O REAL POR DETRÁS DAS APARÊNCIAS:

Débora de Queiroz Gadelha Klajman

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM HISTORIA DAS CIÊNCIAS E DAS TECNICAS E EPISTEMOLOGIA

Aprovada por:

Prof. . Ricardo da Silva Kubrusly, Ph.D.

Prof[a]. Ângela Rocha dos Santos, D. Sc.

Prof. Luís Alfredo Vidal de Carvalho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2007

KLAJMAN, DÉBORA DE QUEIROZ GADELHA
O Real por detrás das aparências. [Rio de Janeiro]
2007
VII, 83 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Historia das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2007)
Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE
1. Paralelo entre a matemática de Cantor e Filosofia
I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer à todos os professores e funcionários do HCTE que se empenharam em levar esse programa de pós-graduação adiante, um projeto multidisciplinar e inovador que por tais motivos foi um sonho que teve de superar vários obstáculos até ser concretizado.

De todos os docentes do HCTE agradeço em especial ao meu orientador Ricardo Kubrusly, que é meu orientador desde a graduação e me acompanhou em toda essa trajetória. Se não fossem suas aulas inquietantes sobre o infinito e suas “contradições”, eu nem teria conhecido esse mundo mágico de Cantor a Gödel, que me estimularam a pesquisar para conhecer ainda mais, culminando nessa dissertação.

Agradeço muito aos meus amigos da graduação Felipe Figueiredo, Fábio Ramos, Heitor Oliveira e Danilo Artigas e ao casal Luciana e Victor que sempre estiveram presentes nos momentos mais importantes desses últimos anos, me apoiando e tirando dúvidas e também ajudando a descontrair nos momentos de lazer.

Além desses amigos da graduação, gostaria de agradecer a duas amigas em especial. Amigas que não só estiveram comigo durante o árduo curso de licenciatura em matemática, mas que dividiram comigo todos esses momentos do mestrado, desde a inenarrável alegria de sermos selecionadas juntas, às dificuldades vividas durantes as aulas, provas e principalmente, na maior das angustias: o desenvolvimento da dissertação. Vivemos muitas coisas juntas. Tudo foi maravilhoso. Amigas de verdade são tanto para as horas de tristeza quanto para as de felicidade e por isso que digo que essas são com certeza minhas melhores amigas. Lu e Bel (Luciane Moura e Maria Isabel Melo, mestres em breve), muito obrigada!

Gostaria de agradecer também ao meu marido Alexandre, que me ajudou muito, lendo esta dissertação na íntegra e sugerindo alterações e correções em vários trechos. Por ter acompanhado também todo o meu trajeto desde o primeiro dia de aula na graduação até hoje, e espero que para sempre. Agradeço principalmente pelo fato de atualmente estar admirando o meu trabalho, pois esta foi uma das coisas mais gratificantes dessa dissertação, poder dividir com você esse universo especial da matemática que eu tanto amo e te fazer apreciar, como eu, a obra de Cantor.

Além de meu marido, agradeço também aos meus “filhos” gatos, que apesar de diretamente não terem contribuído, alegraram minha vida e meu coração que estava tão triste pela distância da família e dos amigos nesse último ano. Nesse momento agradeço também a Deus, pois além de TUDO que ele me deu (minha família maravilhosa, saúde, e tantas outras coisas como essa oportunidade que se concretiza nessa dissertação), me enviou nesse ano esses dois lindos presentes: Mione e Potter que são os grandes amores da minha vida.

Agradeço meus pais e minhas irmãs por tudo que vivemos juntos.

Agradeço a minha irmã Bárbara, pelo simples fato de ser a melhor irmã que alguém pode ter, minha grande amiga e companheira de todos os momentos. Essa futura grande bióloga que merece muito sucesso não só profissional, mas em tudo, pois além de inteligente e dedicada é uma pessoa muito especial e querida, pois cativa todos a sua volta. Babi, te amo!

Minhas amadas “irmãs” Shanna e Filó, também tiveram grande importância em minha vida, me proporcionaram momentos de muita alegria e estarão sempre em um lugar muito especial no meu coração, também lhes agradeço.

Agradeço também ao meu “paidrasto”, meu Tio Marcelo querido, que teve um papel extremamente importante em toda a minha formação, sendo sempre um exemplo de pai, mesmo sem ter a obrigação de fazê-lo. Seu mérito é ainda maior por isso, pois fez por amor, porque é pai de coração. Obrigada por tudo que você já se sacrificou nessa vida para proporcionar tudo de melhor para mim e minha irmã, inclusive nos dando oportunidades além das que você mesmo teve. Muito obrigada, por tudo mesmo! Você é um paizão!

Por último, venho agradecer em especial a pessoa responsável por tudo isso, que me permitiu sonhar com esse mestrado que a princípio parecia tão inalcançável: minha mãe. Essa mulher batalhadora, exemplo que eu tento seguir com muito orgulho. Mãe, você é exatamente o que eu quero ser quando “crescer”. Se Deus tivesse me permitido escolher entre qualquer mulher do mundo para ser minha mãe, meu destino não seria diferente, eu escolheria você. Tudo que eu sou, tenho, sigo e acredito é graças a você. Te agradeço não só pela concretização dessa dissertação, mas por TUDO! Obrigada, mamãe! Amo muito você!

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

O REAL POR DETRÁS DAS APARÊNCIAS

Débora de Queiroz Gadelha Klajman

Março/2007

Orientador: Ricardo da Silva Kubrusly

Programa: Historia das Ciências e das Técnicas e Epistemologia

Este trabalho mostra a grandiosidade da obra de Cantor, como o pai da Teoria de Conjuntos e exalta o que o diferencia da maioria dos matemáticos de sua época, que é sua capacidade de transpor as aparências e mergulhar numa profunda busca pela verdade intrínseca de cada problema. A questão aparência versus essência é tratada inicialmente no âmbito da Filosofia, por ser um tema que permeou as discussões nessa área por um longo tempo, e ainda se faz presente devido sua grande importância. Posteriormente, fazemos uma breve introdução à vida de Cantor para que se possa ambientar a obra, que será vista em seqüência, com a conturbada vida que levou. Finalmente nos aprofundamos na sua obra e revemos alguns dos seus principais resultados e suas provas para podermos compreender a importância de seu papel na Matemática e na filosofia das ciências, traçando um paralelo, sobre a questão aparência x essência, entre a Filosofia e a Matemática.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

THE REAL BEHIND APPEARENCE

Débora de Queiroz Gadelha Klajman

March/2007

Advisor: Ricardo da Silva Kubrusly.

Department: Science History and of Tecniques and Epistemology

This work presents the grandiosity of Cantor's work, as Set Theory's creator and magnify what differs him of the greates number of mathematicians of his time, which is his ability to cross over appearence and dive in a deeply search of the inherent thruth of each problem. The question appearence X essence is initialy seen in Philosophy ambit instead of been present in many discussions of this area for a long period of time, and still alive due to his realy concernment. Later, there is a brief introduction in Cantor's life, wich was a very disturbed one. Finally, comes a proffound study of Cantor's work, where we can study his most famous results and proffs and compreend how influence was his work, not only in Mathemathics, but even in other areas too, comparing the question appearence x essence between Philosophy and Mathemathics.

SUMÁRIO

Introdução

“Toda a ciência seria supérflua se aparência e essência coincidissem diretamente.”

Marx, Capital III [1]

A obra de Cantor conquistou uma posição de grande admiração entre matemáticos e historiadores da ciência, não somente por sua importância, mas também pelos resultados surpreendentes do seu trabalho.

A questão que torna o trabalho de Cantor tão diferenciado é o grande desafio que ele enfrentou ao lidar com questões matemáticas que transcendem a dimensão da aparência. A esse aspecto cabe traçar um paralelo com a Filosofía.

Diversos filósofos refletiram sobre a discussão em torno da aparência e da coisa em si. A aparência é a forma como as coisas se apresentam para o observador, de acordo com a interpretação, o sensível de cada um. A coisa em si é sua essência, é o objeto de observação, pura e simplesmente, sem depender da maneira como o observador a percebe. Surgiram, então, inúmeras vertentes com relação a esta questão, cada qual com seu ponto de vista. A preocupação entre a distinção ou não entre a essência e a aparência sempre se fez presente na Filosofía.

Será que a aparência revela realmente a coisa em si? Ou será que a aparência pode ser tão diferente da realidade, ao ponto que pareça ser justamente o oposto do que é na verdade? Apesar de parecer estranho a primeira vista, será mostrado como isso ocorre com freqüência nas obras de Cantor, por exemplo.

No primeiro capítulo aborda-se algumas correntes filosóficas com suas opiniões distintas relacionadas a esta questão, com ênfase principalmente nas idéias de Kant, presentes na *Critica da Razão Pura*.

Posteriormente, será possível perceber que esta dicotomia não encontra fundamento apenas na Filosofia. Muitos dos grandes problemas da Matemática, principalmente os tratados por Cantor, encontram nas aparências uma espécie de barreira que a principio não permite enxergar a realidade Matemática fazendo crer em

---

[1] **Marx, Karl. Capital III *apud* Sayers, Sean. Reality and Reason. Basil Blackwell, 1985**

algo que corresponde ao oposto do que é na verdade, como é o caso da comparação das dimensões, feita por Cantor. É importante, porém, salientar que a referida realidade, é relativa a matemática e não há a pretensão de compará-la diretamente a nossa realidade (da mesma maneira a essência de algo matemático será tratada com respeito somente à matemática, sem buscar nenhuma relação com o mundo exterior). A realidade aqui considerada é uma espécie de realidade paralela, independente, e não tem necessariamente compromisso algum com o que seria o mundo real. Quando são feitas referência à realidade matemática, não se espera de forma alguma que esta corresponda à realidade do nosso mundo, espera-se apenas que seja possível estudá-la e compreendê-la no âmbito da matemática. Na matemática, as verdades são os postulados e a essência que se busca alcançar corresponde aos Teoremas. Buscar a essência das coisas é equivalente basicamente a tentar a demonstrar os teoremas. Na verdade, muitos dos erros cometidos ao se analisar uma questão matemática, surgem justamente desta dificuldade de desvincular a matemática da nossa realidade, através de julgamentos precoces, baseados principalmente nas aparências. Pode-se dizer que a intuição falha buscando um entendimento que seja prudente com o que aparentaria ser no nosso mundo real, porém muitas coisas que são verdadeiras na matemática não possuem nenhuma equivalência plausível com a nossa realidade.

Ainda com relação a essa busca pela “realidade” matemática, é interessante também chamar a atenção para esse aspecto especifico à Matemática, o que a diferencia das ciências como um todo. A matemática, não lida com a realidade objetiva, como o restante. As ciências buscam encontrar respostas para os fenômenos da natureza nos próprios fenômenos. A ciência responde empiricamente suas perguntas. O que não acontece na matemática. A física e a química, por exemplo, fazem experimentos para a comprovação ou não de uma suposição. A matemática demonstra suas hipóteses para torná-las um teorema. A experiência na matemática não leva a conclusões seguras. Se for averiguado que tal fenômeno ocorre para n experiências, não demonstra que o mesmo irá se repetir na n-ésima primeira (n+1) experiência.

Portanto, não é apropriado buscar o entendimento matemático de uma questão nem através de experimentos, nem a julgando com conceitos pré-estabelecidos, calcados nas suas aparências, a Matemática não necessita ser coerente com o que a principio se espera intuitivamente.. As respostas da matemática não costumam ser superficiais a ponto de serem julgadas apenas pelas aparências, agindo desta forma as conclusões serão equivocadas em sua grande maioria, pois em grande parte dos problemas matemáticos suas aparências não correspondem à realidade (realidade matemática).

Muito desses problemas foram esclarecidos somente quando se transpuseram as aparências e então investigaram a fundo sua base. Muitos, ficariam, de certa forma, satisfeitos com as aparentes respostas a essas questões matemáticas. Porém, certamente não foi isto que aconteceu com Georg Cantor, ao estudar as propriedades dos conjuntos numéricos e das dimensões.

Após abordar a questão na Filosofia, segue-se finalmente ao objetivo principal: os trabalhos de Cantor. Serão enfocados os problemas relacionados às cardinalidades dos Conjuntos Numéricos, fazendo comparações entre a cardinalidade dos Números Naturais, dos Números Inteiros, dos Números Racionais Algébricos e dos Trancendentes, chegando finalmente a cardinalidade dos Reais. Será apresentada a idéia de Conjuntos Transfinitos, o Teorema de Cantor e o Conjunto de Cantor, tratando também a questão que envolve dimensões distintas.

No decorrer destes capítulos será possível se deparar inúmeras vezes com algumas questões levantadas por Cantor, que a princípio seriam consideradas desnecessárias e muitas vezes até absurdas (como as correspondências de cardinalidades que ele propôs); uma vez que as respostas para tais perguntas parecem ser “visivelmente” tão óbvias. Porém, logo em seguida, há o convencimento de estar cometendo desta forma um grave erro, por julgar precocemente tais questões, baseados apenas nas aparências, no sensível. Após uma análise minuciosa e matemática, calcada na lógica e na razão, é possível ver que a realidade matemática corresponde justamente ao oposto do que foi pré suposto inicialmente. Notando assim, que, em muitos casos na Matemática, ocorre o que era defendido por alguns na Filosofía: que a essência não corresponde à aparência, mas que em alguns casos há a possibilidade de buscá-la e até alcançá-la.

Capitulo I: Aparência e Essência na Filosofía

> *"A realidade de um objeto, circunstância ou evento, sua importância intrínseca ou essência, a coisa da qual tudo depende, não evidencia-se na consciência, ou coincide com a primeira impressão que possamos ter. Mas pelo contrário, é necessário reflexão para descobrir sua verdadeira e real constituição".*
>
> *Hegel, Logic* [2]

Essa discussão entre aparência e essência não é recente e nem permeia somente a Filosofia. Este questionamento procede em várias áreas e é bem pertinente ao âmbito matemático.

Neste capítulo será tratado primeiramente a questão na Filosofia para em seguida aplicar e comparar esses conceitos à Matemática.

1.1 – Uma visão geral

Diversas correntes filosóficas trataram a questão aparência x essência. Na Filosofía essa questão é conhecida como o problema da realidade objetiva, podendo ser também chamado de problema do mundo externo, ou ainda, de problema da percepção, e esta questão está no cerne da epistemologia da percepção. Este problema nasce da dificuldade de que todo o conhecimento que se tem do mundo físico é fruto dos sentidos. Porém, essas percepções são provenientes da nossa mente, de conteúdos de consciência cuja natureza é interna. E como que desta forma seria possível conhecer um mundo externo?

Este foi um dos principais questionamentos da Filosofía moderna, desde Descartes até Kant (que será o principal abordado a seguir) e as principais teorias que

---

[2] **Marx *apud* Sayers, 1985.**

tratam desde assunto podem ser agrupadas em praticamente três grupos: o realismo direto, o realismo representativo e o fenomenalismo.

- Realismo Direto: Esta corrente adota a visão de que estamos imediatamente e diretamente ligados à realidade através das experiências sensoriais, de que a realidade é dada diretamente pela aparência. Há uma identificação entre realidade (a coisa em si) e aparência (a coisa para nós) – a aparência é reduzida à realidade. O filósofo grego Aristóteles é considerado como o primeiro defensor do realismo direto, o que pode ser observado em sua obra "De Anima", quando ele diz que na percepção a mente toma a *forma* do objeto percebido, mas sem a sua *matéria*;

- Realismo Representativo: conhecido também como Realismo Indireto, considera que todo ato cognitivo é dado indiretamente, que é intermediado pelas sensações. Assim há o chamado "véu das sensações" que está inevitavelmente entre o mundo externo e nós. O filósofo francês René Descartes, adotou o representacionalismo ao admitir que mesmo que nenhuma das nossas representações corresponda à realidade, isso não implica na impossibilidade da nossa existência.

- Fenomenalismo: Esse grupo está historicamente associado à teorias comprometidas com o idealismo, embora não sejam idênticos. Porém, assim como no idealismo há a redução de matérias à idéias. A realidade passa a ser uma criação de meras idéias ou interpretações, onde a construção ou criação mental determina a realidade, reduzindo o mundo físico às sensações. Berkeley, filósofo irlandês do século XVII, afirmava que as coisas não eram nada em si, eram meras coleções de idéias, "construções" de aparências. Berkeley afirma que uma substância material não pode ser conhecida em si mesma. Na verdade, o que se conhece resume-se às qualidades reveladas durante o processo perceptivo. Como concluiu Berkeley: "*esse est percipi*"[3].

---

[3] **Ser, é ser percebido. Berkeley *apud* COSTA, CLAUDIO.**

1.2 – As idéias de Kant

As principais idéias da Filosofía moderna provêm de Immanuel Kant. O cenário da Filosofía é totalmente reestruturado depois de seu surgimento. Há alguns estudiosos que inclusive fazem a distinção entre a Filosofía antes e depois de Kant. Essa importância dada aos seus trabalhos não é para menos, pois o mesmo foi um grande marco e influenciou muitas gerações. Por isso, esse paralelo traçado entre a questão na Filosofía e na Matemática é estruturado com base em suas idéias.

Essa distinção entre aparência e essência é retratada exaustivamente em uma de suas obras mais consagradas: a Critica da Razão Pura. Neste trabalho, pode-se perceber claramente qual é a opinião de Kant com relação à questão aparência X essência, como é possível conferir no trecho abaixo:

> *"Ao afirmar que a intuição dos objetos exteriores, e a que o espírito tem de si mesmo, representam, no espaço e no tempo, cada uma de per si, seu objeto, tal como este afeta os nossos sentidos, isto é, segundo nos aparecem, não quero dizer que esses objetos sejam mera aparência. E sustentamos isto, porque, no fenômeno, os objetos e também as propriedades que lhe atribuímos são sempre considerados como algo dado realmente; somente, como essas qualidades dependem unicamente da maneira de intuição, do sujeito em sua relação com o objeto dado, este objeto, como manifestação de si mesmo, é distinto do que ele é em si.*
>
> ...
>
> *Não se deve censurar ao bom Berkeley, por ter reduzido tudo à aparência. Nossa própria existência, dependente em tal caso da realidade subsistente em si de uma quimera, tal como o tempo, será como este uma vá aparência: absurdo que até agora ninguém ousou sustentar."* [4]

---

[4] **Kant, Imanuel. Critica da Razão Pura. Versão digitalizada disponível na pagina: http://www.ateus.net/ebooks/index.php (p.29)**

Kant vê a aparência como algo que ludibria a realidade e procura explicar claramente sua opinião sobre a natureza fundamental do conhecimento sensível em geral. Ele reitera esta sua posição continuamente ao longo de sua obra, deixando sempre nítido o abismo entre o sensível e o real. No trecho seguinte é possível perceber o quanto Kant é categórico ao defender esta distinção entre a aparência e o objeto em si.

