DA SIMETRIA DO CÍRCULO À ASSIMETRIA DA ROTAÇÃO

Elika Takimoto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA.

Aprovada por:

Prof. Luis Pinguelli Rosa, D.Sc.

Prof[a]. Penha Maria Cardozo Dias , Ph.D

Prof[a]. Tatiana Marins Roque, D.Sc.

Prof[a]. Wilma Machado Soares Santos, D.Sc.

Prof[a]. Teresinha de Jesus Stuchi, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JUNHO DE 2007

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2007

TAKIMOTO, ELIKA

Da Simetria do Círculo à Assimetria da Rotação [Rio de Janeiro] 2007.

VI, 107, p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2007)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Movimento Circular

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

DA SIMETRIA DO CÍRCULO À ASSIMETRIA DA ROTAÇÃO

Elika Takimoto

Junho/2007

Orientadores: Penha Maria Cardozo Dias e Luís Pinguelli Rosa

Programa: História das Ciências e das Técnicas

Este trabalho representa, em linhas gerais, um estudo do movimento circular. Em particular, é relevado a participação do teorema da queda livre, no entendimento do movimento de uma massa puntual. Mostro como o movimento circular veio a ser entendido como um movimento que necessita de um "ente" externo para ser efetuado e que uma vez estabelecida a lei da massa puntual, ela foi usada para o desenvolvimento da equação do movimento do corpo rígido.

Abstract of dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

FROM THE SYMMETRY OF THE CIRCLE TO THE ASYMMETRY OF THE ROTATION

Elika Takimoto

June/2007

Advisors: Penha Maria Cardozo Dias and Luis Pinguelli Rosa

Department: History of Science

This work represents, in general lines, a circular motion study. On it, the participation of the free falling theorem in a point mass motion understanding, is revealed. I show how the circular motion became understand as a motion that needs a extern “being” to be done and once established that point mass law, it was used for developing the rigid body movement equation.

Agradeço a Penha Maria pela pressão, pela percussão e pela força centrípeta. Pressão para eu fazer algo bem feito, percussão com as perguntas que me motivaram e força centrípeta no sentido de me fazer olhar sempre para o problema central da tese quando eu ameaçava a dispersar. Agradeço, também, pelo tempo cedido sempre que precisei e pela segurança que me passou durante todo o processo de pesquisa e aprendizado, sem a qual esse trabalho não teria sido tão prazeroso.

Agradeço a minha mãe que removeu, com poucas palavras, todos os obstáculos emocionais que apareceram, fazendo com que o mundo parecesse bem mais simples do que mostram os livros de física e, principalmente, por não ter deixado que meus filhos sentissem tanto minha falta.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em linhas gerais, esta tese é um estudo do movimento, ela apresenta a formação do conceito atual de “movimento” e o tratamento do movimento circular. Em particular, ela mostra como o movimento circular veio a ser entendido como um movimento “não natural” o qual um “ente” externo é necessário.

Nesta tese:

1. Mostro a participação do teorema da queda livre no entendimento do movimento geral de uma massa puntual e na elaboração das equações gerais do movimento (hoje chamadas de “equações de Newton”).
2. Demonstro que, uma vez estabelecida a lei para a massa puntual, ela foi usada para o desenvolvimento da equação de movimento do corpo rígido. A tese foi elaborada de acordo com o seguinte plano:

Capítulo 1 . Resumo a concepção de movimento na Antigüidade Grega. Essa concepção foi discutida durante a Idade Média Latina e dessa discussão surgiu a definição de movimento aceita hoje.

O movimento perfeito era representado pela simetria do círculo. Qualquer outro movimento, exigia um “motor” a ele continuamente associado: corpos em movimento eram continuamente empurrados ou puxados.

Capítulos 2 e 3. Mostro como essa simetria veio a ser substituída pela simetria da linha reta.

Galileu Galilei formulou o Princípio da Inércia no contexto de uma discussão sobre a origem da queda dos corpos. Um dos principais aspectos do sistema conceitual de Galileu foi a “inércia circular” que defende que somente movimentos circulares em torno do centro da Terra poderiam persistir sem ação de uma força. Este Princípio foi utilizado por Galileu para justificar a possibilidade da Terra estar em movimento. René Descartes associou à simetria da linha reta a idéia de “perfeição”. Porém, nenhum deles entendeu que o desvio da linha reta exigia uma nova entidade. Christiaan Huygens, escrevendo no século XVII, deixou registros que mostram que ele, também, pensava dessa forma, embora tivesse elaborado e matematizado o conceito de “tendência centrífuga”.

A leitura do Princípio da Inércia não exigia a postulação de uma nova entidade, a força; o princípio explicava o movimento circular pela anulação da “tendência” centrífuga.

Primeiramente, então, abordo o tema da queda livre da forma como foi estudado por Galileu. Mostro como o Teorema da Velocidade Média foi usado por Galileu para resolver o problema da queda dos corpos. Termino o capítulo fazendo um detalhado estudo de como Huygens encontrou a expressão matemática da força centrífuga usando o Teorema de Galileu para a queda livre vertical. Huygens fez uma analogia entre a queda livre e o movimento centrífugo de um corpo em rotação. Essa analogia é a base racional de entendimento do movimento circular (seja o movimento circular propriamente, ou uma curva em um movimento genérico). Não significa que a idéia de associar o movimento circular e a queda foi original de Huygens, mas ele deu um suporte teórico à idéia que todo movimento acelerado é, em cada instante tomado isoladamente, comparável a uma queda livre.

Capítulos 4 e 5. Apresento as leis da Mecânica que surgiram nos séculos XVII e XVIII. Isaac Newton, no século XVII, introduz o conceito de “força”; finalmente, o movimento circular exigia uma nova entidade.

As equações da Mecânica – para a translação e rotação – foram escritas, em forma diferencial, por Leonhard Euler, no século XVIII, que, curiosamente, as considera como um “novo princípio”.

No capítulo 4 mostro que usando o Teorema de Galileu, Newton tratou o movimento circular uniforme e apresentou no *Principia* a expressão, hoje conhecida, da força centrípeta.

Clifford Truesdell observa que raramente os físicos consideram a equação $\dot{L} = \tau$, onde L é o momento angular e τ o torque total exercido pelas forças externas em um corpo, como uma lei fundamental. Os físicos, em geral, entendem que essa equação é derivada das "Equações de Newton". Porém, no *Principia* não encontramos explicações de sistemas dinâmicos gerais para corpos rígidos [1]. D'Alembert, Euler e outros entenderam que as equações não eram suficientes para descrever o movimento de um corpo onde partes dele seriam vinculadas de alguma forma. Motivada por essa discussão, no capítulo 5 analiso, minuciosamente, o estudo dos corpos rígidos feito por Euler e mostro que, de fato, para este caso, Euler deduziu as chamadas "equações de Euler", usando as equações de movimento de translação.

1. O LEGADO DA ANTIGÜIDADE GREGA

1.1. O Movimento na Antigüidade Grega

A filosofia que procura entender o mundo usando somente a razão começa na Jônia, no século VI A.C. e possui como principais representantes Tales e Anaximandro de Mileto. O objetivo principal de pesquisa era a resposta para a pergunta: "De que é feito o mundo?"[2].

Essa filosofia se inicia com a fé de que, por baixo desse aparente caos, existe algo permanentemente escondido, discernível, se não pelos sentidos, então pela mente. Certamente é este o espírito que se manifesta, hoje, nas leis de conservação de energia, da matéria, do momento... Elas podem ser entendidas como a busca por algo que permaneça imutável na natureza. Embora os componentes materiais do mundo sejam múltiplos e estejam em constante fluxo de renovação, um permanente elemento jaz em sua estrutura. Tales responde à pergunta acima, dizendo ser a água a substância primordial que estava na base de tudo. Para produzir a variedade de coisas que observamos, ela muda de forma, porém, nunca é criada ou destruída. A justificativa dessa escolha parece ser porque a "água" aparece na natureza na forma sólida, líquida e gasosa. Aristóteles colabora afirmando que a base do mundo precisa ser a base da vida. A água está presente em todas as coisas úmidas e o nutriente de todas as coisas é úmido, assim como o sêmen de todas as criaturas [2]. A dificuldade de sustentar esta idéia era explicar como coisas como o pó, por exemplo, que são completamente desprovidos de umidade, podem ser feitos de água.

Anaximandro atentou para as várias oposições observadas no mundo, chegando a considerá-lo como sendo constituído de uma guerra de contrários, uma injustiça que precisa ser reparada, já que paz e justiça se assemelham. O mundo surgiu, então, devido a um movimento circular em forma de redemoinho. Nesse movimento, o quente e o frio se separam, originando o fogo e o ar. Esta primeira separação do quente e do frio gerou um anel luminoso de chamas que aprisionou o ar frio.

Este anel de chamas continuou gerando outros anéis. Totalizam-se no final três anéis: o anel do Sol, o anel da Lua e o anel das estrelas que giram em torno da Terra. Em seguida, separam-se o seco e o úmido que dão origem à terra e à água no interior do primeiro círculo de fogo. O mar é o que restou da luta do úmido versus o fogo e a terra é o que restou da luta do seco versus o fogo e o úmido. Os seres vão surgindo devido à luta entre esses contrários. Surgem, definitivamente, quando um dos contrários domina o outro.

A explicação dada para o fato da Terra não se apoiar em nada e mesmo assim permanecer imóvel no centro do universo era simplesmente que, estando no centro, ou seja, eqüidistante de todos os pontos, não haveria nenhuma razão para que ela fosse em uma direção ao invés de outra.

A cosmologia dá um salto teórico importante com as idéias de Anaximandro. Ele considera o elemento fundamental da natureza não mais algo que esteja ao alcance de nossos sentidos, porém algo que seja ilimitado e indefinido: o “apeíron”. O “apeiron” não é nenhuma das coisas que percebemos, mas dá origem a todas elas, primeiramente a água, o fogo, o ar e a terra e depois todo o resto [3].

Mas, se o mundo era originalmente feito de uma substância que se transformou em tudo isso que vemos, qual foi a causa dele ter iniciado essa modificação em toda a sua estrutura?

Parmênides defende, diante disso, que movimento não é possível. Nossa experiência sensorial nos faz perceber que tudo está em movimento ou em constante mudança. Porém, tudo que experimentamos através de nossos sentidos precisa ser interpretado pelo intelecto, que se afasta da percepção sensorial. Dessa forma, acaba-se chegando a algumas conclusões interessantes como, por exemplo, que o ser é eterno e indestrutível, pois se tivesse começado em alguma época ou em algum lugar, algo teria que existir antes dele e esse algo seria o “não-ser”. Como o “não-ser” não existe, ele não pode ser pensado. Ou seja, todas as mudanças que observamos no mundo não ocorrem. São os nossos sentidos que nos enganam. A realidade é imutável e a mudança que percebemos é tão somente uma grande ilusão [4].

Muitos discordaram e se revoltaram com a idéia de Parmênides, afinal, as coisas que podemos ver e tocar precisam ser reais. Leucipo e Demócrito argumentam que o universo não é feito de um único elemento mas sim de uma infinidade deles. Cada elemento, invisível devido ao seu tamanho, não pode ser dividido e foi chamado de átomo (que significa indivisível) [5]. Os átomos, assim, ficam imersos num espaço vazio, o vácuo, e desta forma é oferecida uma explicação para a "densidade" dos objetos. Um objeto pouco denso possui mais espaço vazio dentro dele do que outro cuja densidade seja maior. O movimento dos átomos no vácuo permite com que eles realizem algumas combinações e recombinações, fazendo com que mudanças fossem permitidas no mundo sensorial. Porém, requerer o espaço vazio como parte do ser e afirmar que o vácuo significa *nada* foge muito do que os homens entendiam por realidade.

Empédocles considerou a matéria composta de quatro elementos primários qualitativamente diferentes que compõem todas as substâncias e revelam nelas características muito diferentes, como a solidez, a liquidez, a volatilidade e a ardência sentida quando nos aproximamos do fogo. Esses quatro elementos são imperceptíveis e tudo que vemos consiste numa variedade de combinações em variadas proporções desses elementos [4]. Pensando assim, não há necessidade de mudanças de nada que toque a realidade, pois, ela é determinada pela existência de quatro elementos que sempre existiram. Empédocles responde que há duas causas para as modificações percebidas: o amor e ódio que possuem um caráter moral.

Foi Pitágoras que atentou para uma ordem inerente existente na natureza. A razão disto se encontra no fato dos exercícios espirituais da comunidade pitagórica terem sido realizados ao som da lira de quatro cordas (a lira tetracorde). Observou-se que o som produzido por esta lira obedece a regras de harmonia para formar os acordes que se traduzem em proporções numéricas e, isso aparece como um tipo de revelação sobre a natureza do universo [2]. Os números também, executam um importante papel na geometria e tudo que está ao alcance de nossos sentidos pode ser esboçado por formas geométricas, sendo assim, se quisermos entender o mundo devemos estar atento para a estrutura dos objetos observados.

Esta concepção é a fonte de uma corrente de pensamento que defendeu que o principal objetivo da física é reproduzir a natureza por um sistema de entidades matemáticas, ou seja, tudo que o homem pode conhecer pode ser expresso por números. Esta corrente se estendeu aos céus e acabou dando suporte para uma concepção do Cosmos como uma estrutura de um universo físico bem ordenado. Ou seja, a bela harmonia evidenciada pelo movimento dos corpos celestes pode ser definida por proporções numéricas e, portanto “ouvida” por nossos olhos.

Platão, por exemplo, abraçou calorosamente este ideal pitagórico e fundamentado em sua filosofia ele declara que, para detectarmos, na confusa irregularidade do movimento dos planetas[i], o sistema matemático ideal do movimento circular uniforme, que representa a verdade, devemos compreender que tudo o que percebemos são somente cópias imperfeitas ou imitações de uma forma ideal.

Este recurso à metafísica idealista foi de profunda importância para o avanço da ciência. Os materialistas gregos não teriam como investigar cientificamente suas hipóteses sobre a natureza, principalmente o Cosmos. Assim, a teoria dos movimentos celestes circulares funcionava como uma “muleta” sobre a qual os astrônomos se apoiavam para fazer seus cálculos preditivos [6].

Somente para fazer o desfecho desta idéia, cabe dizer que o esquema metafísico exposto no Timeu de Platão baseava-se em algumas colocações como a de que tudo o que é racional é harmônico e de que o

[i] Essa irregularidade é resultado dos movimentos da Terra, de rotação em relação ao seu eixo (que é inclinado em relação ao seu plano de órbita) e em relação ao Sol.

movimento perfeitamente harmônico é o circular. Ou seja, o movimento circular era resultado da harmonia e beleza que era inerente a tudo que fosse racional.

1.2. A Formação do Conceito do Movimento

1.2.1. A Concepção Aristotélica do Movimento e a Crítica Medieval

A Filosofia Natural Aristotélica é muitas vezes conhecida como a Física do senso comum por ser o tipo de Física que parece dirigir-se a qualquer pessoa que use a sua inteligência nata sem ter adquirido qualquer conhecimento dos modernos princípios da dinâmica: a Física em que a maior parte das pessoas acredita intuitivamente e baseia o seu raciocínio sobre a natureza. Trata-se de uma Física particularmente adaptada à idéia da Terra em repouso. Para situarmos com maior precisão onde começou esta "velha física", basta dizer que Aristóteles nasceu em 384 a.C., era discípulo de Platão, viveu na Grécia e foi um personagem importantíssimo no desenvolvimento do pensamento científico: a Filosofia Natural européia medieval foi uma crítica direta ao pensamento de Aristóteles [7].

Várias mudanças ocorreram na transição da física aristotélica para a física newtoniana. Analisando a história vemos que a forma de descrever a realidade sofreu várias mutações ao longo dos anos. Porém, o fato mais significante para o presente contexto foi a mudança da explicação dada a respeito do movimento dos corpos por Aristóteles e, quase dois mil anos depois, por Newton .

Para melhor compreendermos esta mudança, temos que entender bem a Filosofia Natural de Aristóteles e um bom início é partir do conceito criado por ele, de causa. A natureza foi então interpretada admitindo quatro tipos diferentes de causa: a material, a formal, a eficiente e a final. A matéria é a causa material dos seres ou aquilo de que a coisa é feita, é a possibilidade de adquirir certa estrutura (a matéria de uma cadeira é a madeira, por exemplo). A forma é a causa formal dos seres (a cadeira é a forma da madeira), não se tratando porém de um mero agregado de características e sim de um princípio definindo uma estrutura interna. Olhando o mundo em que vivemos observamos, porém, que as coisas mudam, se transformam. Citando clássicos exemplos aristotélicos, o bloco de mármore se transforma em estátua, a semente em árvore e a lagarta em borboleta. O princípio de todas estas mudanças é a matéria, ou seja, a mudança na forma existe porque é da natureza da matéria alterar-se. Mas em vista do que tudo muda? Como Aristóteles explica toda a transformação que nós vemos nas coisas, nas plantas e nos homens? Para entendê-la, temos que compreender agora o que são as causas eficiente e final.

A causa eficiente é o instrumento para a mudança, porém, para que ela opere, algo mais é requerido além da mera causa instrumental. Todo ser, muda ou move-se porque precisa realizar plenamente a sua essência. Muda, porque aspira à perfeição. Podemos dizer, assim, que a matéria mutável ou um corpo em movimento é uma imperfeição em busca da perfeição. Desta forma, para a causa eficiente operar precisa de uma causa final e a finalidade da mudança é fazer com que o corpo adquira sua forma perfeita e imutável. Ora, a pergunta que sucede diante desta explicação é inevitável: como o corpo sabe quando chega ao seu estado imutável e perfeito? Para responder a esta pergunta temos que voltar à causa formal. Será a forma que determinará o acabamento da essência do ser.

As causas agem então, conjuntamente, na filosofia aristotélica. Aristóteles define movimento como qualquer transição entre o ser em potência e o ser atual[ii]. Isso pode se referir, por exemplo, à semente que se desenvolve porque carrega a essência, ou melhor, o potencial de se tornar futuramente uma árvore. Aristóteles associa a este conceito as quatro causas mencionadas anteriormente, com a conseqüência que movimento ou transição só poderá acontecer devido a um encontro

[ii] Algo é dito ser *em potência* quando pode se transformar em outra coisa (exemplo: um feto em um homem) e *em ato* quando representa sua forma atual, naquele momento.

num espaço de um agente que causará esta mudança com aquilo que é movido. No caso do movimento local “tudo o que move é movido por alguma coisa” e isso é contrário à lei da inércia hoje aceita.

Fundamental para entender a forma de interpretar a natureza de Aristóteles era o princípio de que há quatro elementos fundamentais: ar, terra, fogo e água. A cada elemento era atribuído um movimento natural, um lugar natural e duas de quatro qualidades primárias fundamentais: quente ou frio, úmido ou seco. Por exemplo, a terra é fria e seca e o ar é quente e úmido. Para cada um dos quatro elementos mencionados havia um lugar natural. Para os corpos pesados, por exemplo, este lugar seria o centro do Universo; para a água, o ar e o fogo, o lugar natural seria esferas concêntricas com a Terra, com raios crescentes nessa ordem. Aristóteles atribuiu a propriedade de ser leve ou pesado nos demais corpos encontrados na natureza à proporção dos quatro elementos fundamentais presentes em cada um deles. Qual é, perguntou ele, o movimento natural deste ou daquele objeto? E respondeu que, se o objeto for pesado, o seu movimento natural será reto para baixo, ao passo que se é leve, o seu movimento natural será reto para cima. Então, o movimento natural de qualquer corpo terrestre é retilíneo, para cima ou para baixo, ao longo da vertical que passa pelo centro da Terra. Fora do seu lugar natural, o corpo é “ser em potência” e só é ser atual em seu lugar natural, onde fica em repouso, por não haver necessidade de mover-se.

No mundo em que vivemos, no entanto, observamos outros tipos de movimento, além desses ditos naturais. Por exemplo, quando lançamos horizontalmente uma pedra , um corpo qualquer sendo girado preso a uma corda, um pedaço de ferro subindo... Tais movimentos foram chamados por Aristóteles de violentos, ou seja, contrário à natureza do corpo e só ocorre quando uma “força” (algo violento) é impressa e mantém o deslocamento observado. Assim, como já mencionado acima, uma pedra atada numa corda pode ser levantada e girada. Ela estará sujeita a um movimento violento nessa situação. No momento em que a pedra se desvencilhar da corda, iniciará a sua queda em movimento natural tendendo a se deslocar em direção ao seu lugar natural.

Com os movimentos terrestres tão bem explicados restava explicar outro tipo de movimento bem visível para qualquer um aqui na Terra: o movimento dos corpos celestes, como o dos planetas, o das estrelas e o do Sol. Para começar, ele afirmou que esses corpos não são constituídos pelos mesmos quatro elementos que constituem os corpos terrestres mas por um quinto elemento ou éter. Ou seja, o mundo supralunar é constituído de uma matéria muito especial, muito pura e incorruptível. Já a matéria de que é constituída o mundo sublunar se inclina para esta incorruptibilidade e é devido a esta inclinação que vemos tantas transformações na natureza .

Baseado em observações apenas, concluiu-se que os corpos celestes se movem em torno da Terra em uma trajetória circular. Os astros nascem a leste e se põem a oeste, parecendo percorrer um arco de círculo no céu. Tendo isso como realidade, Aristóteles considera, assim, que o movimento natural de um corpo composto de éter só pode ser circular, tal como o movimento retilíneo ascendente ou descendente para um corpo terrestre. Há, no entanto uma característica determinante no movimento dos corpos celestes: ele é uma perene repetição e não uma transição como os que observamos nos corpos terrestres. Como justificar agora este movimento, esta imperecível repetição de um corpo cuja matéria é considerada tão austera? Mantendo a coerência de sua filosofia concluímos de antemão que se há movimento é porque esses corpos têm potencialidades .

Aristóteles aceita um modelo para o Universo, um Cosmo finito, constituído da Terra, imóvel, no centro do Universo e de sete esferas em torno dela, uma para cada planeta: Mercúrio, Vênus, Sol (considerado um planeta), Marte, Júpiter, Saturno e, finalmente a esfera das estrelas. A esfera das estrelas arrasta as outras esferas ao movimento e, baseado no axioma de que tudo que se move é movido por um motor, um primeiro motor imóvel - ou deus - do universo faz-se necessário. A esfera das estrelas se move assim, por um amor à perfeição ao *Primum*

Móbile que sendo imóvel nada deseja pois nada lhe falta, ou seja, possui a felicidade plena e tão desejada por todos os outros seres do universo.

