representação de um conceito, que pode ser dado por um ou mais termos, através de um número. Por exemplo; para expressar a proposição "*o homem* é *animal racional* ", representa-se *animal* pelo número 2, *racional* pelo número 3 e *homem* pelo produto 6, de tal forma que se terá a igualdade numérica 2 x 3 = 6 correspondendo à igualdade lógica "*homem animal racional*"[67]. Segue que, "*cada termo composto, sendo uma combinação de termos simples, será representado pelo produto simbólico dos algarismos correspondentes às combinações e que, ao mesmo tempo, constituirá sua definição*"[68]. Daí, se 3 corresponder ao conceito de polígono e 5 ao conceito de regular, a combinação entre 3 e 5 ficará representada pelo produto simbólico 35, que significará, "polígono regular". Assim, Leibniz mostra o modo de expressar uma idéia complexa através de termos simples, que podem ser letras ou algarismos. Como foi classificada por Leibniz em sua carta a Jean Galloys [17], sua linguagem será sempre universal, podendo ser aplicada uma infinidade de exemplos e de conceitos. Nesse contexto, os números desempenham um papel fundamental, pois são os melhores instrumentos para representar a quantidade de coisas, sejam elas físicas ou metafísicas. Nesse caso, pode-se dizer que o conjunto formado pelos elementos {deus, anjo, homem, movimento} possui 4 elementos, não importando se são físicos ou metafísicos[69].

Essa linguagem característica [4], como Leibniz costumava denominar, foi o principal instrumento para a arte da invenção, pois permite expressar formular os conceitos e proposições pelo uso das combinações. Essa linguagem é o encontro da

[67] Sur L'Art D'Inventer et Julger, p.138
[68] *La Logique de Leibniz*, p. 40.

aritmética com a álgebra, porém mais abrangente que estas, pois inclui o uso das combinações e das permutações. Dessa forma, com apenas três termos simples {u,s,a}, podemos ter seis idéias diferentes: asu, aus, sau, sua, uas, usa. A idéia de construir uma, linguagem universal manifesta-se também em seus métodos matemáticos que são sempre aplicados com a máxima abrangência, como podemos notar no seguinte trecho da carta enviada a Oldenburg em 15/ 7/1674 [21]: "*tenho certos métodos analíticos totalmente gerais e bastante conhecidos que considero mais importantes que teoremas particulares* " [70].

Toda multiplicidade de coisas existentes, todos os pensamentos e todos os conceitos, requerem uma ciência que seja a mais geral possível. Essa ciência, por sua vez, requer uma lógica mais abrangente do que a lógica de Aristóteles, a lógica da invenção, na qual a aritmética exerce um papel fundamental, pois lida-se com uma variabilidade muito grande de possibilidades. Em suma, podemos dizer que a aritmética foi para Leibniz, o fio condutor de seus estudos iniciais de matemática.

---

[69] "...En effet le nombre est comme une certaine figure incorporelle née de l´union d´étants quelconques, par exemple de DIEU, d´un Ange, de l´Homme, du Mouvement, qui ensemble sont quatre". Arte Combinatória, introdução p.115. Minha tradução.

[70] "...je possède certaines méthodes analytiques tout à fait générales et largement répandues que je fais plus importantes que des Théorèmes particuliers et recherchés." Minha tradução.

4. As relações entre o todo e suas partes

Nessa seção concentraremos nossas atenções sobre o problema que envolve as relações entre o todo e a suas partes, que serviu, primeiramente, para fundamentar a teoria das combinações e, sete anos após ter escrito a "Arte Combinatória", fundamentar e desenvolver o método das diferenças.

A questão da relação entre o todo e suas partes, que envolve principalmente a idéia de divisão, foi analisado por Leibniz na introdução da Arte Combinatória e envolve, dentre outros assuntos, o conceito de união, a distinção entre qualidade e quantidade, o que por sua vez envolve o conceito de número e as respectivas implicações desses conceitos na aritmética.