> "*Temos querido provar que todas as nossas intuições só são representações de fenômenos, que não percebemos as coisas como são em si mesmas, nem são as suas relações tais como se nos apresentam, e que se suprimíssemos nosso sujeito, ou simplesmente a constituição subjetiva dos nossos sentidos em geral, desapareceriam também todas as propriedades, todas as relações dos objetos no espaço e no tempo, e também o espaço e o tempo, porque tudo isto, como fenômeno, não pode existir em si, mas somente em nós mesmos.*
>
> *Para nós é completamente desconhecida qual possa ser a natureza das coisas em si, independentes de toda receptividade da nossa sensibilidade. Não conhecemos delas senão a maneira que temos de percebê-las; maneira que nos é peculiar; mas que tão pouco deve ser necessariamente a de todo ser, ainda que seja a de todos os homens.*
>
> *...*
>
> *Por mais alto que fosse o grau de clareza que pudéssemos dar à nossa intuição, nunca nos aproximaríamos da natureza das coisas em si; porque em todo caso só conheceríamos perfeitamente nossa maneira de intuição, quer dizer, nossa sensibilidade, e isto sempre sob as condições de tempo e espaço originariamente inerentes no sujeito.*
>
> *O mais perfeito conhecimento dos fenômenos que é o único que nos é dado atingir, jamais nos proporcionará o conhecimento dos objetos em si mesmos."* [5]

Ao longo de toda esta obra de Kant, estão presentes inúmeras referências à esta questão. Ele vê que a aparência de forma alguma corresponde à realidade, que o que é captado pela sensibilidade é bem diferente da coisa em si. Kant desenvolve essa idéia

---

[5] **Kant, *op.cit.*, p. 25**

base de diversas formas diferentes, frisando sempre a distinção entre o objeto em si e a forma que ele se apresenta para nós. O trecho a seguir ilustra esta mesma idéia apresentada mais uma vez.

> *"Ora, esta receptividade de nossa faculdade de conhecer, que se denomina sensibilidade, permanece sempre profundamente distinta do conhecimento do objeto em si, ainda que se pudesse penetrar o fenômeno até o seu âmago. A filosofia leibnitzwolfiana adotou, nas suas indagações sobre a natureza e origem dos nossos conhecimentos, um ponto de vista errôneo, ao considerar como exclusivamente lógica a diferença entre a sensibilidade e o entendimento.*
>
> *Tal diferença é claramente transcendental, e não se refere só à clareza ou obscuridade, mas também à origem e conteúdo de nossos conhecimentos; de tal sorte que, mediante a sensibilidade, não conhecemos de nenhuma maneira as coisas em si mesmas. Desde o momento em que fazemos abstração de nossa natureza subjetiva, o objeto representado e as propriedades que lhe atribuímos mediante a intuição desaparecem; porque a natureza subjetiva é precisamente quem determina a forma desse objeto como fenômeno."* [6]

Na citação acima é possível observar que, para Kant, por mais que se busque a coisa em si, acaba-se restringindo às percepções, ao sensível. A intuição interfere no entendimento e a sensibilidade não permite conhecer o objeto em si, nem as suas relações. Trechos com idéias semelhantes a estas surgem em diversos momentos do texto de Kant.

O mais estimulante de tudo isso é perceber que é assim que muitas "coisas" também se apresentam na Matemática. Como será visto mais adiante, muitas das idéias que temos inicialmente com relação aos Conjuntos dos Números Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais, provém de conceitos baseados na nossa sensibilidade, e ao analisar as relações destes conjuntos surgem conclusões equivocadas, pois tal julgamento está apoiado em pura intuição. Esta postura incapacita o conhecimento de

[6] **Kant, *op.cit.*, p. 26**

cada Conjunto em si e suas relações. Porém, no caso da Matemática, por ela ser feita apenas de idéias e relações lógicas entre idéias, não é necessário parar no mundo das aparências; sua essência é permitida e a Matemática possibilita, com seus métodos, seguir adiante e chegar tão próximo quanto se queira[7] da essência de seus objetos. Esse é, justamente, o maior objetivo deste trabalho, traçando um paralelo com a Filosofia, analisar esta questão na Matemática. Isso será possível através do estudo da obra de Cantor, que foi além da aparência efêmera das coisas e mergulhou numa profunda busca pela realidade essencial que nela estava escondida.

[7] **a expressão "tão próximo quanto se queira" faz alusão ao uso desta e de outras expressões como esta ("tão pequeno quanto se queira") que aparecem com freqüência no cotidiano dos matemáticos, como por exemplo, nos cursos de Cálculo e Análise.**

Capitulo 2: Uma breve introdução à história de Cantor

> *"Há uma coisa ainda mais importante que o que precede: certos conhecimentos por meio de conceitos, cujos objetos correspondentes não podem ser fornecidos pela experiência, emancipam-se dela e parece que estendem o círculo de nossos juízos além dos seus limites.*
>
> *Precisamente nesses conhecimentos, que transcendem ao mundo sensível, aos quais a experiência não pode servir de guia nem de retificação, consistem as investigações de nossa razão, investigações que por sua importância nos parecem superiores, e por seu fim muito mais sublimes a tudo quanto a experiência pode apreender no mundo dos fenômenos; investigações tão importantes que, abandoná-las por incapacidade, revela pouco apreço ou indiferença, razão pela qual tudo intentamos para as fazer, ainda que incidindo em erro."*
>
> *Kant, Critica da Razão Pura*

Há na Matemática diversos exemplos onde a aparência contraria a realidade, onde toda a sensibilidade e intuição levariam direto ao erro. Neste caso, porém, será visto restritamente o que está relacionado à Cantor.

Ao lidar com o infinito é comum deparar-se com problemas deste tipo, onde surgem coisas, de certa forma, contraditórias às experiências. O infinito traz muitas surpresas e suas respostas são completamente inesperadas. As verdades válidas, quando se trata do infinito, costumam ser totalmente distintas das intuições e por isso, todas as perguntas feitas neste âmbito devem ser bem analisadas, para que não sejam respondidas precocemente, com a influência de pré-conceitos baseados em sensibilidade, que são na maioria dos casos embasados em experiências e idéias de origem finita.

Um bom exemplo onde é possível constatar que nem sempre a intuição corresponde à realidade é a Teoria de Conjuntos, que foi fundada e desenvolvida por Georg Cantor (cujo trabalho tem forte ligação com o infinito), onde nota-se que o grande desafio de seu percurso foi não se deixar enganar pela simples aparência das coisas.

A Teoria de Conjuntos tem grande importância para a Matemática, pois serve de fundamento para toda a estrutura matemática. É por meio da Teoria dos Conjuntos que o rigor matemático foi alcançado no final do século XIX e início do século XX e foi a partir da analise dos problemas oriundos da Teoria dos Conjuntos que Gödel chegou ao seu famoso resultado sobre a incompletude da Aritmética[8].

Para uma melhor compreensão dos trabalhos de Cantor é interessante conhecer o mínimo de sua história. A vida de Cantor representa um capítulo muito interessante da História da Matemática e é de suma importância para seus pesquisadores conhecê-la. Cantor desenvolveu idéias que contrariavam todas as aparências e expectativas. Realmente a probabilidade de sair ileso de tudo isso seria muito pequena, e não foi diferente para ele. Suas idéias, eram muito avançadas e ousadas para sua época e conseqüentemente foi muito atacado por esse motivo. Como exemplo disto, podemos citar suas desavenças com Kronecker, seu ex-professor, que o perseguiu até o final de sua vida, em função dessas idéias inovadoras, que ele não admitia. Além disto, ainda teve que passar por toda uma revolução de conceitos, não digo em relação à quebra de paradigma do meio científico, todavia mais ainda, na revolução em sua própria mente, em suas concepções. Assim, o preço de sua compreensão do incompreensível pode ter sido a sua própria sanidade mental. E por esse motivo, o capítulo seguinte retrata um pouco da vida pessoal de Cantor.

[8] **Para consultar mais sobre o assunto, ver: MOURA, LUCIANE DE PAIVA**. *O Teorema de Gödel.* 2003 Monografia de final de curso – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

2.1 Os Primeiros Passos

"The essence of mathemathics resides in its freedom" [9]

Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em 3 de março de 1845, em São Petersburgo, Rússia. Seu pai, Georg Woldemar Cantor nasceu em Copenhagen, na Dinamarca, mas migrou ainda jovem para São Petersburgo. A maioria das bibliografias a seu respeito afirma que o pai, Georg Woldemar, era luterano e sua esposa (mãe de Cantor) Maria Anna Böhm, nascera católica, casando-se, porém em uma cerimônia luterana, em 21 de abril de 1845. As origens de sua família são ainda incertas. Alguns, no entanto, afirmam que a família possuía origens judaicas (pelo menos por parte paterna, supondo, por outro lado algumas fontes como Aczel, inclusive materna) devido ao sobrenome Cantor[10] e a alguns outros fatos. Um deles é uma carta em que Cantor revela a um amigo, ter avós "Israelitish", provavelmente se referindo aos avós paternos Jacob Cantor e Méier. Outro fato que apóia essas especulações é uma carta onde seu irmão mais novo, Louis (que imigrou para os EUA em 1863) que estava em Chicago escreveu para sua mãe em um trecho: "... nós somos descendentes de judeus"[11].

A família Cantor estava muito ligada ao meio artístico. Seu irmão Constantin, que se tornou um oficial das forças armadas da Alemanha, era um grande pianista e de um modo geral, a família gozava de um grande talento musical, davam aulas e tocavam vários instrumentos. Do lado materno, além de um dos irmãos de Maria, que era músico, havia também seu avô, Joseph Bohm, que foi maestro e fundador do conservatório de Viena, e ainda, um dos irmãos de Joseph, chamado Joachim que era um celebrado violinista. Do lado paterno, o primo de seu pai, Joseph Grimm, era um famoso instrumentista de câmara

---

[9] **A essência da matemática reside em sua liberdade.**

[10] **Porém, em "Toward a biography of Georg Cantor", Ivor Grattan Guiness contesta esta afirmação. Já E.T. Bell em "Men of Mathematics"considera que ambos os lados da família tinham raízes judaicas.**

[11] **Apud Aczel.**

na corte real da Rússia. Assim, Georg Cantor, que era o mais velho dos seis filhos, cresceu imerso no meio da música e da arte. Algumas correntes acreditam que esse ambiente artístico, com tantos parentes brilhantes, possa ter causado uma certa "cobrança" para Cantor e, com isso, ter contribuído, de alguma forma, para sua instabilidade emocional.

O pai de Cantor era dono de uma empresa atacadista internacional em São Petersburgo, chamada: Cantor & Co. Todavia, devido a uma doença pulmonar, em 1856, a família mudou-se para Frankfurt (onde o clima seria mais adequado). Quando ele se aposentou, havia acumulado uma fortuna considerável e vivia confortavelmente, passando suas horas vagas escrevendo cartas para seu filho Georg, que depois de estudar fora de casa (no liceu), morou na Suíça. Apesar da mudança, seu pai veio a falecer de tuberculose em 1863, mas as cartas que escrevera em vida, influenciaram muito Georg Cantor no período em que estabelecia os rumos de sua carreira.

Cantor estudava em escolas particulares em Frankfurt, como o Darmstadt Gewerbeschule por exemplo, e em 1860, aos quinze anos, foi admitido no Wiesbaden Gymnasium. Nesta época, Cantor já havia despertado seu interesse pela Matemática, porém, seu pai tentava convencê-lo a tentar uma carreira mais promissora como a engenharia. Dentre as tantas cartas que seu pai lhe escrevia, havia uma, de 1860, dos primeiros dias de Cantor no Liceu, onde se pode ler o seguinte trecho:

> *"...I close with these words: Your father, or rather your parents and all members of the family both in Germany and in Russia and in Denmark have their eyes on you as the eldest, and expect you to be nothing less than que um Theodor Schaeffer*[12] *and, God willing later perhaps a shining star on the horizon of science."*[13]

---

[12] ***Theodor Schaeffer*** **era professor de Cantor no liceu e o pai de Cantor parece ter visto nele um modelo para o filho. Cantor guardava essa carta desde os tempos da escola, como se fosse uma motivação para os momentos mais difíceis.**

[13] ***"Encerro com estas palavras: seu pai, ou melhor, seus pais e todas as outras pessoas da família, tanto na Rússia como na Alemanha e na Dinamarca, têm os olhos voltados para você como o mais velho, e esperam que você seja nada menos do Theodor Schaeffer e depois, se Deus quiser, quem sabe um astro brilhante no horizonte da ciência"***

Reproduzido in Dauben, *Georg Cantor: his mathematicas and philosophy of infinite*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1990, p. 275-6.

Como Cantor já mostrava interesse pela Matemática, buscava para isso o apoio do pai. Aos 17 anos, quando já havia terminado a escola e estava prestes a ingressar na universidade, escreveu ao pai em uma espécie de agradecimento, por ele ter "permitido" que Cantor seguisse a carreira de matemático: [14]

> "*My Dear Papa!*
>
> *You can imagine how very happy your letter mede me; it determines my future. The last few days have left mew in doubt and uncentanty. I could reach no decision! My sense of duty and my own wishes fought continuously one against the other. Now I am happy when I see that it will no longer distress you if I follow my own fellings in this decision. I hope that you will still be proud of me one day, dear Father, for my soul, my entire being lives in my calling; whatever one wants and is able to do, whatever it is towward which an unknown, secret voice calls him, that he will carry through to success* "[15]

Ao prestar seus exames finais , em agosto de 1862, Cantor passou com notas altas, principalmente nas ciências exatas, qualificando-se assim para estudar ciências na universidade.

No mesmo ano Cantor começou a estudar Matemática no Instituto Politécnico de Zurique, mas no ano seguinte (ano da morte de seu pai), conseguiu transferir-se para a Universidade de Berlim, que tinha mais prestígio. Em Berlim, se especializou em matemática, filosofia e física, sendo a última a única que ele não tinha verdadeiros interesses. Mudar-se para Berlim foi de grande importância para sua carreira, pois foi onde teve oportunidade de estudar com professores como Ernst Eduard Kummer, Karl Weierstrass e Leopold Kronecker (o mesmo que no futuro se tornaria seu maior

[14] **Alguns autores (como por exemplo E.T.Bell) vêem neste relacionamento entre o pai e filho um dos motivos que posteriormente contribuiriam para agravar os problemas mentais de Cantor.**

[15] ***"Meu querido papai!... Você não pode imaginar o prazer que sua carta me proporcionou. A carta decidiu meu futuro... Agora eu estou feliz em ver que eu não vou desagradá-lo em seguir os meus sentimentos para fazer minha escolha. Eu espero que você um dia ainda possa sentir orgulho de mim, querido pai, uma vez que minha alma, todo o meu ser, sentem essa vocação; o que um homem deseja fazer e o que no fundo o direciona, é que lhe trará satisfação"***
Dauben, opus cit., p. 277

inimigo). Embora tenha se destacado em todas as disciplinas que cursou, sua atração foi por teoria dos números.

Seguindo o costume alemão, ele passou um semestre de 1866 na Universidade de Göttingen. Já de volta a Berlim, estudou profundamente o *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss e escreveu sua dissertação na área de Teoria dos Números, em 1867. Continuou posteriormente a se dedicar à teoria gaussiana, onde fez grandes contribuições, que foram publicadas em periódicos matemáticos nos anos seguintes.

Após o doutorado, lhe ofereceram o cargo de *privatdozent* na Universidade de Halle. Nas universidades alemães, um instrutor iniciante dava aulas particulares e seu pagamento era qualquer dinheiro que os estudantes pudessem pagar. Sob as influências de Weierstrass, ele ocupava seu tempo restante com intensivas pesquisas em análise matemática, com principal enfoque em séries trigonométricas. Esse foi o tipo de trabalho que ocasionou os conflitos (que serão descritos a seguir) com seu antigo professor de Berlim, Leopold Kronecker.

Com base nos métodos de Weierstrass, Cantor começou o estudo das funções, chegando ao conceito de convergência. Envolveu-se profundamente com os métodos de infinito potencial utilizados em matemática desde os gregos, porém acabou, de certa forma, ficando estagnado. A Universidade de Halle não era uma instituição de muito prestígio, com grandes congressos e um ambiente estimulante para a pesquisa e Cantor acomodou-se.

Havia se mudado para Halle em 1875, casando-se logo em seguida com uma amiga de sua irmã: Vally Guttmann. Iniciaram ali, com o modesto salário de Cantor (que era muito abaixo dos valores pagos na Universidade de Berlim), sua família, e tiveram dois filhos e quatro filhas. Todavia, mesmo estando em uma Universidade de baixa remuneração, numa pequena cidade da zona rural, desenvolveu sozinho toda uma teoria matemática.

O fato de estar em um ambiente acadêmico que não era propício a sua pesquisa o levou a trabalhar sozinho. O que o ajudou de alguma forma foram os amigos que fez. Um deles era Gösta Mittag –Leffler, grande matemático que também foi aluno de Weierstrass (responsável pela sobrevivência do trabalho do professor Weierstrass, pois apesar do mestre não gostar, tomava nota de todas as suas aulas) e que sempre apoiou Cantor. Mesmo nos piores momentos, não só dava atenção às idéias de Cantor, como ainda as publicava em seu periódico o *Acta Mathematica*. Em Berlim o único matemático que o apoiou foi seu ex-professor Weierstrass, por quem tinha grande admiração (é importante ressaltar que esta admiração era mútua). Além deles, logo nos seus primeiros anos em Halle, teve um grande amigo, Richard Dedekind (que desempenha um grande papel em sua vida como será visto a seguir), com quem trocou muitas cartas e que inclusive interveio quando em 1877, Cantor quase teve um ensaio rejeitado em um periódico, o Crelle's Journal, onde Kronecker tinha grande influência.