Em resumo, o universo, segundo Aristóteles e seus seguidores, estaria dividido em duas regiões distintas: a sublunar e a supra-lunar. Tudo o que se encontrasse abaixo da Lua seria submetido ao envelhecimento, à desintegração. Os movimentos terrestres obedeceriam a leis teleológicas, cada corpo devendo ocupar uma posição privilegiada onde ficaria em repouso. Se resolvermos tirá-lo do repouso teremos que aplicar uma "força" sobre ele e cessada a aplicação desta "força", ele buscará novamente sua imobilidade. Os corpos celestes, ao contrário, teriam movimentos regulares, produzidos por amor ao *Primum Móbile*. No "De Caelo", Aristóteles justifica o fato do movimento natural dos corpos celestes ser circular e dos corpos terrestres ser considerado retilíneo. O círculo é considerado uma figura perfeita, primorosa. É a figura geométrica que se fecha sobre si mesma e permite a eternidade do movimento sobre ela. Uma reta ou uma linha infinita não possui esta perficiência por não ter um limite, um fim. Visto assim, o movimento dos corpos celestes só poderia ser o circular pois a eternidade é uma qualidade fortemente associada ao *Primum Móbile*. Complementando toda esta explicação de uma forma muito confortante, dizemos que se tudo no céu se move circularmente se move em relação a um centro em repouso. Neste centro está a Terra. Neste centro estamos nós.

Então, vejamos como Aristóteles justificava qualquer movimento: no caso dos corpos celestes como já dito, o movimento acontecia devido a presença de um espírito, ou melhor, do *Primum Móbile*. Para os corpos terrestres podemos dizer que os seres vivos se movimentam pela presença da alma e para objetos em geral pela presença de um agente movedor. Em qualquer situação, sua máxima "tudo o que move é movido" se justifica, seja o movimento natural ou violento, circular ou retilíneo.

Para compreender, finalmente, a contribuição de Aristóteles para a física precisamos examinar a lei básica do movimento proposta por ele. Em uma leitura anacrônica, essa lei pode ser expressa pela afirmação que a razão da distância percorrida pelo tempo gasto é diretamente proporcional ao "poder motivo" (*motor conjunctus*) e inversamente proporcional à resistência; chamando a "força" ou "poder motivo" de F, a resistência de R, a distância de s, o tempo de t e k uma constante que dependa da unidade escolhida, a lei de Aristóteles pode ser escrita da seguinte forma: $\frac{F}{R} = k\frac{s}{t}$. Cabe dizer, que o próprio Aristóteles não escreveu esse resultado sob forma de equação, escrevemos desta forma, pois, estamos usando o processo moderno de exprimir tais relações.

Aristóteles propôs uma condição para esta fórmula: para haver movimento, é necessário que a "força" seja maior que a "resistência". Antes de analisarmos seu raciocínio cabe observar que os termos "força", e "velocidade" não podem ser entendidos em seu sentido moderno: "velocidade" não era concebida como uma taxa diferencial de deslocamento em cada parte infinitesimal do tempo gasto neste deslocamento. Interpretava-se "t" como o tempo total gasto no movimento todo e "s" como a distância total percorrida pelo corpo no tempo "t". Ou seja, a "velocidade" era vista como "rapidez". Força, por sua vez, designava uma simples tendência natural de queda.

Acima de tudo, havia um problema filosófico: como explicar o movimento natural levando em consideração o *motor conjunctus?* O fato dele ter associado o peso do corpo com o *motor conjunctus* ou o "poder motivo" não quer dizer que ele tenha pensado o peso com uma força da gravidade, como ela é entendida nos tempos modernos. Força da gravidade implica ação à distância e isso era inaceitável para ele, pois, contradizia seu princípio básico de movimento, a dizer, que precisamos de um *motor conjunctus* permanentemente em contato com o corpo movente. Para explicar o lançamento de projéteis, por exemplo, ele atribuiu ao meio a capacidade de empurrar o corpo. Durante o arremesso de um objeto justificamos que ele se move porque há uma pessoa que está se esforçando para lançá-lo interagindo diretamente com ele. Porém, cessado este contato o objeto permanece em movimento. Como justificar agora este movimento se "tudo que move é movido por alguma coisa"? A resposta para esta pergunta é bem curiosa: durante o período que a pessoa esta arremessando o projétil, ela transfere sua função de *motor conjunctus* para uma camada do meio. Esta camada por sua vez, da posse deste poder irá continuar movendo este projétil da seguinte forma: suponhamos que o corpo seja lançado horizontalmente no ar. A camada de ar, empurrada para frente pelo objeto imediatamente o contorna para preencher o vazio criado por ele na parte de trás, impulsionando o objeto para frente. Paralelamente a este processo, da mesma maneira que a pessoa o fez, a camada de ar irá transferir seu poder motivo a camada de ar seguinte e assim sucessivamente. Então, em todo ponto de sua trajetória o projétil encontrará o *motor conjunctus* necessário para mantê-lo em movimento. Este poder, no entanto, se enfraquece a cada transferência chegando o momento em que acaba completamente, ou seja, a última camada do meio desta série de transferências ficará em repouso. Neste instante, o projétil, na ausência de algo que o impulsione, irá realizar seu movimento natural. Destarte, o meio para Aristóteles possui dois papéis contraditórios entre si: ele era responsável por manter o movimento de um corpo que se movia através dele e ao mesmo tempo possuía qualidades que resistiam ao movimento.

Aqui voltamos ao ponto já mencionado anteriormente: a impossibilidade imposta pela lei de Aristóteles da existência de um movimento no vácuo. No vácuo, o corpo não teria nada para continuar projetando-o para frente. Além disso, no vácuo não há lugar natural, pois, as regiões seriam iguais entre si, assim não haveria razão para um corpo parar num lugar ao invés de outro uma vez que tivesse sido colocado em movimento já que, como já mencionado, o que faz um corpo mover é sua busca ao seu lugar natural. O que torna o argumento contra o vácuo mais interessante foi o fato de Aristóteles ter enunciado a Lei da Inércia, tal como ela é nos dias de hoje, para descartá-la a seguir [8].

> Além disso, ninguém poderia dizer porque algo uma vez colocado em movimento deveria parar em algum lugar; pois por que deveria parar aqui ao invés de ali? De modo que uma coisa ou estará em repouso ou deverá mover *ad infinitum*, ao menos que algo mais poderoso se coloque em seu caminho.

Como o ar resiste ao movimento, se for retirado de um ambiente por completo, um corpo poderia permanecer em repouso, porque não haveria nada para impulsioná-lo para frente, ou, se ele estivesse em movimento, teria que ter a mesma velocidade para sempre. Como isso era impossível para Aristóteles, ele recusou a idéia do vácuo exatamente por ele ter a propriedade de realizar o princípio da inércia!

Que há certa incoerência em alguns pontos da física aristotélica, como esses já discutidos, é fato. Porém, descobrir o erro ou apontar com precisão onde a sua filosofia é falsa e elaborar uma teoria que a substitua não foi uma tarefa fácil e muito menos realizável por uma só pessoa. Passamos por várias fases de questionamentos até chegar ao que chamamos hoje de física moderna. Veremos agora como parte desta construção foi realizada.

Hiparcos (século II A.C.), no seu trabalho intitulado " Nos Corpos Puxados Para Baixo por seu Peso" [7], explica o movimento de projéteis assumindo uma outra teoria diferentemente de Aristóteles. Se, por exemplo, jogamos uma pedra para o alto, ela sobe devido a uma força impressa na pedra por nós que supera a tendência natural de queda da pedra. No entanto, verifica-se que, após certo tempo, a pedra cai. Isto só acontece porque esta força impressa diminui gradualmente conforme se processa o movimento chegando ao ponto, de sua força interna (o peso), que age natural e de modo constante impulsionando a pedra para baixo, superar a força impressa. Sendo assim, Hiparcos acaba justificando o fato da velocidade da pedra diminuir até chegar à altura máxima e ir aumentando conforme se aproxima do chão. No início do movimento, a força impressa é maior que o peso, por isso o corpo sobe. Porém esta força diminui e por esta razão a velocidade de subida tende a diminuir. O corpo cai porque o peso supera a força impressa e como esta continua diminuindo, a ação combinada dessas duas dando uma vantagem cada vez maior ao peso, faz com que a velocidade de queda aumente.

No final do século V e início do século VI, foi feita uma das mais importantes críticas à física de Aristóteles atacando o ponto de vista, por ele defendido, sobre o papel desempenhado pela resistência do meio no movimento. Filopono rejeitou de forma clara a idéia que existe por de trás da lei de Aristóteles $\frac{F}{R} = k\frac{s}{t}$. A crítica de Filopono é muito simples em relação a esta idéia: se tivermos uma certa distância a ser percorrida, precisaremos de algum tempo para fazê-lo [7]. É claro que, se esse espaço estiver preenchido de água, levaremos mais tempo do que se ele estivesse ocupado somente com ar. Quanto mais rarefeito for o ar, menos tempo levaremos ainda e, seguindo a lógica imposta por este raciocínio tão claro, no vácuo o movimento se dará no tempo mais curto possível. Se quisermos colocar tudo isso numa notação moderna, podemos escrever $F - R = k\ s/t$. Vejamos então a idéia subtendida nisto tudo: o movimento no vácuo, onde a resistência é nula, torna-se possível e corpos com pesos diferentes cairiam no vácuo não mais com a mesma velocidade, como afirmou Aristóteles para em seguida negar a sua existência, e sim com velocidades proporcionais a causa eficiente, ou seja, o próprio peso do corpo.

Desta forma, Filopono também se opôs a paradoxal idéia que o meio apresentava duas funções: a de resistir e sustentar o movimento de um projétil. Ele foi bastante claro ao questionar a *antiperistasis* e a necessidade do meio para que haja movimento [9]:

> Além disso, como pode esse ar, durante tal giro, evitar dispersar-se no espaço, mas precisamente impingir na extremidade entalhada de uma flecha, e novamente empurrar a flecha em frente e aderir a ela? Tal visão é completamente incrível e beira o fantástico.

A crítica de Filopono é muito pertinente e ele a faz utilizando um excelente exemplo: se colocarmos uma minúscula pedra em cima de algo e fizermos com que o ar que a rodeie entre em movimento e a impulsione, poderemos até vê-la se mover, no entanto, de uma forma muito diferente da prevista pela filosofia aristotélica e num tempo muito menor. Então, como explicar o movimento de um projétil uma vez tendo sido abandonado pelo seu projetor? Neste ponto Filopono assume que algum poder incorpóreo (uma "força") é transmitido pelo projetor no momento do lançamento. Deixa claro, porém, que esta força diminui ao longo do translado devido a dois fatores: um atribuído ao próprio meio, ou seja, quanto mais denso mais rápido ela desaparecerá, o outro devido a um processo natural que ocorre mesmo que o movimento aconteça no vácuo. Uma força impressa que diminui mesmo no vácuo nega um movimento eterno. Todo movimento tem um fim, mesmo que nenhuma força externa atue sobre ele.

Quase cinco séculos depois, Avicenna concordou em parte com a explicação de Filopono, porém modificou de forma essencial sua idéia. Ao afirmar que o projétil recebe do movedor um *mail,* que é aquilo que é percebido pelos sentidos como algo que existe no corpo após ter sido lançado e que resiste à mudança de seu estado de movimento, em nada altera o conceito da força impressa. O requinte do pensamento de Avicenna foi asseverar que aquilo que o projétil recebe do projetor não acaba se o movimento se der no vácuo. Esta idéia se aproxima muito da *vis inertia* de Newton tão bem esclarecida na sua primeira lei; porém é muito curioso que Avicenna, assim como Aristóteles, nega o vácuo exatamente pelas conseqüências inerciais que a idéia gerava. Se o *mail* não acabasse no vácuo o corpo nele se moveria eternamente e como é impossível na natureza um movimento perpétuo, conclui-se que o vácuo não existe.

No início do século XII surge outra crítica relevante à questão colocada por Aristóteles sobre o papel desempenhado pelo meio no movimento de corpos através dele e o fato dele ter desconsiderado qualquer possibilidade de movimento no vácuo. Como já visto, Filopono discutiu este ponto de uma forma bem diferente de Aristóteles, porém esta questão foi colocada novamente por Avempace (1106-1138). Avempace questiona Aristóteles por meio de um exemplo: nas esferas celestes não existe resistência, mas o movimento não é instantâneo e nem é a velocidade infinita, então, como explicar o movimento circular [10]?

> Não há resistência lá, porque não há a divisão de um meio envolvido; o lugar do círculo é sempre o mesmo, então ele não deixa um lugar e entra em outro, para isso o movimento circular deve ser instantâneo.

Porém, nós observamos a lentidão das estrelas. Segue então,para Avempace, que a lei de Aristóteles é falsa.

A principal refutação sobre a física de Avempace foi feita por Averroes (1126-1198). Através dele o trabalho de Avempace foi conhecido pelas grandes referências e críticas que sempre fez em seu comentário sobre a física de Aristóteles. Averroes questiona a suposição de Avempace que o meio é um impedimento para o movimento natural de um corpo. Se pensarmos assim, todos os corpos se movem de uma forma não-natural já que todos se movem num determinado meio. Ora, definir o natural como algo que nunca acontece parece, no mínimo, um absurdo. Esta objeção parece percorrer a história da filosofia. O "natural" é aquilo que é real ou deveríamos acreditar que as idéias que nos permitem fazer uma análise inteligível dos fatos exibem a verdadeira realidade?

1.2.2. O Ímpeto

John Buridan (1300-1358) resolve alguns problemas pendentes com sua inovadora idéia: *o ímpeto.*

> Conseqüentemente, parece a mim que há de se dizer que o motor ao mover um corpo movente (corpo em movimento) imprime nele

> um determinado ímpeto ou determinada força motriz do corpo movente. (tal ímpeto age) no sentido para o qual o poder movia o corpo movente tanto para cima, quanto para baixo, ou lateralmente ou *circularmente*. (itálico meu)

Essa idéia não seria a mesma da "força impressa" de Hiparcos? Não, por uma diferença essencial: a força impressa dura somente um certo tempo enquanto o ímpeto tem uma natureza permanente. Mas também já vimos algo parecido com Avicenna! O *mail* que o projétil recebe do projetor também não acaba. Não estaríamos repetindo o passado? Para esclarecer todas estas questões e mostrar que Buridan acrescenta e muito na história da física com sua idéia do ímpeto, vamos aprofundar nossa explicação.

O ímpeto tem uma definição quantitativa. Ele é proporcional a quantidade de matéria (massa) do objeto e rapidez com que ele se move [11].

> E, pela mesma quantidade que o motor move o corpo movente, ele imprime (no corpo) um ímpeto mais forte. Então, por igual quantidade a mais de matéria, o corpo recebe mais ímpeto e mais intensamente.... E então se madeira leve e ferro pesado de mesmo volume e mesma forma são movidos com mesma velocidade por um projetor, o ferro se moverá mais longe, porque foi impresso nele um ímpeto mais intenso, o qual não é tão rapidamente corrompido como o ímpeto menor seria.

Quando Buridan usa a rotação de um moinho para exemplificar o que ele quer dizer com o ímpeto, ele acaba se distanciando do conceito de inércia. Um moinho colocado a girar, dependendo de sua velocidade e de seu tamanho, resistirá a cessar seu movimento, quanto mais leve mais tempo levará para parar. Se for abolido qualquer tipo de resistência ele girará eternamente. Este é o caso do movimento dos corpos celestes. Deus os colocou em movimento no início da criação e, como eles se movem livres de qualquer tipo de resistência, o ímpeto dado a eles para que eles se movessem duraria eternamente. Ele iguala, então, o caso da rotação dos corpos celestes com um corpo movimentando-se com uma velocidade constante em linha reta. Vemos que ele entende, intuitivamente pelo menos, que um ímpeto é necessário para que haja uma mudança na rapidez com que o corpo se movimente. Ao mesmo tempo que este exemplo o faz distanciar do conceito de Inércia, tal como é entendido e aceito hoje, ele faz com que Buridan chegue num ponto nunca antes chegado. Buridan chega até a porta que o levaria, se aberta, ao lugar encontrado por Newton; a chave que usou, infelizmente, não serviu.

Usando a chave errada, Buridan usa o ímpeto para justificar a impossibilidade de rotação da Terra. Ao lançar um corpo para o alto, mesmo que consideremos que ele seja carregado por uma atmosfera que gire com a Terra, o ímpeto venceria este deslocamento lateral de ar a ponto de fazer com que o corpo caia num ponto diferente do qual foi lançado verticalmente. Ele mesmo, curiosamente, acaba contrariando o princípio da Inércia!

O ímpeto de Buridan é mais ainda respeitado e discutido pelo fato de explicar a aceleração de queda livre dos corpos na superfície da Terra. Um corpo que caísse somente pela influência da gravidade estaria, de acordo com os princípios aristotélicos, caindo com uma "velocidade" constante. Buridan trata a gravidade como uma força aceleradora cujo efeito é adicionar porções de ímpeto em cima daquelas já adquiridas. Assim, o ímpeto total vai se acumulando através do tempo, e como a força da gravidade é capaz de atuar cinematicamente sobre o corpo e sua "massa" permanece a mesma , concluímos que a velocidade aumenta durante o processo de queda e numa taxa constante porque a gravidade não muda. Uma outra vez Buridan se encontra diante da porta que foi aberta por Newton quase 400 anos depois e parece, desta vez, ter olhado pelo buraco da fechadura para ver o que havia do outro lado: supôr que o efeito da força, como a gravidade, é produzir incrementos de ímpeto e um aumento de velocidade é associar força com aceleração!

1.2.3. Os Mertonianos

William de Ockham define o movimento de um modo diferente de Aristóteles. Ele enunciou um princípio epistemológico conhecido hoje como "Navalha de Ockham". Este princípio enuncia que "é fútil usar mais entidades para explicar alguma coisa se for possível usar menos" [7]. Ao pensar desta forma, Ockham mostra uma maneira diferente da aristotélica de definir o movimento. Quando acreditamos que "tudo que move é movido por alguma coisa", somos tentados a fundir a cinemática com a dinâmica. Descrever o movimento implica em justificá-lo. Eliminando entidades aristotélicas como lugar natural, corpo pesado, corpo leve e não se preocupando com as causas do movimento, Ockham passa a descrevê-lo como mero deslocamento do corpo num certo intervalo de tempo [7].

> (...) é claro que movimento local é para ser concebido como se segue: Afirmando que o corpo está num lugar, depois em outro lugar, assim procedendo sem qualquer repouso ou qualquer coisa intermediária, além do próprio corpo, nós temos movimento local, verdadeiramente. Portanto, é fútil postular outras tais coisas.

Ao afirmar que movimento não requer uma causa, nem do meio nem de uma força impressa, a ponto de, ironicamente, se dizer surpreso com a idéia de que a nossa mão teria algum poder pelo simples fato de estar em contato com uma pedra ao lançá-la [7]; então o movimento uma vez existindo pode ser eterno. Suas idéias foram extremamente frutíferas e influenciaram vários outros pensadores. Eliminada a causa do movimento desenvolveu-se, no Colégio de Merton, o que chamamos hoje de cinemática. Importantes contribuições feitas pelos mertonianos foram [12]:

1. Uma clara distinção entre *descrição* do movimento e *causa* do movimento. Obviamente isso decorre da definição de *movimento* dada por Ockham.

2. A definição de *velocidade* (no sentido de “rapidez” ou de “vagarosidade”) como deslocamento no tempo e a conceitualização de *velocidade instantânea.*
3. A definição de *aceleração* como variação da velocidade no tempo.
4. A consideração de *movimentos uniformes* e *movimentos uniformemente acelerados.* Traçaram gráficos *v x t* desses movimentos e entenderam que as *distâncias percorridas* nesses movimentos são dadas, respectivamente, pelas *áreas* do retângulo e do triângulo, formados pelo conjunto das ordenadas (velocidade).
5. A formulação e demonstração do *Teorema da Velocidade Média.*

O ponto de partida dos Mertonianos foi um problema que já era discutido pelos escolásticos e que os Mertonianos trataram de uma forma extremamente frutífera que pode ser entendido com a seguinte pergunta [4]: o que acontece quando um corpo se torna mais quente, uma superfície mais iluminada, um ser humano mais justo, é muito diferente do que acontece quando duas quantidades se somam como um copo que se enche de água porque colocamos mais água dentro dele? Para resolver o problema consideraram duas grandezas: intensidade e extensão de qualidade. A intensidade é medida por graus, e a extensão é uma linha imaginária. O problema consiste em saber como o grau da intensidade varia ao percorrer a linha da extensão [12].

Penha Maria mostra, numa frase deleitável, o grande passo dado pelos Mertonianos rumo a um progresso científico [12]: “Uma felicidade na História da Física foi terem concebido o movimento como uma qualidade: O *grau* é a *velocidade instantânea* e a *extensão*, o *tempo*, embora se saiba que, durante muitos anos, Galileu usou a *distância* ao invés do *tempo.*”

2. A LEI DA INÉRCIA

2.1. Galileu e a Inércia Circular

Verificamos, no capítulo anterior, que a idéia de Aristóteles sobre movimento não passou sem críticas na Idade Média. Essas críticas prepararam o salão para Galileu trazer à baila suas contribuições. Ao final do espetáculo apresentado pelo filósofo, verificamos uma extrema originalidade em seus argumentos, embora ele se apresente como medieval em muitas de suas idéias. Observamos, com Galileu, como os padrões gerais do pensamento de uma época podem influenciar o avanço científico. O apego aos círculos para órbitas planetárias fez com que ele concebesse o princípio da inércia também para os corpos em rotação e, se acreditarmos que a lei da inércia não é só um detalhe no novo mundo, mas um dos fundamentos que suportam as partes mais essenciais do sistema, então, ela constituirá um importante elemento na transição da ciência antiga e medieval para a física clássica. Vejamos, então, como Galileu contribuiu para esta importante mudança e por que ele é unanimemente considerado o precursor da lei da inércia.

Na Primeira Jornada de seu livro *Diálogo Entre os Dois principais Sistemas do Mundo: O Ptolomaico e o Corpenicano*[iii], Galileu afirma a unidade entre eventos sublunares e supralunares, contrariando a tese aristotélica que divide o universo e que elabora, para cada parte, uma explicação para os fenômenos observados. Galileu admite que [13] "o mundo é um corpo dotado de todas as dimensões e, por isso mesmo, perfeitíssimo" e que

---

[iii] No sistema de Ptolomeu os corpos do universo se encontravam na seguinte ordem: Terra, Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno e a esfera das estrelas fixas. Este sistema mantinha o chamado "axioma platônico" segundo o qual todas as aparências celestes, isto é, o movimento observado dos planetas, deve ser explicado por movimentos circulares uniformes ou pela combinação desses movimentos.