Leibniz desenvolveu essas questões partindo da afirmativa de que "*... as relações dos corpos não são os próprios corpos...*"[71]. Nesse sentido, a qualidade de uma determinada coisa, independe de uma possível relação que ela tenha com outra coisa. Assim, quando se inscreve um triângulo numa circunferência, suas qualidades permanecem inalteradas, apenas podemos dizer que existe uma relação entre duas figuras geométricas. Conforme destacou Tatiana Roque em seu artigo sobre os fundamentos do cálculo:

"*A quantidade de uma razão pode ser expressa por uma fração mas a razão em si é uma relação independente dos termos que a compõem. Basta pensar, como dizia Leibniz, que é possível, sobre os habitantes de uma cidade qualquer, afirmar que o número de olhos é o dobro do número de narizes, independente do número de olhos e de narizes na cidade. [...] A razão teria portanto uma natureza qualitativa, ao passo que a fração teria uma natureza quantitativa"*[22].

É pela qualidade que percebemos e distinguimos a infinita variedade de coisas

[71] Arte Combinatória, Introdução, p.115. "les relations du corps naturel ne sont pas les corps". Minha tradução.

existentes no universo. Por exemplo, é pela qualidade de voar que distinguimos uma ave de um réptil. Já a visão metafísica de Leibniz sobre a questão da *quantidade*, de acordo com que foi exposto na introdução da Arte Combinatória, está diretamente relacionada com o problema da divisão, da divisão do todo em partes menores. Segundo Michel Serres, a teoria das complexões "*trata-se de uma teoria dos subconjuntos, ou, para ser fiel à terminologia do autor, um estudo do todo, das partes e da divisão"* [8].

Para Leibniz, a *quantidade* é definida pelo número de partes de um todo e, cada vez que estas partes são unidas, chega-se ao *todo*. Por outro lado, para se chegar a um t*odo*, é preciso que as partes estejam relacionadas entre si, pois toda *relação* é "*uma união ou um acordo perfeito*". Assim, o *todo* é um conjunto de coisas dentre as quais existe uma relação entre suas partes. Por exemplo: dividindo o segmento AD em três partes, menores temos: A____B_______C______D. Como essas partes estão relacionadas entre si, ou seja, A está relacionado com B e B relacionado com C que por sua vez está relacionado com D e, como toda relação é uma união ou um acordo perfeito, então a união dessas partes corresponde ao todo AD.

Para Leibniz, "os objetos são assim as partes de um todo entendido por um ato intelectual único: quando esses objetos estão em quantidade muito grande, este pensamento único que os reúne é dito, *pensamento cego* (cogitatio caeca). Nesse *pensamento cego*, não se pode perceber com nitidez todas as partes de um objeto, quando estas estão em grande número. Não podemos ter ciência de todos os seres de uma floresta, apenas temos uma vaga idéia de que ali existem vários animais, desde a mais ínfima bactéria até o maior mamífero, desde a minúscula planta até uma árvore centenária. Assim, a floresta é concebida por um único ato, ou seja, com todos os seus elementos simultaneamente.

Como dizia Leibniz, "*Para melhor julgar sobre as pequenas percepções que* *somos incapazes de distinguir em meio à multidão delas, costumo utilizar o exemplo do bramido do mar, que nos impressiona quando estamos na praia. Para ouvir este ruído como se costuma fazer, é necessário que ouçamos as partes que compõe este todo, isto é, os ruídos de cada onda, embora cada um desses pequenos ruídos só se faça ouvir no conjunto confuso de todos os outros conjugados, isto é, no próprio bramir, que não se ouviria se esta onda que o produz estivesse sozinha*" [72].

Posto isso, podemos compreender como Leibniz atinge a idéia do uno: " cada vez que há várias partes juntas, nós a supomos como Uno. Por outro lado, o Uno é alguma coisa percebida num ato, ou seja, ao mesmo tempo [...]. Por outro lado, tudo que é abstraído do Uno é a unidade, e tudo que é composto da unidade é dito número"[73]. Por exemplo: o número três é composto de três unidades, ou seja, 3 = 1+1+1. Em seguida, ele nos diz que "a *quantidade* e o número coincidem dentro de uma mesma coisa"[74]. Entretanto, a quantidade pode ser implícita ou explícita. O primeiro tipo de quantidade envolve as razões e as proporções e estas devem ser descobertas, segundo Leibniz, pela "Análise cultivada primeiramente por Descartes e tempos depois por Schooten e Bartholin". Embora não nos mostre, na introdução da Arte Combinatória, qual o método utilizado por Descartes para encontrar uma quantidade não declarada, ou seja, uma incógnita, basta examinar o livro Regras para Direção do Espírito[23] para ver do que se trata. Conforme a regra VI do livro de Descartes "*depois de acharmos uma relação entre duas grandezas quaisquer, podemos dar outras inumeráveis que têm entre si a mesma relação [...]. Com efeito, para achar um meio proporcional, é preciso prestar atenção ao mesmo tempo aos dois extremos e à relação que existe entre eles, a fim de*