2.2 – A amizade de Cantor e Dedekind

> *"Zeno was concerned with three problems, ... These are the problem of infinitesimal, the infinite, and continuity. … From his day to our own,the finest intellects, of each generation in turn attacked these problems ,but achieved, broadly speaking, nothing. …Weierstrass, Dedekind, and Cantor … have completely solved them. Their solutions … are so clear as to leave no longer the slightest doubt of difficulty. This achievement is probably the greatest of which the age can boast. … The problem of infinitesimal was solved by Weierstrass, the solution of other two was begun by Dedekind and definitely accomplished by Cantor."*[16]
>
> *Bertrand Russel*

A amizade entre esses dois grandes matemáticos foi muito importante na história de ambos. Eles se conheceram quando Cantor estava de férias na Suíça, em 1872 e desde então passaram a ser grandes amigos. Quando era estudante, Dedekind se matriculou, em 1850, na Universidade de Göttingen. Em 1952 recebeu seu Ph.D. em

[16] **" Zenão foi concernido com três problemas... Estes foram: o problema de infinitesimal, o infinito, e continuidade... Daquele tempo até os dias de hoje, os maiores intelectuais, de cada geração atacaram estes problemas, porém nada esclarecedor foi dito. ... Weierstrass, Dedekind, e Cantor... resolveram-os completamente. Suas soluções... estão tão claras a ponto de não deixar mais nenhuma dúvida. Esta realização é provavelmente a maior que seus contemporâneos podem se vangloriar. ... O problema de infinitesimal foi resolvido por Weierstrass, a solução de outros dois foi iniciada por Dedekind e definitivamente solucionada por Cantor."**

matemática com uma tese sobre integrais, redigida sob supervisão de Gauss, de quem ele foi o último aluno. Posteriormente, se tornou professor de matemática no Instituto Politécnico de Brunswick, onde lecionou por 50 anos.

Cantor e Dedekind foram amigos durante muito tempo e trocaram inúmeras cartas. Porém, ficaram afastados durante muitos anos (em torno de dezessete anos). Acredita-se que esse afastamento se deu em virtude de uma possível indicação de Dedekind, feita por Cantor, para que ele ocupasse um cargo na Universidade de Halle (onde Cantor trabalhava). Dedekind educadamente recusou o convite (alegando condições financeiras) e Cantor parece ter ficado magoado, se afastando em virtude desse episódio.

A maior contribuição de Dedekind para a matemática é referente aos números irracionais e a sua definição. Para isso, define o conceito de "cortes". Esse trabalho, por lidar com irracionais, trata, conseqüentemente, de infinidades, ponto de enorme interesse para Cantor. Por ser algo, de grande influência na obra de Cantor consta no apêndice uma descrição dos "Cortes de Dedekind".

2.3 – Os atritos entre Cantor e Kronecker

"The fear of infinity is a form of myopia that destroys the possibility of seeing the actual infinite..."[17]

Georg Cantor

Como foi dito, Kronecker foi professor de Cantor na Universidade de Berlim, e até 1871 posicionou-se favoravelmente ao trabalho de Cantor, apoiando-o durante os anos na universidade e oferecendo inclusive ajuda para que este se estabelecesse na Universidade de Halle. Kronecker chegou até a fazer sugestões sobre os primeiros ensaios de Cantor que o levaram posteriormente ao que ficaria conhecido como o Teorema Cantor-Lebesgue, que lidava com séries trigonométricas.

Porém, Cantor começou a enveredar para o estudo dos números irracionais e do infinito, o que para Kronecker era inadmissível, uma vez que ele não admitia sequer a

[17] "**O medo da infinidade é uma forma de miopia que destrói a possibilidade de ver o infinito real**."

existência de tais entidades. Kronecker era um matemático muito importante o que tornava essa sua oposição ao trabalho de Cantor ainda mais drástica, chegando a ponto de chamar Cantor de "corruptor da juventude"[18], por ensinar seus novos conceitos.

Kronecker rejeitava tanto as idéias de Cantor que em 1877, quando Cantor enviou seu artigo sobre dimensões, o "Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", para o Crelle's Journal ele interveio tentando impedir a publicação, que acabou adiada por um ano. A aversão de Kronecker aos irracionais e ao infinito era tamanha, que ele opusera-se a vários resultados em análise matemática, inclusive ao Teorema de Bolzano-Weierstrass[19] e tentou convencer outros matemáticos a não publicar resultados que o utilizassem.

Weierstrass já havia se estabelecido como um matemático muito respeitado. Infelizmente, no caso de Cantor os estragos foram maiores. Em setembro de 1883, Cantor escreveu para o matemático francês Charles Hermite e também para seu confidente Mittag-Leffler, queixando-se dos ataques feitos por Kronecker, que já haviam se tornado uma questão pessoal. Para revidar, segundo Aczel, Cantor se candidatou a uma cadeira na Universidade de Berlim, mesmo sabendo claramente que seu pedido seria negado (devido à influência de Kronecker), com o único objetivo de incomodar, como podemos conferir no trecho abaixo retirado de uma carta que Cantor escreveu em 30 de dezembro de 1883 à Mittag-Leffler:

"Eu sabia exatamente que efeito imediato isso teria; que de fato Kronecker iria explodir de raiva como se tivesse sido picado por um escorpião e, com suas tropas de reserva, iria começar uma gritaria tamanha que Berlim deve ter pensado que foi transportada para os desertos da África, com seus leões, tigres e hienas. Parece que eu realmente consegui alcançar esse objetivo!"[20]

---

[18] **Dauben, *o.p.cit.* p.1**

[19] **O Teorema de Bolzano - Weierstrass tem um papel de extrema importância na Análise e diversas aplicações. O Teorema diz o seguinte: Toda sucessão limitada de números reais admite subsucessão convergente. Dem: Seja $x = (x_n)$ uma sucessão limitada. Sendo $a = \lim\inf x_n$ um valor de aderência, alguma subseqüêcia de x converge para a.**

[20] **Reproduzido em ACZEL, AMIR D. *O mistério do Alef: a matemática, a Cabala e a procura do infinito*. São Paulo: Globo, 2003.**

Kronecker por sua vez escreveu a Mittag-Leffler, pedindo para publicar um artigo no Acta Mathematica. Cantor ficou assustado, com receio de que tal artigo tivesse o objetivo de atacar seu trabalho anteriormente publicado no mesmo periódico. Com medo de perder seu “espaço” no Acta Mathematica (uma vez que era um dos poucos periódicos onde ele podia contar com um editor interessado em seu trabalho e solidário com sua atual situação), Cantor escreveu também para Mittag-Leffler ameaçando não mandar mais seus trabalhos se ele publicasse os de Kronecker. Com essa reação, Cantor praticamente perdeu um dos únicos amigos que ainda lhe restavam. E ainda que não bastasse, esse desentendimento foi em vão, pois como se revelou posteriormente, não passava de um blefe, Kronecker não pretendia publicar artigo nenhum.

2.4 – O perfil psicológico de Cantor

Cantor teve uma história emocional muito conturbada. Alguns autores, como Bell[21], atribuem essa sua instabilidade mental ao seu pai por cobrá-lo em excesso, criando expectativas que o pressionavam. Outros autores, porém, como Schoenflies, culpam os atritos entre Cantor e Kronecker por tais crises.

Sua primeira crise mental se deu em maio de 1884. Nessa ocasião ele havia acabado de retornar de uma agradável viagem a Paris. Ele havia tido tempo de passear, visitar galerias e museus e também de entrar em contato com grandes matemáticos como Hermite e Picard e estava extremamente satisfeito em contar a Mittag-Leffler, que havia gostado muito de Poincaré (1854-1912) e estava realmente feliz em ver que os franceses haviam compreendido a Teoria dos Conjuntos Transfinitos e suas aplicações em análise funcional. Porém, oito dias depois, ele foi chamado inesperadamente de volta a Frankfurt, pois havia alguns problemas de família, que não se sabem quais, que necessitavam ser resolvidos. Logo depois disso veio então a primeira crise.

Alguns autores, como Aczel, vinculam essa primeira crise as suas frustrações em tentar resolver a hipótese do continuum, pois o colapso nervoso viria logo após ele ter cancelado a publicação do seu artigo no Acta Mathematica (Cantor estava muito

[21] **Todos os autores citados têm o nome de seus trabalhos na bibliografia desta dissertação para facilitar eventuais consultas.**

confuso a respeito do continuum. Ora pensava haver provado a hipótese, ora pensava ter chegado à conclusão contrária).

Essa crise durou mais de um mês e deixou toda sua família preocupada. Sua filha mais velha, chamada Else, tinha apenas nove anos na ocasião e não conseguia compreender tamanha mudança no comportamento do pai. Meses depois, em 18 de agosto, Cantor escreveu a Mittag-Leffler. Ele estava tentando relaxar e se recuperar da experiência desagradável e estava hospedado no Friedrichroda, um resort de verão. Ele se sentia de certa forma culpado por sua crise, não pelo excesso de trabalho, mas pelos resultados de sua pesquisa.

Para Cantor, sua crise havia sido desencadeada pelos atritos que teve com Kronecker. Ele escreveu, que nunca deveria ter permitido que Kronecker o tirasse tanto do sério. Tamanho foi o incomodo, que ele decidiu que deveria contactá-lo para tentar uma reconciliação. No mesmo dia que escreveu a Mittag –Leffler, postou uma carta para Kronecker. Nesta carta, ele tentou explicar sua insatisfação com a rivalidade que se formou entre eles. Independente de como Kronecker iria reagir, ele gostaria de sentir que fez sua parte, para ficar mais aliviado. No final de agosto, Kronecker respondeu com uma carta educada, relembrando Cantor o quão próximo eles já estiveram nos tempos em que ele era estudante em Berlin. Cantor ficou tão satisfeito com a resposta recebida que escreveu novamente a Mittag-Leffler contando o ocorrido e desabafando que agora se sentia bem para pegar no trabalho novamente.

Apesar de Cantor ter retornado aos seus trabalhos matemáticos, ele dividia sua atenção com outras questões totalmente distintas. Passou a desenvolver uma pesquisa, que para ele era de extrema importância e que tinha como objetivo provar que as obras de Shakespeare eram na verdade de autoria de Francis Bacon. Essa sua hipótese Bacon-Shakespeare o acompanhou ao longo de muitos anos e parecia voltar ainda mais intensa, como uma espécie de fuga, após cada crise. Além disso, Cantor também nutria grande interesse pela maçonaria, pela Fraternidade Rosa- Cruz e também por teologia. Mas um dos fatos mais marcantes foi, após essa primeira crise, Cantor repentinamente se candidatar, em Halle, ao cargo de professor de Filosofia, em vez de Matemática. Isso mostra como os seus interesses extra-matemáticos foram tomando cada vez mais importância em sua vida.

Essa estratégia de desviar seu foco de atenção da matemática, só surtiu efeito num primeiro momento. Posteriormente as crises voltaram a acontecer, cada vez mais fortes, mais longas e mais freqüentes.

Em 1899, Cantor sofreu um novo ataque e desta vez passou um longo período internado na Halle Nervenklinik. Nessa ocasião, solicitou licença médica de um ano e no outono, ao receber alta pediu afastamento da universidade sendo atendido pelo Ministério da Educação em ambos os casos. Então, em novembro, escreveu novamente uma carta ao Ministério, pedindo, porém, para desta vez abrir mão definitivamente da sua carreira de professor em Halle. E disse ainda que, se seu salário não fosse reduzido, ele ficaria muito satisfeito em trabalhar em uma biblioteca, alegando ser altamente qualificado para tal, por seu extenso conhecimento em história e literatura e seu trabalho de pesquisa na questão Bacon – Shakespeare, anexando inclusive três cópias de um panfleto que ele havia publicado sobre o assunto. Acrescentou ainda que tinha uma informação sobre o primeiro rei da Inglaterra que, se revelada, iria apavorar o governo inglês. Além disso, solicitou que a resposta fosse enviada em dois dias e advertiu que caso seu pedido fosse recusado ele iria se apresentar como cidadão natural russo ao corpo diplomático e oferecer seus serviços ao Czar.

A carta escrita logo após ter recebido alta da clínica mental, parece ter sido desconsiderada e Cantor permaneceu como professor em Halle. Cantor ainda passou parte de 1899 hospitalizado, mas antes do final do ano alguns trágicos acontecimentos ainda o aguardavam.

A perda da mãe de Cantor em 1896, trinta anos após a morte do pai, já havia sido um duro golpe. Porém, em 1899, Cantor viria a perder também seu irmão mais novo, Constantin, que morreu em Capri. Como se não bastasse, no dia 16 de dezembro de 1899, após retornar de um discurso sobre sua hipótese Bacon-Shakespeare em Leipzig, Cantor recebeu a terrível notícia de que seu filho Rudolf havia morrido de repente naquela tarde. Rudolf era extremamente carinhoso e muito querido e iria fazer treze anos em quatro dias. O menino havia sido frágil na infância, mas estava se tornado cada vez mais forte. Em uma carta que Cantor escreveu para o matemático alemão Felix Klein (1849-1925) no dia 31 de dezembro de 1899, ele lamentava muito a morte de Rudolf, que era um filho em quem ele depositava muitas expectativas. Por ter herdado o talento musical da família, Cantor esperava que ele se tornasse um grande violinista e se arrependia, ele mesmo, de ter abandonado seu dom musical para seguir a carreira matemática. Cantor não conseguia sequer se recordar porque havia tomado tal decisão tão equivocada na juventude. Ele tentava realizar-se através de seu filho, que poderia ter feito o que ele não fez, mas até essa esperança agora estava acabada.

Mesmo com todos os acontecimentos ocorridos em 1899, Cantor conseguiu manter-se longe das clínicas pelos próximos três anos, retornando a se hospitalizar novamente somente em 1902, ficando afastado do trabalho por vários meses consecutivos e voltando ao meio acadêmico em 1903. Em 1904, Cantor foi. acompanhado de suas filhas Else e Anna-Marie, participar do Terceiro Congresso Internacional de Matemática, realizado em Heidelberg. Neste congresso, Jules C. König, um respeitado matemático húngaro, leu um ensaio, onde afirmava que nenhum dos *alefs* de Cantor correspondiam ao número cardinal do *continuum.* Essa afirmação foi humilhante para Cantor e serviu de estopim para que ele desmoronasse novamente. O artigo de König repercutiu demasiadamente e com isso a aflição de Cantor também se multiplicou. Cantor, porém, não acreditou em nenhum momento que o artigo pudesse estar correto. No dia seguinte o matemático alemão Ernest Zermelo (1871-1953) provou que havia um erro no uso de um dos lemas no artigo de König.

Antes desse episódio, Cantor vinha de uma fase positiva em sua carreira. A atenção para os trabalhos de Cantor se intensificara tanto, que nos dois congressos anteriores os trabalhos de Cantor haviam tomado posição de destaque. No primeiro, realizado em 1897, em Zurique, Cantor havia comparecido acompanhado de suas filhas Else e Gertrude e teve o prazer de ver a teoria de conjuntos, desenvolvida por ele, ser extremamente exaltada por grandes matemáticos. O congresso seguinte aconteceu em 1900, em Paris, porém Cantor não participou. Esse congresso ficou conhecido na História da Matemática por ter sido onde David Hilbert (1862-1943), grande matemático alemão, enunciou os famosos “Dez Problemas” (posteriormente expandido para uma lista de 23 problemas, que consta no apêndice), que se encontravam ainda em aberto e que Hilbert esperava que fossem solucionados ao longo do século XX. O primeiro desses problemas (e também do grupo expandido) era a Hipótese do Continuum, de Cantor. Nesta época, renomados matemáticos como Zermelo e Hilbert, se interessavam realmente pelos trabalhos de Cantor.

Após o ocorrido em Heidelberg, Cantor foi mais uma vez hospitalizado, ficando afastado do trabalho até 1905. Depois disso, as crises passaram a ser freqüentes e ele ficou internado na Halle Nervenklinik de 22 de outubro de 1907 a 15 de junho de 1908, depois novamente de 28 de setembro de 1911 a 18 junho de 1912, quando foi removido para um outro sanatório. Foi internado pela última vez na clínica em Halle em 11 de maio de 1917. Ele não queria ficar internado e escreveu diversas vezes para sua família pedindo para voltar para casa. Em uma de suas últimas cartas para sua esposa podemos ver o lado emocional de Cantor, o verdadeiro homem de carne e osso que havia por detrás do gênio incompreendido. Cantor era um homem comum, carinhoso, sensível, que amava sua esposa e que se sentia resignado com o rumo que sua vida tomara, como se pode perceber no poema abaixo:

“That was a winter cold and wild,
Like none one can recall;
But then I had it good and mild,
Was my luck your at all?

The love you gave me my good wife,
You cared for me so well;
However gray might seem this life,
Your cooking would excell!

And now that spring is come full-fledged,
The Holy Child is gone;
And in greatest haste are pledged,
To visit sites unknown.

But had you then remained at home,
Cold would my winter’ve been;
To suffer gladly, pen a poem,
To escape the world I’m in.” [22]

---

[22] **Aquele era um inverno frio e selvagem, como ninguém pode recordar; Mas então eu tive-o bom e suave. Era sua a minha sorte?**

O tempo se passou e Cantor não recebeu alta. Durante a Primeira Guerra Mundial, tudo se tornou mais escasso, inclusive a comida, e Cantor foi ficando cada vez mais abatido. A maioria dos internos foi transferida da clínica para dar lugar aos soldados feridos na guerra, ficando somente uma senhora e Cantor. Em 6 de janeiro de 1918, Cantor morreu supostamente de um ataque cardíaco (essa foi a causa mortis oficial, porém, não se pode esquecer que Cantor estava muito fraco e desnutrido havia meses). A imortalidade de Cantor, nessa época, já estava assegurada e, como disse Edmund Landau em uma carta a esposa de Cantor, dois dias após ele haver falecido: *"Never will anyone remain more alive."* [23]

O amor que você me deu minha boa esposa, você se preocupou tanto comigo; Por mais cinza que possa parecer esta vida, sua comida se supera!