O sistema de Copérnico, tinha como hipóteses fundamentais a centralidade do Sol e a dos movimentos da Terra. A superioridade em relação ao sistema ptolomaico vinha da solução simples que proporcionava ao problema da retrogradação dos planetas. Apesar de sua novidade, os recursos conceituais de Copérnico eram bastante tradicionais pois também mantinham o "axioma platônico" da circularidade. Neste sistema os corpos do universo estão dispostos na seguinte ordem: Sol, Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno e a esfera das estrelas fixas.

> (...) estabelecido, portanto, este princípio, pode-se imediatamente concluir que, se os corpos integrais do mundo devem ser por sua natureza móveis, é impossível que seus movimentos sejam retilíneos, ou diferentemente dos circulares.

Isso, de modo algum, se aplica somente aos corpos celestiais, como era defendido por Aristóteles. Os argumentos de Galileu são muito próximos à concepção tradicional do movimento circular, como eram os de Copérnico, porque estão baseados na idéia de que o movimento circular é simples e natural, não requerendo justificações. De fato, em *De revolutionibus* (As Revoluções dos Orbes Terrestres) [14], Copérnico defende o primado do movimento circular, dizendo que:

> Por isso é que o movimento de um corpo simples é simples (isto se verifica particularmente no movimento circular), dado que o corpo simples permanece no seu lugar natural e na sua unidade. Quando está neste lugar, não pode ter nenhum outro movimento, exceto o circular, pois que o corpo simples permanece totalmente em si mesmo como um corpo em repouso.

Já Galileu afirma que [15] :

> (...) os movimentos locais são de três gêneros, ou seja, circular, reto, e misto do reto e do circular; aos dois primeiros chama simples, porque de todas as linhas, somente a circular e a reta são simples. E a partir daqui, restringindo-se um tanto, define novamente que dos movimentos simples um é o círculo, ou seja, aquele que se faz em torno do meio, e o outro, é o reto para cima e para baixo, ou seja, para cima aquele que parte do meio, para baixo aquele que vai para o meio.

O movimento reto é, por natureza, infinito, pois a linha reta é infinita e indeterminada; é, pois, impossível que um móvel tenha por natureza o princípio de mover-se pela linha reta, ou seja, para onde é impossível chegar, inexistindo um término predeterminado. Isto mostra

[4], que Galileu, assim como Copérnico, entendia o Universo como Platão e Aristóteles e os pensadores medievais: como uma esfera finita, porém não mais com a Terra ocupando o centro e sim o Sol. Ora, como o movimento perpétuo em linha reta e um mundo finito são idéias incompatíveis, havendo qualquer suspeita de um movimento que persevere num mesmo estado, este movimento só pode ser circular.

É oportuno ressaltar que Galileu entendia o movimento circular como um movimento não acelerado, pois [16]

> Este sendo um movimento que faz com que o móvel sempre parta do término e sempre chegue ao término, pode, em primeiro lugar, somente ele ser uniforme: a aceleração do movimento acontece no móvel quando ele se dirige para o término ao qual tem inclinação, e o retardamento acontece pela aversão que ele tem de sair e afastar-se do mesmo término; e porque no movimento circular o móvel sempre parte de términos naturais, e sempre se move para o mesmo (...).

Entender que há uma aceleração no movimento circular uniforme foi uma dificílima lapidação feita por Huygens e Newton, nas idéias preciosas de seus predecessores.

Há várias passagens na Segunda Jornada do *Diálogo* que sustentam existir em Galileu um "princípio da inércia circular". Este livro é escrito em forma de um diálogo entre três personagens: Salviati (que representa Galileu), Simplício (que representa o pensamento comum) e Sagredo (um leigo inteligente que, é claro, será sempre convencido por Salviati). O objetivo de Galileu ao introduzir a idéia de uma "inércia circular" é justificar a possibilidade do movimento da Terra. De fato, todos argumentos contra a rotação da Terra eram devido a carência do entendimento da inércia. Como, numa Terra em rotação um corpo cairia como se a Terra estivesse em repouso?

Fundamental para a resposta de Galileu às objeções contra a possibilidade do movimento de rotação da Terra foi o entendimento do princípio da relatividade do movimento já enunciado por Copérnico no *De Revolutionibus.* De forma geral, o princípio nos diz que [17]

> Toda mudança de posição que se vê ou é devida ao movimento da coisa observada, ou do observador, ou obviamente de um ou de outro. Na verdade, entre objetos que se movem igualmente na mesma direção, não se nota qualquer movimento, isto é, entre a coisa observada e o observador.

Sendo assim, Galileu nos diz que [18]:

> Seja, portanto, o princípio da nossa contemplação o considerar que qualquer movimento que seja atribuído à Terra, é necessário que para nós, como habitantes daquela e conseqüentemente partícipes do mesmo, ele fique totalmente imperceptível (...) .

Galileu, ao apoiar todo o seu discurso no princípio da relatividade usado por Copérnico, afasta-se, definitivamente, da concepção aristotélica do movimento que estabelecia uma diferença ontológica entre repouso e movimento. Para Aristóteles, o movimento sempre estava intimamente ligado à constituição interna desse corpo e dela dependia. De fato, se consideramos que, para um corpo existir em ato, deve encontrar-se em repouso no seu lugar natural, o movimento é o que um ser faz para chegar a sua atualização, enquanto esta ainda não foi alcançada; lembrando que a atualização pode ser uma forma, como no caso da semente de uma planta ou um lugar, como no caso do movimento local. Ou seja, o movimento, em qualquer ocasião, implicava uma verdadeira mudança que de modo algum, nem mesmo para o movimento local, seria relativa. A concepção de Galileu, como se vê nesta passagem, é inteiramente diferente [19]:

> (...) o movimento entanto é movimento e como ele opera, enquanto tem relação com coisas que carecem dele, mas entre coisas que participam todas igualmente dele, nada opera e é como se ele não fosse: e assim, as mercadorias das quais está carregado um navio, enquanto se movem, deixando Veneza, passam por Corfu, por Cândia, por Chipre, indo até Alepo, sendo que Veneza, Corfu, Cândia etc. ficam, nem se movem com o navio; mas para os fardos, caixas e

> outros volumes, dos quais está carregado e repleto o navio e, com respeito ao próprio navio, o movimento de Veneza até Sória é como que nulo, e nada altera a relação existente entre eles, e isto porque é comum a todos e por todos igualmente participado (...).

Movimento e repouso passam a ser entendidos, então, como conceitos complementares, ou seja, um só pode ser definido por referência ao outro e acima de tudo, são estados dos corpos que nada tem a ver com sua natureza intrínseca. Donde se conclui que [19]

> (...) tanto faz que se mova somente a Terra como todo o restante do mundo, pois que a operação de tal movimento não está em outra coisa que na relação existente entre os corpos celestes e Terra, relação esta que é a única a mudar.

Entretanto, por estabelecer o movimento da Terra, Galileu tem de responder a uma crítica medieval. No texto, citado a seguir, Galileu apresenta essa crítica: o navio do texto, em um mar fictício, sem nenhum movimento, representaria a Terra; se uma pedra fosse deixada cair do mastro, ela nunca atingiria o pé do mastro, se o navio se movesse sempre numa mesma direção, pois, no tempo de queda o navio teria movido o mastro que se distanciaria da pedra [20]:

> **Salviati** – (...) parece-me que a experiência do navio esteja tão bem ajustada ao nosso propósito, que se deva razoavelmente acreditar que o que se vê acontecer nela, deva acontecer no globo terrestre?
>
> **Simplício** – Até aqui pareceu-me que sim; e embora tenhais acrescentado algumas diferenças, não me parecem serem suficientes neste momento fazer-me mudar de opinião .
>
> **Salviati** – Ao contrário, desejo que persevereis nela, e sustenteis firmemente que o efeito da Terra seja correspondente àquele navio, desde que, quando isso se descobrisse prejudicial à vossa necessidade, não pretendeis mudar de idéia. Vós dizeis: porque quando um navio está parado, a pedra cai ao pé do mastro e, quando ele está em movimento, a pedra cai afastada do pé, portanto, pela conversa, da queda da pedra ao pé infere-se que o navio está parado, e da queda afastada deduz-se que o navio se move; e porque

o que acontece com o navio deve igualmente acontecer com a Terra, por isso da queda da pedra ao pé da torre, infere-se necessariamente a imobilidade do globo terrestre. Não é este o vosso argumento?

Simplício – É exatamente esse, resumido de modo a torná-lo mais fácil de ser compreendido.

Salviati – Agora dizei-me, se a pedra deixada cair de cima do mastro, quando o navio navega com grande velocidade, caísse precisamente no mesmo lugar do navio no qual cai quando o navio está parado, qual é o serviço que prestariam essas quedas quanto a assegurar-vos se o navio está parado ou está navegando?

Simplício - Absolutamente nenhum: do mesmo modo que, por exemplo, da batida de pulso não se pode saber se alguém dorme ou está acordado, porque o pulso bate do mesmo modo para os que dormem como para os que estão despertos.

Salviati – Muito bem ! Fizeste alguma vez a experiência do navio?

É claro que Simplício responde que não! Mas a conclusão de Salviati é outra: o movimento do navio, comum ao mastro, é também, comum a tudo que faz ou fez parte do navio. A pedra, assim, acompanharia o mastro e cairia a seu pé. Esse movimento contudo não é notado mostrando que a experiência interna a um sistema mecânico de corpos é incapaz de decidir se este sistema está em repouso ou em movimento. Com efeito, empregando um conceito tão preciso como o de sistema inercial, que afirma a impossibilidade de diferenciar o repouso e o movimento retilíneo uniforme, e um conceito mais amplo de sistema mecânico, no qual são indistinguíveis o repouso e o movimento uniforme, podemos considerar que Galileu está afirmando que assim como o navio é o sistema mecânico de todas as coisas que fazem parte do navio e que participam de seu estado (repouso e movimento uniforme), assim também a Terra é o sistema mecânico de todas as coisas que estão nela e participam de seu estado, de modo que os observadores que pertençam a esses sistemas não podem distinguir, com base em experiências realizadas no interior dos sistemas, entre o repouso e o movimento uniforme do sistema. Assim, agora na voz de

Sagredo, Galileu usa o argumento incontestável que mostra a possibilidade da Terra em movimento [21]:

> Quando, portanto, um pintor, ao partir do porto, tivesse começado a desenhar sobre um papel com aquela pena e continuando o desenho até Alexandria, e tivesse podido obter do movimento da pena uma história inteira com muitas figuras perfeitamente contornadas e pontilhadas para milhares de lados, com países, construções, animais e outras coisas, ainda que todo o verdadeiro, real e essencial movimento traçado pela ponta daquela pena não tivesse sido outra coisa que uma linha comprida, mas simplíssima; e quanto à própria operação do pintor, teria desenhado o mesmo com exatidão quando o navio tivesse ficado parado. Que depois do movimento compridíssimo da pena não fique outro vestígio que aqueles traços marcados sobre o papel, a causa é que o grande movimento de Veneza a Alexandria foi comum ao papel e à pena e a tudo aquilo que estava no navio; mas os mínimos movimentos, para frente e para trás, à direita e à esquerda, comunicado pelos dedos do pintor à pena e não ao papel, por serem próprios daquela, puderam deixar um vestígio de si mesmos sobre o papel, que ficava imóvel a tais movimentos. Analogamente é verdadeiro que se movendo a Terra, o movimento da pedra, ao cair, terá sido realmente um traço comprido com muitas centenas e até mesmo com muitos milhares de braças, e se tivesse podido traçar numa área estável ou outra superfície o traço do seu curso, teria deixado uma linha transversal compridíssima; mas aquela | parte de todo esse movimento, que é comum à pedra, à torre, e a nós, fica para nós insensível e como se não fosse, e somente é observável aquela parte da qual nem a torre nem nós somos partícipes, que é afinal aquele movimento com o qual a pedra caindo, mede a torre.

Posteriormente, inicia-se uma nova discussão que completa o enunciado da lei da inércia de Galileu, antecipando, parcialmente, a primeira lei do movimento de Newton. Trata-se de uma discussão, entre os três personagens, sobre o comportamento de uma esfera primeiramente solta num plano inclinado, depois lançada para cima sobre ele e finalmente abandonada num plano horizontal. Quando

Salviati questiona Simplício sobre o que ele acha que aconteceria com a esfera nesses três casos, Simplício responde que, para o primeiro caso, a esfera desceria naturalmente, aumentando a sua velocidade e, no segundo, é preciso imprimir um movimento inicial o qual vai continuamente enfraquecendo, até que finalmente se anula. Para uma declividade maior será verificada uma maior velocidade e para uma aclividade maior observa-se que a esfera, se lançada com a mesma "força", percorrerá uma distância menor. No caso de uma superfície horizontal, ou seja, sem nenhum tipo de inclinação, Galileu esclarece o seu princípio inercial [22]:

> **Simplício -** (...) Como não existe declividade, não pode existir uma inclinação natural ao movimento e, não existindo aclividade, não pode existir resistência a ser movido, de modo que seria indiferente à propensão e à resistência ao movimento: parece-me portanto que ele deveria ficar naturalmente em repouso (...)
>
> **Salviati –** Assim acredito, quando alguém o colocasse parado; mas se lhe fosse dado um ímpeto em direção a alguma parte, o que aconteceria?
>
> **Simplício -** Continuaria a mover-se na direção daquela parte.
>
> **Salviati** - Mas com que espécie de movimento? Por um movimento continuamente acelerado, como nos planos em declive, ou por um movimento sucessivamente retardado, como nos aclives ?
>
> **Simplício -** Eu não consigo perceber causa de aceleração nem de retardamento (...)
>
> **Salviati-** (...) quanto acreditais, portanto, que duraria o movimento do móvel?
>
> **Simplício -** Tanto quanto durasse o comprimento daquela superfície que não é nem subida, nem descida.
>
> (...)
>
> **Salviati -** (...) Dizei-me então: Qual estimais que seja a razão do movimento espontâneo daquela bola pelo plano em declive, e do movimento que não se faz sem violência pelo plano em aclive?
>
> **Simplício -** Por que a tendência dos corpos pesados é a de mover-se para o centro da Terra, e somente por violência para cima em direção oposta; e a superfície inclinada é aquela que se aproxima do centro, enquanto o aclive afasta-se dele.

A passagem acima citada pode ser interpretada como formulando um princípio de conservação de movimento, que se aproxima muito de duas leis fundamentais da física clássica, a saber, a lei da inércia e a lei de conservação de momento, sem ser, contudo, uma expressão exata dessas leis. De acordo com a lei propriamente galileana de inércia, se uma partícula ficasse livre de influências externas – note que a gravidade não está entre elas – perseveraria em movimento circular sobre a superfície lisa da Terra, pois somente nesta superfície todos os pontos estariam igualmente afastados do centro não possuindo assim, em nenhuma parte nem aclive nem declive. Somente para pequenas distâncias o movimento poderia ser considerado retilíneo.

Há, porém, uma afirmação feita por Salviati que parece exibir um entendimento relativamente exato do princípio da inércia. Trata-se da discussão sobre o que ocorre, quando um projétil, após ser girado velozmente, ser solto pelo arremessador. Assim explica Salviati [23]:

> (...) o movimento circular do arremessador imprime no projétil o ímpeto de mover-se (quando acontece que eles se separam) pela reta tangente ao círculo do movimento no ponto da separação , e continuando o movimento por esta tangente, afasta-se sempre do arremessador; e disseste que por tal linha reta o projétil continuaria a mover-se , quando não lhe fosse acrescentada pelo próprio peso uma inclinação para baixo, da qual deriva a encurvação da linha do movimento.

Esta aplicação do conceito de gravidade no movimento de um corpo é diferente daquela pela qual Galileu introduz o princípio da continuidade do movimento num plano horizontal, pois neste caso, como o corpo não tem propensão a descer ou a subir, é como se a gravidade fosse neutralizada e o movimento circular em torno do centro, ou seja, aquele movimento que nem o afasta nem o aproxima do centro, parece ser considerado como perpetuando-se exatamente devido a esta neutralização da gravidade. Em suma, o efeito da gravidade é o de alterar o movimento que de outro modo seria retilíneo para uma forma circular.

A formulação de Galileu possui, assim, a opacidade característica dos conceitos emergentes, porém, será esta visão circular da inércia que gradualmente irá se desenvolver até à concepção que foi formulada por Newton.

2.2. Descartes e a Inércia Retilínea

No *Princípios da Filosofia,* Descartes compara a sabedoria a uma árvore que estaria presa ao domínio do ser, à realidade, por meio de suas raízes metafísicas. O tronco da árvore seria a física, os ramos representariam a mecânica, a medicina, a psicologia, a moral que, na sua opinião, seriam as principais artes que aplicam conhecimento científico. Descartes deixa perceber claramente em seu discurso que, embora esteja voltado para as pesquisas científicas, não considera que elas bastem em si mesmas. O tronco da física deve ser sustentado por raízes metafísicas. Mas, antes mesmo de plantar a "árvore da sabedoria" era necessário que o terreno fosse preparado de modo que ela pudesse expandir com o pleno viço da certeza, ou seja, neste terreno não poderia ser semeado nenhum tipo de dúvida. Fazendo a sondagem de suas próprias idéias, ele verifica que as que se referem a objetos físicos são facilmente atingidas pela incerteza, ou seja, são instáveis e obscuras. Porém, há aquelas que se apresentam com grande nitidez e estabilidade. Essas idéias claras e distintas – que significam, respectivamente, bem compreendidas e inconfundíveis [3] - são concebidas por todos da mesma maneira devendo, portanto, não serem frutos das experiências dos nossos sentidos.

Descartes encontrou um método matemático geral e abstrato, aplicando a álgebra à geometria, que por si só já o conceberia como um grande gênio da ciência. Porém, isso não lhe bastou. Ele acreditava que estava imbuído de uma grande tarefa intelectual, principalmente depois dos sonhos que teve em novembro de 1619 [24]. Esta tarefa consistia em unificar todo o vasto campo de conhecimento com auxílio do instrumental matemático. Acreditando que somente com a matemática ele satisfaria seu ideal de eliminar o provável existente nas ciências até então conhecidas, atingindo uma plena clareza das idéias, surge uma questão: quem garante que essas idéias, embora claras e distintas, correspondam a algo real?

Para resolver este problema, Descartes amplia a dúvida ao máximo. Passa a duvidar até mesmo daquilo que o espírito admite como evidente espontaneamente: as idéias claras e distintas. Para tanto, Descartes lança mão de um artifício[24]: a hipótese do "gênio maligno" que levanta a questão do valor objetivo dos conhecimentos científicos. E se sob a mais absoluta certeza de estarmos certos estivéssemos errando? Traduzindo o problema em termos epistemológicos: somos solicitados a imaginar que um gênio maligno nos engana, fazendo-nos pensar que o mundo corpóreo existe, quando, na verdade, ele não existe. Em suma, não temos como enfrentar a dúvida hiperbólica se contarmos apenas com nossos próprios recursos. Porém, de uma máxima incerteza desponta uma primeira certeza: se duvidamos, é porque pensamos. Nada fica ainda definido a respeito de uma realidade externa, mas há, contudo um primeiro elo na cadeia de razões: nós pensamos. Basta uma primeira certeza plena para que comecemos a encadear uma ordem. Nesta altura, espoliado de tudo que pudesse entrar no seu espírito, Descartes formula a máxima: "Penso, logo existo" (*Cogito ergo sum*).

Que papel representa o *cogito* se não pode funcionar como base de conhecimento? Será ele que impedirá o retorno da dúvida. Na medida em que é estendida até sua máxima dimensão e mostra seu tamanho ameaçador, é que a dúvida manifesta seu limite e pode dar lugar a sua superação. Algo que pode ser explicado assim: para ser cético o sujeito tem que se empenhar na dúvida cética, e Descartes usa a existência dessa dúvida para mostrar ao cético que afinal, existe algo que ele não pode duvidar, a saber, o fato de estar duvidando. Assim, a única certeza que temos é da nossa existência como seres pensantes.

Aplicando o critério de clareza e distinção à questão dos tipos de coisas que percebemos, Descartes distingue duas categorias fundamentais: o pensamento e a extensão. Assim, é tipicamente cartesiana a idéia de que a principal natureza de tudo que é material é determinada por características puramente geométricas da extensão: matéria é aquilo que tem extensão no espaço. Cor, cheiro, leveza, aspereza... são características subjetivas não sujeitas a um estudo científico. Além das propriedades geométricas, como forma e tamanho, somente as grandezas cinemáticas podem ser conhecidas e estudadas cientificamente. Física, então, é a ciência dos corpos que se movem no espaço e tal como a geometria é concebida como partes do espaço podendo também ser deduzida de axiomas a priori.

A física cartesiana tem grande importância para a história da ciência, pois, desde que o sistema aristotélico surgiu, um novo sistema para a interpretação da natureza, como um todo, era apresentado, houve uma nova formulação da lei da inércia, um tratamento original da inércia circular e a definição de quantidade de movimento. No livro de Descartes *Princípios da Filosofia,* publicado em 1644, encontramos sua filosofia natural. Na parte III, encontramos a fundamentação da lei da inércia em sua análise do movimento circular, um trabalho seminal para Isaac Newton, autor do *Principia* que assim foi chamado para sugerir uma modernização da feitura realizada por Descartes.

Descartes criou um "novo" mundo e nesse adjetivo está a sua visão de entender o universo como um corpo real, pleno, desprovido de vazios que se divide em partes que se distinguem simplesmente por seus movimentos diferentes. No instante inicial da criação, Deus conferiu movimento diferente às partes e, a partir daí, esses movimentos passaram a ser regulados por leis da natureza, entendendo por leis da natureza simplesmente as leis de extensão material, já que no mundo de Descartes não havia diferença entre matéria e espaço.

Descartes apresenta três leis da natureza. Se juntarmos a primeira com a segunda lei, encontraremos o que se chama "lei da inércia". A primeira lei afirma de uma forma bem geral que nenhuma mudança ocorre nas partes do espaço ou na matéria sem que uma causa externa atue. A segunda lei disserta sobre a tendência de um corpo em perseverar seu movimento, que como já assumido na primeira lei, é agora definido mais precisamente como uma tendência de continuar a se mover em uma linha reta com a mesma velocidade. Como justificar a prioridade da linha reta? Ele se apóia em argumentos metafisicos [25]: no ato da criação do universo, Deus colocou nele matérias com movimento e repouso. Sendo Deus perfeito, não há motivo para alterar Sua própria criação. Mas Deus pode fazer movimentos circulares "eternos" e por que não os fez nos corpos terrestres como fez nos corpos celestes? Porque Deus age de modo a conservar o mundo do modo exato como ele se encontrava no instante da criação. Ora, por que o movimento circular não pode ser realizado no instante da criação? Isso acontece pelo fato de somente a reta possuir simetrias que espelham a perfeição de Deus, ou seja, por translações uniformes sobre ela não podemos distinguir seus pontos. Já o círculo precisa de três pontos para ser determinado e não pode, assim, ser dado de uma só vez como a reta, que é possível ser determinada pela tangente em qualquer um de seus pontos.