[72] Novos Ensaios, p.118.
[73] "chaque fois {qu'il y a] plusieurs [parties] ensemble, nous les supposons comme Un. D'autre part Un est compris quelque chose perçu en un acte, soit en même temps...". Arte Combinatória, introdução p. 115. Minha tradução.
[74] "De lá il est manifeste que la quantité et le nombre coincident dans la chose". Minha tradução.

extrair um novo termo pela sua divisão"[75]. Isso fica mais claro no seguinte exemplo, dado pelo próprio Descartes: "*dadas duas grandezas extremas, a saber, 3 e 24 e uma grandeza média, isto é, 6, é possível encontrar o outro termo médio fazendo* $6.x = 3 . 24$, *logo* $x = 72 : 6 = 12$ *que é o termo médio procurado*"[76].

Para Leibniz, o número, que é uma quantidade explícita, compete somente à aritmética, e a natureza dos corpos, à geometria. Para Leibniz, o conceito de número, difere do conceito escolástico, que afirma que o número provém somente da divisão do contínuo e que não pode ser aplicado a todo tipo de coisa. Em Leibniz, ao contrário, o número é resultante da união de todo tipo de coisas, como conceitos, pensamentos, objetos, em suma, das coisas sensíveis e insensíveis. O conceito de número em Leibniz se reflete dentro de sua Aritmética, pois o número enquanto uma noção metafísica permite que a aritmética também seja aplicada a qualquer tipo de problema, levando em conta que o número é o principal instrumento desse ramo da matemática.

Embora sucinta, a introdução da Arte combinatória foi fundamental para Leibniz, não só para a sua teoria das combinações, mas também para dar início à construção de seu sistema filosófico, que por sua vez fundamenta toda a sua ciência. Nesse sentido, a abordagem metafísica sobre os conceitos de relação, qualidade, quantidade, todo e parte e número, constituem a base de sua aritmética que, por sua vez, foi um dos principais instrumentos para a sua teoria das combinações. Esse enlace entre a metafísica e a aritmética fica bem nítido no seguinte trecho da introdução:

"*Assim nascem dois gêneros de variações, da complexão e da situação, ambos chegam à metafísica, ou seja à doutrina sobre o todo e as partes. Se consideramos ainda a variabilidade, que é a quantidade de variações, devemos chegar aos números e à*

[75] Descartes, Regras para Direção do Espírito, pp.38-39.
[76] Idem, nota 76.

aritmética" [77].

É preciso esclarecer dois pontos dessa citação. O primeiro quanto aos gêneros de variações, isto é, existem dois tipos de variações. No primeiro, na primeira situação os elementos estão dispostos em linha aberta, ABC e no segundo, os elementos estão dispostos em círculo.

B

A C

D

No primeiro tipo, existe uma questão de ordem entre os elementos e, na segunda, uma questão de vizinhança. Assim, para o conjunto {A, B, C}, temos as complexões de dois elementos (AB, AC, BC) e uma variação de ordem para cada complexão, por exemplo, AB e BA. Como sabemos, uma mudança de ordem dentro de uma combinação corresponde a um caso particular de permutação, que hoje denominaríamos arranjo[78]. Esse termo foi mencionado uma única vez por Leibniz no problema IV da Arte Combinatória, porém sem nenhum esclarecimento mais detalhado. No segundo tipo, onde os elementos estão dispostos em círculo, não existe uma questão de ordem entre as partes e sim de vizinhança. Nesse caso, não é possível identificar, nem o primeiro nem o último termo da permutação.

O segundo ponto da citação, que merece ser esclarecido é a afirmação de que as complexões são *mais da aritmética pura do que da situação figurada*. Essa afirmação serve para distinguir as combinações das permutações, pois as combinações

[77] "Ainsi naissent deux genres de variations, de la complexion et de la situation, Et d´une part, la complexion, et d´autre, aboutissent à la métaphysique, cest-à-dire, à la doctrine au sujet du tout et des parties. Si de plus nous considérons la variabilité, ce qui est la quantité de variation, on doit arriver aux nombres et à l´árithmétique". Arte Combinatória, p.116. Minha tradução.

independem da ordem ou do arranjo entre seus elementos, assim, AB e BA representam uma única combinação. Por outro lado, se considerarmos a ordem desses elementos, temos duas permutações distintas.