E agora que a primavera chega cheia de força, a criança sagrada se foi; mais rápido com a promessa, de visitar lugares desconhecidos.

Mas então você permaneceu em casa, frio viria a ser meu inverno; Para sofrer agradavelmente, escrever um poema, para escapar do mundo no qual eu estou.

Cantor to Vally Guttmann Cantor, May 3,1917; *Natchlass Cantor II. Apud* Dauben, *o.p.cit.* p. 284

[23] "Nunca ninguém continuará tão vivo." Landau to Vally Guttmann Cantor, January 8, 1918; *Nachlass Cantor XVII*; transcribed in Meschkowski (1967), 270. *Apud* Dauben, *o.p.cit.* p. 284

Capítulo 3 – Aparência e Essência na Matemática de Cantor

Os trabalhos de Cantor apresentam um vasto material onde é possível se traçar um paralelo com o que foi visto sobre as idéias de Kant. O diferencial do que Cantor fez, reside justo no fato dos resultados que ele obteve não coincidirem com o que era observado, percebido. Os sentidos diziam algo que ia contra os resultados que seriam encontrados. Para compreender melhor essa questão, a seguir será apresentada uma breve introdução a Teoria de Conjuntos.

3.1 Cantor e a Teoria de Conjuntos

"A Matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha das matemáticas".

Gauss

As inovações que Georg Cantor introduziu na Teoria de Conjuntos se iniciaram com a noção de infinito real, algo que ainda não era conhecido. Nos séculos anteriores, muitos matemáticos haviam chegado, através da noção de limites, apenas à noção de infinito potencial. Cantor, porém, não focalizou somente nos números, e ao analisar também os conjuntos foi muito além de tudo já visto anteriormente.

Influenciado pelas idéias de seu mestre Weierstrass, Cantor decidiu analisar o conjunto P' composto por todos os pontos limites de um conjunto P (por exemplo, o conjunto de números irracionais em um intervalo é o conjunto dos pontos-limite do conjunto de números racionais). Como acontece constantemente ao longo da vida de Cantor (como será mostrado nos capítulos seguintes, ele sempre procurava ir além, mesmo quando era totalmente contra-intuitiva sua questão), ele não se satisfez, e se propôs a analisar o conjunto P'', que seria o conjunto de todos os pontos limite do conjunto P'. Então, continuou a se questionar sobre a formação de infinitos novos conjuntos derivados P''', P'''', ... Do questionamento sobre conjuntos e os primeiros contatos com o infinito surgiu sua Teria de Conjuntos.

Não se pode iniciar um estudo em Teoria de Conjuntos sem antes entender realmente o que é um conjunto. Para Georg Cantor, um conjunto $\mathscr{M}$ é uma coleção completa de objetos distintos (chamados elementos). Como exemplos, há o conjunto dos vértices de um triângulo, composto por 3 elementos; o conjunto dos números primos, composto de infinitos elementos e muitos outros. É necessário lembrar que a ordem dos elementos de um conjunto não importa, sendo o conjunto {1, 2, 3 } igual ao conjunto {3, 2, 1}, uma vez que são compostos dos mesmos elementos, estando apenas em ordem diferente. Além disso, um mesmo elemento não pode aparecer mais de uma vez no conjunto (não podemos construir um conjunto com os elementos 1, 2, 3, 2, pois o elemento 2 só pode aparecer uma vez).

Dois conjuntos $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N}$ são considerados iguais, ou seja $\mathscr{M} = \mathscr{N}$, se e somente se todos os elementos de $\mathscr{M}$ são também elementos de $\mathscr{N}$, e se da mesma maneira, todos os elementos de $\mathscr{N}$ são também elementos de $\mathscr{M}$. Para representar que um elemento m pertence ao conjunto $\mathscr{M}$ denota-se $m \in \mathscr{M}$, e usa-se a notação $m \notin \mathscr{M}$, quando o elemento m não pertence ao conjunto $\mathscr{M}$.

Os conjuntos são classificados também em finitos, quando tem uma quantidade finita de elementos (como o conjunto {1, 2, 3} por exemplo) ou infinitos, quando possuem uma quantidade infinita de elementos. O conjunto dos números naturais é um bom exemplo de conjunto infinito e seus elementos são dados seguindo uma determinada ordem natural estabelecida através das suas sucessões {1, 2, 3, 4, ...} e por essa característica é classificado como conjunto enumerável.

DEFINIÇÃO: De forma geral, classificamos um conjunto $\mathscr{M}$ como **enumerável** se, e somente se, este pode ser escrito como a seqüência $\{m_1, m_2, m_3, ...\}$, isto é, se e somente se, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre cada elemento m com um número natural, de forma que, todo elemento m possua um único número natural correspondente, e de maneira análoga, para todo número natural corresponda um e somente um elemento m. Caso não seja possível estabelecer está correspondência com os números naturais, o conjunto é chamado de não – enumerável.

Georg Cantor publicou em 1874 um dos seus primeiros artigos, conhecido como: “On a Property of Collections of All Algebraic Numbers” onde provou a enumerabilidade de dois conjuntos (será visto a seguir) que não aparentam de forma alguma ter essa característica. Esse foi o começo de sua jornada em busca de descobrir as verdades intrínsecas, independentemente do que aparentam. Depois disso, ele passou a comparar a quantidade de elementos de alguns conjuntos, definindo o que seria equivalência entre dois conjuntos.

DEFINIÇÃO: Um conjunto $\mathscr{M}$ é considerado **equivalente** a um conjunto $\mathscr{N}$, i.é. $\mathscr{M} \sim \mathscr{N}$, se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca (um a um) entre cada elemento dos conjuntos, ou seja, se para todo elemento *m* pertencente a $\mathscr{M}$ corresponder um e somente um elemento *n* pertencente a $\mathscr{N}$ e analogamente, para todo elemento *n* pertencente a $\mathscr{N}$ corresponder um e somente elemento *m* pertencente a $\mathscr{M}$. Essa correspondência biunívoca é chamada também de mapeamento. Deve-se ressaltar que o conjunto vazio é equivalente somente a ele mesmo.

Desta definição pode-se concluir que se dois conjuntos são equivalentes têm a mesma quantidade de elementos, ou seja, tem a mesma cardinalidade (possuem o mesmo número cardinal para representá-los).

Também é importante saber as relações entre conjuntos, subconjuntos e união ou soma de conjuntos e para isso será necessário estabelecer mais algumas definições.

Seja um conjunto $\mathscr{M}$. O conjunto $\mathscr{N}$ é considerado subconjunto de $\mathscr{M}$, ou seja $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$, se todos os elementos de $\mathscr{N}$ pertencem simultaneamente ao conjunto $\mathscr{M}$, i. é., se $n \in \mathscr{N}$, então $n \in \mathscr{M}$. De acordo com essa definição, todo conjunto é subconjunto de si mesmo e nesse caso é chamado de subconjunto impróprio. Por outro lado, $\mathscr{N}$ é chamado subconjunto próprio de $\mathscr{M}$, ou seja $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$, se $\mathscr{N}$ é um subconjunto de $\mathscr{M}$ e $\mathscr{N} \neq \mathscr{M}$. O conjunto de todos os elementos de $\mathscr{M}$ que não pertencem simultaneamente ao conjunto $\mathscr{N}$ é chamado de complementar $\mathscr{C}$ de $\mathscr{N}$ em relação a $\mathscr{M}$, ou seja $\mathscr{C} = \mathscr{M} - \mathscr{N}$. Essa definição deve ser válida mesmo no caso de $\mathscr{N}$ ser subconjunto impróprio de $\mathscr{M}$, e para isso será introduzido o conjunto vazio, onde nesse caso $\mathscr{C} = \{\ \}$. O conjunto vazio deve ser classificado como conjunto finito e deve ser considerado subconjunto de todos os conjuntos, inclusive dele mesmo.

Como exemplo para as definições anteriores, é possível tomar o conjunto dos números racionais como um subconjunto do conjunto dos números reais, onde o conjunto dos irracionais é o complementar dos racionais em relação aos reais.

Agora é possível definir o que é um conjunto infinito:

DEFINIÇÃO: Um conjunto $\mathscr{M}$ é infinito se e somente se este contem um subconjunto próprio $\mathscr{N}$, ou seja $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ tal que $\mathscr{N} = \mathscr{M}$.

Voltando ao conceito de enumerabilidade, adicionado aos últimos conceitos desenvolvidos nos dois parágrafos anteriores, segue conseqüentemente:

TEOREMA: Todo subconjunto de um conjunto enumerável é também enumerável.

Prova: Seja $\mathscr{M} = \{m_1, m_2, m_3, ...\}$ um conjunto enumerável dado, e suponha que $\{\} \subset \mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$. Então do conjunto $\mathscr{M}$ pode-se tomar um primeiro elemento m_{k1} que pertence a $\mathscr{N}$, onde $n_1 = m_{k1}$. Esse é seguido novamente por um outro elemento $m_{k2} \in \mathscr{M}$ que também está em $\mathscr{N}$, onde $n_2 = m_{k2}$. Esse processo pode ou não terminar, vai depender se $\mathscr{N}$ é ou não finito. Como $\mathscr{M}$ contém todos os elementos de $\mathscr{N}$ (e possivelmente muitos outros), a seqüência $\{n_1, n_2, n_3, ...\}$ inclui precisamente todos os elementos de $\mathscr{N}$. Logo $\mathscr{N}$ é finito ou enumerável.

É necessário definir ainda algumas operações. Para começar, a união $\cup$ ou soma $\mathscr{S}$ de finitos ou infinitos conjuntos é tida como o conjunto de todos os elementos que pertencem *pelo menos* a um dos conjuntos envolvidos. A união dos conjuntos enumeráveis $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3, ...$ é dada pela notação:

$$\mathscr{S} = \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2 + \mathscr{M}_3 + ... \qquad \text{ou} \qquad \mathscr{S} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{M}_k$$

No caso da interseção $\cap$ ou produto $\mathscr{D}$ de finitos ou infinitos conjuntos é tida como o conjunto de todos os elementos que pertencem *simultaneamente a todos* os conjuntos envolvidos. A interseção dos conjuntos enumeráveis $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$, $\mathscr{M}_3$, ... é dada pela notação:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3, \ldots) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{D} = \mathscr{M}_1 \,.\, \mathscr{M}_2 \,.\, \mathscr{M}_3 \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} \mathscr{M}_k$$

Outra notação utilizada é a que relaciona as duas operações vistas acima e que é similar à utilizada com números:

$$\mathscr{M}(\mathscr{B} + \mathscr{Q}) = \mathscr{M} \,.\, \mathscr{B} + \mathscr{M} \,.\, \mathscr{Q}$$

Na soma, o conjunto vazio não é levado em conta e a soma de conjuntos vazios resulta em um conjunto vazio. Já no produto, se um dos conjuntos for vazio, $\mathfrak{D} = \{\}$, uma vez que os conjuntos não terão nenhum elemento em comum. Se a interseção entre quaisquer dois conjuntos for vazia, esses dois conjuntos são chamados de mutuamente exclusivos ou disjuntos. Para exemplificar, vale considerar $\mathscr{M} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e $\mathscr{N} = \{2, 3, 4\}$, então $\mathscr{M} + \mathscr{N} = \mathscr{M}$ e $\mathscr{M} \,.\, \mathscr{N} = \mathscr{N}$. Se agora $\mathscr{M}$ for tomado como o conjunto de todos os números naturais pares e $\mathscr{N}$ como o conjunto de todos os naturais impares, então $\mathscr{M} + \mathscr{N}$ é o conjunto de todos os números naturais e $\mathscr{M} \,.\, \mathscr{N} = \{\}$.

Após a introdução desses conceitos iniciais, é possível então analisar as primeiras grandes questões levantadas por Cantor.

3.2 – A Cardinalidade de alguns Conjuntos Numéricos

"I have spoken...of our need to return continually to the first principles of our science, and of the advantages of this for the study of human mind. This need has inspired two enterprises which have assumed a very prominent place in the most recent development of mathematics. The first is Cantorism… Cantor introduced into science a new way of considering the mathematical infinite… but it has come about that we have encoutered certain paradoxes, certain apparent contradictions that would have delighted Zeno the Eleatic and the school of Megara. So each must seek the remedy. I for my part – and I am not alone – think that important thing is never to introduce entities not completely definible in a finite number of words. Whatever be the cure adopted, we may promise ourselves the joy of the physician called in to treat a beautiful pathologic case."[24]

Henri Poincaré

Antes de analisar direto o "tamanho" dos Números Inteiros, é interessante se iniciar por algo mais simples. Primeiro deve-se responder a seguinte pergunta: nos Números Naturais, existe a mesma quantidade de números pares e números impares?

Essa pergunta parece ter uma resposta obvia: SIM. Realmente, aparentam existir tantos números pares quanto impares no conjunto dos Números Naturais. Porém, por estar lidando com matemática, não se deve restringir as aparências. Mesmo assim, é simples verificar essa equivalência entre os pares e os impares. Para isso, basta associar a cada número da forma $2n$ um número da forma $2n - 1$, para todo n pertencente ao conjunto dos Números Naturais. Desta maneira, todos os números pares terão um e

[24] Eu havia dito... de nossa necessidade retornar continuamente aos primeiros princípios de nossa ciência, e das vantagens disto para o estudo da mente humana. Esta necessidade inspirou dois empreendimentos que assumiram uma posição de destaque nos mais recentes progressos da matemática. O primeiro é o "Cantorismo"... Cantor introduziu na ciência uma nova maneira de considerar o infinito matemático... porém surgiu através de determinados paradoxos encontrados, algumas aparentes contradições que deleitariam Zenão de Eléia e a escola de Megára. Assim cada um deve procurar o remédio. Eu por minha parte - e eu não estão sozinho – acho que o importante é nunca introduzir as entidades que não sejam completamente definidas em um número finito das palavras. O que quer que seja a cura adotada, nós devemos nos prometer a contentamento de um médico chamado para tratar de um belo caso patológico.

somente um número impar correspondente, da mesma forma todos os números impares terão um e somente um número par correspondente. Portanto nenhum número; nem par, nem impar, deixou de ser mapeado, tendo todos eles um e somente um elemento correspondente.

1	3	5	7	...	2n – 1	(impares)
↕	↕	↕	↕		↕	
2	4	6	8	...	2n	(pares)

<u>3.2.1 – A Cardinalidade dos Números Inteiros</u>

"A verdade cientifica é sempre um paradoxo se julgada pela experiência cotidiana, que se agarra à aparência efêmera das coisas."

Albert Einstein

Depois deste primeiro exemplo, pode-se então analisar o caso do Conjunto dos Números Inteiros. Surge a pergunta: teria o Conjunto dos Naturais a mesma quantidade de elementos (números) que o Conjunto dos Inteiros?

A princípio, a pergunta parece absurda, e sem sentido, uma vez que "percebe-se" claramente que o Conjunto dos Números Inteiros tem o dobro de elementos que o Conjunto dos Números Naturais. Ora, se o Conjunto dos Números Inteiros possui *todos* os elementos do Conjunto dos Números Naturais e ainda todos os simétricos desses números (ou seja, os infinitos Números Naturais mais os infinitos Números Inteiros negativos, que seriam em "mesma quantidade" dos Números Naturais, porém com o sinal negativo) concluí-se que o Conjunto dos Números Inteiros tem, portanto o dobro de elementos do Conjunto dos Números Naturais.

A argumentação acima parece totalmente satisfatória para a maioria das pessoas, mas não para Georg Cantor. Realmente, "parece" ser assim que funciona, já que os Inteiros têm duas vezes o tamanho infinito dos Naturais, mas será que as operações que são realizadas normalmente valem quando se trata de quantidades infinitas? Será que “$2.\infty > \infty$”?

A partir daqui Cantor encontra respostas que contrariam totalmente a intuição, ao lidar com o infinito, nem tudo é o que aparenta ser. A coisa em si ultrapassa a sensibilidade, que fica incapaz de perceber a realidade por detrás das aparências. Cantor não se deixa acomodar pela aparência das coisas e mergulha em busca das verdadeiras respostas.

Ainda é possível ter tanta certeza, do que foi concluído alguns parágrafos acima? Cantor mostra que não, que mais uma vez haveria um engano pelo julgamento precoce, fundamentado na aparência das coisas. Para isso, pode-se construir uma argumentação semelhante à utilizada quando foi relacionada à quantidade de números pares com números impares.

Uma correspondência pode ser criada da seguinte forma: Para todos os números pares dos Naturais é possível associar um e somente um número positivo do Conjunto dos Inteiros, da mesma forma que, para todos os números impares dos Naturais também é possível associar um e somente um número negativo dos Inteiros. A “volta” da correspondência também é feita de maneira análoga. Desta forma, nenhum elemento de nenhum dos conjuntos fica desprovido de um correspondente e todos os elementos de um conjunto são relacionados a um e somente um elemento do outro conjunto. Portanto, os dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos e então pode-se dizer que possuem a mesma cardinalidade ou potência (Mächtigkeit).

3.2.2 – A cardinalidade dos Números Racionais

"Intuition, as he (Cantor) had learned, was a poor guide in rigorous mathematics."[25]

Joseph Dauben

Uma vez que a primeira questão Naturais x Inteiros foi resolvida, é natural para Cantor prosseguir para a questão seguinte: teria o Conjunto dos Naturais a mesma quantidade de elementos (números) que o Conjunto dos Racionais?

Ao analisar essa segunda pergunta, mesmo com toda cautela provida pelo *background* da questão anterior, esta parece ainda mais sem sentido. É "claro" que existe muito mais Números Racionais do que Números Naturais. Uma vez que, entre quaisquer dois números racionais distintos, sempre é possível encontrar um outro número racional (Se tomados os números a e b pertencentes ao Conjunto dos Números Racionais, pode-se construir um número $c = \frac{a+b}{2}$ que também pertence aos Racionais). Porém, entre dois números naturais consecutivos não há um outro número natural. Aparentemente, conclui-se que existem mais números racionais do que números naturais.