Fato interessante observado [26] é que Descartes usa a simetria da linha reta para exaltar a perfeição de Deus ocupando o lugar da (as)simetria esférica do universo de Aristóteles com a eterna rotação em torno de seu eixo. Estranha a forma que os filósofos colocam para escolhermos o universo ao qual pertencemos. Ou um alimentado pelo amor à perfeição do círculo ou este agora que encontra na linha reta a prova e a beleza da criação divina.

Então, no universo cartesiano, a origem do movimento está em Deus. No começo, Ele criou a matéria e a colocou em movimento. O que a faz permanecer em movimento? Nada. Movimento é um estado do corpo e como qualquer outro, ele irá continuar ao menos que algo externo atue para modificá-lo. Numa colisão, por exemplo, o movimento pode ser transferido de um corpo para outro, mas ele, em si, permanece indestrutível. Descartes tenta, assim, analisar o impacto em termos da conservação da quantidade de movimento.

Não é surpresa, portanto, que ele foi o primeiro a insistir numa inércia retilínea e a dizer que os corpos que se movem em círculos ou em curvas precisam estar sob determinada causa externa (Primeira Lei) [27]. Tais corpos, Descartes afirma, exercem constantemente uma "tendência" de se afastar do centro sob o qual eles estão girando. Embora ele não tenha tentado expressar a medida quantitativa desta tendência, sua demonstração que tal tendência existe foi o primeiro passo na análise dos elementos mecânicos do movimento circular.

Apesar do movimento circular não representar o movimento perfeito, para Descartes ele desempenhava um papel central em sua filosofia com seus "vórtices"[iv]. A análise desse movimento foi uma grande contribuição de Descartes para a filosofia natural. De acordo com a primeira e a segunda lei do movimento, todo corpo que se move tende a se mover em linha reta. Para o movimento ter uma trajetória circular é necessário que um outro corpo impeça o curso retilíneo

---

[iv] O universo de Descartes era pleno. A identidade de matéria com extensão significava que todo espaço precisava ser preenchido com matéria. Não havendo nenhum espaço vazio em que o corpo pudesse se mover como é possível que o corpo se mova? Todo corpo que se move o faz em direção a um espaço desocupado por outro corpo e tudo ocorre instantaneamente. Todas as partículas móveis precisam participar de um circuito fechado de outras matérias que necessariamente também se movem. Assim, todo movimento precisa ser circular porque ele é necessário embora não seja natural.

A primeira conseqüência da introdução do movimento num pleno infinito como vemos, é que nosso universo é estabelecido por um número infinito de vórtices, pois para que uma parte se movesse outras deveriam se mover também.. O que singulariza a teoria dos vórtices é o fato dela apoiar-se nas três leis do movimento e no princípio da conservação da quantidade de movimento. A teoria não só tinha uma base quantitativa como fornecia uma explicação intuitivamente plausível da estabilidade das órbitas planetárias, das marés e da natureza do peso. De imediato passa a ser uma teoria preferida, pois ofereceu para vários fenômenos uma explicação que não era pior que qualquer outra visão. Nesse universo deveríamos ter três tipos de matéria. O primeiro tipo, ou melhor, o primeiro elemento seria o éter. Seria composto de partículas muito pequenas que preencheriam os espaços entre as partículas maiores, ou seja, do segundo elemento e também do terceiro. O terceiro elemento nesse universo seria as partículas bem maiores como os planetas. Este universo tem como centro o Sol e os planetas giram em torno dele. Os corpos mais externos deste sistema girariam mais devagar e seriam os maiores e isso, de certa forma, explicaria a estabilidade das órbitas dos planetas. Caso o planeta se movesse para baixo, isto é, em direção ao Sol, os corpúsculos menores e mais rápidos do segundo elemento , empurrariam o planeta para cima . Caso se movesse para cima o planeta se depararia com corpúsculos maiores, que reduziriam sua velocidade e o fariam direcionar novamente para o centro.

A gravidade também foi explicada com a teoria dos vórtices. Descartes colocou um pequeno vórtice em torno da Terra , girando com o planeta e terminando na altura da Lua. Mas o que é gravidade afinal? Como em todo movimento circular há uma tendência centrífuga inerente, ela é uma deficiência desta tendência centrífuga de forma que os corpos que a possuem são forçados para baixo por outros possuidores de uma tendência centrífuga maior.

natural desse movimento. Ou seja, o corpo que se move num círculo precisa ser externamente impedido. Descartes diz que existe uma evidência empírica para este argumento. No *Principia,* a experiência é a de uma pedra que gira presa a uma funda; quando a pedra deixa a funda, ela o faz pela tangente ao círculo, mesmo que ela não abandone a funda a tendência de sair pela tangente é mostrada pelo puxão sentido pela mão, enquanto gira a funda.

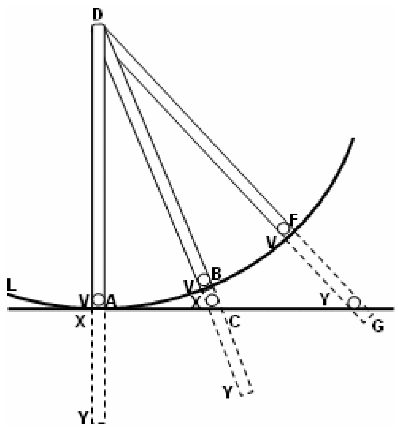


Figura 1

Descartes imagina o movimento retilíneo ao longo da tangente. O movimento ao longo da reta XG, na figura 1, pode ser decomposto em dois outros: um, tangente ao círculo ABF e o outro, radial. Quando uma pedra, numa funda que se move num círculo AB, está em A, ela tende a ir em direção a C, ao logo da tangente; como o movimento radial é impedido pela funda, ela se movimenta em direção a B.

Em suma, movimento circular ocorre quando a componente radial é impedida. Descartes se refere à componente radial da velocidade como aquela [28]"cujo efeito é impedido pela funda" e à componente tangencial como aquela "cujo efeito não é assim impedido". Para que um movimento circular ocorra não é necessário afirmar a existência de uma nova entidade, como por exemplo, uma força, em nosso sentido; basta impedir uma tendência que está naturalmente presente; George Smith [29] denomina essa formulação da primeira e segunda leis de Descartes de "sentido contrapositivo da lei da inércia".

Descartes ilustra o movimento circular com dois outros exemplos. O primeiro [30] é o de uma formiga que se move em uma régua infinita, que gira com o pivô em uma de suas extremidades. É possível combinar o movimento da formiga ao longo da régua e outro de rotação – que a formiga partilha com a régua – de tal modo que a formiga esteja sempre sobre uma reta.

O segundo [31] exemplo é de uma bola colocada num tubo oco, que roda com o pivô em uma de suas extremidades. A bola se move afastando-se do centro de rotação. À medida que o cilindro gira, a esfera desliza dentro dele de modo também a permanecer sempre sobre uma linha reta.

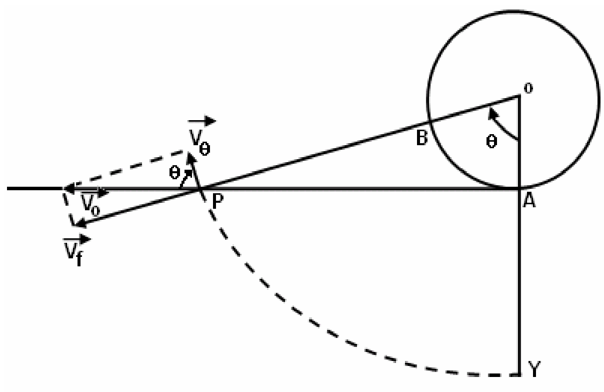


Figura 2

O cilindro pode ser imaginado como a linha OY ou OP na figura 2 e a esfera, o ponto P. Descartes entendeu, numa notação moderna, que a velocidade uniforme em P, $\vec{v}_0$, sobre a reta AP, é a composição de duas velocidades, a velocidade radial, $\vec{v}_r$, ao longo de OP e a velocidade tangencial, $\vec{v}_\theta$, cuja direção é tangente ao círculo em P: $\vec{v}_0 = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$.

Certos aspectos da análise feita por Descartes, certamente, foram sugestivos para os que lhe sucederam. No caso da pedra girando presa a uma funda, o diagrama mostra duas sucessivas posições da funda depois do ponto de contato com a tangente, revelando que a distância radial entre o círculo e a tangente aumenta numa taxa que não é uniforme. Descartes assim se expressa [32]:

> Eu não tenho dúvida que o movimento dessa formiga precisa ser muito devagar no começo e que este esforço não pode parecer muito grande se for medido somente no início do movimento; mas precisa-se também ser dito que não é inteiramente nulo, e desde que ele aumente na proporção do efeito produzido, a rapidez se torna rapidamente muito grande.

O esforço da formiga significa velocidade, no caso, a radial. Com a bola dentro do tudo, Descartes é ainda mais explícito [33]:

> No primeiro instante que o tubo é girado em torno de um centro [E], esta bola avançará lentamente em direção a Y ; mas ela avançará um pouco mais rápido no segundo porque em adição à força (*force*) comunicada a ela no primeiro instante, ela adquirirá ainda uma nova pelo novo esforço (*effort*) que ela fará para se afastar do centro [E], porque este esforço continua enquanto durar o movimento circular e se renova a cada instante.

O que causa o puxão da funda é a velocidade radial que aumenta porque uma nova velocidade é sempre adicionada à que existia no instante imediatamente anterior - juntamente com o esforço. Não há maiores detalhes como essa dinâmica acontece, porém, podemos questionar se existe algum processo mecânico pelo qual a velocidade aumente. Quanto a isso, Richard S. Westfall [27] atenta que a tendência de se afastar do centro aparentemente possui as mesmas características da tendência dos corpos pesados de caírem. Huygens certamente se impressionou com essa similaridade, a ponto de usá-la para fundamentar toda a sua análise do movimento circular.

3. O MOVIMENTO CIRCULAR

3.1. A Queda dos Corpos

A falta de uma Dinâmica bem fundamentada e universalmente aceita não impediu que, antes mesmo do Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, também chamado de Principia) sistemas dinâmicos tivessem sido corretamente descritos, como Galileu fez com a queda dos corpos na superfície da Terra.

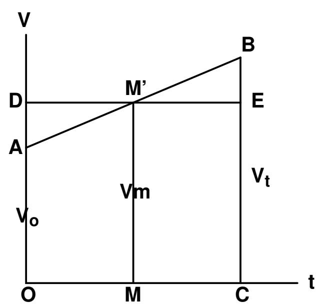


Figura 3

O *Teorema da Velocidade Média* já havia sido formulado e demonstrado pelos mertonianos, 200 anos antes de Galileu [4]. O teorema afirma que um corpo uniformemente acelerado a partir da velocidade inicial V_0 até a velocidade final V_t percorre, em igual intervalo de tempo, *OC*, uma distância igual à que percorreria com velocidade constante V_m, igual ao valor médio de V_0 e V_t; em notação moderna: $V_m = \frac{V_0 + V_t}{2}$. Eles assumiram que a área sob o gráfico da velocidade representada contra o tempo seria a distância percorrida pelo corpo. Assim, a área do trapézio *ABCO*, na figura 3, é igual à área do retângulo *DECO*, pois os triângulos *ADM'* e *M'BE* são iguais, logo têm a mesma área.

Galileu usou o *Teorema da Velocidade Média* para resolver o problema da queda dos corpos. Galileu e os medievais já sabiam que o movimento de queda é uniformemente acelerado. Assim, no livro *Discurso e Demonstrações referentes às Duas Novas Ciências* [34]:

> **Proposição II. Teorema II.** Se um corpo cai do repouso em movimento uniformemente acelerado, os espaços percorridos estão entre si na razão dupla dos tempos gastos nos respectivos percursos.

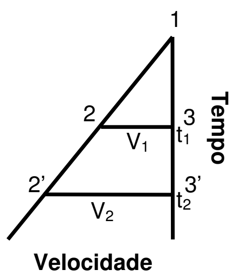


Figura 4

Ou seja, podemos dizer que para um corpo que cai com movimento uniformemente variado, as distâncias s_1 e s_2, percorridas, respectivamente, nos intervalos de tempo t_1 e t_2, obedecerão à seguinte relação [7]:

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2;$$

em notação moderna: $s = \frac{1}{2}gt^2$. Isso é demonstrado, usando o *Teorema da Velocidade Média*, por esse teorema (figura4):

$$\frac{área123}{área12'3'} = \frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{\frac{v_1}{2}}{\frac{v_2}{2}}\right)x\left(\frac{t_1}{t_2}\right) = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)x\left(\frac{t_1}{t_2}\right);$$

por semelhança de triângulos:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2};$$

logo:

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2.$$

Segue-se um corolário:

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2.$$

Em notação moderna: $v^2 = 2gs$.

3.2. Huygens e a Força Centrífuga

Desde Galileu, no início do século XVII, talvez não tenha havido um autor que tenha tido tão grande influência em Newton como Christiaan Huygens.

O desenvolvimento de relógios foi um problema que interessou Huygens, em toda a sua vida [35]. Em 1657 ele criou um relógio que era regulado por um pêndulo e no ano seguinte publicou *Horologium*, onde continha uma total descrição de seus estudos e que acabou por popularizar o relógio de pêndulo[v]. Como os estudos não pararam após a publicação do *Horologium*, houve a necessidade de uma segunda edição onde conteria as suas novas descobertas. Em 1673, uma obra-prima da literatura científica foi, então, publicada sob o título *Horologium Oscillatorium* [36]. Muito mais que uma mera descrição sobre relógios, este livro, dividido em cinco partes, é um verdadeiro tratado sobre movimentos acelerados, sempre exemplificado com o pêndulo do relógio por ele inventado. Na segunda parte, sob o título "*De la chute des graves et de leur mouvement sur la Cycloîde"*, encontramos várias proposições sobre queda livre, movimentos sobre planos inclinados e trajetórias curvilíneas. Huygens começa este estudo baseado em três hipóteses:

I. Se a gravidade não existe e se o ar não afeta o movimento dos corpos, cada corpo tendo uma vez sido colocado em movimento continuaria em linha reta com velocidade uniforme.
II. Ora, pela ação da gravidade, de qualquer fonte que ela provenha, os corpos mover-se-ão com um movimento composto do movimento uniforme nesta ou naquela direção e de um movimento para baixo devido à gravidade.
III. E cada um deles pode ser considerado separadamente, sendo que um não interfere no outro.

Após o estudo do relógio, Huygens listou ao final do livro, sem provas, trinta teoremas sobre a força centrífuga, termo criado por ele, que indica o esforço (ou *conatus*) que um corpo faz para se afastar do centro, uma vez colocado em movimento circular. Os trinta teoremas constituem a justificação teórica do movimento do pêndulo e as provas apareceram num trabalho, postumamente publicado [35], *De Vi Centrifuga,* e algumas delas serão analisadas adiante.

[v] Galileu já havia tentado construir um relógio de pêndulo e pretendia usá-lo como cronômetro. Ambos, Huygens e Galileu tinham a esperança de melhorar a acurácia das medidas astronômicas e também tornar possível medir a longitude no mar. Esse problema envolveu muitos pesquisadores, na época de Huygens, devido ao interesse pela navegação.

Um dos problemas que motivou Huygens em sua pesquisa foi o elaborado por Marin Mersenne [35]. O problema era encontrar com maior precisão o valor da aceleração da gravidade. A relação, modernamente escrita como $s = \frac{1}{2} g t^2$, era muito conhecida pelas mãos de Galileu, nos estudos de queda livre e foi a base para a análise de Mersenne. Assim, para encontrar o valor da gravidade, Mersenne procurou encontrar a distância percorrida pelo corpo no primeiro segundo de queda. Pela equação de Galileu, o valor encontrado seria numericamente igual à metade do valor da constante gravitacional. A barreira encontrada por Mersenne estava justamente no fato que não existia uma forma precisa para medir o segundo. Cada pesquisador, conforme a necessidade, estabelecia seu próprio cronômetro.

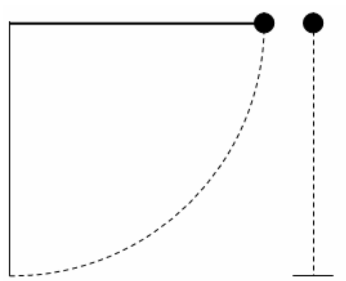


Figura 5 – O experimento de Mersenne

Mersenne pesquisou, então, o comprimento de um pêndulo que completasse seu balanço em um segundo para, assim, usá-lo como cronômetro. Ele tentava ajustar a altura da qual um pêndulo e um corpo são abandonados, ouvindo o som de ambos, quando, tanto o corpo quanto o pêndulo, alcançassem seus obstáculos (figura 5), simultaneamente. O pêndulo tendo como limite a parede e o corpo em queda, o chão. Desta forma, ele encontraria a distância percorrida por um corpo em meio segundo de queda. As dificuldades consistiam na resistência do ar, na precariedade do experimento e na limitação dos nossos sentidos.

Foi Huygens, quem encontrou o valor da aceleração da gravidade com o desenvolvimento de relógios ao achar uma equação que relacionasse o período do pêndulo do relógio com o comprimento desse pêndulo e a gravidade. Colocando numa forma algébrica moderna, o período de vibração de um pêndulo pode ser expresso por $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, onde L é o comprimento do pêndulo e g a aceleração da gravidade. O relógio que Huygens desenvolveu, para medir a constante gravitacional, estava teoricamente baseado na relação, por ele observada, entre a força centrífuga e gravidade [37] :

> O esforço para afastar do centro é, assim, um efeito constante do movimento circular. E embora esse efeito pareça diretamente oposto ao da gravidade... esse mesmo esforço, que os corpos circulares fazem para se mover para longe do centro, é a causa pela qual outros corpos movem para o mesmo centro... Assim, é nisso que o peso dos corpos verdadeiramente consiste: do qual pode-se dizer que esse é o esforço que a matéria fluida, que gira circularmente em torno do centro da Terra em todas as direções, faz para afastar-se do centro, e para empurrar nos seus lugares os corpos que não participam nesse movimento.

Essa relação é analisada no *De Vi Centrifuga*.

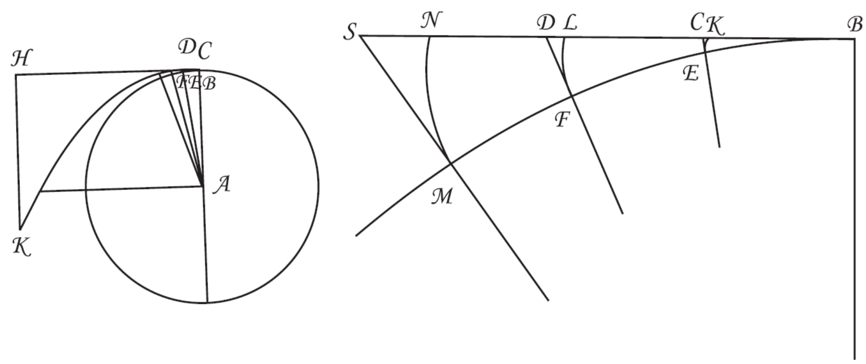


Figura 6. De Vi Centrifuga. $BEFG$ **é um círculo vertical, com centro em A, que gira com rotação uniforme em torno de seu centro. Na figura da direita, por construção,** $\overline{BK} = \widehat{BE}, \overline{BL} = \widehat{BF}, \overline{BN} = \widehat{BM}$ **, isto é, os arcos** $\widehat{EK}, \widehat{FL}$ **e** $\widehat{MN}$ **são arcos de círculo com centro em** B **; para pequenos arcos,** $\overline{BK} \approx \widehat{BE}, \overline{BL} \approx \widehat{BF}, \overline{BN} \approx \widehat{BM}$ **. Além disso, as linhas** AEC, AFD *e* AMS **, ligando** E, F **e** M **ao centro, tendem, para pequenos arcos, para as tangentes aos arcos** $\widehat{EK}, \widehat{FL}$ **e** $\widehat{MN}$**, de modo que** $\widehat{EK} \approx \overline{EC}, \widehat{FL} \approx \overline{FD}$ **e** $\widehat{MN} \approx \overline{MS}$**.**

Huygens supõe uma pessoa de pé em *B* (figura 6) . Essa pessoa segura um barbante, do qual pende uma esfera pequena. Se a esfera se soltar do barbante, em *B*, ela se move ao longo da linha *BCDH*, com a velocidade do círculo em *B*. Como a pessoa e a esfera têm a mesma velocidade, as distâncias percorridas no mesmo tempo, respectivamente, no círculo e na linha, são iguais. Pode-se considerar que, no começo do movimento, quando os arcos são pequenos, enquanto a pessoa está em *E, F ,M,* a esfera está respectivamente, em *K≈C, L≈D, N≈S.* Portanto, a esfera se afasta do centro ao longo de $\overline{EC}, \overline{FD}$ e $\overline{MS}$. Por outro lado, se a esfera não se soltasse e a pessoa segurasse o barbante firmemente, enquanto a roda girasse, a tensão no barbante seria igual ao peso, isto é, a *tendência centrífuga* seria anulada pelo peso [38]:

> Mas essa tendência da qual falamos é absolutamente semelhante àquela tendência com a qual os corpos ponderáveis suspensos por um fio aspiram a descer.

Conseqüentemente, as *tendências centrífugas* de dois corpos desiguais que têm a mesma velocidade e se movem em círculos de mesmo raio estão uma para outra como "as gravidades ou quantidades sólidas desses corpos" [38]:

$$\frac{F_{c1}}{F_{c2}} = \frac{m_1}{m_2},$$

onde m_1 e m_2 são as "quantidades sólidas" e F_{c1} e F_{c2} são *tendências centrífugas.*

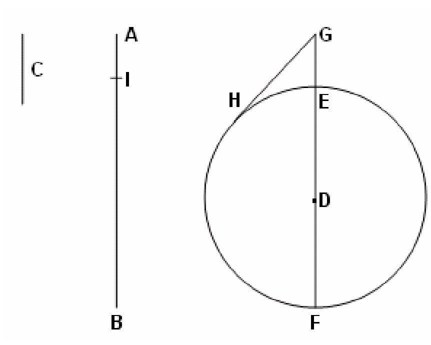


Figura 7 – Demonstração geométrica de Galileu para provar a impossibilidade de extrusão mediante a rotação terrestre: *HG/GE=AB/C*

Uma idéia precursora pode ter sido o argumento de Galileu encontrada na Segunda Jornada do *Diálogo.* A causa abraçada por Galileu era demonstrar a possibilidade do movimento da Terra. Um dos argumentos que ele se empenhou em combater foi o de como a Terra retém objetos, em sua superfície, se ela está em rotação. A idéia que norteia a prova de Galileu é a seguinte: para analisar a extrusão, é preciso comparar a tendência que um corpo tem de seguir pela tangente (devido a inércia) com a tendência que ele tem de cair pela secante (devido a gravidade). Dizer que o movimento de rotação da Terra provocaria e extrusão é dizer que a primeira tendência supera a segunda e ele acredita demonstrar, geometricamente, essa impossibilidade[vi].