Vimos, no entanto, que *relações entre todo e suas partes*. Examinamos que, nas relações entre as partes de um todo, no contexto puramente aritmético, são consideradas apenas as mudanças de posição entre elas. Em suma, pode-se dizer que a aritmética é a ciência que trata somente das questões quantitativas, como o número de partes, a ordem que as mesmas ocupam dentro de um todo e o número de variações e de complexões dessas partes que essas partes podem fornecer. Mas, conforme Leibniz relatou na terceira definição, as relações entre as partes envolvem o conceito de *qualidade*, pois em toda relação existe uma *afecção local das partes,* que deve ser considerada na união das coisas. Isso significa dizer que a afecção é a influência que uma parte exerce sobre a outra numa certa relação. Por exemplo, a união entre o fogo e a água é um tipo de relação onde a afecção entre as partes implica tanto na qualidade do que é fogo, quanto na qualidade do que é água.

5. O princípio da identidade como fundamento da matemática.

As proposições que são denominadas de *máximas* ou *axiomas são* os *princípios das ciências*, pelo fato de serem evidentes por si mesmos, ficando isentos de demonstração. Mas para Leibniz, não bastava estar consciente desta essa evidência dos axiomas, era necessário examinar até que ponto eles poderiam contribuir para a arte da invenção e para o conhecimento científico. Leibniz observa que o princípio da identidade é o grande "fundamento da matemática", pois, por mais evidente que possa ser, ele nos garante "que um enunciado não pode ser verdadeiro e falso ao mesmo

---

[78] Arte Combinatória, p.158.

tempo e que, assim, A é A e não poderia ser ao mesmo tempo não-A, pois isto levaria a uma contradição. E esse único princípio basta para demonstrar toda a aritmética e toda a geometria, ou seja, todos os princípios matemáticos”[79]. Assim, dizer que “o retângulo eqüilátero é um quadrado” é a mesma coisa que dizer que “um quadrado é o retângulo eqüilátero”, pois tanto o sujeito quanto o predicado são equivalentes, o que garante a identidade da proposição. Na aritmética, esse mesmo princípio nos garante que o único resultado que corresponde à soma de 3 mais 1 é o 4, o que leva a igualdade 3 + 1 = 4. Nesse caso, podemos dizer que a identidade existe pela reciprocidade entre os membros da igualdade, pois tanto faz escrever 3 + 1 = 4 como 4 = 3 + 1.

Mas a identidade, para Leibniz, não equivale à reciprocidade entre o sujeito e o predicado. Por exemplo, dizer que “O triângulo é um trilátero” não é a mesma coisa que dizer que “O trilátero é um triângulo”, pois nem sempre três lados incluem três ângulos, ou seja, não há reciprocidade entre sujeito e predicado. Na proposição “O triângulo é um trilátero”, há uma inclusão do sujeito triângulo no predicado trilátero o que valida a identidade, pois certamente todo triângulo encerra três lados. Daí surgem dois tipos de proposições idênticas: as proposições recíprocas, onde o sujeito e o predicado se equivalem ou representam uma mesma coisa, sem nenhuma restrição, e as proposições de inclusão, ou inerência, onde o predicado está contido no próprio sujeito como no caso do segundo exemplo.

No caso das proposições onde não há essa reciprocidade entre o predicado e o sujeito, é preciso analisar se existe inclusão. De acordo com que e foi exposto acima, a identidade entre o sujeito e o predicado acontece de duas maneiras: por reciprocidade ou por inclusão. Se ocorrer uma dessas situações, a proposição é tida como idêntica. Por outro lado, a identidade deixará de existir se atribuirmos, a um determinado sujeito, um

[79] Ver correspondência com Clarke p.407.

predicado que não lhe corresponda ou que não esteja incluído nele. Por exemplo, a expressão 7 = 5 + x só será verdadeira se atribuirmos a x o valor 2, pois este valor conduz à identidade, ou seja, 7 = 7. Leibniz estabeleceu, na Arte Combinatória[80], os critérios lógicos da união entre as partes, no caso, entre o sujeito e o predicado, de tal forma que esses critérios permitem verificar a utilidade de uma proposição quando as partes são unidas, como verificamos no capítulo II.

[80] Arte Combinatória, pp. 134-140.