Então, Cantor, em um de seus primeiros artigos sobre Teoria de Conjuntos, rearranjou o Conjunto dos Números Racionais de modo que pudessem ser postos em correspondência biunívoca com os Naturais, provando que os Racionais eram enumeráveis e, portanto, com a mesma quantidade de elementos que os Naturais, logo de mesma cardinalidade.

TEOREMA: O Conjunto dos Números Racionais é enumerável.

Prova: Primeiro trabalha-se apenas com os números racionais positivos, escrevendo todos em ordem de magnitude, iniciando com os de denominador 1,

---

[25] **A intuição, como ele (cantor) havia aprendido, era uma guia deficiente para uma matemática rigorosa.**

posteriormente todas as frações de denominador 2, todas as frações de denominador 3 e assim sucessivamente, obtendo uma lista da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Escrevendo os números na ordem indicada pelas setas[26] cria-se uma seqüência onde certamente todo numero racional aparece somente uma vez listado (não repetindo números como 1 e 2 / 2 , que são representações diferentes do mesmo número), como na seqüência abaixo:

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 3,\ 4, \frac{3}{2},\ \frac{2}{3}, \frac{1}{4},\ \ldots$$

Se essa seqüência for denotada por $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$, tem-se que $\{0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, -r_3, r_3, \ldots\}$ será conseqüentemente o conjunto de todos os Racionais e portanto é enumerável[27]. Logo, o conjunto dos Racionais pode ser posto em correspondência biunívoca com os Naturais e, portanto possuem a mesma cardinalidade.

---

[26] **Algumas pessoas conhecem erroneamente esse mecanismo como o argumento diagonal de Cantor, porém esse artifício utilizado acima é original de Cauchy. O verdadeiro argumento diagonal de Cantor é o que é empregado na demonstração de 1887, da não-enumerabilidade dos Reais, que será visto adiante**

[27] **Note que isso não seria uma tarefa simples, se Cantor não tivesse tido a idéia de organizar essa lista sob essa espécie de matriz de dupla entrada, pois se fosse escrever todos os números seqüencialmente (em uma mesma linha), ele nunca chegaria nem a escrever as frações de numerador 2 (muito menos o restante), uma vez que existem infinitos números de numerador 1 e como ele ainda não teria acabado de listá-los ainda não poderia iniciar a etapa seguinte).**

Assim, foi criado o primeiro dos números transfinitos para descrever a cardinalidade ou potência desses conjuntos infinitos enumeráveis, chamado por Cantor de $\aleph_0$ (Aleph zero).

Com base nessa demonstração acima, utilizando o mesmo mecanismo de mapeamento, é demonstrado o seguinte teorema:

TEOREMA: A soma de enumeráveis[28] conjuntos enumeráveis é também enumerável.

Prova: Se houver um número finito de conjuntos enumeráveis, por exemplo, a soma de apenas dois conjuntos enumeráveis como $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, m_3, ...\}$ e $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, n_3, ...\}$ pode-se facilmente formar a seqüência m_1, n_1, m_2, n_2, ..., obtendo obviamente através dessa seqüência o conjunto enumerável formado pela soma dos conjuntos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$.

Portanto, é necessário agora analisar de forma mais generalizada, considerando a soma de uma quantidade enumerável de conjuntos enumeráveis. Toma-se para isso os conjuntos $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, ..., onde $\mathcal{M}_k$, tem m_{k1}, m_{k2}, m_{k3}, ... como elementos. Então são listados os infinitos conjuntos com seus infinitos elementos da seguinte forma:

$$\begin{array}{llll}
(\mathcal{M}_1) & m_{11}, & m_{12}, & m_{13}, \ldots \\
(\mathcal{M}_2) & m_{21}, & m_{22}, & m_{23}, \ldots \\
(\mathcal{M}_3) & m_{31}, & m_{32}, & m_{33}, \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots
\end{array}$$

Então, pode-se reescrever todos os elementos na ordem indicada pelas setas, obtendo: m_{11}, m_{21}, m_{12}, m_{31}, m_{22}, m_{13}, ... , desconsiderando elementos que por ventura já tenham aparecido. Desta maneira, foi possível mapear todos os elementos da união dos $\mathcal{M}_k$'s conjuntos, provando assim o teorema.

Assim, começou-se a achar que todos os conjuntos infinitos poderiam ser postos em correspondência.

---

[28] **Podem ser uma soma finita de conjuntos ou uma soma infinita, desde que enumerável.**

3.2.3 – A cardinalidade dos Números Algébricos

"O real está escrito em caracteres matemáticos"

Galileu

Antes de analisar direto o conjunto de todos os números reais, será visto primeiro um subconjunto dos Reais: os números algébricos.

Os números algébricos são os números que são raízes de um polinômio como:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

onde $a_n \neq 0$ e todo o a_k é um número racional[29]. Os números algébricos incluem todos os números racionais e ainda todos os outros números que se enquadram como raízes de polinômios.

TEOREMA: O conjunto de todos os números algébricos é enumerável.

Prova[30]: Denota-se f(x) um polinômio do tipo descrito acima ($f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, onde $a_n \neq 0$ e todo o a_k é um número inteiro).

Supõe-se, sem perda de generalidade, que $a_n > 0$. A altura[31] do polinômio é definida como um número positivo do tipo:

$h = n + a_n + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_o|$.

A altura desse polinômio é claramente um inteiro ≥ 1. Somente um número finito de polinômios possuem a mesma altura, porque $n \leq h$ e todo $|a_k| \leq h$. Além disso,

---

[29] **Onde esse a_k pode ser pensado como um inteiro após uma redução à um denominador comum.**

[30] **Esta sendo considerado nessa prova o conjunto dos números algébricos *reais*, porém esse teorema e essa demonstração podem ser estendidos e são válidos também para os números algébricos *complexos*.**

[31] **Essa definição de altura está presente no livro do Kanke, onde o h é definido por height. Usei como tradução a palavra altura, pois no artigo do Acta Matemática a palavra em francês também seria adequadamente traduzida por altura. Foi mantida a notação h, pois mesmo em português os valores de altura também são muitas vezes atribuídos a uma constante h.**

para cada altura h corresponde somente um número finito de números algébricos[32] (que seriam as raízes desses polinômios). Assim, torna-se possível escrever o conjunto de números algébricos como uma seqüência. Primeiro são escritos todos os números algébricos que são raízes de polinômios de altura 2. Como os únicos polinômios de altura 2 são *x* e *2*, obtem-se somente o 0 (zero) como raiz. Procede-se da mesma forma com os de altura 3, que são os polinômios x^2, *2x, x + 1, x – 1, 3.* Esses polinômios de altura 3 fornecem duas novas raízes : -1 e +1. Da mesma maneira, as novas raízes provenientes dos polinômios de altura 4 são: -2, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, +2. Para os polinômios de altura 5 são encontradas as raízes: -3, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, 3. E assim se segue a listagem:

0, -1 , +1, -2, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, +2, -3, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, 3, ...

Fazendo a altura dos polinômios variar em função dos números naturais são produzidos números algébricos distintos a cada nova altura. Como todo polinômio tem uma altura, todos os números algébricos aparecerão na seqüência. Ao mapear todos os algébricos, a prova do teorema está concluída.

---

[32] **Vale lembrar que um polinômio tem no máximo tantas raízes reais quanto o seu grau. Por exemplo, um polinômio de grau 2 pode ter até duas raízes reais, sendo sempre a sua quantidade de raízes limitada pelo seu grau.**

3.2.4 – A cardinalidade dos Números Reais

"But the uninitiated may wonder how it is possible to deal with a number wich cannot be counted."[33]

Bertrand Russel

Em dezembro de 1873, Cantor desenvolveu sua prova original para a não-enumerabilidade dos Números Reais, demonstração esta que foi publicada no início de 1874. Seu trabalho foi publicado com o título: "Sobre uma propriedade do conjunto de todos os números reais algébricos", pois nesse artigo, antes da prova propriamente dita sobre a enumerabilidade ou não dos reais, primeiro era demonstrado a enumerabilidade dos algébricos (por isso foi importante ser abordado no capítulo anterior), resultado esse que juntamente com a não-enumerabilidade dos reais provaria conseqüentemente a não-enumerabilidade também dos números transcendentes (que será visto a seguir). Ao contrário do que normalmente se imagina, sua demonstração original se deu através de intervalos encaixados[34], porém sua demonstração mais conhecida (que é usualmente citada, o que causa a falsa imagem de que foi a utilizada no artigo de 1874) e que trás o famoso argumento diagonal de Cantor, só surgiu em 1887, após ele já haver investigado inclusive as questões das dimensões que veremos alguns capítulos a seguir.

Após tantos conjuntos serem analisados e serem tidos como enumeráveis, só faria sentido haver a classificação e distinção entre conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis, somente após ser verificado que existe um conjunto que satisfaz a condição de ser não-enumerável, uma vez que até agora todos os exemplos encontrados anteriormente eram de conjuntos enumeráveis. A impressão era de que só haveria conjuntos enumeráveis, sendo sempre possível criar a correspondência biunívoca com os Naturais.

Essa impressão de todos os infinitos passarem a ter o mesmo "tamanho" dos naturais mostra como a intuição (dada pela aparência) passa por uma variação muito interessante. Há uma diferença entre um primeiro momento que surge antes da análise

---

[33] **Mas um não iniciado pode querer saber como é possível lidar com um número que não pode ser contado.**

[34] **Essa demonstração pode ser encontrada em Dauben,** *o.p.cit.* **p. 51.**

comparativa dos conjuntos e um segundo momento onde foi feita a comparação entre os naturais e os algébricos. É possível perceber uma sutil mudança entre não “crer” nas diferenças de “tamanhos” entre os conjuntos (que surpreendentemente se tornaram iguais em cardinalidade), para “crer” que então todos os conjuntos infinitos são, ou tem de ser, do mesmo “tamanho”. Desta forma, surge uma “nova” aparência, que leva a conclusão de que todos os infinitos são contáveis.

Porém, ao trabalhar com os números Reais ao invés de descobrir uma prova de que eles poderiam ser postos em correspondência biunívoca com os Naturais, como era esperado, Cantor descobriu justamente o oposto, uma prova de que eles não poderiam ser mapeados dessa forma. Na demonstração a seguir procederemos da forma que se tornou clássica (surgida somente em 1887).

TEOREMA: O conjunto de todos os números reais do intervalo [0,1] é não-enumerável.

Prova: Como o subconjunto de todo conjunto enumerável é enumerável, segue-se conseqüentemente que se um subconjunto é não-enumerável, logo o conjunto no qual ele está contido também é não-enumerável. Daí pode-se restringir a demonstração ao intervalo (0,1].

Cantor começa supondo que assim como fizera com os racionais, existe algum modo de enumerar todos os Reais. Restringiu a sua análise[35] aos números entre 0 e 1 e assumiu que os números deste intervalo poderiam ser listados em alguma ordem, para assim poder associar a cada um deles um Natural e então encontrar a correspondência biunívoca.

Para fazer esta lista, Cantor decide escrever todos os números desse intervalo sob a forma de um número que possua infinitas casas decimais como $0,a_1\, a_2\, a_3 \ldots$, onde $a_k \neq 0$.[36] Como exemplo, o número $\frac{1}{2}$ (que é igual a 0,5) poderia ser escrito como

---

[35] **Essa restrição só é possível, pois como será visto a seguir quando se tratar de dimensão, o conjunto de pontos de um intervalo na reta real, tem a mesma potência que a reta toda.**

[36] **Essa notação numérica foi utilizada por Cantor pela primeira vez em seu artigo “Bertarg zur Mannigfaltigkeitslehre”, publicado em 1878, que tratava sobre dimensões. Porém originalmente a notação acarretaria em erros, uma vez que permitia que um mesmo número possuísse duas**

0,4999... e o próprio 1 como 0,999... Assim, os números desse intervalo seriam listados sob a seguinte forma:

$$
\begin{array}{l}
0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \ldots \\
0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ \ldots \\
0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ \ldots \\
0,\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ \ldots \\
\qquad\quad \vdots
\end{array}
$$

Selecionada a parte decimal indicada pela linha diagonal (daí então que surge o nome do conhecido argumento diagonal de Cantor), é encontrado o número 0, a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} ... e desse é possível criar um novo número , trocando cada dígito a_{nn} por um $b_n \neq 0$ e $b_n \neq a_{nn}$, obtendo dessa forma um novo número $d = 0, b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \ldots$ Como d é um número decimal que também pertence ao intervalo (0,1], deveria então coincidir em todos os dígitos com algum número já presente na lista, uma vez que essa lista pretende possuir todos os números reais desse intervalo. Porém, d foi construído de forma a possuir ao menos um dígito diferente de cada um dos números já listados (onde o seu n-ésimo dígito o diferencia de cada um dos n-ésimos números listados). Por contradizer a hipótese inicial de que seria possível organizar tal lista (pois sempre é possível construir um número ainda não listado) para pôr os reais em correspondência com os naturais, prova-se o teorema de que os reais são não-enumeráveis.

Mais uma vez o que para alguns era esperado, ruiu-se frente à investigação de Cantor.

Logo Cantor percebe que vai precisar de um novo número cardinal para descrever a potência[37] do conjunto dos números reais, desenvolvendo para isso sua teoria sobre os transfinitos[38].

---

representações diferentes (o número 3 poderia ser escrito como 3,0000... ou como 2,99999...). Ao perceber isso no original que recebera do amigo muito antes de sua publicação, Dedekind, em uma carta escrita para Cantor em 22 de junho de 1877, o alertou e então Cantor ao reescrever seu artigo, adotou a segunda representação, não permitindo uma seqüência de zeros nas últimas casas decimais.

[37] **A classe de todos os subconjuntos de qualquer conjunto A é chamada o conjunto das partes de A, ou o conjunto de potência de A. Designamos o conjunto de potência de A por 2^A ou por P(A). Na**

3.2.5 – A cardinalidade dos Números Transcendentes

"... the set of all algebraic numbers, which Cantor proved to be denumerable. But if points on a mere line-segment are non-denumerable, it follows that all the points on Cartesian plane are likewise no-denumerable. The algebraic numbers are spotted over the plane like stars against a black sky; the dense blackness is the firmament of the transcendentals."[39]

E.T. Bell

Os números transcendentes[40] são realmente interessantes e surpreendentes. Esses números são um subconjunto dos reais. Mais precisamente, o conjunto dos números reais pode ser dividido em dois subconjuntos: os algébricos, que como já foi dito, são números que podem ser escritos como raízes de um polinômio (do tipo definido de maneira mais adequada na página 35) e os números transcendentes, que não são raízes de nenhum polinômio com coeficientes racionais.

O que os torna tão interessantes é que normalmente as pessoas só são capazes de se recordar a princípio de somente dois exemplos: o "e" e o "π" [41]. No mesmo instante surge a pergunta: Existem outros? Quantos? A resposta a essas perguntas foi dada por Liouville, que provou que em qualquer intervalo (α,β) dado, existem infinitos números transcendentes (mais um exemplo matemático que quebra as expectativas).

Teoria de Conjuntos a "potência" de um conjunto faz menção ao seu "tamanho" em potencial, a sua cardinalidade.

[38] **Antes do "*Grundlagen*", Cantor utilizava os números transfinitos praticamente apenas como notação para a cardinalidade dos conjuntos infinitos.**

[39] **... o conjunto de todos os números algébricos, que Cantor provou ser não-enumerável. Mas se os pontos em um mero segmento de reta forem não-enumeráveis, segue que todos os pontos no Plano Cartesiano são do mesmo modo não-enumeráveis. Os números algébricos são marcados sobre o plano como estrelas no céu escuro; a escuridão densa é o firmamento dos transcendentes**

[40] **Foi Liouville que estabeleceu pela primeira vez a existência dos números transcendentes.**

[41] **Em 1873, Hermite provou que o "*e*" era um numero transcendente e em 1882, Lindemann provou que o "π" também era transcendente.**

Porém, depois de Cantor e tudo que foi visto, essa resposta não satisfaz totalmente, pois trás inerente outra pergunta: Infinito, “de que tamanho”?

Por outro lado, mais uma vez essa pergunta parece tola, pois se o menor “tamanho de infinito” conhecido, ou melhor, o menor transfinito visto é o $\aleph_0$ (potência dos Naturais), logo os transcendentes devem ter o $\aleph_0$ como potência (já que usualmente só dois transcendentes são lembrados e então colocá-los em correspondência com os naturais já pareceria uma “vantagem” para os primeiros). Parece óbvio que se até o conjunto de todos os algébricos conseguiu ser mapeado pelos naturais, não serão justamente os transcendentes (que existem em tão poucos exemplos, apesar de já se saber que eram infinitos) que irão extrapolar os naturais.

Porém, novamente a aparência prega uma peça. Por esse motivo que os intuicionistas criaram tanta oposição aos trabalhos de Cantor, porque como nos outros exemplos, a realidade não se deixa revelar pela aparência. Mais uma vez é o contrário das percepções que traz a verdadeira resposta. E como nos casos anteriores, Cantor não se satisfaz e investiga para chegar à realidade por detrás das aparências:

Corolário[42] : O conjunto de todos os números transcendentes é não-enumerável.

Prova: Supondo que o conjunto dos transcendentes seja enumerável, ao se adicionar o conjunto de todos os números algébricos, que também é enumerável (como foi visto) será encontrado novamente um conjunto enumerável (a união de conjuntos enumeráveis resulta em um conjunto enumerável). Logo, o conjunto dos reais e conseqüentemente o seu subconjunto contido no intervalo (0,1] também seria enumerável, o que contradiz o último teorema provado.

Ou seja, mais uma vez Cantor consegue contrariar todas as expectativas e prova que esse conjunto que parece tão “pequeno”, devido aos poucos exemplos usualmente lembrados, tem potência maior que os naturais, inteiros, racionais e algébricos. O que só vem legitimar ainda mais a persistência de Cantor em revelar a realidade por detrás do sensível.