Comparando a figura de Huygens e a de Galileu, observamos que ambas possuem uma linha tangente e, pelo menos, uma secante. No desenho de Galileu, a secante representa a distância que um corpo deveria retornar à superfície, caso fosse lançado devido à rotação da Terra; para Huygens, a secante representa a medida da "força" centrífuga, tão discutida nos textos de Descartes. Enfim, Huygens comparou a tendência de se afastar do centro, descrita pode Descartes, com a tendência da gravidade de se aproximar do centro, estudada por Galileu.

Huygens, então, apresenta algumas proposições que, juntas, levam a expressão moderna $F_c = \frac{v^2}{R}$.

PROPOSIÇÃO I

Quando dois móveis iguais, *1* e *2*, percorrem no mesmo intervalo de tempo circunferências cujos raios são diferentes, sendo R_1 o raio da menor circunferência e R_2 o raio da maior, teremos que:

$$\frac{F_{cf1}}{F_{cf2}} = \frac{R_1}{R_2},$$

sendo F_{cf1} a força centrífuga de *1* e F_{cf2} a força centrífuga de *2*.

[vi] Para qualquer valor *AB* (fig.7), arbitrariamente maior que *C*, uma secante *FG* pode ser desenhada num dado círculo tal que a tangente *HG* estará para o segmento da secante *GE* na mesma razão que *AB* estará para *C*. Para isso, Galileu encontra a terceira proporcional *AI* para *AB* e *C*, fixa *G* tal que *FE/GE* seja equivalente a *BI/AI* e então traça a tangente ao círculo passando por *G*. Por construção: HG/GE=AB/C. Assim, do ponto de vista geométrico, as condições para a extrusão tornam-se infinitamente desfavoráveis quando se aproxima do ponto de tangência, isto porque Galileu identifica a velocidade tangencial com o segmento da tangente *GH* e a velocidade para baixo com o segmento da secante *GE* e afirma que, por maior que seja a velocidade tangencial de extrusão, ou seja, por maior que seja a velocidade da Terra, sempre será superada pela velocidade para baixo da secante (Galilei ,G. *Diálogo Entre os Dois Máximos Sistemas do Mundo Ptolomaico e Copernicano*, traduzido para o português Pablo Rubén Mariconda, Discurso Editorial/ Imprensa Oficial, São Paulo ,p249, 2004).

Demonstração:

Como já visto anteriormente, $\overline{DF}$ e $\overline{EG}$ (figura 8) são consideradas como as distâncias percorridas devido às forças centrífugas que atuariam nos pontos *E* e *D*. Como os triângulos *ABF* e *ACG* são semelhantes, podemos escrever:

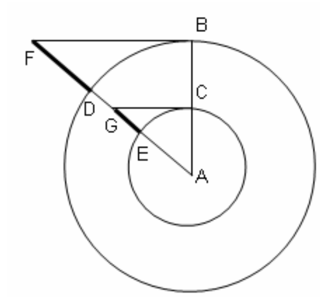


Figura 8

- $\frac{AF}{AG} = \frac{AB}{AC}$ e
- $\frac{AF - AD}{AD} = \frac{AG - AE}{AE} \Rightarrow \frac{FD}{AD} = \frac{GE}{AE} \Rightarrow \frac{FD}{GE} = \frac{AD}{AE}$, mas $\begin{cases} AD = R_2 \\ AE = R_1 \end{cases}$ (equação 1)

Além disso, pela queda livre:

$$\frac{FD}{GE} = \frac{\frac{1}{2} g_{FD} t^2}{\frac{1}{2} g_{GE} t^2},$$

Segue, por definição de força centrífuga ($F \propto g$):

$$\frac{FD}{GE} = \frac{F_{cf2}}{F_{CF1}},$$

Pela equação 1, temos:

$$\boxed{\frac{F_{cf1}}{F_{cf2}} = \frac{R_1}{R_2}}$$

Ou seja:

As forças centrífugas que atuam nos corpos *1* e *2* que giram com <u>a mesma velocidade angular</u>, em circunferências cujos raios são diferentes, são diretamente proporcionais aos diâmetros das circunferências por ele percorridas.

Usando uma notação moderna, seja m a massa do corpo, T o período, R o raio da trajetória circular e F_c a força centrífuga e seja ϕ_1 uma função desconhecida, podemos escrever para a proposição 1 que:

$$\boxed{F_c = \phi_1(m,T)R}$$

PROPOSIÇÃO II

Quando dois móveis iguais, *1* e *2*, giram na mesma circunferência com velocidades constantes, porém diferentes, sendo v_1 a velocidade do móvel *1* e v_2 a velocidade do móvel *2* , teremos que :

$$\frac{F_{cf1}}{F_{cf2}} = \frac{v_1^2}{v_2^2}, \text{ onde consideramos } v_1 \prec v_2 .$$

Demonstração:

Considerando que:

- no mesmo lapso de tempo *t*, o móvel *1* percorra a distância BE (figura 9) e o móvel *2*, a distância BF , podemos escrever:

$$\frac{\overset{\frown}{BE}}{\overset{\frown}{BF}} = \frac{v_1.t}{v_2.t} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BE}}{\overset{\frown}{BF}} = \frac{v_1}{v_2},$$

- e também que:

$$\overset{\frown}{BE} = \overline{BC} \quad \text{e} \quad \overset{\frown}{BF} = \overline{BD},$$

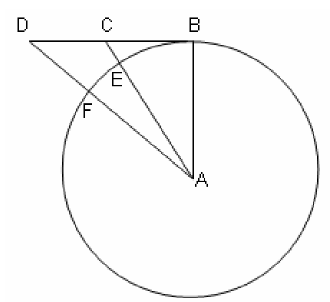


Figura 9

temos [vii]:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{CE}} \alpha \frac{\overline{DB}^2}{\overline{CB}^2}$$

[vii] Por um conhecido teorema da geometria: $(BD)^2 = (DF)(2AF)$ e $(BC)^2 = (CE)(2AE)$
Como: $AE = AF$
Então: $\dfrac{\overline{DF}}{\overline{CE}} = \dfrac{\overline{BD}^2}{\overline{BC}^2}$

Além disso, como:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\widehat{BF}}{\widehat{BE}} = \frac{v_2}{v_1},$$

então:

$$\boxed{\frac{F_{cf1}}{F_{cf2}} = \frac{v_1^{\,2}}{v_2^{\,2}}}$$

Numa notação moderna, seja *m* a massa do corpo, *R* o raio da trajetória circular, *v* a velocidade e ϕ_2 uma função desconhecida, podemos escrever para a proposição II que:

$$\boxed{F_c = \phi_2(m,R)v^2}$$

PROPOSIÇÃO III

Quando dois móveis iguais, *1* e *2*, se movem com a mesma velocidade, v_1 e v_2, respectivamente, em circunferências diferentes cujos raios são R_1 e R_2, sendo $R_1 < R_2$, teremos que:

$$\frac{F_{cf1}}{F_{cf2}} = \frac{R_2}{R_1}$$

Demonstração:

Considere que:

- $\widehat{DB} = \widehat{CF}$
- $\overline{AB} = R_2$
- $\overline{AC} = R_1$

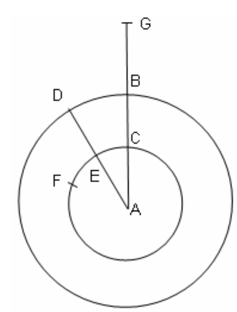


Figura 10

e que *AG* seja a terceira proporcional de *AC* e *AB*, ou seja :

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow (AB)^2 = (AC).(AG)$$

Imaginemos um terceiro móvel que possua a mesma velocidade angular que o móvel *2*, uma velocidade linear v_3 e que percorra a circunferência de raio R_1. Teremos, pela proposição I, para os corpos *2* e *3* que:

$$\frac{F_{cf2}}{F_{cf3}} = \frac{R_2}{R_1},$$

e, pela proposição II, para os corpos *1* e *3* que :

$$\frac{F_{cf1}}{F_{cf3}} = \frac{v_1^2}{v_3^2},$$

sendo $v_3 > v_1$, por hipótese.

Se considerarmos que para o mesmo intervalo de tempo o corpo:

- *1* percorra $\overset{\frown}{CE}$,
- *2* percorra $\overset{\frown}{BD}$,
- *3* percorra $\overset{\frown}{CF}$,

teremos que :

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{\overset{\frown}{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Desta forma, podemos escrever:

$$\frac{F_{cf1}}{F_{cf3}} \propto \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AC}.\overline{AG}}{\overline{AC}^2} \Rightarrow \frac{F_{cf1}}{F_{cf3}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AC}}.$$

Assim:

$$\frac{\dfrac{F_{cf1}}{F_{cf3}}}{\dfrac{F_{cf2}}{F_{cf3}}} \propto \frac{\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AC}}}{\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}} \Rightarrow \frac{F_{cf1}}{F_{cf2}} \propto \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{F_{cf1}}{F_{cf2}} \propto \frac{\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{F_{cf1}}{F_{cf2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \boxed{\frac{F_{cf1}}{F_{cf2}} = \frac{R_2}{R_1}}$$

Numa notação moderna, seja m a massa do corpo, R o raio da trajetória circular, v a velocidade do corpo, ϕ_3 uma função desconhecida e F_c a força centrífuga, podemos escrever para a proposição III que:

$$\boxed{F_C = \frac{\phi_3(m, v)}{R}}$$

PROPOSIÇÃO IV

Quando dois móveis iguais, *1* e *2,* descrevem circunferências diferentes cujos raios são R_1 e R_2, tal que $R_1 < R_2$, mas, que por hipótese, possuem a mesma força centrífuga, teremos que:

$$\frac{T_1}{T_2} \propto \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \ ,$$

Sendo T_1 e T_2 os períodos de revolução dos móveis *1* e *2*, sobre circunferências de raios R_1 e R_2, respectivamente.

Demonstração:

Considere que (figura 11):

- $\overline{AC} = R_1$
- $\overline{AB} = R_2$

e que :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \left(\overline{AD}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)\left(\overline{AC}\right).$$

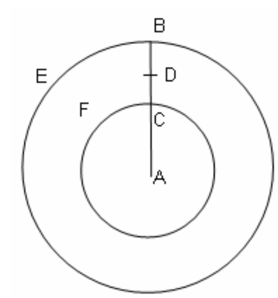


Figura 11

Imaginemos um terceiro móvel *3*, que percorra a circunferência de raio R_1, no mesmo intervalo de tempo que o móvel *2* percorra a circunferência de raio R_2 , ou seja, que a velocidade angular de *3* (ω_3) seja a mesma que a de *2* (ω_2).

Pela proposição I, teremos:

$$\frac{F_{cf\,2}}{F_{cf\,3}} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Como, por hipótese, temos: $F_{cf1} = F_{cf2}$, podemos escrever:

$$\frac{F_{cf\,1}}{F_{cf\,3}} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Sendo a velocidade de *3* maior que a velocidade de *1*, pela proposição II, teremos:

$$\frac{F_{cf\,1}}{F_{cf\,3}} = \frac{{v_1}^2}{{v_3}^2}.$$

Desta forma:

$$\frac{{v_1}^2}{{v_3}^2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \qquad \frac{{v_1}^2}{{v_3}^2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{{v_1}^2}{{v_3}^2} = \frac{\overline{AB}}{\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}}} \Rightarrow \frac{{v_1}^2}{{v_3}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2} \Rightarrow \boxed{\frac{v_1}{v_3} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}\ .}$$

Porém, o tempo de revolução numa mesma circunferência é inversamente proporcional à velocidade do corpo que a percorre, ou seja:

$$\frac{T_1}{T_3} \propto \frac{v_3}{v_1}$$

Assim:

$$\frac{T_1}{T_3} \propto \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{T_1}{T_3} \propto \frac{\sqrt{(\overline{AB}).(\overline{AC})}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_3^2} \propto \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Mas, por hipótese $\varpi_2 = \varpi_3$, logo, $T_3 = T_2$, assim:

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}}$$

Numa notação moderna, seja m a massa do corpo, T o período, R o raio da trajetória circular, ϕ_4 uma função desconhecida e F_c a força centrífuga, podemos escrever para a proposição IV que:

$$\boxed{T = \phi_3(m, F_c)\sqrt{R}}$$

PROPOSIÇÃO V

Quando um corpo descreve uma circunferência com uma velocidade adquirida caindo de uma altura igual à quarta parte do diâmetro, ele terá uma tendência a se afastar do centro igual à gravidade, isto é, ele puxará o fio que o prende na trajetória circular com a mesma força que se estivesse suspenso.

Demonstração:

Considere que (figura 12):

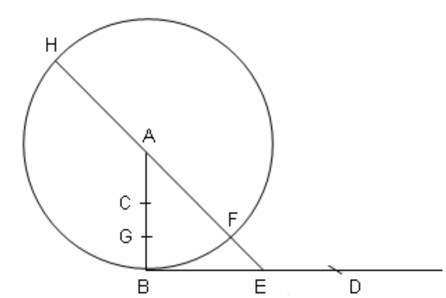


Figura 12

- *A* → centro do círculo
- *AB* → raio *R*
- *AB* = *BD*
- *CB* = *AB*/2
- O móvel que percorre a circunferência possua um movimento uniforme com uma velocidade: $v^2 = 2g\left(AB/2\right) \Rightarrow v^2 = 2g(CB)$.

Pelo teorema da velocidade média, no mesmo intervalo de tempo que o corpo cairia de uma altura *CB*, ele percorreria com velocidade adquirida na queda e com um movimento uniforme a distância *BD.*

Seja *BE* um pedaço bem pequeno da reta *BD*, podemos escrever que[viii]:

[viii] *BE* sendo infinitamente pequeno, o tempo necessário para percorrer *FE* com um movimento acelerado com aceleração *g*, é igual ao tempo necessário para o móvel percorrer *BF* , ou *BE,* com essa velocidade, a dizer: $\sqrt{2g(CB)}$.

Demonstração:

- O móvel tem, por hipótese, uma velocidade *v*, tal que ele possa percorrer uma distância *BD* com movimento uniforme no mesmo tempo que ele gastaria caindo de uma altura *CB*, ou seja: $t_{BD} = t_{CB.}$

$$\left(\frac{DB}{BE}\right)^2 = \frac{BC}{CG}$$

Para demonstrar tal hipótese, a dizer, que força centrífuga e peso são equivalentes, nas palavras de Huygens "que a tendência do móvel suspenso numa corda a cair é absolutamente igual à tendência do mesmo móvel, quando descreve uma circunferência, a se afastar do centro (...)", devemos demonstrar que:

$$CG = EF,$$

isto porque, a tendência se mostrará igual se distâncias iguais forem percorridas no mesmo intervalo de tempo.

Como:

$$(BE)^2 = (EF).(EH) \quad \text{ou} \quad \frac{EH}{EB} = \frac{EB}{EF},$$

então:

$$\frac{(EH)^2}{(EB)^2} = \frac{(EH)^2}{(EF).(EH)},$$

ou seja:

$$\left(\frac{HE}{EB}\right)^2 = \frac{EH}{EF}.$$

- O tempo gasto para o móvel percorrer *BE* com velocidade $\sqrt{2g(CB)}$ é igual ao tempo que ele gastaria para cair de uma altura $BC\left(\frac{BE}{BD}\right)^2$,que, por hipótese, chamamos *CG*.Ou seja:

  - $t_{BE} = \frac{BE}{\sqrt{2g(CB)}} \Rightarrow t_{BE} = \frac{BE}{\sqrt{Rg}}$
  - $CG = \frac{1}{2}gt_{BE}^2 \Rightarrow CG = \frac{1}{2}g\frac{BE^2}{Rg} = \frac{BE^2}{2R} = \frac{BE^2}{2BD} = \frac{BE^2}{BD^2}.\frac{BD}{2} \Rightarrow CG = \left(\frac{BE}{BD}\right)^2.BC$

Podemos fazer então:

$$\frac{\frac{(HE)^2}{4}}{(EB)^2} = \frac{\frac{EH}{4}}{EF}.$$

Considerando $HE \approx HF$, ficaremos com:

$$\frac{(AF)^2}{(EB)^2} = \frac{BC}{EF}.$$

Além disso, como:

$$\frac{(AF)^2}{(EB)^2} = \frac{(BD)^2}{(EB)^2},$$

concluímos que:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{(BD)^2}{(EB)^2}.$$

Substituindo $(BD)^2$ por $\frac{(BE)^2 . \frac{BC}{CG}}{(BE)^2}$, teremos:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{(BE)^2 . \frac{BC}{CG}}{(BE)^2} \Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{BC}{CG}.$$

Logo:

$$\boxed{CG = EF}$$

As três primeiras proposições podem, então, serem enunciadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} F = \phi_1(m,T).R \ \ (\textit{equação 1}) \\ F = \phi_2(m,R).v^2 \ (\textit{equação 2}) \\ F = \phi_3\dfrac{(m,v)}{R} \quad (\textit{equação 3}) \end{cases}$$

Igualando a equação 1 com a equação 2, temos: $\phi_1(m,T).R$ = $\phi_2(m,R).v^2$ *(equação 4)*, ou seja: $\phi_1(m,T) = \frac{v^2}{R}\phi_2(m,R)$ $\Rightarrow$ $\phi_1(m,T) = \frac{4\pi^2 R}{T^2}\phi_2(m,R)$, pois: $v = \frac{2\pi R}{T}$. Logo: $\phi_2(m,R) \equiv \frac{\phi(m)}{R}$ (*equação 5*).

Igualando a equação 2 com a equação 3, temos: $\phi_2(m,R).v^2$ = $\phi_3\frac{(m,v)}{R}$. Pela equação 5: $\frac{\phi(m)}{R}.v^2 = \phi_3\frac{(m,v)}{R}$, assim: $\phi_3(m,v) = \phi(m).v^2$ (*equação 6*).

Substituindo a equação 4 na equação 1:

$$F = \frac{v^2}{R}\phi_2(m,R).R \Rightarrow F = v^2\frac{\phi(m)}{R} \Rightarrow \boxed{F = \phi(m)\frac{v^2}{R}}$$

Eduard Jan Diksterhuis, parafraseou as idéias desenvolvidas por Huygens no *De Vi Centrifuga* de uma forma moderna e muito simples: imaginou uma grande roda horizontal girando sobre um eixo que passa pelo centro (figura13). Um observador que está fixo na extremidade desta roda segura um corpo por meio de uma corda, e assim a partícula descreve uma circunferência de raio *R*. Suponha, agora, que o observador e a partícula num dado momento alcance o ponto *B* e tenha uma velocidade linear *V*. Se de *B* a partícula puder se mover livremente ao longo da tangente, depois de Δt, ela alcançaria o ponto *D* da tangente situado a:

$$BD = V.\ \Delta t$$

Na realidade, o observador e a partícula alcançam o ponto *C*, situado ao logo do arco *BC*:

$$\text{Arco } BC = V.\ \Delta t$$

Se solta, a partícula estaria do observador a uma distância *CD*. Fazendo *CD* = *x*, teremos:

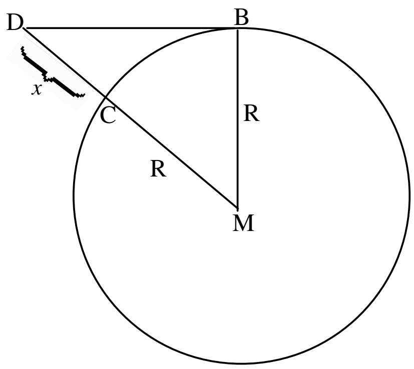


Figura 13

$$(x+R)^2 = R^2 + (v.\Delta t)^2$$

$$x = \sqrt{R^2 + (v.\Delta t)^2} - R$$

$$x = R\sqrt{1 + \left(\frac{v.\Delta t}{R}\right)^2} - R$$

$$x = R\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v.\Delta t}{R}\right)^2\right] - R \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{R}\right)(\Delta t)^2}$$

Comparando a experiência do observador numa roda com a de uma pessoa que segura uma partícula com uma corda na superfície da Terra, vemos que a partícula se distanciaria se solta da pessoa, ao longo da reta passando pelo centro, em Δt segundos uma distância vertical dada por: $\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$, onde, "g" é uma gravidade genérica.

Resumindo o raciocínio que Huygens tomou como princípio, podemos dizer que o que acontece com uma pessoa parada na superfície da Terra é similar ao observador na extremidade da roda, citada acima, que segura um corpo por meio de uma corda. Esse observador pode afirmar que atua no corpo uma força centrífuga dada pela equação mv^2/R, dirigida para fora, que é neutralizada pela tensão na corda feita pela partícula em direção ao centro.

Mesmo influenciado e limitado pelas idéias de Descartes, principalmente a que se refere à tendência centrífuga, Huygens deu um salto à frente do filósofo ao afirmar que o peso de um corpo e a força centrífuga que ele sofre, devido a rotação da Terra, são equivalentes. A importância desse passo para a mecânica é que ficou claro, a partir de então, que num movimento circular mesmo sendo uniforme, requer a ação constante de uma força. Derruba-se o mito que uma partícula, uma vez colocada em movimento circular e livre de todas as influências externas, perseveraria nesse movimento.

4. AS LEIS DA MECÂNICA

4.1. Estudo do Movimento Circular

Newton codificou os princípios da mecânica em um livro clássico, *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, geralmente citado como *Principia*), originalmente publicado em latim em 1687. Uma grande contribuição de Newton, neste livro, foi o entendimento de que o movimento circular requer uma força centrípeta e não, como quis Huygens, uma tendência centrífuga. Entretanto, em seus escritos anteriores ao *Principia,* parece não haver evidência de que Newton tivesse chegado ao conceito de força centrípeta, embora, muitos historiadores tenham uma opinião contrária. Seu tratamento inicial do movimento circular parece indicar que ele pensou em termos de um *conatus* (tendência) centrífugo. Fato foi, que Newton apresentou um problema a Hooke que consistia em achar a trajetória de um corpo deixado cair do alto de uma torre, o qual continuaria a cair atraído pelo centro da Terra (considerada permeável) com uma força central constante. A primeira solução achada por Newton, em 28 de Novembro de 1679, estava errada. A segunda, escrita em 13 de Dezembro de 1679, aparentemente, está correta e, baseados nesta solução, alguns historiadores levantam a hipótese de que Newton já soubesse desenhar órbitas de problemas dinâmicos desde 1660 [12].