CONCLUSÕES

Desenvolvemos nosso trabalho com o propósito de compreender o pensamento inicial de Leibniz sobre as séries e, em particular, o método das diferenças, que foi fundamental para a invenção do cálculo infinitesimal. Buscamos responder às seguintes questões: Como ocorreram as descobertas iniciais de Leibniz sobre as séries? Quais os fatores filosóficos que o conduziram em suas invenções? Qual a importância de seus trabalhos iniciais para a sua aceitação na comunidade científica do século XVII?

Procuramos responder às questões colocadas acima pelas afirmações do próprio autor, que aparecem em vários trechos de sua obra, de que a teoria das séries e a idéia de uma linguagem com características universais formaram o corpo fundamental para suas obras posteriores, como a invenção cálculo infinitesimal.

No capítulo I de nossa pesquisa, no qual examinamos a Arte Combinatória, pudemos constatar a relevância dessa obra para os projetos filosóficos e científicos de Leibniz. Observamos a densidade de seu texto, que reúne várias correntes científicas e filosóficas, desde os antigos, como Euclides e Aristóteles, até os modernos, como Descartes e Cardano, e sua proposta inovadora de reunir a lógica, a aritmética e a filosofia numa única linguagem. Um bom exemplo dessa proposta foi na lógica da invenção, modo racional e seguro que conduz às invenções e que possui, como elementos fundamentais, as combinações, os silogismos e a filologia, ou seja, um estudo das línguas. Por exemplo, no que tange as questões jurídicas, Leibniz já sugere que, pela lógica, seria possível resolver todas as causas públicas, ou seja, toda a argumentação jurídica deveria ser analisada através da coerência lógica de seus argumentos ou de suas proposições, e não pelo ponto de vista pessoal das partes envolvidas na questão. Assim, a lógica garantiria a imparcialidade nos julgamentos e os principais instrumentos para isso seriam os silogismos e as combinações. Pela aritmética, Leibniz desenvolveu a sua teoria das combinações e das séries. Pela lógica, verificou a coerência e a validade das proposições. Nesse ponto, vimos o surgimento de uma nova lógica que foi a *lógica da invenção,* originada da associação entre a combinatória e a lógica formal de Aristóteles.

Mais especificamente, foi possível constatar, na introdução da "Arte Combinatória", a fundamentação de sua matemática, principalmente no que tange aos problemas de aritmética, que envolvem o conceito de número, de quantidade, de união e das relações entre o todo e suas partes. Este último fornece os critérios de divisão, tanto para as combinações, quanto para as séries geométricas. No caso das combinações, trata-se de dividir um conjunto de elementos em subconjuntos ou, conforme disse Leibniz, dividir as totalidades maiores em menores. No caso das séries, o axioma do todo e das partes serviu para fundamentar o seu método das diferenças e, em particular, para definir os termos de uma série geométrica pela divisão proporcional de um segmento. As várias correspondências de Leibniz nos confirma que o *método das diferenças* teve suas origens na Arte Combinatória, como na correspondência enviada à Condessa de Kilmansegg [24], visando esclarecer que as origens de seu cálculo diferencial eram distintas do cálculo das fluxões de Newton. "*Eu me dediquei à Matemática, e conheci algumas propriedades dos números, tendo publicado um pequeno livro sobre a Arte das Combinações no ano de 1666, onde fiz uma observação considerável sobre as diferenças das sequências de números que outros não haviam percebido"* [81].

Para atingir suas invenções, Leibniz partiu na busca incessante de métodos mais práticos e gerais do que aqueles que estavam disponíveis até então. Como ele costumava dizer "não se trata somente de inventar, mas também do modo e da facilidade de

[81] "Je me plaisais pourtant à la Mathématique pratique, et je m´étais un peu exercé aux propriétés des nombres, ayant publié un petit livre sur l´Arte des Combinaisons dès l´an 1666, et je fis même une remarque considérable sur les différences des suítes des nombres, où d´autres n´avaient pás assez pris garde". Minha tradução.

inventar". Esse pensamento permeou grande parte de suas invenções e de seu intuito científico de uma matemática mais pragmática e geral. Leibniz afirma, no plano de trabalho da Arte Combinatória que, para determinar um método de solução para um certo tipo de problema, devem ser considerados três aspectos: o problema em si, os teoremas e suas aplicações. E foi pela consideração desses três aspectos que ele desenvolveu a "Arte Combinatória", primeiro apresentando os problemas, em seguida os teoremas e depois as respectivas aplicações. Além disso, a clareza e a simplicidade de seus métodos, foi um dos fatores que contribuíram para o seu ingresso definitivo na comunidade científica daquela época, mais precisamente como um membro da *Royal Society de London*, onde havia um certo ceticismo quanto aos seus conhecimentos iniciais de matemática, principalmente por parte dos cientistas ingleses, que tinham em Newton a sua maior referência científica.