---

[42] **Esse corolário deriva do resultado apresentado anteriormente: os reais serem não-enumeráveis.**

3.3 - O Teorema de Cantor

"the finest product of mathematical genius and one of the supreme achievements of purely intellectual human activity"[43]

Ainda tratando de conjuntos infinitos de cardinalidades diferentes, há um exemplo ainda mais interessante: o Teorema de Cantor. Esse Teorema mostra que o conjunto das Partes de um Conjunto infinito não pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto original, ou seja, tem uma quantidade de elementos também infinita como no primeiro, porém de cardinalidade diferente. Portanto, a partir de um conjunto infinito sempre é possível construir um outro conjunto infinito de cardinalidade maior.

TEOREMA: Seja A um conjunto infinito, e P(A) o conjunto das partes do conjunto A, então A e P(A) não podem ser postos em correspondência biunívoca.

DEMONSTRAÇÃO[44]: Seja A o conjunto $A=\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ e $P(A) =\{\{\}, A, \{a_1\},\{a_2\}, \{a_3\},...,\{a_1,a_2\}, \{a_1, a_3\},..., \{a_1, a_2, a_3\},...\}$ o Conjunto das Partes de A, supõe-se por absurdo que o conjunto A e o conjunto P(A) podem ser postos em correspondência biunívoca. Para isso associa-se cada elemento a_k do conjunto A com um elemento P_k do conjunto P(A). Como exemplo, é possível ter a associação a seguir:

---

[43] **o produto o mais fino do gênio matemático e uma das realizações supremas da atividade humana puramente intelectual**
Reid sobre Cantor

[44] **Essa demonstração é baseada em notas de aula do Professor Ricardo Kubrusly, durante o curso de mestrado e graduação.**

A	P(A)
a_1	{}
a_2	A
a_3	$\{a_1\}$
a_4	$\{a_2\}$
...	...
a_k	$\{?\}_k$
...	...

$A=\{a_1, a_2, a_3, ...\}$

$P(A) = \{\{\}, A, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\},..., \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\},..., \{a_1, a_2, a_3\},... \}$

Desta maneira poderiam ocorrer duas situações diferentes que serão chamadas aqui de Caso 1 e Caso 2:

Caso 1: O elemento a_n que pertence ao conjunto A também pertence ao P_n do conjunto P(A) ao qual foi associado. No exemplo acima pode-se considerar o caso do elemento a_2 do conjunto A ser associado ao A do P(A), onde é fácil ver que $a_2 \in A$.

Caso 2: O elemento a_m que pertence ao conjunto A não pertence ao P_m ao qual está associado. No exemplo acima pode-se considerar o caso do elemento a_1 do conjunto A ser associado ao {} do conjunto P(A), onde é fácil ver que $a_1 \notin \{\}$.

Então, é possível criar um conjunto M formado por todos os elementos pertencentes ao conjunto A que se enquadram no Caso 2. Onde $M=\{a_m / a_m \notin P_m\}$.

Esse novo conjunto $M \subset A$ e portanto $M \in P(A)$. Portanto existe um elemento $m \in A$ tal que m está associado a M. Então surge uma pergunta: $m \in M$?

<u>1ª Possibilidade:</u> **SIM**

Supondo que $m \in M$, chega-se a uma contradição, pois por definição, M é formado apenas pelos elementos que são associados a conjuntos aos quais eles não pertencem, então se m está associado a M, $m \notin M$. Contradição.

2ª Possibilidade: **NÃO**

Supondo que $m \notin$ M, novamente outra contradição é encontrada, pois pela definição do conjunto M, este deve conter TODOS os elementos associados a conjuntos aos quais não pertença, então se *m* está associado a M e por suposição $m \notin$ M, então *m* atende as definições de M e portanto $m \in$ M. Outra Contradição.

Logo a suposição inicial de que era possível colocar o Conjunto das Partes de um conjunto A em correspondência biunívoca com o próprio conjunto A não pode ser verdadeira, pois leva inexoravelmente a contradição. Portanto, A não pode ser posto em correspondência com P(A) o que leva a conclusão que tem os conjuntos tem cardinalidades diferentes e que a partir de um conjunto infinito é sempre possível se criar outro de cardinalidade superior.

3.4 – A Questão da Dimensão

> *"Cantor´s theorem is thus a beautiful example of a mathematical paradox, of a true statement which seems to be false to the uninformed. And in terms of the problems of set theory, all mathematicians at that time were 'beginners' at best."*[45]
>
> *Herbert Meschkowski, sobre o Beitrag*

Após os surpreendentes resultados referentes à cardinalidade dos conjuntos, Cantor passou a se dedicar às questões relacionadas à dimensão. Seu trabalho sobre dimensão foi enviado em 12 de julho e 1877 ao Crelle's Journal e foi publicado em 1878 sob o título: "Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre".

As idéias começaram a surgir em 5 de Janeiro de 1874, quando a não-enumerabilidade dos reais já estava estabelecida. Cantor enviou uma carta ao seu amigo Dedekind com a seguinte pergunta:

> *"It's possible to map uniquely a surface (suppose a square including its boundaries) onto a line (suppose a straight line including its endpoints), so that to each point of the surface one point of the line and reciprocally to each point of the line one point of the surfece corresponds?"* [46]

Cantor percebeu que esta era uma questão com que deveria ter especial cuidado, uma vez que a resposta parecia ser claramente: não; resultando em uma prova

---

[45] **"O Teorema de Cantor é, portanto um belo exemplo de um paradoxo matemático, de uma afirmação verdadeira que pareça ser falsa para um desinformado. E em termos dos problemas de Teoria de Conjuntos, todos os matemáticos daquele tempo eram "novatos" em potencial."**

[46] **"É possível mapear excepcionalmente uma superfície (suponha um quadrado incluindo seus limites) em um segmento de reta (suponha uma linha reta incluindo seus pontos extremos), de modo que a cada ponto da superfície corresponda um ponto do segmento e também sua recíproca a cada ponto do segmento corresponda um ponto da superfície?"**
Dauben – opus cit. Cantor/Dedekind (1937), 20

que seria supérflua. De fato, segundo Dauben, quando Cantor mencionou tal problema a alguns amigos em sua visita a Berlim (na primavera de 1874) eles ficaram atônitos com o absurdo de se perguntar sobre tal questão, uma vez que eles estavam convencidos de que duas variáveis não poderiam, sob forma alguma, serem reduzidas a apenas uma. Mais uma vez a força da aparência e da intuição baseada na sensibilidade, sobrepunham a razão cegando-os perante a verdadeira essência da questão.

Três anos se passaram e em 1877, Cantor escreveu novamente para Dedekind, porém desta vez dizia que ao contrário do que prevalecia na opinião matemática no geral, a "absurda" correspondência entre linhas e planos não era impossível. Espaços contínuos de n-dimensões possuíam a mesma potência das curvas. Ou seja, o número de pontos existentes na linha é igual ao existente no espaço tridimensional, quadridimensional ou de dimensões superiores.

A prova de Cantor enviada para Dedekind, era simples, porém continha um pequeno erro que posteriormente foi facilmente sanado. Iniciava com variáveis independentes ρ, definida entre [0,1]: x_1, x_2, ..., x_ρ; e então ele considerava a $(\rho+1)^{esima}$ variável y entre [0,1], e então questionou se seria possível mapear ρ números x_1, x_2, ..., x_ρ em um y, de forma que a cada ρ-upla (x_1, x_2, ..., x_ρ) corresponde um valor definido y, e reciprocamente, para todo valor definido y, corresponde, uma e somente uma, ρ-upla (x_1, x_2, ..., x_ρ) ?

Depois de anos acreditando no contrário, ele admitiu que a única possível resposta deveria ser afirmativa. Todo número $x \in [0,1]$, pode ser escrito através de uma única expansão decimal[47]:

$$x = \alpha_1 \frac{1}{10} + \alpha_2 \frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_\nu \frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

Se for considerado um ponto x num espaço de dimensão ρ sua posição será determinada por:

$$x_\rho = \alpha_{\rho,1} \frac{1}{10} + \alpha_{\rho,2} \frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_{\rho,\nu} \frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

[47] **O mesmo tipo de escrita decimal utilizada na prova da cardinalidade dos Reais**

Cantor considerou então um único ponto:

(1) $$y = \beta_1 \frac{1}{10} + \beta_2 \frac{1}{10^2} + \ldots + \beta_\nu \frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

e criou a correspondência com um mapeamento único de x_ρ em y através de quatro equações:

$$\alpha_{1,n} = \beta_{(n-1)\rho+1}$$

$$\alpha_{2,n} = \beta_{(n-1)\rho+2}$$

$$\alpha_{\sigma,n} = \beta_{(n-1)\rho+\sigma}$$

$$\alpha_{\rho,n} = \beta_{(n-1)\rho+\rho}$$

Além disso, esse processo era reversível. Dado um valor *y* expresso sob sua escrita decimal infinita, bastava alterar os termos da equação (1) para se encontrar as ρ variáveis independentes x_ρ.

Cantor ficou tão impressionado com a riqueza do que sua descoberta havia revelado no domínio dos números reais, que em uma carta a Dedekind, enviada em 25 de junho de 1877 ele disse:

> "*what wonderful power there is in the ordinary real (rational and irrational) numbers, since one is in a position to determine uniquely, with a single coordinate, the elements of a* ρ*-dimensional continuos space*"[48]

Porém, Dedekind percebeu um erro na primeira prova de Cantor e escreveu em 22 de junho de 1877 para avisá-lo. A fim de evitar duas representações de um mesmo valor x, não poderia ser permitida nenhuma representação que, após um determinado dígito, se sucedesse uma seqüência de zeros. Caso contrário um número *x* da seguinte forma teria duas representações:

x = 3,00000... ou *x* = 2,999999...

---

48 **"que poder maravilhoso há nos números (racionais e irracionais) reais ordinários, desde que em uma posição para determinar unicamente, com uma única coordenada, os elementos de ρ-dimensões espaços contínuos."**
Dauben – opus cit. Cantor to Dedekind (1937), 34.

A única exceção da restrição acima era a representação do próprio zero. De acordo com essas condições, o mapeamento de Cantor era necessariamente incompleto. Considerando meramente o caso de duas dimensões, para $x_1 = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_v, ...$ e $x_2 = \beta_1, \beta_2, ..., \beta_v, ...$ o y correspondente no mapeamento de Cantor seria: $y = \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 ..., \alpha_v, \beta_v ...$

Contudo, caso y tivesse uma representação sob a forma: $y = \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 ..., \alpha_v, \beta_v, 0, \beta_{v+1}, 0, \beta_{v+2}, 0, ...$ seria inadmissível, pois seria decomposta em: $x_1 = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_v, 0, 0, 0, ...$ e $x_2 = \beta_1, \beta_2, ..., \beta_v, ...$ onde x_1 estaria fora das condições assumidas.

Cantor percebeu seu erro e mandou um postal concordando com Dedekind avisando: “*Unfortunately your objection is entirely correct; fortunatelly it affects only de proff, not the conclusion*”[49]. Dois dias depois ele estava pronto para reparar a prova, mas foi forçado a admitir que a simplicidade da sua prova anterior teria de ser sacrificada neste processo. Sua nova prova era longa e mais complicada, mas tinha esperanças que depois de estabelecido o teorema ele poderia eventualmente simplificá-la, como se pode ver no trecho a seguir:

> “*On a postcard which I sent you yesterday I acknowledged the gap you found in my proff, and also remarked that I am in a position to fill it, even though I cannot help expressing a certain regret that the matter cannot be resolved without more complicated consideration, this however is the nature of the subject and I must console myself; perhaps later it will turn out that the error in that proff can be avoided more easily than it is possible for me to do at present.*”[50]

[49] **“Infelizmente sua objeção está inteiramente correta; felizmente afeta somente de prova, não a conclusão.”**
Dauben, opus cit. Cantor / Dedekind (1937), 28

[50] **“Em um cartão postal que eu lhe enviei ontem onde eu reconheci a lacuna que você encontrou em minha prova, e também observei que eu estou em uma posição para corrigi-la, mesmo que eu não pudesse deixar de expressar um determinado pesar que o problema não pode ser resolvido sem considerações mais complicadas, isto, entretanto é natural nesse caso e eu devo consolar-me; talvez mais tarde perceba-se que aquele erro na prova poderia ser evitado mais facilmente do que eu fui capaz de fazer no presente.”**
Dauben, opus cit. Cantor /Dedekind (1937), 29.

Após fazer as alterações necessárias e responder a essa questão, Cantor percebeu que a forma como os matemáticos usualmente definiam a dimensão estava inadequada. Ele reconheceu que ele, assim como todo o restante da sociedade matemática, tinha assumido por todo tempo que os elementos de um espaço contínuo n-dimensional eram determinados por n coordenadas reais independentes. Ele e todo o restante tomavam isso como uma verdade matemática que não necessitava de prova e influenciado por sua descoberta atacou: "that all philosophical or mathematical deduction which make use of that erroneous assumption, are inadmissible."[51]

Dedekind o congratulou pelo resultado, mas com tais afirmações feitas por Cantor ficou realmente apreensivo. Para ele, Cantor não deveria desmerecer indistintamente qualquer trabalho, fosse filosófico ou matemático, que assumisse a invariância da dimensão. Com medo de Cantor anunciar seus resultados prematuramente e da repercussão de suas implicações, escreveu para Cantor em 2 de julho de 1877, desestimulando a publicação de seu resultado, por ser, de certa forma, extremamente provocativo. O último parágrafo desta carta dizia:

> *"I hope I have expressed myself clearly enough, the point of my writing is only to request that you not polemicize openly against the universal beliefs of dimension theory, heretofore held true, without first giving my objections a thorough consideration."*[52]

Esse resultado de Cantor, assim como os anteriores, era totalmente contra-intuitivo e mais uma vez era oposto a "crença" vigente. Cantor não se cansava de desafiar as aparências, e sempre objetivava encontrar a essência de seu objeto de estudo. Por não se satisfazer com a simples aparência das "coisas" a obra de Cantor é tão rica e surpreendente.

---

[51] "**que toda a dedução filosófica ou matemática que empregam essa suposição errônea, é inadmissível."**
Dauben, opus cit. Cantor /Dedekind (1937), 34.

[52] **"Eu espero que tenha me expressado de maneira clara o bastante, o objetivo da minha carta é somente pedir que você não polemize abertamente de encontro à opinião universal sobre as teorias da dimensão, sem antes levar minhas objeções em consideração."**
Dauben, opus cit. Cantor /Dedekind (1937), 38.

A frase que melhor define a sensação de quem vem a conhecer seus resultados é a que foi dita por Cantor, ao se surpreender com o que ele mesmo havia provado ao estudar as dimensões:

"Je le vois, mais je ne le crois pas." [53]

Carta de Cantor para Dedekind em 29 de junho de 1877.

[53] **Famosa frase que é conhecida em português como: Vejo, mas não acredito!**

3.5 – O Conjunto Ternário de Cantor

"The Cantor set is an instructively simple example of a fractal, demonstrating that our geometrical intuitions about space (even such simple spaces as the unit interval) can fail to capture much of the deep structure inherent in those very intuitions."[54]

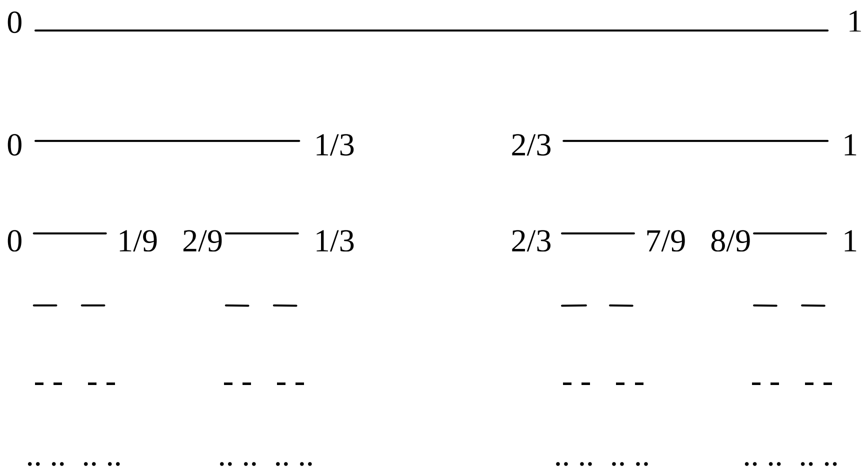
Math Academy Online™

O Conjunto Ternário de Cantor, conhecido também por alguns como Conjunto Fractal de Cantor, ou também como Poeira de Cantor é um dos maiores desafios para a intuição. Este é um exemplo que contraria ainda mais as aparências, surpreendendo até os que já conhecem os exemplos anteriores. Sua capacidade de romper a barreira do sensível é única e é o que faz desse exemplo um dos mais interessantes[55].

Este conjunto é construído a partir do segmento que representa o intervalo fechado [0,1]. Este segmento é dividido em três partes iguais dando origem aos intervalos com extremos em $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. É retirado o intervalo aberto $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ que representa o segmento do meio, ficando com os outros dois terços extremos. Repete-se então o mesmo procedimento com cada um dos segmentos restantes, sempre retirando fora o terço médio de cada divisão. Os quatro segmentos restantes sofrerão o mesmo processo de divisão e retirada do terço médio, dando origem a oito segmentos cada vez menores. Este processo deve ser repetido continuamente "ad infinitum", de maneira que o que resta em seu limite é o Conjunto Ternário de Cantor.

[54] **O Conjunto de Cantor é um instrutivo exemplo simples de um fractal, demonstrando que nossas intuições geométricas sobre o espaço (mesmo espaços simples como o intervalo da unidade) podem falhar ao capturar muito da profunda estrutura inerente a nossa intuição.**

[55] **O desenvolvimento do texto sobre o Conjunto de Cantor é baseado no texto escrito pelo Professor Ricardo Kubrusly encontrado em sua home-page que consta na bibliografia.**



Neste processo infinito de construção do conjunto, como foi retirado o intervalo aberto do meio da divisão, pode-se observar que os pontos extremos dos diversos segmentos obtidos em qualquer etapa da construção do Conjunto de Cantor (como por exemplo: 0,1,1/3,2/3,1/9,2/9,7/9,8/9,...), estarão sempre presentes até o fim, pertencendo portanto ao Conjunto de Cantor propriamente dito. E apesar de serem tirados infinitos pontos (mais que isso, pois ao se retirar os segmentos do meio, retiram-se infinitos intervalos, cada um contendo um infinito não-enumerável de pontos), restam ainda assim esses infinitos pontos (pois em cada etapa surgem mais pontos e são infinitas etapas) dos extremos.