A primeira discussão de Newton, sobre movimento circular, é encontrada no axioma 20 do *Waste Book* [39]. O caso considerado é o de uma bola que se move no interior de uma esfera oca (figura 14). De acordo com o princípio da inércia, há uma tendência constante da bola em continuar a se mover ao longo da tangente ao círculo, em cada ponto considerado. O fato é que a bola se move em círculo devido a uma força constante que a superfície faz na bola. Essa força só aparece, quando a bola pressiona a superfície [27].

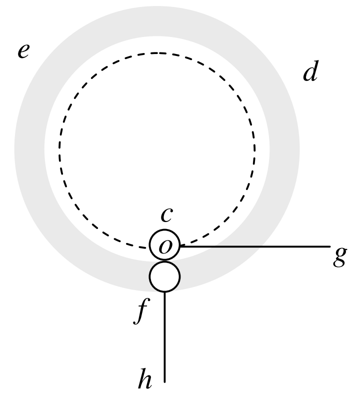


Figura 14

Um corpo cilíndrico *def* é o responsável por fazer um corpo se mover numa trajetória circular. Quando *o* está em *c*, ele tende a se mover ao longo da linha *cg*, devido a sua propriedade inercial e, com isso, aplica uma pressão no corpo cilíndrico. Agora, suponhamos que este corpo seja formado de vários outros como *f*. Movendo-se ao longo do círculo, o corpo *o* pressiona cada um deles e Newton imaginou que *o* transmite todo o seu movimento para partículas como *f*, assim, seu movimento ao longo de *fh* constitui uma medida da força total do corpo *o* ao se afastar do centro no curso de uma revolução.

Em, provavelmente 1664, Newton acha a expressão para o *conatus*. Para calculá-lo, Newton supõe um corpo movendo-se dentro de um círculo. Este corpo colide com o círculo, percorrendo um quadrado inscrito *abcd*.

Pela figura 15, podemos tirar que:

- ✓ triângulo *abd* ~ triângulo *afb*
- ✓ *2 fa* = *bd* = diâmetro do círculo
- ✓ "força" do movimento (*mv*) // *ab*
- ✓ "pressão" do corpo sobre a tangente ao círculo // $bd \perp fg$

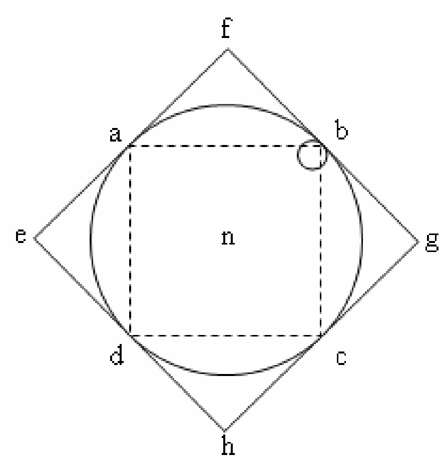


Figura 15

Logo, podemos escrever que:

$$\frac{2fa}{ab} = \frac{ab}{fa} = \frac{\text{"pressão" de } b \text{ em } fg}{\text{"força" do movimento}}$$

Assim:

$$\frac{\text{"pressão" de } b \text{ em } fg}{\text{"força" do movimento}} = \frac{\text{lado } (ab)}{\text{raio } (fa)}$$

Após as 4 colisões, respectivamente em *b, c, d* e *a*:

$$\frac{\text{"pressão" de } b \text{ em } fg}{\text{"força" do movimento}} = \frac{\text{perímetro}}{\text{raio } (nb)}$$

No limite em que o número de lados tende ao infinito, o polígono aproxima-se do próprio círculo circunscrito. Desta forma concluiu que:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{"pressão" da esfera sobre a tangente}\\ \text{ao círculo em um percurso completo}\end{array}}{\text{"força" do movimento}} = \frac{\text{perímetro do círculo}}{\text{raio do círculo}}$$

Em notação moderna, isso ficaria:

$$\frac{\Delta(mv)}{mv} = \frac{2\pi R}{R}$$

De fato, se *T* for o período, *R* o raio e *v*, a velocidade em um movimento circular uniforme e, se dividirmos a "força" total do movimento, pelo tempo gasto em uma revolução, teremos:

$$\frac{\Delta(mv)}{T} = \frac{2\pi R}{R}.\frac{mv}{T} \text{ , onde: } T = \frac{2\pi R}{v} \text{ . Logo: } \boxed{\frac{\Delta(mv)}{T} = m.\frac{v^2}{R}}$$

O primeiro lado da igualdade acima pode ser considerado como o que se chama, hoje, de força centrífuga. I.Bernard Cohen e Derek Whiteside argumentam [40] que Newton pensava ainda em termos de um efeito centrífugo; esse argumento é reforçado pela forma como ele iniciou sua análise geométrica, pois, ao imaginar uma esfera colidindo com um círculo ele imaginou esse impacto ocorrendo de dentro para fora [12].

Um tratamento mais sofisticado foi feito em 1669. Esse tratamento é similar ao de Huygens, embora, Newton o tivesse feito independentemente.

Considere a Fig. 16. No tempo infinitesimal *t* em que o corpo percorre o arco $\widehat{AD}$, com velocidade uniforme *v*, a "tendência centrífuga" faz com que o corpo se mova $\overline{BD}$, radialmente. Em um tempo igual ao período (*T*), o corpo percorre a circunferência (C = 2πr), com velocidade uniforme *v*, logo: $\frac{\overline{AB}}{C} = \frac{t}{T}$. Newton coloca o problema de achar a distância *x* tal que: $\frac{\overline{BD}}{x} = \frac{t^2}{T^2} = \frac{(\overline{AB})^2}{C^2}$. Da geometria do círculo, podemos escrever que: $\frac{(\overline{AB})^2}{C^2} \approx \frac{(\overline{BD})\times(\overline{DE})}{C^2} \equiv \frac{\overline{BD}}{\frac{C^2}{(\overline{DE})}} \Rightarrow x \equiv \frac{C^2}{(\overline{DE})}$. É possível tirar desse resultado

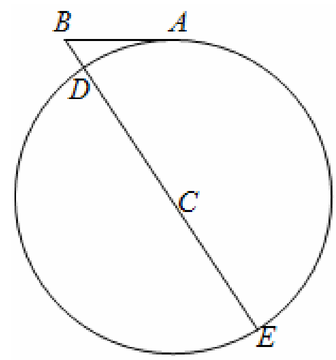


Figura 16

uma conseqüência, que leva a uma interpretação moderna do cálculo de Newton: $x \equiv \frac{C^2}{(\overline{DE})} \approx \frac{(vT)^2}{2r} = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{r}\right)T^2 \Rightarrow \overline{BD} \approx x \times \left(\frac{t}{T}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{r}\right)t^2$; assim, a distância infinitesimal $\overline{BD}$ é percorrida com aceleração (instantaneamente) constante $\frac{v^2}{r}$: em cada instante tomado isoladamente, o *conatus* é análogo a uma "força gravitacional".

Newton acrescenta um corolário. Se tivermos, por exemplo, dois corpos 1 e 2, sendo T_1 o período de revolução do corpo 1 e T_2, o período de revolução do corpo 2 e R_1, o raio da órbita descrita pelo corpo 1 e R_2, o raio da órbita descrita pelo corpo 2, teremos pela 3ª Lei de Kepler que:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \Rightarrow T_1 = T_2 . \sqrt{\frac{R_1^3}{R_2^3}}$$

Substituindo T_2 por $\frac{2\pi R_2}{v_2}$, onde v_2 é a velocidade do corpo 2, teremos:

$$T_1 = \frac{2\pi R_2}{v_2} . \sqrt{\frac{R_1^3}{R_2^3}} \Rightarrow v_2 = \frac{2\pi R_2}{T_1} . \sqrt{\frac{R_1^3}{R_2^3}}$$

Usando, então a equação encontrada da força centrífuga $\left(F=\frac{mv^2}{R}\right)$, encontramos:

$$\sqrt{\frac{FR_2}{m}}=\frac{2\pi R_2}{T_1}.\sqrt{\frac{R_1^3}{R_2^3}}\Rightarrow\frac{FR_2}{m}=\frac{4\pi^2R_2^2}{T_1^2}.\frac{R_1^3}{R_2^3}\Rightarrow F=\frac{m}{R_2^2}.\left(\frac{4\pi^2R_1^3}{T_1^2}\right),\text{ou seja :}$$

$$\boxed{F=\frac{m}{R_2^2}.(\text{constante})}$$

Conclui-se, dessa forma, que a tendência de se afastar do centro diminui em proporção inversa ao quadrado do raio da órbita descrita pelo corpo. Ele aplica esse corolário à Lua. Isso tem sido invocado como “prova” de que Newton descobriu a gravitação nessa época. Porém, isso não é apresentado como uma lei de atração universal.

4.2. A Força Centrípeta

Newton interrompeu, em parte, seus estudos da mecânica e passou a dedicar sua atenção ao estudo da óptica e da matemática. Somente em 1679, após receber uma carta de Robert Hooke que o convidou a comentar sobre um método de sua autoria para descrever movimentos curvilíneos, Newton se voltou para tais questões [39].

Hooke foi uma figura importantíssima na construção da maior obra de Newton, pois, embora Newton tivesse já uma cabeça diferenciada de tantos outros, ele estava analisando o problema do movimento curvilíneo, partindo do mesmo ponto de que Descartes e Huygens partiram. Hooke funcionou, neste momento histórico, como o pescoço que guia a cabeça de Newton fazendo com que ele olhasse o mesmo problema sob um novo ângulo.

Hooke foi o homem que inverteu o problema do movimento circular, colocando a questão de uma forma que o conceito de força centrípeta pudesse emergir. Ele elaborou o movimento de um corpo que é atraído para um centro de “forças” em duas componentes:

1º) a componente inercial que representa o movimento que o corpo teria na ausência da atração e cuja direção seria a da velocidade instantânea no ponto considerado, ou seja, tangente à trajetória.

2º) a componente em direção ao centro de atração.

A figura 17 ilustra a aplicação do método de Hooke, feita por Newton, no *Principia*, para demonstrar a Lei das áreas de Kepler.

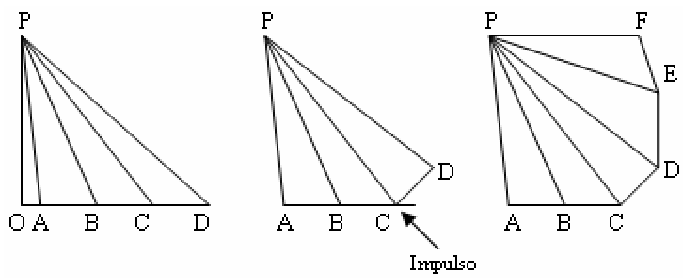


Figura 17

No primeiro desenho da figura, o corpo se move com velocidade constante. Assim, as distâncias *AB*, *BC* e *CD* são iguais para o mesmo intervalo de tempo e desta forma, temos que os triângulos *PAB, PBC* e *PCD* têm a mesma área. Se o corpo receber um "soco" em *C*, como ilustra o desenho no centro da figura, na direção de *P*, de forma que dure um tempo muito pequeno, o corpo continuará se movendo em linha reta, porém, numa outra direção e chegará em *D* no mesmo intervalo de tempo considerado no desenho anterior. As áreas dos triângulos, nesse desenho, continuam a ser iguais. Se o corpo continuar a receber esses "impulsos instantâneos", sua trajetória será uma poligonal e, no limite, em que o intervalo de tempo entre os "impulsos" sucessivos for muito pequeno, a força se torna contínua, sempre direcionada para o ponto *P* e o polígono se torna uma curva.

Além disso, Hooke pergunta a Newton qual seria a trajetória de um corpo que fosse atraído para um centro de "forças" com um "poder" de variar inversamente com o quadrado da distância entre o corpo e o centro considerado. Foi somente em 1684, quando Newton recebeu a visita de Edmund Halley que foi colocar o problema, novamente a ele, que Newton respondeu a Halley: uma elipse. Halley pediu que o demonstrasse, porém, Newton não achou os cálculos que, segundo ele, já havia feito sobre este problema. A pedido de Halley, Newton os refez e acabou publicando o *Principia*. A história concorda, de uma forma geral, que, sem Halley, que não somente encorajou Newton como financiou a publicação, o P*rincipia* não teria sido escrito.

O livro de Newton inicia-se com uma série de definições onde são introduzidos conceitos como massa (definição 1), quantidade de movimento (definição 2) e força (definição 4).

Na definição 4, ele define Força Impressa [41]:

> *Força Impressa é a ação exercida em um corpo para mudar o seu estado, seja de repouso, seja de movimento retilíneo uniforme para frente.*

Após esta definição, ele declara que há vários tipos de força impressa, tais como percussão, pressão ou força centrípeta. Newton parece não ter sentido necessidade de comentar os dois primeiros tipos de força impressa (pressão e percussão), porém o caso foi bem diferente com a força centrípeta. Para esta, ele criou a definição 5 [40]:

> *Força centrípeta é a força pela qual os corpos são levados para todos os lados, são impelidos ou tendem, de alguma forma, para algum ponto como o centro.*

Na aplicação que se segue à definição 5, notamos que a força centrípeta difere das outras duas num notável aspecto: ela pode não ser um resultado de uma ação física observável, ou seja, não há necessidade de um contato de um corpo com o outro para garantir sua existência.

Antes de continuar a análise de Newton, cabe mencionar que o termo "Força Centrípeta" foi inventado por Newton tendo explicitamente como referência o termo oposto "Força Centrífuga", inventado por Huygens. Os termos, por si só,sugerem a idéia que neles está embutida e a forma como cada físico analisou o movimento circular. Huygens entendia que um corpo, ao descrever uma trajetória circular, "fugia" do centro e Newton, aparentemente, iluminado pela idéia de Hooke, entendeu que um corpo só descreve uma trajetória curva se uma força atuar neste corpo continuamente, puxando-o para o centro, desviando de sua trajetória retilínea que ele teria naturalmente devido a sua inércia.

A questão colocada por Hooke serviu para livrar Newton da idéia que limitou seus antecessores, ou seja, a de que movimento circular requer um equilíbrio dinâmico[ix]. Livre deste conceito, Newton generalizou uma idéia que já se pode reconhecer no trabalho de Huygens: a força centrípeta equivale, em cada instante tomado isoladamente, a uma força gravitacional uniforme, ou seja, o movimento circular uniforme é, em cada instante tomado isoladamente, equivalente ao movimento retilíneo uniformemente variado.

Voltando à análise de Newton de força centrípeta, vemos uma nova descrição do movimento circular. Romper com as antigas idéias não passou sem críticas. Leibniz e Huygens rejeitaram a noção de força centrípeta, pois, como tantos outros, pensavam que a palavra força implicava diretamente a idéia de corpos em contato [40].

Para exemplificar a força centrípeta, Newton considerou três forças diferentes:

1º) a força da gravidade

2º) a força magnética

3º) a força, "o que quer que seja que ela possa ser" pela qual os planetas são continuamente retirados de seus movimentos retilíneos.

Mas, cumpre observar que ele usou a expressão "força centrípeta"' para designar tudo o que hoje se chama força central.

[ix] Uma tese mantida por alguns historiadores é que Newton foi influenciado pela "mecânica celeste" de Giovanni Alfonso Borelli. Borelli fez uma analogia com um corpo flutuando em um fluido e um satélite imerso na matéria estelar: um corpo só flutua na água se o empuxo e peso forem iguais, e emerge ou submerge se forem diferentes. Da mesma forma, o satélite seria sujeito a dois movimentos: um devido à tendência centrífuga (que se origina no movimento de rotação anual do planeta) e outro um movimento em direção ao Sol ou a um outro planeta. Assim, a ação conjunta da *força centrífuga* e da atração descreve a trajetória elíptica do planeta..

Mais adiante, ele enunciou as três Leis do Movimento, tão conhecidas e tão mencionadas em qualquer livro didático de física. Elas foram enunciadas por Newton da seguinte forma [42]:

> **Lei 1**. *Todo corpo persevera em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme para frente, exceto quando ele for compelido a mudar seu estado por forças impressas.*
>
> **Lei 2.** *Uma mudança no movimento é proporcional à força motriz impressa e se dá ao longo da linha reta na qual essa força é impressa.*
>
> **Lei 3.** *A uma ação corresponde sempre uma reação igual e oposta; em outras palavras, as ações de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e sempre opostas em direções.*

4.3. O Formalismo do Principia

Essencial ao método de Newton é a consideração de que, em um movimento não retilíneo, a força é medida pela "queda" da tangente à curva, por uma linha passando pelo centro do círculo osculador, no caso geral, uma linha da tangente ao centro de atração. Aqui, apresento a estrutura do formalismo do *Principia* sem as demonstrações.

A estrutura do Principia pode ser assim resumida:

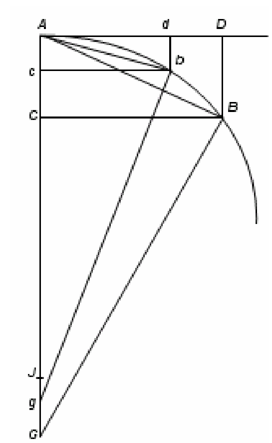


Figura 18

1. No caso do círculo osculador [43] da figura 18, a "queda" é medida pelo segmento BD, que pode ter qualquer inclinação. Newton prova que $BD \propto \frac{(AB)^2}{2R}$, onde R é o raio do círculo osculador. Como corolário $BD \propto \frac{(AB)^2}{2R} = \frac{(v\Delta T)^2}{2R}$. Na figura, o centro do círculo osculador está na metade de AG (ou AJ, no limite). Então, a

flecha que liga o centro do círculo ao meio de AB bissecta AB e $\overline{AB}$ e dessa flecha específica que Newton chama de "flecha" ou "*sagitta*"(em latim). Essa "*sagitta*", no limite, é aproximadamente $\overline{BD}$.

$$\boxed{flexa \approx \overline{BD} = \frac{(v.\Delta t)^2}{2R} = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{R}\right).\Delta t^2}$$

Essa expressão mostra que se aplicarmos a relação galileana $S = \frac{1}{2}"g"t^2$ para o início do movimento, concluímos que em um movimento circular uniforme a aceleração radial é constante e dada pela equação $\frac{v^2}{R}$.

2. A lei das áreas é usada para calcular o tempo Δt [44]. Newton demonstra um equivalente do Método de Hooke. Na figura 19, as áreas SAB, SBC, SBc, SCD, SCE ... são percorridas ao mesmo tempo.

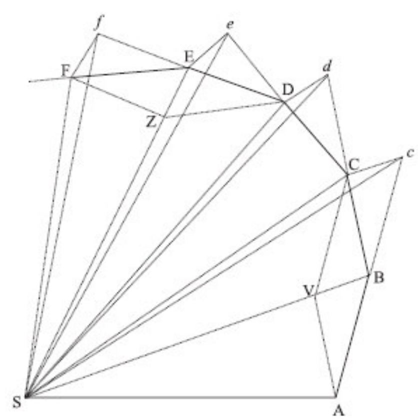


Figura 19

3. A força centrípeta, por definição é proporcional a $\overline{BV}$ da figura 19. Ela é a diagonal do losango $ABCV$ e bissecta a diagonal. Então [12,45]:
   - flecha $BV \propto$ força central e, também:
   - flecha $\propto \Delta t^2$. Logo, flexa $\propto$ (força central) $\times \Delta t^2$, logo:
   - força central $\propto \dfrac{flexa}{(\Delta t)^2}$.
4. Newton mede, geometricamente, a força central [45]. Na figura 20, a força central é *QR*, *S* é o centro de forças. *P* é a posição do corpo.

YZ é a tangente em *P*. $RQ \,//\, PS$; $QT \perp PS$. Como $\Delta t \propto$ área $SPQ = SP \times QT$; flexa do arco duplo do arco $PQ = RQ$. Pelo teorema acima $(\text{força})^{-1} \propto \dfrac{(\Delta t)^2}{flexa}$. Logo:

$$(\text{força})^{-1} \propto \frac{(SP)^2 \times (QT)^2}{QR}.$$

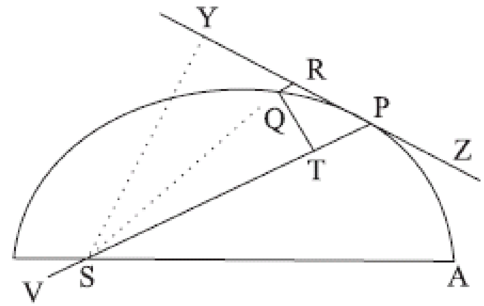


Figura 20

Newton tem, agora, a ferramenta para resolver os dois problemas :

- O Problema Direto
- O Problema Inverso

O problema direto consiste em achar a lei da força centrípeta em direção ao foco da elipse para um corpo que revolva em uma elipse [12,46].

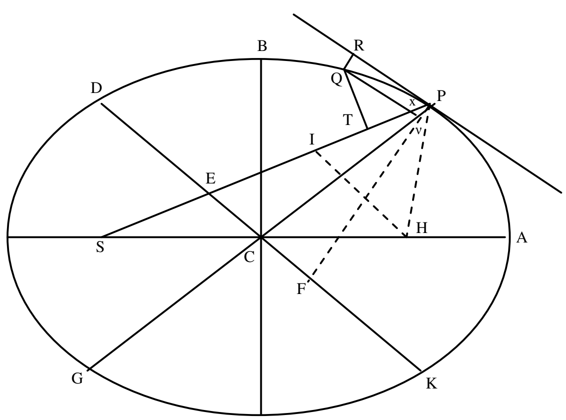


Figura 21 - *S* e *H* são os focos; *P*, a posição do corpo; *RPZ*, a tangente em *P*. Traçar $Qv \,//\, ZPR \,//\, DCK \,//\, HI$, $QT \perp PS$, $PF \perp DCK$; seja x o encontro de *Qv* com *PS* ; traçar $QR \,//\, Px$; temos: $Px = QR$. Como $HI \,//\, DCK$ e $CS = CH$, segue-se: $SE = EI$.