Os seus estudos de filosofia forneceram os conceitos fundamentais para suas primeiras obras e para suas invenções posteriores. Assim, o jovem Leibniz surge no panorama científico do século XVII como matemático amador, acumulando conhecimentos das mais diversas áreas e buscando sempre novos pontos de vista para antigos problemas. Isso pode justificar a sua aptidão para áreas tão distintas do conhecimento, como o direito, a matemática, a física, a lógica a gramática e a filosofia. Entretanto, não se trata de uma simples curiosidade, trata-se de ressaltar um caráter que encara de forma simples aquilo que outros vêem com muita dificuldade. Como o próprio Leibniz costumava dizer "eu encontrei com um olho clínico quase todos os teoremas que observei" [21]. O termo "olho clínico" é inerente à sua filosofia, pois as suas descobertas ocorrem pela percepção da possibilidade, a partir da observação de um problema, de se construir um novo teorema ou extrair propriedades que não foram observadas anteriormente pelos próprios autores, como no caso de alguns princípios dos antigos gregos e da reciprocidade entre o triângulo harmônico e o triângulo aritmético de Pascal.

Mas não foi somente pelas investigações dos teoremas de outros cientistas que Leibniz conseguiu o seu reconhecimento científico. Uma de suas maiores invenções científicas, que foi o cálculo infinitesimal, foi um aglutinador de sua própria filosofia uma filosofia voltada para a multiplicidade, traço marcante em todas as suas invenções. Além disso, seu projeto de uma linguagem universal, ou seja, uma linguagem acessível a todos, refletiu em suas invenções, principalmente no cálculo infinitesimal, cuja simbologia adotada facilitou sensivelmente as resoluções de problemas que envolviam quadraturas e tangentes. Nesse ponto, o método das diferenças, foi sem dúvida um fator decisivo para essa invenção, pois possibilitou encontrar a soma de vários tipos de série que, por esse motivo, Leibniz costumava chamar de séries arbitrárias. Foi exatamente pela generalidade de seu método, associada aos seus estudos da álgebra cartesiana, que ele observou que, através da expressão analítica de uma curva, os termos da série passam a ser definidos numericamente e que a soma desses termos correspondem à área da região sob esta mesma curva, ou seja, a sua quadratura.

Na carta de Leibniz enviada para Abbé Conti no ano de 1716, encontram-se informações que tornam mais clara, a importância do método das diferenças para o seu cálculo:

"*Foi reunindo minhas antigas observações sobre as diferenças das séries dos números com as minhas novas meditações de geometria que eu encontrei, aproximadamente em 1676, um novo cálculo, que chamei de Cálculo das Diferenças, cuja aplicação à geometria produz coisas maravilhosas*"[25].

Os conceitos de Leibniz nunca são criados de forma desvinculada ao problema, mas sempre mantendo a inerência entre o problema e o conceito. Leibniz procurou sempre encontrar o meio mais “elegante” para resolver um problema, o que significa dizer que deve-se sempre buscar um método de solução que possibilite resolver um problema, por mais complexo que seja, da maneira mais simples possível onde simples significa o modo mais rápido e rigoroso de se atingir uma solução. Além disso, o método deve dar conta do problema em sua totalidade e não somente para alguns casos particulares.