Porém, retirar tantos infinitos pontos e ainda assim permanecer com infinitos pontos não é a maior das surpresas que esse conjunto reserva. Como foi visto, restar infinitos pontos é muito vago, uma vez que existem “tamanhos” distintos de infinitos. A questão é: Qual a cardinalidade do Conjunto de Cantor?

3.5.1 – A cardinalidade do Conjunto Ternário de Cantor

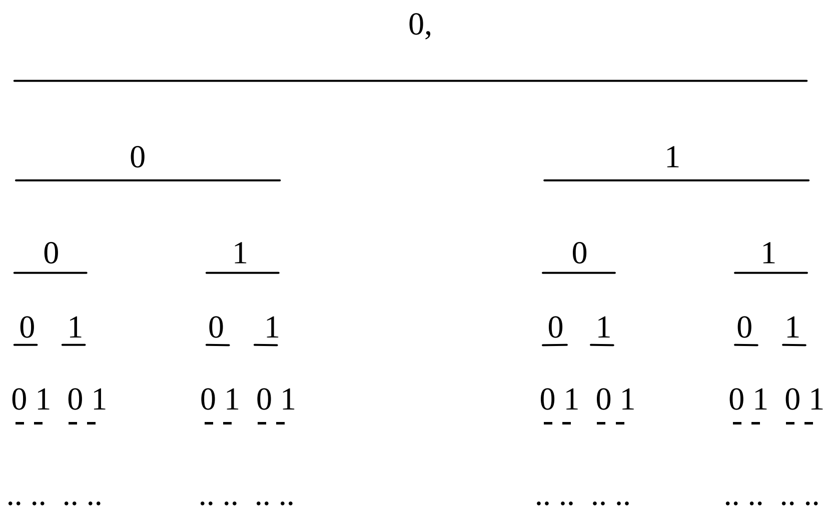
"The conclusion is inescapable: once we remove all those intervals, the number of points remaining is no less than the number we started with."[56]

Math Academy Online™

É possível mostrar, que a cardinalidade do Conjunto Ternário de Cantor é a mesma do segmento [0,1] e portanto da reta, apesar dos infinitos pontos que são retirados do segmento durante a sua construção.

Para isso, deve-se recordar que todo número tem uma escrita infinita (como foi feito na demonstração sobre a cardinalidade do conjunto dos números Reais) e que isso pode ser feito em qualquer base.

Diferente da maneira como foi procedida a demonstração dos reais, desta vez os números desse intervalo não serão escritos na base 10, como de costume e sim na base 2. O processo inicia-se pelo primeiro nível da construção, o intervalo [0,1] propriamente dito, que será associado a " 0,". Nas etapas seguintes o dígito 0 será associado ao segmento anterior (a esquerda) ao segmento retirado e o dígito 1 ao segmento posterior (a direita) ao retirado, como mostra a figura a seguir:



[56] **"A conclusão não deixa dúvidas: uma vez que nós removemos todos aqueles intervalos, o número de pontos restantes é nada menos do que o número com o qual nós começamos."**

Desta forma, cada sub-intervalo utilizado na construção do conjunto estará sendo associado a um número real entre zero e um, escrito na base 2 (pois só foram utilizados os algarismos 0 e 1 para escrevê-lo). Essa associação feita acima entre cada segmento da construção do conjunto de Cantor e os dígitos 0 ou 1 cria uma infinidade de seqüências infinitas do tipo: 0, $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$...onde cada a_k assume somente o valor de 0 ou 1. Essas seqüências apontam (i. é. tem como limite), precisamente, para os pontos remanescentes do processo de divisão ternária, isto é, para os elementos do próprio conjunto de Cantor.

Portanto, as seqüências infinitas criadas são de fato as escritas infinitas na base dois dos números reais entre zero e um. Esta correspondência é biunívoca, pois qualquer seqüência do tipo 0, $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$..., onde cada a_k assume somente o valor de 0 ou 1, representa (na base dois) um único número real e de maneira análoga, qualquer número real entre zero e um é representado por uma seqüência também desse tipo. Portanto, o Conjunto Ternário de Cantor, assim como o Conjunto dos Números Reais, é não enumerável.

Como foi dito, a obra de Cantor é um paraíso de exemplos que contrariam as percepções. Quanto mais se conhece, mais se encanta. Porém, isso ainda não é nada se comparado a mais um surpreendente aspecto desse conjunto: a análise do que foi retirado.

Ao somar o que se retira em cada etapa (o “comprimento” do que foi retirado) obtem-se:

$$\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{9} + 4.\frac{1}{27} + 8.\frac{1}{81} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{(i-1)}}{3^i}$$

Esse somatório pode ser calculado como a soma infinita de uma progressão geométrica[57] de razão menor do que 1 e cujo valor é igual a 1.

Portanto, ao contrário do que se espera, depois da construção completa do conjunto de Cantor (no limite), é possível perceber que o comprimento da soma do tudo que foi retirado é igual a 1, ou seja, o tudo que existia no início.

Agora, para a surpresa maior pode-se concluir que o Conjunto Ternário de Cantor, possui simultaneamente duas propriedades: tem o mesmo número de pontos do segmento [0,1], e por outro lado, toda a parte retirada tem também a mesma medida do segmento original, o que parece ser completamente contraditório. Ao julgar pelo sensível, jamais seria admitido tal fato, onde uma determinada "quantidade" inicial de pontos ao ser subtraída de uma quantidade de igual tamanho resulte no mesmo valor que havia inicialmente.

> *" O tudo que se tinha é igual ao tanto que se retira que é o mesmo que restou."*
>
> *Ricardo Kubrusly*

[57] **Como a soma da PG infinita é dada por** $\frac{a_1}{1-q}$ **então:** $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1.$

Conclusão

"Há, portanto, que desconfiar dos sentidos e dar uma oportunidade à razão como órgão da constituição do verdadeiro conhecimento."

Fonseca, M.J.M.

A questão de haver ou não um abismo entre aparência e essência já permeou grandes discussões e foi analisada por grandes nomes, como Kant, por exemplo. Alguns crêem que há uma correspondência direta entre o que podemos perceber e a realidade do objeto de observação, mas para outros são duas coisas totalmente distintas.

O homem pode se satisfazer com a resposta que a mera observação das coisas lhe fornece, mas o que vemos é que o que motiva alguns, como Cantor, é a investigação real sejam dos objetos ou fenômenos, através da razão, não levando em consideração apenas seus julgamentos precipitados baseados apenas na sua forma de "ver" as coisas.

O grande diferencial da obra de Cantor, foi justamente sua capacidade de ir além do senso comum, da opinião formada por análises subjetivas, baseadas em percepções, no sensível. Cantor buscou a essência das coisas por mais contraditório que pudesse parecer, não se deixando influenciar pela aparente controvérsia entre a coisa em si e a sua representação para nós. Por este motivo, teve tanta dificuldade e enfrentou tanta oposição. Antes dele só havia o infinito potencial, que surgia através de processos de divisões (como os presentes nos Paradoxos de Zenão, por exemplo) ou através de conjuntos ou seqüências que convergissem para o infinito, porém como se o infinito fosse algo inalcançável. Cantor trouxe o infinito para perto, chegou ao conceito de infinito atual, estudando as cardinalidades dos conjuntos e criando os transfinitos e toda a sua aritmética. O infinito que antes era tão distante tornou-se real. Cantor era realmente um homem à frente do seu tempo e por isso foi também tão incompreendido.

Cultivou inimigos e teve de enfrentar as idéias conservadoras de mentes que não eram capazes de enxergar de forma puramente racional, se deixando cegar por sua própria visão. Os sentidos, a intuição, as aparências, eram seus inimigos silenciosos, inimigos estes que não emudeciam seus opositores de carne e osso. Foi difícil enfrentar Kronecker e outros tantos matemáticos que iam contra seu trabalho. Para eles, Cantor era uma ameaça aos conceitos já estabelecidos, que mostrava coisas que só a ele interessavam ser vistas. Estava tudo muito bom como estava, não era interessante surgir alguém desestabilizando o sistema e influenciando jovens com suas idéias inovadoras e revolucionárias. Cantor quebrou todos os paradigmas e chocou a todos com suas revelações. Para lutar contra concepções enraizadas há tanto tempo era necessária muita coragem e também confiança no que se está fazendo.

Cantor descobriu a verdade por detrás das aparências e criou toda a Teoria de Conjuntos. Se a matemática é ou não descoberta, uma coisa é certa: Cantor superou muitos obstáculos. Se por um lado alguns consideram a matemática como descoberta, realmente podemos ver Cantor como um grande investigador que descobriu verdades jamais imaginadas, tamanha contradição com o nosso sensível. Para os que vêm a matemática como invenção, podemos considerar Cantor como um dos maiores gênios, criando toda uma nova matemática, abrindo as portas de um paraíso que nem mesmo Hilbert suportaria perder[58].

Talvez uma das maiores lutas de Cantor tenha sido dentro dele mesmo. Ele próprio era pego incapaz de absorver o que havia criado. Era incapaz de acreditar no que ele racionalmente concluía, pois no seu íntimo era extremamente contraditório. Mesmo sendo demonstrado matematicamente por ele próprio, alguns de seus resultados eram absurdos até mesmo para seu "criador". Era uma luta interna, pois seu lado sensível apontava um caminho, em acordo com o senso comum, mas seu lado racional, mostrava através de argumentos lógicos irrefutáveis um caminho completamente oposto. Não restam dúvidas, um dos grandes desafios de Cantor era vencer sua própria fé sobre as coisas as quais investigava, e esse conflito certamente deve ter colaborado para sua instabilidade mental. Ninguém haveria de passar impune por tal experiência audaciosa.

Inegavelmente, essa constante contradição entre a aparência e essência presente ao longo de toda a carreira de Cantor é o que faz de sua obra algo tão magnífico e original. Muitos se surpreendem e se tornam grandes admiradores de Cantor após ter o prazer de conhecer seu trabalho. Porém, não acredito que sejam habilidade matemática ou raciocínio lógico que o tornem tão especial. O que realmente

---

[58] **Uma referência à famosa frase de Hilbert usou para rebater os ataques feitos aos trabalhos de Cantor: "ninguém nos expulsaria do paraíso que Georg Cantor abriu para nós" (Aczel, p.103).**

fascina é a sua capacidade de não se deixar esmorecer perante a força da aparência, mas sim investigar racionalmente sua verdadeira essência, por mais paradoxal que possa parecer. Sua genialidade é ainda maior, pois enquanto todos se acomodavam perante a aparência, para ele isto não era o suficiente, e venceu toda uma estrutura conservadora estabelecida, para se aproximar da verdade intrínseca das coisas, por mais pedregoso que fosse seu caminho.

> *"O homem pode chegar, pela razão, a verdades de valor absoluto. Isso porque o homem não está limitado ao conhecimento dos fatos. Conhece também o nexo necessário, conhece a razão que constitui a essência dos mesmos; e conhece a relação essencial entre eles."*
>
> *Descartes*

APÊNDICE 1: Cortes de Dedekind

Usualmente, o conceito de números irracionais é introduzido através da idéia de buscar encontrar a diagonal de um quadrado de lado igual a um. Esse é o exemplo clássico, que para geômetras como Eudoxo e Euclides, já seria suficiente para narrar o surgimento dos irracionais. Todavia, Dedekind não se satisfaz com este tipo de explicação e deixa isto bem explícito no prefácio do seu livro “The Nature and Meaning of Numbers”. Para Euclides e Eudoxo o problema dos irracionais está ligado à magnitudes geométricas, como áreas e volumes, por exemplo. Porém, Dedekind pretende resolver isto sem a geometria e para isso utiliza a análise.

Primeiro, é necessário esclarecer que antes de Dedekind e Cantor não existia tecnicamente a Reta Real, somente a Reta Numérica, que Dedekind costumava chamar de L (Line), e é como usarei nos próximos parágrafos.

Já se sabia que L era densa e ordenada e que era possível associar a cada número racional um único ponto em L, porém sabia-se que a recíproca não seria verdadeira e que nem todo ponto de L poderia ser associado a um Racional, devido ao fato de L ser contínua e o Conjunto dos Números Racionais não ser. Desta forma, restam infinitos pontos de L (como se fossem “buracos” na Reta) que não correspondem a nenhum Racional (como $\sqrt{2}$, o clássico exemplo da diagonal do quadrado de lado um).

Hoje, todos sabem que esses números que faltavam para completar estes “buracos” da reta são os irracionais, porém, naquele tempo ninguém era capaz de definí-los diretamente. Então, ao se questionar sobre o que exatamente garantiria a continuidade da reta, foi que surgiu realmente a Reta Real e com Cantor, se estabeleceu que o conjunto de todos os Números Reais forma o Continuum.

Dedekind trabalha com a Reta Numérica e o conceito de “corte” e a primeira pergunta que costuma surgir a quem esteja analisando o inicio de seu método é: como que através do “corte” da Reta Numérica, que é formada apenas de números racionais, é possível definir os números irracionais, que são o verdadeiro segredo da continuidade?

Em “Continuity and Irrational Numbers” (que é um artigo conhecido como surpreendentemente simples de se entender em comparação a maioria dos outros artigos matemáticos), Dedekind chega a ironizar pedindo desculpas por sua idéia de“corte”ser tão óbvia e segue afirmando: “A maioria dos meus leitores ficará muito desapontado ao perceber como é simples o segredo da continuidade que será revelado.”

Para iniciar seu método, Dedekind começa (utilizando o fato da Reta Numérica ser ordenada) pegando um ponto para fazer o “corte” [1] e dividindo L em duas partes, as duas mutuamente exclusivas e com um número infinito de pontos. O lado esquerdo ele chama de *A* e o lado direito de *B*, onde todos os números racionais de *B* são maiores que os racionais em *A*. Desta forma, unindo o conjunto *A* ao conjunto *B*, obtem-se novamente todos os números racionais.

Portanto, ao dividir os infinitos números racionais em dois conjuntos *A* e *B* cujos elementos *b* pertencentes ao conjunto *B* são maiores que os elementos *a* do conjunto *A*, pode-se perceber que, com relação a esses conjuntos *A* e *B* terem ou não um maior ou menor elemento, só existem três possibilidades. A primeira seria do conjunto *A* possuir um elemento *a’* que fosse o maior do conjunto (como por exemplo no caso do corte ser feito de forma que *A* contenha todos os racionais menores ou iguais a 2 e *B* contenha todos os racionais estritamente maiores que 2). A segunda possibilidade seria do conjunto *B* possuir um elemento *b’* que fosse o menor do conjunto (como no caso em que o conjunto *A* é o que contem todos os racionais estritamente maiores que 2). A terceira e última possibilidade é a que não há nem maior membro de *A*, nem menor membro de *B*.[2]

[1] **No inglês usa-se o termo *cut*, porém o termo original, utilizado por Dedekind é o verbo geschnitten.**

[2] **Não existem outras possibilidades além dessas três apresentadas, pois *A* não pode ter um menor elemento (por compreender um intervalo de $-\infty$ ao ponto onde foi feito o corte), da mesma forma que *B* também não pode possuir um maior elemento (por compreender um intervalo que vai do ponto onde foi feito o corte à $+\infty$). Além disso, não é possível também nenhuma possibilidade onde houvesse simultaneamente um *a’* que fosse o maior elemento de *A* e um *b’*que fosse o menor elemento de *B*. (se isso fosse possível, poderia ser construído um número racional $\frac{a'+b'}{2}$, que por ser ao mesmo tempo maior que *a’* e menor que *b’*, não seria nem membro de *A*, nem de *B*; o que contraria a hipótese inicial de *A* e *B* juntos conterem *todos* os números racionais.)**

Para essa terceira possibilidade, Dedekind dá como exemplo[3] um corte sendo feito de forma que o conjunto A contenha todos as racionais negativos e todos os racionais positivos x tal que $x^2 < 2$, e B contenha todos os racionais positivos x tal que $x^2 > 2$. A prova é feita através de redução ao absurdo e começa assumindo que existe um racional x que corresponde a terceira possibilidade de corte. Então se esse x existe, pela definição, x não pertence ao conjunto A (x não é nem o maior, nem qualquer outro elemento de A, devendo conseqüentemente estar em B). Logo, todo número maior do que x (pode ser chamado de x^+) deveria, por definição estar em B, o que significa que $(x^+)^2$ deve ser > 2. Se para algum x é possível produzir um $x^+ > x$, onde $(x^+)^2 < 2$, haverá contradição na suposição inicial que x é racional.

Para que isso seja possível é definido arbitrariamente um número positivo $p = (2 - x^2)$, e definido um $x^+ = \left(x + \frac{p}{4}\right)$.

Daí tira-se a primeira igualdade: $(x^+)^2 = \left(x + \frac{p}{4}\right)^2$ (I)

onde $\left(x + \frac{p}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{xp}{2} + \frac{p^2}{16}$. Como, por definição, $x > 1$, então $x^2 > x$. Logo, $\left(\frac{x^2 p}{2}\right) > \left(\frac{xp}{2}\right)$.

Portanto é encontrada a desigualdade: $\left(x^2 + \frac{xp}{2} + \frac{p^2}{16}\right) < \left(x^2 + \frac{x^2 p}{2} + \frac{p^2}{16}\right)$ (II)

Reduzindo ao mesmo denominador o segundo membro da igualdade tem-se: $\left(\frac{16x^2 + 8x^2 p + p^2}{16}\right)$. Pela definição $p = (2 - x^2)$, então é possível substituir $x^2 = (2 - p)$ obtendo $\left(\frac{16(2-p) + 8(2-p)p + p^2}{16}\right)$. Desenvolvendo esse membro é obtido:

[3] **O real exemplo de Dedekind em "Continuity and Irrational Numbers" é mais abstrato, pois ele queria que a sua prova fosse mais geral, para mostrar que existem infinitos "cortes" que não são produzidos por números racionais.**

$$\left(\frac{32-16p+(16-8p)p+p^2}{16}\right)=\left(\frac{32-16p+16p-8p^2+p^2}{16}\right)=\left(\frac{32-7p^2}{16}\right)=\left(2-\frac{7}{16}p^2\right),$$

cujo valor será sempre maior que 2, uma vez que por definição p > 0.