Newton demonstra, na figura 21, que $L \times (QR) = (QT)^2$, partindo de propriedades da elipse[x]. Se multiplicarmos ambos os lados por $\dfrac{(SP)^2}{QR}$,

[x] (1) $S\hat{P}R = H\hat{P}Z \Rightarrow S\hat{P}R = P\hat{I}H = H\hat{P}Z = P\hat{H}I \Rightarrow$ O triângulo PIH é isósceles.

(2) *Latus Rectum* (L) é a ordenada que passa pelo foco: $L = 2\dfrac{(BC)^2}{AC}$.

(3) Por definição da elipse: $PS+PH = 2CA$.

(4) $2CA = PS+PH = PI+IE+ES+PH = (PI+PH)+(EI+ES) = 2\text{x}\,(PI+EI) = 2PE \Rightarrow PE = CA$.

teremos: $L \times (SP)^2 = \dfrac{(SP)^2 \times (QT)^2}{QR}$. Mas, como já visto, (força central)$^{-1}$ $\propto \dfrac{(SP)^2 \times (QT)^2}{QR}$.Logo, (força central)$^{-1}$ = $L \times (SP)^2$, CQD.

O problema inverso baseia-se na suposição de uma força centrípeta de qualquer tipo e pede-se achar as trajetórias nas quais os corpos se moverão e, também, os tempos de seus movimentos nas trajetórias assim achadas.

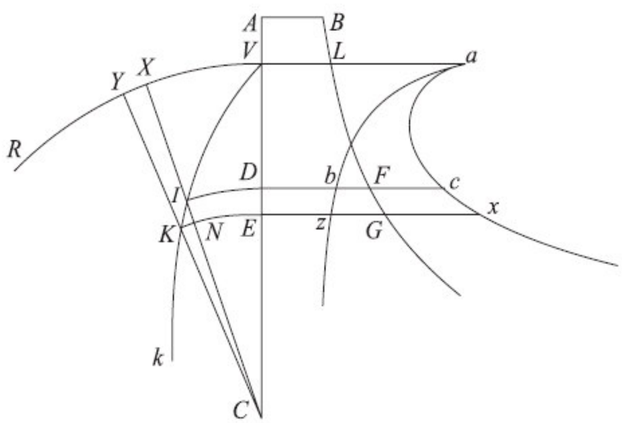


Figura 22 - CEDV é a trajetória retilínea. As abscissas AB, DF, EG são as forças centrais em A,D e E. VIKk é a trajetória não retilínea. C é o centro de forças; CI=CD e CK=CN=CE, logo DE=IN. DI e ENK são arcos de circulo. VXYR é o movimento circular do raio vetor: CX=CY

Newton indica como determinar *I* sobre a trajetória [12,47]: dado *t* , a área *VDba* é dada; portanto fica dada, também, a distância ao centro, *CD=CI. A área VDca* é também, dada pelo tempo, logo ficam dados o setor *VCX* (igual a ela) e o ângulo VCX. Dado o ângulo *CI*, o ponto *I* fica determinado.

4.4. A Segunda Lei de Newton

Newton não parte da definição direta de força, que em notação moderna, pode ser escrita como **F** =Δ(m**v**), para resolver os problemas direto e inverso. No entanto, ao dizer que $F \propto G$, numa aplicação explícita ao Teorema de Galileu, pressupõe a presença do tempo, na definição de aceleração. Por que Newton não menciona o tempo no enunciado da Segunda Lei?

(5) $\dfrac{Gv \times Pv}{Qv^2} = \dfrac{PC^2}{CD^2}$

(6) $\dfrac{CA}{PF} = \dfrac{CD}{CB}$

Bernard Cohen [48] defende que a segunda lei de Newton, como enunciada no *Principia* se aplica somente para forças impulsivas, e justifica o fato de Newton ter separado a primeira da segunda lei do movimento. Nós somente vemos o *efeito* de forças contínuas atuando e a segunda parte da primeira lei é necessária para determinar que esta ação está acontecendo. Isto não é necessário para forças impressas, tais como as de pressão ou de percussão, sobre as quais versa a segunda lei. Quando elas atuam vemos causa e efeito simultaneamente. Cohen, assim, defende que a primeira e a segunda lei lidam com forças motivas impressas de tipos diferentes: uma contínua e a outra um impulso instantâneo e que, a força contínua, analisada na primeira lei, não pode ser comparada a um impulso e nem mesmo a uma soma de vários "socos" que, supostamente, seriam separados por um intervalo de tempo extremamente pequeno.

Se entendermos que o conceito de força contínua é primário e o conceito de impulso é derivado dessa força, a primeira lei parece ser apenas um caso especial da segunda lei. Porém, tudo indica que o conceito de impulso, para Newton, foi considerado primário e, desta forma, a primeira lei seria um caso especial da segunda lei somente para forças instantâneas e não para forças contínuas. Deste modo, a primeira lei seria uma declaração qualitativa da nova física de Newton, e a segunda lei versaria sobre a quantidade da mudança de movimento produzida devido a uma força impulsiva. Assim, a primeira lei não pode ser considerada, como muitos acreditam, uma conseqüência da segunda.

Newton, certamente, como aponta Cohen, fazia a distinção desses dois tipos de força. O parágrafo que se segue à primeira lei refere-se somente a exemplos de forças contínuas e, curiosamente, nenhum exemplo é mencionado para um corpo inicialmente em repouso. São dados sucessivos exemplos onde o corpo está em movimento e não pode perseverar com este mesmo movimento devido à presença de uma força externa.

Newton entendeu que forças contínuas produzem acelerações continuas e que, sendo a força constante, a aceleração será proporcional a essa força. Mas não é óbvio quando as forças contínuas estão atuando. Ela não é vista atuar como vemos as forças impulsivas. Se uma bola de tênis colidir com a raquete, por exemplo, vemos a colisão e sua imediata conseqüência: a mudança na quantidade de movimento. O mesmo não ocorre com as forças contínuas, tais como a gravidade ou uma força de atração ou repulsão magnética. Nós não vemos o Sol atuando nos planetas da mesma maneira que vemos uma bola de tênis se chocando com a raquete. Neste sentido, a primeira lei contém o teste para verificarmos se existe ou não uma força contínua atuando: basta verificarmos se o corpo está sofrendo uma mudança em seu *estado* (de repouso ou movimento retilíneo e uniforme). Cabe uma outra observação feita por Cohen: o impulso pode ser medido pela quantidade de movimento que ele produz, sendo dado pela equação: $\vec{I} = k\Delta\left(m\vec{v}\right)$, sendo esta equação válida para qualquer valor atribuído a massa e ao impulso. O caso se torna completamente diferente para o caso de forças contínuas. Suponha uma força centrípeta, por exemplo, do tipo gravitacional. A ação observada representada por $\Delta m\vec{v}$ não depende somente da massa do corpo e da velocidade, mas também da distância entre os dois corpos envolvidos e mesmo que, essa distância seja especificada, ainda assim, precisaremos saber o tempo de duração da ação dessa força. Então, não se pode discutir a força centrípeta da mesma forma que discutimos forças instantâneas; outros fatores são necessários para determiná-la.

Uma vez definida força centrípeta, Newton enuncia três características dessa força:

- Quantidade absoluta (definição 6)
- Quantidade acelerativa (definição 7)
- Quantidade motiva (definição 8)

Cada uma delas representa uma medida da força centrípeta. A quantidade acelerativa da força centrípeta é “proporcional a velocidade que ela gera num determinado tempo", assim há uma força motiva que é "proporcional ao movimento que é gerado num determinado tempo", ou seja: $F_{motiva} \propto \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}$. Em ambas medidas, precisamos levar em consideração o tempo que, como enfatiza Cohen, não é o caso das forças impulsivas apresentadas na segunda lei. Na definição de força motiva reconhecemos o que hoje vemos escritos em tantos livros de física como a segunda lei de Newton : $\vec{F} = m\vec{a}$.

De acordo com a física de Newton, sempre que houver uma mudança na quantidade de movimento, há uma força. Se essa mudança é sempre direcionada a um determinado ponto, a força é chamada de central ou centrípeta. Quando é dito que a medida de tal força num movimento central é a mudança do momento num determinado tempo esta medida é chamada de quantidade motiva da força centrípeta. Esta "força" parece ter uma realidade física independente e, embora, Newton ao discutir as definições, não fale explicitamente no tempo, ele menciona o peso. Ao dizer que o "peso é tanto maior quanto maior for o corpo" e se ele pode ser considerado como uma força motiva na definição 8, segue que a velocidade, gerada num dado tempo, é independente do corpo, ou seja, do peso. Isto abre a possibilidade de comparar a "força motiva" de queda livre com a força estática do peso. Escrevendo $\vec{W} = M\vec{g}$ (onde W representa o peso de um corpo, m a massa e g a aceleração da gravidade), nesse contexto, significa que a aceleração, produzida por uma força centrípeta tipo peso, varia. Como a massa do corpo é constante, a força-peso será sempre proporcional à aceleração produzida. Quando Newton mostra que a queda dos corpos na superfície da Terra é equivalente à queda da Lua em direção a Terra e a queda dos planetas em direção ao Sol, a segunda lei é interpretada como sendo aplicada, por extensão, a todas as forças contínuas da natureza. Porém, há um grande detalhe: não há, nesses casos, uma "força" independente como há para os corpos que caem na superfície da Terra. Nós não podemos parar a Lua e os planetas para "pesá-los". Cohen conclui, assim, que qualquer forma da segunda lei é basicamente um tipo de definição.

Bruce Porciau [49] acredita que Cohen tenha se equivocado na interpretação da Segunda Lei e defende que a ela se aplica tanto para forças contínuas quanto para impulsivas e que assim pensava Newton. Porciau questiona o significado das expressões "mudança no movimento" e "força motiva impressa", expressas na Segunda Lei. A "força motiva impressa" é tomada por muitos como sendo o impulso mas não é oferecida uma forma de se medir esse impulso. Assim fez Cohen que interpretou a Segunda Lei não como uma lei física mas um tipo de definição. Será, também, que a "mudança de movimento" pode ser interpretada como uma "mudança na quantidade de movimento"? Newton teve muitas oportunidades de reescrever a Segunda Lei, Porciau lista quatorze delas e questiona porque Newton não escreveu "quantidade de movimento" e sim "movimento". Não podemos acreditar, diz Porciau, que Newton optou por abreviar o termo na Segunda Lei. No *Principia*, Newton define o movimento absoluto ou relativo como uma mudança na posição absoluta ou relativa, respectivamente, e se após isso, ele escreve que "a mudança de movimento é proporcional à força motiva impressa..." é muito mais provável que Newton esteja se referindo a uma mudança de posição do que uma mudança na velocidade.

Num tom altamente irônico Porciau critica Cohen por ele ter concluído que, pelo fato de Newton não mencionar o intervalo de tempo em que a "mudança de movimento" ocorre, Newton se referia somente a forças impulsivas. Então, diz Porciau, se um fazendeiro disser que "o comprimento do milho varie conforme uma média de temperatura" não podemos levar em consideração o tempo, pois, o fazendeiro não o menciona. É claro que ao dizer "média de temperatura", por definição, o intervalo de tempo está incluído. O mesmo, então, ocorre com a Segunda Lei: "Força motiva impressa" depende de um intervalo de tempo. Assim pensa Porciau.

Suponha um corpo em repouso em P, diz Porciau numa leitura pessoal da Segunda Lei. O corpo mover-se-á para um ponto G, num dado tempo *t*, se atuar

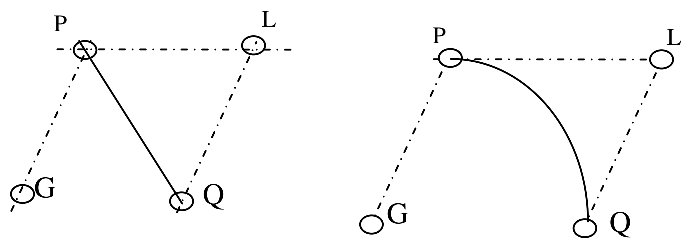


Figure 23

nele uma dada força F. Suponha, agora, o mesmo corpo se movendo com velocidade constante em direção a L. Se, ao chegar em P, o corpo sofrer a mesma força F, ele percorrerá uma linha curva de P a Q no mesmo tempo *t*. Se essa força não atuasse, ele se moveria com velocidade constante e chegaria a L no mesmo intervalo de tempo *t*, pela primeira lei. O segmento de reta $\overrightarrow{LQ}$ é chamado de *deflexão móvel gerada num tempo t*, e o segmento $\overrightarrow{PG}$, de *deflexão imóvel gerada num tempo t*. Se o corpo tem um "quantidade de matéria" *M*, chamaremos $M\frac{\overrightarrow{LQ}}{t}$ a mudança de movimento (gerada num tempo t) e $M\frac{\overrightarrow{PG}}{t}$ a força motiva (gerada num tempo t). A mudança de movimento se iguala a força motiva $M\frac{\overrightarrow{LQ}}{t} = M\frac{\overrightarrow{PG}}{t}$, da mesma forma que a deflexão móvel se igual a deflexão imóvel $\overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{PG}$. A lei, assim interpretada, é válida para qualquer tempo *t* quando a força é ou impulsiva ou contínua e, no limite, quando *t* tende a zero, é válida quando a força é centrípeta ou contínua ou variada. Embora $\overrightarrow{LQ}$ e $\overrightarrow{PG}$ não sejam exatamente iguais quando a força é contínua e varie, ainda assim, a diferença $\overrightarrow{LQ} - \overrightarrow{PG}$ se torna muito pequena quando *t* tende a zero. Porciau se estende nessa interpretação na tentativa de provar que Newton pensou da mesma forma quando escreveu a Segunda Lei, e enfatiza que ela interpretada dessa forma é válida tanto para forças contínuas quanto para forças impulsivas.

Para finalizar, a ausência do tempo na definição de força pode, entre outras coisas, significar que o conceito de força surgiu do método de Hooke [12]. O “soco” *BV* é instantâneo e para ser analisado Newton precisaria ter usado o limite o que, segundo Cohen, Newton o fez mas com uma notação diferente.

5. AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO

5.1. O Movimento da Massa Isolada

Cientistas modernos, que nunca tiveram contato com o *Principia,* podem ter a falsa impressão de que as "Equações Newtonianas" apresentadas nos livros textos, na forma diferencial, sejam as leis de Newton. Não há nenhuma evidência que Newton tenha pensado seus princípios dessa forma. É fato que as equações diferenciais não estão no livro de Newton e que houve, após o *Principia*, uma intensa crítica dos princípios introduzidos por Newton. Em particular, no século XVIII foi formulada uma mecânica racional geral. Escreveu-se equações diferenciais da catenária e equações de onda de um fio. Em meados do século XVIII, Leonhard Euler escreveu, em forma diferencial, o que hoje se chama "as equações de Newton".

Sendo assim, o ano em que as "Equações Newtonianas" foram publicadas, não foi 1687 e sim 1747, pelas mãos de Euler. Somente sessenta anos depois o *Principia*, uma forma geral para resolver um sistema dinâmico foi encontrada. Para achar as equações diferenciais Euler raciocina do seguinte modo: a variação de uma das coordenadas pode ser entendida como uma "altura de queda" e como, em cada instante tomado isoladamente, qualquer movimento acelerado é uniformemente acelerado, o Teorema de Galileu pode ser aplicado, em cada instante isoladamente, a cada eixo independentemente. Logo [12]:

Teorema de Galileu: $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \alpha x$$

derivada primeira: $$2\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

cancelando termos : $$2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \alpha$$

Feito isso, Euler considera $\alpha = \frac{força}{massa}$, embora em nenhum momento mencione Newton.

O artigo escrito por Euler em 1747, entretanto, abordava apenas sistemas mecânicos discretos. Porém, esta descoberta mostrou a ele, que a equação “$\alpha dm = dF$” tratava-se de uma lei geral da mecânica. Isso foi declarado em seu artigo intitulado “*Descoberta de um Novo Princípio da Mecânica*” [50], escrito em 1750, que será minuciosamente analisado adiante. Euler aplicou esta equação para determinar o movimento de um corpo rígido e então, obteve as equações diferenciais que regiam tal movimento, provando, em seguida, que para qualquer corpo há uma tríade de eixos ortogonais de rotação livre e que as equações descobertas não se limitariam a corpos pequenos.

5.2. A Equação de Rotação dos Corpos Rígidos

Correspondências trocadas por Euler, John Bernoulli e Daniel Bernoulli, datadas no ano de 1730 [1], mostram que eles buscavam por “novos princípios” para explicar o movimento de um corpo rígido, pois os princípios, até então enunciados por Newton, eram insuficientes . A verdade é que ninguém, até então, sabia como descrever o movimento de um corpo rígido, cujo eixo não se restringia a uma linha num só plano. Euler dedicou-se a solucionar este caso começando por analisar as pequenas vibrações de um corpo flutuando na água e conjecturou que todo corpo rígido possuía três eixos ortogonais e em torno de qualquer um deles o corpo pode oscilar com movimentos infinitesimais[1].

Ninguém duvidava que a segunda lei de Newton estivesse correta, embora, ela não fosse usada para resolver problemas. O que ninguém sabia, até ser mostrado, era que entre todos os princípios mecânicos até então descobertos, ela era a única que se aplicava a qualquer parte de um sistema, e mais que isso, ela bastava para gerar outras equações que determinam o movimento de muitos outros sistemas.

O Princípio do Momento Angular é demonstrado nos livros texto, de uma forma geral, da seguinte forma: considerando um sistema de massas puntuais, a equação de movimento para a $k^{ésima}$ partícula é

$$m_k \ddot{r}_k = F_k + \sum_i F_{ik} \ , \qquad (1)$$

numa notação padrão, onde F_k representa qualquer força externa aplicada sobre k e F_{ik}, a soma das forças internas exercidas sobre a partícula k. A terceira lei de Newton significa que: $F_{ik} = -F_{ki}$.

O momento angular L é definido como:

$$L = \sum_k r_k \times m_k \ddot{r}_k \ , \qquad (2)$$

De forma que:

$$\dot{L} = \tau + \frac{1}{2} \sum_{k,j} (r_k - r_i) \times F_{jk} \ , \qquad (3)$$

onde L é o torque total exercido por forças externas:

$$\tau \equiv \sum_k r_k \times F_k \ . \qquad (4)$$

Se as forças mútuas F_{jk} são centrais, então $(r_k - r_j) \times F_{jk} = 0$, então (3) se reduz a

$$\dot{L} = \tau \ . \qquad (5)$$

Ou seja, para um sistema de partículas em que as forças entre duas partículas quaisquer estão numa direção da reta que liga essas partículas, a variação do momento angular total é igual à soma dos momentos das forças aplicadas.

O artigo "*Descoberta de um Novo Princípio da Mecânica*" escrito por Euler trata de um problema geral de rotação de um corpo rígido. Nesse artigo, Euler afirma que as equações de rotação, por ele encontradas, são "Novos Princípios". Isso gerou, entre historiadores, a polêmica se as equações de rotação do corpo rígido são ou não redutíveis à segunda lei de Newton. Houve realmente algum novo princípio ou ele se baseou em leis já existentes? Para tanto, segue uma análise detalhada desse artigo que foi feita numerando cada passo seguido por ele. Esses passos são:

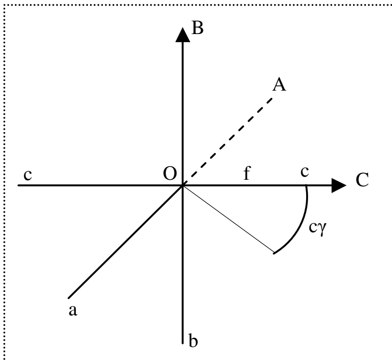
1. Define um corpo sólido e diz que um corpo flexível é suscetível a uma infinidade de mudanças sendo que seus movimentos podem ser reduzidos aos mesmos princípios de toda a Mecânica.
2. Define o movimento progressivo. Para um corpo sólido, a propriedade significa que, em cada instante, todas as partes do corpo se movem com velocidades iguais segundo a mesma direção. Se soubermos o movimento de um elemento de massa do corpo, saberemos o que ocorre com o corpo todo.
3. Define movimento misto como sendo a adição do movimento de rotação com o movimento progressivo.
4. Afirma que as equações existentes só resolvem problemas de corpos que giram em torno de um eixo *fixo* e que se movem com movimento progressivo.
5. Afirma que o movimento progressivo e o de rotação são independentes. Assim sendo, apara analisar o primeiro considera-se um referencial cujo Centro de Massa (CM) esteja em repouso.
6. Considera que para determinar o movimento progressivo basta analisar o movimento do CM.
7. Define *eixo de rotação* como sendo o conjunto de uma infinidade de pontos em repouso assim como o CM.
8. Afirma que para o *eixo de rotação* em movimento, os princípios da mecânica, até então conhecidos, não são suficientes para equacionar essa situação e diz ter descobertos os novos princípios que faltavam.
9. Declara que irá analisar primeiramente o caso mais simples, a dizer, o caso de um corpo rígido girando em torno de um eixo de otação fixo. Caso o eixo de rotação seja móvel teremos que analisar:

   1º → a constituição do corpo,

   2º → as forças que nele atuam.

10. Define a velocidade angular ω, como se segue :

Considera-se a variação de uma das coordenadas como uma altura de queda e como, em cada instante tomado isoladamente, qualquer movimento acelerado é uniformemente acelerado, o Teorema de Galileu ($v^2=2gh$) pode ser aplicado, em cada instante isoladamente, a cada eixo independentemente.