Após o ano de 1673, com um maior aprofundamento da literatura matemática da época, tendo lido os trabalhos de Wallis, Pascal, Fermat e da álgebra cartesiana, Leibniz pôde aplicar o método das diferenças nas questões de geometria, como na quadratura de curvas e na determinação de retas tangentes, usando, para isso, a soma de séries e as respectivas diferenças entre seus termos. Nesses casos, os termos das séries corresponderiam às respectivas abscissas que, escolhidas convenientemente, conduziriam, pela soma destes termos, à quadratura da curva. Por outro lado, cada diferença entre os termos da série, determinaria a reta tangente à curva no intervalo definido por estes mesmos termos. Considerando que essas diferenças podem assumir valores infinitamente pequenos, as mesmas passaram a ser denominadas “diferenciais” (e as quadraturas como “integrais”). Inicia-se, assim, uma nova fase de descobertas que culminou na invenção do cálculo infinitesimal, o que aconteceu de forma surpreendentemente rápida para alguém que tinha iniciado seus estudos de matemática aproximadamente cinco anos antes dessa invenção e cuja formação acadêmica não era de um matemático (e sim de um filósofo e jurista). Leibniz percebeu que o problema era sistematizar adequadamente a aritmética e a geometria, ou seja, encontrar o melhor caminho para associar as séries com os problemas das quadraturas e das tangentes. A invenção do cálculo, além de situar Leibniz como um dos maiores matemáticos daquela época, proporcionou um grande avanço científico. Leibniz, como grande matemático que foi, buscou sempre os conceitos gerais e não particulares e soube relacionar a matemática com a filosofia criando uma linguagem que possibilitou integrar vários pontos de vista.

Vimos através de nossa pesquisa, que os trabalhos iniciais de Leibniz sobre as séries, foram fundamentais para a invenção do cálculo infinitesimal. Surge, nesse contexto, a possibilidade de uma nova pesquisa sobre a importância da teoria das séries de Leibniz para o cálculo infinitesimal e, por conseguinte, para o seu reconhecimento na comunidade científica do século XVII.

BIBLIOGRAFIA

[1] LEIBNIZ,G.W, "Leibniz an de L'Hospital (27/11/1694)". In: *Mathematische Scriften,* C. Gerhardt, Halle, 1850-1853, reprint George Olms, v.I/II, pp. 255-262, 1962.

[2] LEIBNIZ., G. W. "Dissertation Sur L'art Combinatoire". In: *Ouvre Mathematique*, v.1, Jean Pyroux, Bordeaux Janvier, fascicule I, pp. 111-169, Paris1986.

[3] LEIBNIZ, G.W. "Dissertation Arithmetique Sur Les Complexions".In: *Ouvre Mathematique*, v.1, Jean Pyroux, Bordeaux Janvier, fascicule I, pp. 111-169, Paris1986.

[4] LEIBNIZ, G. W., "Historia et Origo Calculi Differentialis". In: *Mathematische Scriften,* C. Gerhardt, Halle, 1850-1853, reprint George Olms, v.5, pp. 392-410, 1962.

[5] CHILD, J. M., *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*. Chicago, Open Court,1920.

[6] AITON, E.J., *Leibniz – A Biography*. Oxford, Pergamon, 1969.

[7] COUTURAT, L. *La Logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris, Félix Alcan, 1901, reprint Hildeshein, 1969.

[8] SERRES, M., "Le Système de Leibniz". Presses Universitaires de France, 1ª ed., Paris,1968.

[9] HOFMANN, J., *Leibniz in Paris – 1672-1676.* London, 1901.

[10] COSTABEL, P., "Leibniz et les Séries Numériques". In: *Leibniz a Paris (1672-1678). Symposion de G.W. Leibniz–(Hannover) et du Centre National de la Recherche Scientifique(Paris) a Chantilly (France) du 14 au 18 November 1976*. Tome I, Les Sciences, ed. Frans S. V. Gmsh. Wiesbaden, 1978.

[11] LEIBNIZ, G. W., “Nova Algebrae Promotio”. In: *Mathematische Scriften,* C. Gerhardt, Halle, 1850-1853, reprint George Olms, v.VII, pp.174-181, Berlin,1962.

[12] PASCAL, B., *Traité de Triangle arithmétique*, Paris, 1665. Ouvres II, pp. 445 – 503.

[13] LEIBNIZ, G. W., “ Lettre de Leibniz à Henri Oldenburg - 1673”. In: *Ouvre Mathematique*, v. 1, Jean Pyroux, Bordeaux Janvier, p.p. 111-169. 1986.

[14] EDWARDS, A.W.F., “Arithmetical Triangle”. ed. Charles Griffin and Company Ltd, London

[15] LEIBNIZ, G. W., *Novos Ensaios Sobre o Entendimento Humano*. Victor Civita, São Paulo , 1974.

[16] LEIBNIZ, G.W., “Recherches Générales sur L’Analyse des Notions et des Vérites”. 24 theses métaphysiques et autres textes logiques et métaphysiques. Introductions et notes par Jean-Baptiste Rauzy, PUF, Paris, 1998.