Unindo este último passo a primeira equação (I) e a desigualdade (II), encontra-se $(x^+)^2 < \left(2-\frac{7}{16}p^2\right) < 2$. Aplicando a propriedade da transitividade obtem-se $(x^+)^2 < 2$, que é justamente o que seria necessário para contradizer a afirmação inicial que o corte corresponde a um número racional. Q.E.D.

APÊNDICE 2: Os 23 Problemas de Hilbert

Na conferência do Congresso Internacional de Matemática de Paris, em 1900, David Hilbert enunciou uma lista com 10 problemas que ainda não tinham tido solução até então, e vários deles acabaram se tornando muito influentes na matemática do século XX. Nessa conferência, ele publicou inicialmente somente 10 problemas e posteriormente esta lista foi expandida para 23 problemas. A seguir é possível conferir a lista dos 23 problemas. Os primeiros 10 problemas propostos no congresso por Hilbert são os de número: 1, 2, 6, 7, 8, 13, 16, 19, 21, e 22 da lista abaixo:

Problema 1	Provar a hipótese do continuum (HC) de Cantor
Problema 2	Demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética
Problema 3	Pode-se provar que dois tetraedros têm o mesmo volume (sob certas condições)?
Problema 4	Construir todos os espaços métricos em que as linhas são geodésicas
Problema 5	Todo grupo contínuo é automaticamente um grupo diferencial?
Problema 6	Transformar toda a Física em axiomas
Problema 7	a^b é transcendental para $a \neq 0,1$ algébrico e b irracional algébrico? (ex.: $2^{\sqrt{2}}$)
Problema 8	A Hipótese de Riemann e a Conjectura de Goldbach
Problema 9	Achar a lei de reciprocidade mais geral em todo campo de número algébrico
Problema 10	Encontrar um algoritmo que determine se uma equação diofantina tem solução
Problema 11	Classificar as formas quadráticas a coeficiente nos anéis algébricos inteiros
Problema 12	Estender o teorema de Kroneker para os corpos não abelianos.
Problema 13	Demonstrar a impossibilidade de resolver equações de sétimo grau através de funções de somente duas variáveis
Problema 14	Provar o caráter finito de certos sistemas completos de funções
Problema 15	Desenvolver bases sólidas para o cálculo enumerativo de Schubert
Problema 16	Desenvolver uma topologia de curvas e superfícies algébricas
Problema 17	Demonstrar que uma função racional positiva pode ser escrita sob a forma de soma de quadrados de funções racionais

Problema 18	Construir um espaço euclidiano com poliedros congruentes. Qual a maneira mais densa de se empacotarem esferas?
Problema 19	Provar que o cálculo de variações é sempre necessariamente analítico
Problema 20	Todos os problemas variacionais com certas condições de contorno têm solução?
Problema 21	Prova da existência de equações diferenciais lineares tendo um determinado grupo monodrômico
Problema 22	Uniformizar as curvas analíticas através de funções automorfas
Problema 23	Desenvolver um método geral de resolução no cálculo de variações

APÊNDICE 3: A Hipótese do Continuum

Não se pode escrever sobre Cantor sem falar na Hipótese do Continuum. Apesar de não estar enfocada na dissertação, foi citada algumas vezes (por ser talvez a parte mais marcante do trabalho de Cantor) e não poderia ser finalizada sem uma explicação sobre a Hipótese do Continuum. Portanto a seguir será apresentada uma breve introdução ao assunto.

Quando Cantor começou a estudar as propriedades do Conjunto dos Números Reais, ou seja, o *continuum* da reta real; ele percebeu que este continha todos os possíveis subconjuntos dos números Naturais, ou seja os Reais podem ser tidos como o Conjunto Potência dos Naturais. E como a cardinalidade de um Conjunto Potência de um dado conjunto de n elementos é dada por 2^n , pode-se concluir que a cardinalidade dos Reais (chamada de c, para fazer referência ao continuum) é dada por:

$c = 2^{\aleph_0}$, uma vez que a cardinalidade dos naturais é $\aleph_0$.

De forma mais clara, pode-se começar lembrando que todo número do contínuo possui expansão decimal infinita e que portanto todos os algarismos que compõem a parte decimal são necessariamente os números naturais de 0 a 9, sendo que cada uma dessas enumeravelmente infinitas posições é ocupada por um e somente um desses algarismos. Para clarear mais as coisas é possível passar para o sistema binário e utilizar a base 2, escrevendo então todos o números da reta real como uma seqüência de 0 e 1 (seqüência essa infinita e enumerável). Portanto, para qualquer número dado, só há duas possibilidades para preencher cada digito: 0 ou 1. Como existem infinitas posições enumeráveis que podem ser ocupadas por duas e somente duas opções, se pode concluir novamente que a quantidade de números do continuo é: $c = 2^{\aleph_0}$

Cantor percebeu que ao formar o conjunto potência, ou seja o conjunto de todos os subconjuntos, sempre produzia um conjunto maior que o original, de cardinalidade mais alta. Ao contrário das outras operações aritméticas, que na matemática transfinita não alteravam o valor dos alefs[1], a potenciação dava origem a um infinito de maior cardinalidade. Dando continuidade ao que havia feito, era possível obter um conjunto formado pelo conjunto das partes do continuum e este teria cardinalidade igual a 2^c. Esse processo poderia continuar indefinidamente dando origem a conjuntos cada vez maiores. Assim, Cantor imaginou existir uma seqüência infinita de números cardinais transfinitos e pretendia nomeá-los e ordená-los como: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, $\aleph_4$...

Logo em seguida Cantor passou a se questionar se haveria outro número cardinal entre o $\aleph_0$ e o número cardinal do continuum. Caso não houvesse, ao invés de chamar a potência do contínuo de “c”, seria possível chamá-la de $\aleph_1$. Como foi visto que a cardinalidade do contínuo era dada por c = $\aleph_0$, se c for $\aleph_1$ pôde-se concluir que:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Essa sentença ficou conhecida como a Hipótese do Continuum e em 1908, foi generalizada por Felix Hausdorff para que pudesse ser aplicada a todos os alefs da seqüência de Cantor, aparecendo sob a forma: $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$.

A Hipótese do Continuo ficou em aberto por muito tempo e como já foi dito, encabeçou a lista dos “Dez Problemas do século XX”, feita por Hilbert. Após muitos terem se envolvido com a Hipótese do Contínuo, ora tentando prová-la, ora refutá-la, em 1930 um dos maiores matemáticos pôs fim em tal dúvida. Kurt Gödel, com apenas 26 anos, provou um dos teoremas mais polêmicos da história, conhecido como Teorema da Incompletude. Esse Teorema mostra basicamente[2] para um sistema (dentro de determinadas condições) ser consistente ele deve necessariamente ser incompleto, i.é, há sentenças que não podem ser provadas nem refutadas. Essas sentenças ou afirmações são conhecidas como indecidíveis. Apesar de não ser possível provar ser verdadeira ou falsa, existem procedimentos, que em alguns casos, permitem verificar se uma afirmação é um indecidível. A Hipótese do Continuum tornou-se um dos maiores exemplos de indecidível.

---

[1] **Ao comparar as cardinalidades dos naturais, inteiros, racionais e algébricos pudemos averiguar que: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ e $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$, por exemplo. As operações aritméticas com os transfinitos foram definidas por Cantor, em 1883 no *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*.**

[2] **Para maiores informações consultar: MOURA, LUCIANE DE PAIVA. Opus cit.**

APÊNDICE 4: Galeria de fotos

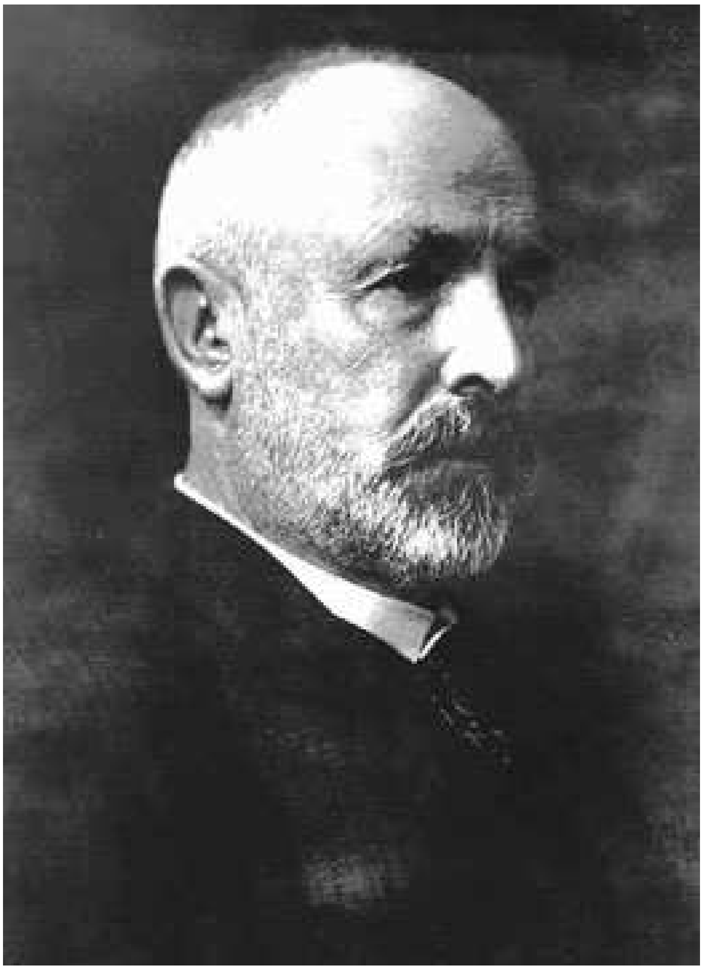


Figura 1: Georg Cantor

Figura 2: Georg Cantor

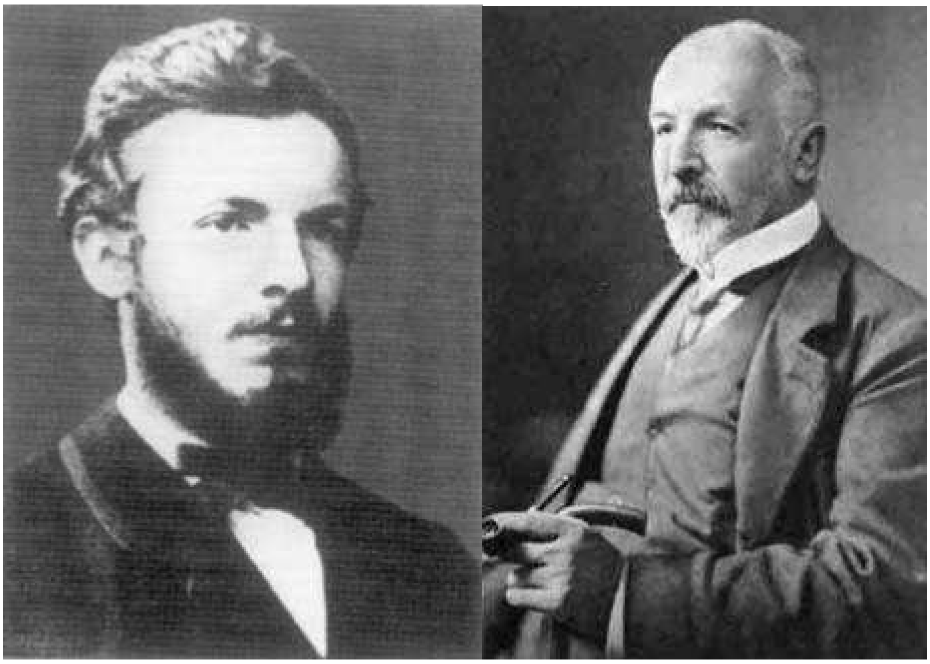


Figura 3: Duas fases de Georg Cantor

Figura 4: Georg Cantor e sua esposa Vally Guttmann

Figura 5: Richard Dedekind

Figura 6: Richard Dedekind

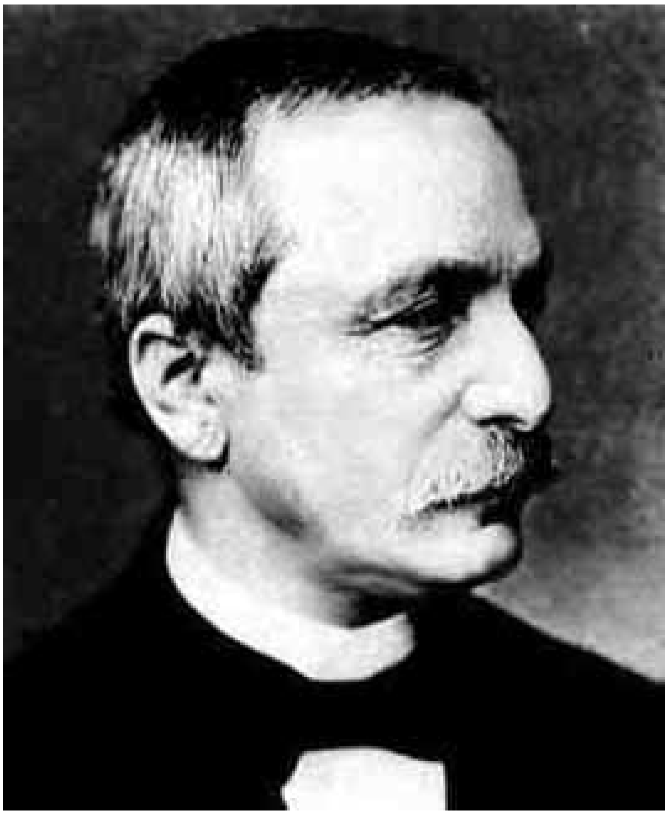


Figura 7: Kronecker

Figura 8 : Kronecker

Figura 9: A casa de Cantor

Figura 10: A frente da casa de Cantor

Figura 11: A porta de entrada da casa de Cantor

Figura 12 : Ginásio que leva o nome de Georg Cantor

Figura 13: Placa na entrada do Ginásio

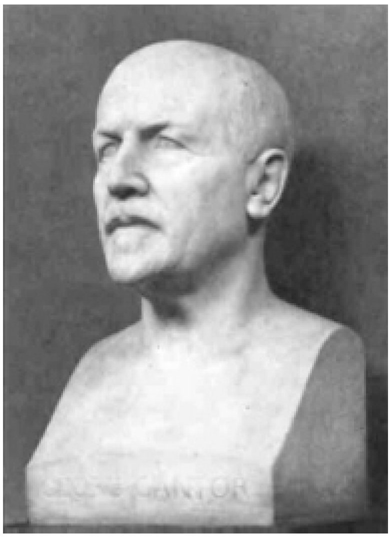


Figura 14: Busto em homenagem a Georg Cantor

Figura 15: Placa abaixo do busto de Cantor (onde se pode observar a referência a Hipótese do Continuum e também ao que ficou conhecido como: Argumento Diagonal de Cantor)

Figura 16 : Rua que leva o nome de Cantor

Figura 17: Selo em homenagem a Georg Cantor

Figura 18: Local onde se encontra a lápide de Cantor.

Figura 19: Lápide de Georg Cantor e sua família.

Créditos das fotos: http://mandel0.de/cantor/cantor_fotos.htm e http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cantor.html

Referências Bibliográficas:

ACZEL, AMIR D. *O mistério do Alef: a matemática, a Cabala e a procura do infinito*. São Paulo: Globo, 2003.

BELL, E.T. *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1937.

CANTOR, GEORG. *Contributions to the Founding of Theory of Transfinite Numbers*. Translated by Philip E. B. Jourdain. Dover Publications, Inc,1915.

CAREY, PATRICK HATFIELD**.** *Beyond Infinity: Georg Cantor and Leopold Kronecker's Dispute over Transfinite Numbers*. Boston, 2005. Disponível em: http.dissertations.bc.edu/ashonors200501. Acesso em 26 de maio 2005.

COSTA, CLAUDIO. *Uma Introdução Contemporânea à Filosofia.* São Paulo: Martins Fontes, 2002.

DAUBEN, JOSEPH W. *Georg Cantor:His Mathematics and Philosophy of the Infinite.*New Jersey. Princeton University Press, 1990.

________. Disponível em: http://ar.geocities.com/paginadeprueba2005/Cantor/georg_cantor_y_la_teoria_de_transfinitos.htm. Acesso em: 17 de setembro de 2005

DEDEKIND, RICHARD. *Essays on the Theory of Sets. Continuity and Irrational Numbers, The Nature and Meaning of Numbers*. New York: Dover Publication, Inc., 1963.

FONSECA, M.J.M. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/Fonseca_ect1.htm. Acesso em: 21 de junho de 2006.

HALLET, MICHAEL. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Oxford: Clarendon Press,1930.

KAMKE, E. *Theory of Sets*. New York: Dover Publications, Inc., 1950.

KANT, IMANUEL. *Critica da Razão Pura*. Versão eletrônica disponível em http://br.egroups.com/group/acropolis/. Acesso em 20 de outubro de 2005.

KAUFMANN, FELIX. *The Infinite in Mathematics*. Edited by Brian McGuiness. Dordrecht, Holland: Publishing Company, 1978.

KUBRUSLY, RICARDO. *O Tamanho do Infinito*. Disponível em: http://www.im.ufrj.br/~risk. Acesso em 15 de março de 2006.

______ . *Quantos infinitos*. Disponível em: http://www.im.ufrj.br/~risk. . Acesso em 15 de março de 2006.

LAVINE, SHAUGHAN. *Understandind the Infinite*. London, England: Harvard University Press, 1994.

MOURA, LUCIANE DE PAIVA. *O Teorema de Gödel*. Monografia de final de curso – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

SAYERS, SEAN. *Reality and Reason*. Basil Blackwell, 1985.

SERRA, CELSO PENTEADO. *Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos.*Curitiba: Champagnat,1997.

WALLACE, DAVID FOSTER. *Everything and more: a compact history of infinity*. Atlas Books. W.w.Norton & Company. New York – London, 2003.