[17] LEIBNIZ, G. W., “Lettre de Leibniz an Galloys -1678”. In: *Mathematische Scriften,* C. Gerhardt, Halle, 1850-1853, reprint George Olms, v.I/II, pp. 182-190, 1962.

[18] LEIBNIZ, G. W., “Da Origem Primeira das Coisas”. In: Pensadores, Victor Civita, São Paulo, 1974.

[19] LEIBNIZ, G.W., “La Caractéristique Géométrique. Texte établi, introduit par J. Echeverría, traduit, annoté et postfacé par M. Parmentier, VRIN, Paris, 1995.

[20] ARISTÓTELES, “Tópicos”, Livro I, pp.5 e 6, Pensadores, São Paulo: Abril Cultural, 1978.

[21] TURNBULL, N., “ Cartas de Leibniz para Oldenburg 5 /7/1674; 6 /10 /1674;

18 /12/1675; 17 /8/1676; 11 /6/1677”. In: *The correspondence of I. Newton*, v.I and v. II., University Press, London, 1959 /1978.

[22] ROQUE, T. M., *Para entender os fundamentos do Cálculo em Leibniz.* pp. 301-309. Anais do 1º HTEM, RJ, I.M. UERJ, 2002.

[23] DESCARTES, R. “Regras para direcção do Espírito”. Editorial Estampa, Lisboa. pp. 130, 1987.

[24] LEIBNIZ, G. W., “ Carta de Leibniz para Comtesse De Kilmansegg, 18/ 4 /1716” In: *Ouvres concernant le calcul infinitésimal*. pp. 92-95, 1986.

[25] LEIBNIZ, G. W., “Carta de Leibniz para Abbé Conti, 9 / 4 / 1716”. In: *Ouvres concernant le calcul infinitésimal*. v.1, Jean Pyroux, Bordeaux Janvier, pp. 98-104, 1986.

[26] GERHARD, C. L., “Carta de Leibniz para Oldenburg 16 / 4 / 1673”. In: *Leibniz Mathematische Scriften*, v. 7, Ohms, pp. 43– 47, 1962.

[27] GERHARD, C. L., “Carta de Leibniz para Oldenburg *14 / 5 / 1673”*. In: *Leibniz Mathematische Scriften*, v. VII, Ohms, , pp. 48 – 50, 1962.

[28] LEIBNIZ, G. W., “Correspondência com Clarke”. In: Pensadores, Victor Civita, São Paulo, 1974.

[29] LORENZO, J. L., *Análisis Infinitesimal*. Tecnos, Madrid ,1994.

[30] BELAVAL, Y. *Leibniz critique de Descartes*. Éditions Gallimard, Paris, 1978.

[31] DELEUZE, Gilles, *A Dobra*: *Leibniz e o Barroco*.Trad. Luiz B.L. Orlandi. Campinas,

[32] GÉNOM, R. *Les Principes du Calcul Infitésimal*. Paris: editora Gallimard,1946. S.P.Papirus, 1991.

[33] DESCARTES, R. *Discurso do Método*. Trad. de J. Guinsburg e Bento Prado Junior. São Paulo. Abril Cultural, 1970.

[34] HOFMANN, J. E., *Leibniz in Paris (1672 – 1676)*. Cambridge University Press, 1974.

[35] BARON, M., *Origins of the Infinitesimal Calculus*. Oxford, Pergamon, 1969.

[36] BOS, H. J. M. " Newton, Leibniz and the Leibnizian Tradition".In: I.Grattan-Guinnes, London (eds), *From the Calculus to Set Theory*, *1630 – 1910 an Introductory History*, 2ª ed., chapter 2, LTDA,1980.

[37] EDWARDS, C.H., *The Historical Development of the Calculus*, Springer- Verlay, N. York, 1937.

[38] LEIBNIZ, G.W.,"La Naissance du calcul différentiel: 26 articles des Acta eruditorum". Traduction, Introduction et commentaire de M. Parmentier, 2 ed., VRIN, Paris, 1995.

[39] LEIBNIZ, G.W., "L'estime des apparences. 21 manuscrits de Leibniz sur les probalités, la théorie des jeux, l'espérance de vie". Texte établi, introduit par J. Echeverría, traduit, annoté et postfacé par M.Parmentier, VRIN, Paris, 1998.