Seja:

A → Eixo de Rotação (imóvel)

O → Centro de Massa

Oc → f

Altura de queda → h

Velocidade → v

$v \propto \sqrt{h}$

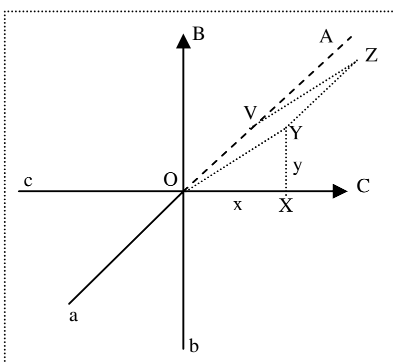
Então:

A mesma velocidade de todos os pontos que estão a uma distância "*f*" do eixo de rotação (aOA) será:

$$\boxed{\varpi = \frac{\sqrt{h}}{f}}$$

11. Encontra:

(a) A velocidade de um ponto "*Z*" arbitrário:



Seja:

Z → parte qualquer do corpo

dM → massa de Z

M → massa total do corpo

(X,Y,Z) → coordenadas ortogonais de Z

OV // YZ

ZV // OY

Então: $ZV = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mas todos os pontos que estão à mesma distância do eixo de rotação possuem a mesma velocidade angular ω igual a:

$$\frac{v_Z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{h}}{f} \Rightarrow \boxed{v_Z = \frac{\sqrt{h\left(x^2+y^2\right)}}{f}} \longrightarrow \text{velocidade de Z}$$

(b) A altura devido a essa velocidade será:

$$v_z^2 = \frac{h\left(x^2+y^2\right)}{f^2} \Rightarrow H = \frac{h\left(x^2+y^2\right)}{f^2}$$

12. Determina a força centrífuga do elemento *Z=dM*.

Seja : *dM* = peso = *mg* → *m* = *dM/g*, então:

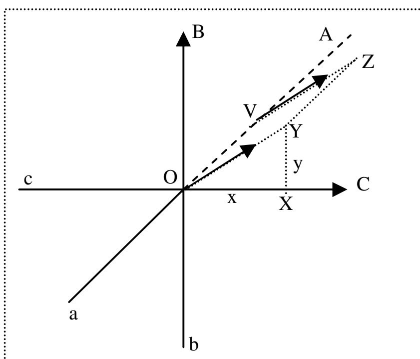
$$F_c = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow F_c = \frac{dM}{g}.\frac{h\left(x^2+y^2\right)}{f^2}.\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \textbf{(x 2g)}$$

$$\boxed{F_c = \frac{2vdM}{f^2}\sqrt{x^2+y^2}} \longrightarrow$$

Esta força centrífuga que atua em *Z* na direção *VZ* é a mesma que atua no ponto *V*.

Para o eixo de rotação (aOA) permanecer em repouso é preciso que todas as forças se destruam mutuamente.

13. Demonstra que o eixo de rotação passa pelo CM.

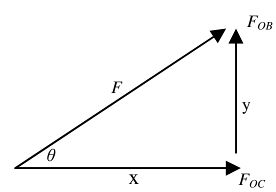


Seja:

VZ // OY

$$OY = \sqrt{x^2+y^2}$$

A força que agirá sobre o eixo de rotação aOA em V na direção paralela a OC, será:



$$F_{OC} = F\cos \Rightarrow F_{OC} = \frac{2hdM}{f^2}.\sqrt{x^2+y^2}.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

$$F_{OC} = \frac{2hxdM}{f^2}$$

- $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $sen\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

A força que agirá sobre o eixo de rotação aOA em V na direção paralela a OB, será:

$$F_{OB} = F.sen\theta \Rightarrow F_{OB} = \frac{2hdM}{f^2}.\sqrt{x^2 + y^2}.\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow$$

$$F_{OB} = \frac{2hydM}{f^2}$$

Podemos reduzir todas as forças centrífugas a duas espécies: F_{OC} e F_{OB}. Será necessário que todas as forças paralelas a OC e a OB se cancelem mutuamente para aOA ficar imóvel. Como: $F_{OC} = \frac{2hxdM}{f^2}$ e $F_{OB} = \frac{2hydM}{f^2}$, precisamos que:

$$\int \frac{2hxdM}{f^2} = 0 \text{, ou } \frac{2h}{f^2}\int xdM = 0 \Rightarrow \int xdM = 0$$

e que:

$$\int \frac{2hydM}{f^2} = 0 \text{, ou } \frac{2h}{f^2}\int ydM = 0 \Rightarrow \int ydM = 0$$

Isso ratifica o que havia sido dito anteriormente, ou seja, que o eixo de rotação passa pelo CM.

14. Determina a condição para que o eixo de rotação não sofra nenhuma inclinação.

Seja:

- Momento de F_{OC} em relação ao CM (O) → $\frac{2hxzdM}{f^2}$
- Momento de F_{OB} em relação ao CM (O) → $\frac{2hyzdM}{f^2}$

É necessário que:

$$\int \frac{2hxzdM}{f^2} = 0 \text{, ou } \frac{2h}{f^2}\int xydM = 0 \Rightarrow \int xydM = 0$$

e que:

$$\int \frac{2hyzdM}{f^2} = 0 \text{, ou } \frac{2h}{f^2}\int yzdM = 0 \Rightarrow \int yzdM = 0$$

Para que o eixo não sofra nenhuma inclinação é necessário que todos os momentos de todas as forças de cada espécie "se destruam mutuamente".

15. Afirma que as condições acima são satisfeitas se a matéria de que o corpo é composto estiver totalmente distribuída em torno

do eixo de rotação. Sendo assim, o eixo de rotação só sofrerá alguma mudança se for solicitado por uma força externa. Caso o eixo se mova, novos princípios serão necessários para analisar o movimento deste corpo.

16. Esclarece que, se a direção resultante das forças atuar sobre o plano BOC, não haverá um momento resultante. Essas forças só seriam úteis para acelerar ou retardar o movimento.

17. Explica que, se a resultante das forças não atuar sobre o plano BOC, o eixo de rotação não permanecerá imóvel.

18. Esclarece que os princípios que ele usa para analisar uma rotação, cujo eixo seja móvel, são novos, mas os fundamentos não.

19. Declara então :

> (...)todos esses princípios se reduzem a um só, que se pode considerar como o único fundamento de toda a mecânica e das outras ciências que tratam do movimento de quaisquer corpos. E é sobre este único princípio que devem ser estabelecidos todos os outros princípios mesmo aqueles que já são conhecidos na Mecânica e na Hidráulica e que se serve atualmente para determinar o movimento dos corpos sólidos e fluidos; que aqueles também que não são ainda conhecidos e de que nós precisamos para desenvolver tanto os casos indicados acima dos corpos sólidos, quanto muitos outros que se encontram nos corpos fluidos. Pois, em todos esses casos não se trata de aí aplicar adequadamente esse princípio fundamental do qual acabo de falar e que vou explicar mais cuidadosamente.

20. Euler enuncia o **princípio geral e fundamental de toda a mecânica**. Para tanto, considera um corpo infinitamente pequeno onde toda massa M seja reunida num só ponto e que o mesmo esteja animado de um movimento qualquer solicitado por forças quaisquer. Precisa-se observar o afastamento do corpo a partir de um plano qualquer fixo e imóvel para determinar o movimento desse corpo. Seja x a distância do corpo ao plano. Decompõe-se todas as forças que atuam no corpo com componentes perpendiculares e paralelas a esse

plano. Sendo P a componente resultante dessa decomposição perpendicular ao plano (responsável pelo corpo se aproximar ou se afastar do plano), após dt o corpo estará a uma distância $x + dx$ do plano e considerando dt constante, pode-se escrever para esta força que:

$$2Md^2x = \pm P\,dt^2$$

Euler afirma após escrever esta equação que ela contém todos os princípios da mecânica. [xi]

21. Define:
    - M é a massa ou o peso do corpo na superfície da Terra.
    - P pode ser considerado como um peso, de forma que M e P contêm quantidades homogêneas.
    - $\frac{dx}{dt} \rightarrow$ velocidade do corpo se afastando do plano.
    - Se nós considerarmos que a velocidade $\frac{dx}{dt}$ seja a mesma adquirida por um corpo que cai de uma altura h, poderemos escrever que:

      $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = h$$

    - $dt = \frac{dx}{\sqrt{h}}$

22. Euler reconhece que, para saber o que ocorre realmente com um corpo, tem-se que analisar como o corpo se comporta em relação aos três eixos fixos, perpendiculares entre eles. Assim, sendo:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\}\ \text{as distâncias do corpo aos três planos e}$$

[xi] Essa é a equação $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$. O fator 2 decorre de como foi derivada.

$\left.\begin{matrix} P \\ Q \\ R \end{matrix}\right\}$ as resultantes perpendiculares das componentes de todas as forças em relação aos três planos ,

podemos dizer que o movimento do corpo será regido pelas equações:

$$2Md^2x = P\,dt^2$$
$$2Md^2y = Q\,dt^2$$
$$2Md^2z = R\,dt^2$$

Se se supuser que as forças tendem a afastar o corpo do plano, pois, caso contrário dever-se-ia escrever $-P$,$-Q$ e $-R$.

23. Esclarece que, se o corpo não for solicitado por nenhuma força, de forma que $P = Q = R = 0$, as três equações encontradas, devido ao fato de dt ser constante, se reduzirão por integração a:

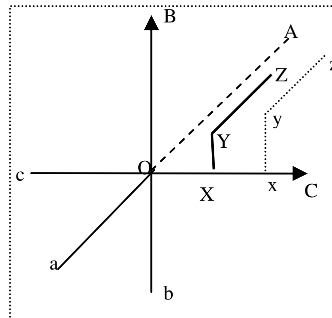
$$Mdx = A\,dt$$
$$Mdy = Bdt$$
$$Mdz = Cdt$$

Ou seja, na ausência de forças externas, a velocidade do corpo permanece constante e o movimento se dá numa linha reta. Se o corpo estiver em repouso, assim permanecerá a menos que seja solicitado por uma força externa. Essas equações representam, na forma algébrica, a primeira lei de Newton.

24. Afirma que, fundamentado nesse grande princípio, irá estabelecer as leis para determinar o movimento de um corpo sólido que modifica o seu eixo de rotação. Para esta análise, explica que, devemos analisar a ligação entre os elementos do

corpo. Antes de tudo, entretanto, convém estudar o movimento geral que um determinado corpo é suscetível.

Determinação do movimento geral de que um corpo sólido é suscetível e cujo eixo de rotação permanece em repouso.



25. Ilustra que os três planos AOB, AOC e BOC, assim como os três eixos AO, BO e CO permanecem em repouso, enquanto o corpo se anima de um movimento qualquer. Seu centro de massa (*O*) permanece também fixo. Por serem fixos, por definição, podemos determinar, a cada instante, o movimento do corpo em relação a eles.

26. Define *Z* como um elemento qualquer do corpo e afirma que qualquer que seja o movimento de *Z,* poderá ser analisado segundo a direção dos três eixos. Supõe, a seguir, que depois de um tempo infinitamente pequeno *dt,* a distância de *Z* em relação a:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet AOB \text{ será } x + dx = x + Pdt \\ \bullet AOC \text{ será } y + dy = y + Qdt \\ \bullet BOC \text{ será } z + dz = z + Rdt \end{array}\right\} \text{Onde : } P = \frac{dx}{dt}, Q = \frac{dy}{dt}, R = \frac{dz}{dt}$$

27. Mostra que para um corpo supostamente sólido e rígido é preciso que o ponto *Z* permaneça sempre à mesma distância do centro de massa. Assim, podemos dizer que:

- no início de *dt* a distância *OZ* vale: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- no final de *dt* a distância *OZ* vale: $\sqrt{(x + Pdt)^2 + (y + Qdt)^2 + (z + Rdt)^2}$

Como o corpo é rígido, é preciso que essas distâncias sejam iguais:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(x+Pdt)^2+(y+Qdt)^2+(z+Rdt)^2} \therefore$$

$$x^2+y^2+z^2 = (x+Pdt)^2+(y+Qdt)^2+(z+Rdt)^2 \therefore$$

$$x^2+y^2+z^2 =$$

$$x^2+2xPdt+P^2dt^2+y^2+2yQdt+P^2dt^2+x^2+2xpdt+P^2dt^2 \therefore$$

$$0 = \underbrace{2xPdt++2yQdt+2zRdt}_{\boxed{Px+Qy+Rz=0}} + \underbrace{P^2dt^2+Q^2dt^2+R^2dt^2}_{=0}$$

Ou seja: P, Q e R são funções das variáveis x,y e z. Euler afirma que, depois de descobrir a natureza dessas três funções, estaremos em condição de determinar o movimento de cada ponto do corpo no começo do tempo *dt*.

28. Considera um ponto *z* infinitamente próximo de *Z*. A distância de *z* à *Z* é $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Depois de *dt* o ponto *z* avançará na direção:

- OC → $dx + dPdt = Pdt + dPdt = (P + dP)dt$
- OB → $dy + dQdt = Qdt + dQdt = (Q + dQ)dt$
- OA → $dz + dRdt = Rdt + dRdt = (R + dR)dt$

As distâncias serão:

	do ponto z	do ponto Z
ao plano *AOB*	$x + dx + (P + dP)dt$	$x + P\,dt$
ao plano *AOC*	$y + dy + (Q + dQ)dt$	$y + Q\,dt$
ao plano *BOC*	$z + dz + (R + dR)dt$	$z + R\,dt$

29. Encontra a segunda equação que, junto com $Px+Qy+Rz=0$, servirá para descobrir a natureza de *P,Q* e *R*. Para tanto, analisa as distâncias do ponto z ao ponto Z nas três direções, no final do tempo *dt*:

- $x + dx + (P + dP)dt - (x + P\,dt) = dx + dPdt$
- $y + dy + (Q + dQ)dt - (y + Q\,dt) = dy + dQdt$
- $z + dz + (R + dR)dt - (z + R\,dt) = dz + dRdt$

Ou seja, no final de *dt,* a distância entre *Z* e *z* será:

$$\sqrt{(\mathrm{dx}+\ \mathrm{dP\,dt})^2+(\mathrm{dy}+\mathrm{dQdt})^2+(\mathrm{dz}+\mathrm{dRdt})^2}$$

Como o corpo é rígido, esta distância deve ser a mesma do início de *dt*[xii] . Assim:

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{(\mathrm{dx}+\ \mathrm{dP\,dt})^2+(\mathrm{dy}+\mathrm{dQdt})^2+(\mathrm{dz}+\mathrm{dRdt})^2}\ \therefore$$

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (\mathrm{dx}+\ \mathrm{dP\,dt})^2+(\mathrm{dy}+\mathrm{dQdt})^2+(\mathrm{dz}+\mathrm{dRdt})^2\ \therefore$$

$$dx^2+dy^2+dz^2 =$$

$$dx^2+2dxdPdt+dP^2dt^2+dy^2+2dydQdt+dQ^2dt^2+dz^2+2dzdRdt+dR^2dt^2\ \therefore$$

$$0=2dxdPdt+2dydQdt+2dzdRdt+dP^2dt^2+dQ^2dt^2+dR^2dt^2\ \therefore$$

$$\boxed{dPdx+dQdy+dRdz=0}$$

Assim, com as duas equações encontradas, a saber, $Px+Qy+Rz=0$ e $dPdx+dQdy+dRdz=0$ [xiii], pode-se descobrir a natureza de *P, Q* e *R* e, desta forma, conhecer *todos* os movimentos que *todas* as partes de um corpo sólido são suscetíveis quando o centro de massa permanece imóvel. Se *x = y = z = 0*, tem-se : *P = Q = R = 0.*

30. Para melhor conhecer essas funções, Euler supõe que *Ox = OX* e *XY = xy*, ou *dx=0* e *dy=0.* Como:

$$\underbrace{\underbrace{dPdx+dQdy+dRdz=0}_{dR=0}}$$

Conclusão : a função *R* **não** estaria limitada à variável *z*.

Generalizando: Seja:

$$dR=Ldx+Mdy+Ndz$$

---

xii $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$

xiii Vale lembrar que Euler mudou a notação: P, Q e R são velocidades. Logo, essa equação pode ser entendida modernamente como:dv/dt.dx=$F_x$dx.

No caso em que está sendo tratado $dR = Ndz$ porque $dx=0$ e $dy=0$ e, portanto $N=0$. No geral teremos, então: $dR = Ldx + Mdy$, ou seja, R não contém a variável z. Da mesma forma se tivermos $dx=0$ e $dz=0$, teremos $dQdy=0$ ou $dQ=0$, donde se conclui que a função Q não contém a variável y e enfim, quando $dy=0$ e $dz=0$ teremos $dPdx=0$ e concluiremos que a função P não contém a variável x.

31. Estuda as propriedades das funções P,Q e R admitindo que:

$$\begin{cases} dP = Ady + Bdz \\ dQ = Cdz + Ddx \\ dR = Edx + Fdy \end{cases}$$

Mas, como já visto:

$$dPdx + dQdy + dRdz = 0$$

Então :

$$\begin{matrix} Adxdy+Bdxdz+Cdydz \\ +Ddxdy+Edxdz+Fdydz \end{matrix} = 0$$

Para tanto, devemos ter: $D=-A, E=-B$ e $F=-C$.

Assim, as equações acima podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} dP = Ady + Bdz \\ dQ = Cdz - Adx \\ dR = -Bdx - Cdy \end{cases}$$

Como essas equações devem ser integráveis é evidente que :

- nem A nem B seria função de x,
- nem C nem A seria função de y e
- nem B nem C seria função de z.

Ou seja:

- A é função de z.
- B é função de y.
- C é função de x.

32. Escreve então que:

$$\begin{cases} dA = Ldz \\ dB = Mdy \\ dC = Ndx \end{cases}$$

Como $Ady + Bdz$ deve ser uma diferencial integrável, então:

- $\frac{dA}{dz} = \frac{dB}{dy} \Rightarrow \boxed{L = M}$
- $\frac{dC}{dx} = -\frac{dA}{dz} \Rightarrow \boxed{N = -L}$
- $-\frac{dB}{dy} = \frac{dC}{dx} \Rightarrow \boxed{M = N}$

$$\left.\begin{matrix} L = M \\ N = -L \\ M = N \end{matrix}\right\} \boxed{L = -L} \longrightarrow \boxed{L = 0} \longrightarrow \boxed{M = N = 0}$$

Como A, B e C representam constantes, integrando as seguintes equações:

$$\begin{cases} dP = Ady + Bdz \\ dQ = Cdz - Adx \\ dR = -Bdx - Cdy \end{cases} \quad \text{teremos:} \quad \begin{cases} P = Ay + Bz \\ Q = Cz - Ax \\ R = -Bx - Cy \end{cases}$$

Que satisfazem a primeira condição : $Px + Qy + Rz = 0$

33. Conclui: O movimento possível de um corpo sólido, cujo centro de massa permaneça imóvel, deve ter essa propriedade, a dizer: $P=Ay+Bz$, $Q=Cz-Ax$ e $R=-Bx-Cy$. Sendo A, B e C constantes.

34. Verifica, se há, além do centro de massa, outros pontos sem movimento onde $P=Q=R=0$.

Fazendo $P = 0 \longrightarrow Ay + Bz = 0$

$y = -Bu$ $\qquad$ $z = Au$

Ou seja: para qualquer valor de x, a distância em relação ao plano AOB não sofrerá nenhuma alteração.

Sendo u uma nova variável qualquer.

Fazendo $Q = 0 \longrightarrow Cz - Ax = 0 \longrightarrow Cz = Ax \longrightarrow x = Cu$

Fazendo $R = 0 \longrightarrow -Bx - Cy = 0 \longrightarrow x = Cu$

Então, se $x=Cu$, $y=-Bu$ e $z=Au$, o ponto permanece em repouso durante dt. Os pontos que obedecem a essa condição se encontram numa linha reta que passa pelo centro de massa e constituem o eixo de rotação desse corpo.

35. Encontra a equação da velocidade angular do corpo. Para isso supõe que $YZ = z = 0$ sendo a linha OU perpendicular ao eixo de rotação. Desta forma: $\frac{y}{x} = \frac{Cu}{Bu} \Rightarrow$ $y=Bu$ e $x=Cu$ e assim, a distância do ponto Y ao eixo de rotação será $u\sqrt{B^2 + C^2}$. Então, as três velocidades do ponto Y segundo as três direções OC, OB e OA, serão :

$$\begin{cases} V_x = P = Ay + \cancel{Bz}^{\,0} & \rightarrow P = ACu \\ V_y = Q = \cancel{Cz}^{\,0} - Ax & \rightarrow Q = -ABu \\ V_z = R = -Bx - Cy & \rightarrow R = -B^2u - C^2u \end{cases}$$

Deste modo, a verdadeira velocidade do ponto Y será:

$$V_y = u\sqrt{\left(B^2 + C^2\right)\left(A^2 + B^2 + C^2\right)}$$

Como $OY = u\sqrt{B^2 + C^2}$ e $V_y = \overbrace{u\sqrt{\left(B^2 + C^2\right)}}^{OY\text{(raio)}}.\overbrace{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}^{\omega}$ então a velocidade angular do corpo em torno do eixo de rotação será, por conseqüência:

$$\boxed{\omega = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

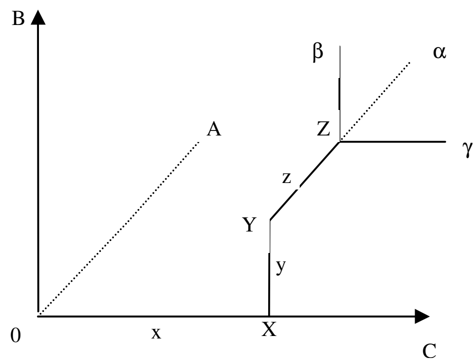
36. Conclui:

Qualquer movimento que puder ser imprimido a um corpo sólido, cujo centro de massa permaneça em repouso, se fará, a cada instante, em torno de um eixo de rotação do corpo; e a velocidade de rotação em torno desse eixo será $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Será fácil, então, determinar a verdadeira velocidade de todos os pontos do corpo. Para tanto, temos que somente procurar a distância *"S"* de um ponto qualquer ao eixo de rotação. A velocidade desse ponto será $V = S\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ e a direção será conhecida pela natureza do eixo de rotação. É, pois, impossível que todas as partes de um corpo, que giram sobre ele mesmo, ou em torno do centro de massa, estejam em movimento ao mesmo tempo, porque há sempre uma linha reta, onde todos os pontos estarão em repouso, pelo menos por um instante. O movimento dos outros pontos do corpo será tanto mais rápido quanto mais distantes estiverem do eixo de rotação.

36. Euler propõe a provar a mesma coisa com a geometria e o faz nos itens 38 e 39.

Pesquisa Das Forças Requisitadas para Conservar o Corpo em um Movimento Qualquer

40. Determina a velocidade em torno do eixo de rotação.



Sejam:

- $dM \rightarrow$ massa de um elemento.
- Componentes da velocidade segundo o eixo:

$$\begin{cases} OC = \lambda y - \mu z \\ OB = \nu z - \lambda x \\ OA = \mu x - \nu y \end{cases}$$

Colocando para as letras *A*,B e C [do item 33] as letras ν, μ e , o eixo de rotação, no instante qualquer se achará em: $x = \nu\, u$, $y = \mu\, u$ e $z = \lambda\, u$. A velocidade em torno do eixo de rotação será:

$$\omega = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

41. Determina a condição de movimento para um corpo sólido que sofre um movimento qualquer.

Considerado em Z , dM se afastará no tempo dt do plano:

- AOB *por um espaço* $(\lambda y - \mu z)dt$
- AOC *por um espaço* $(\nu z - \lambda x)dt$
- BOC *por um espaço* $(\mu x - \nu y)dt$

Sendo $x + dx$, $y + dy$ e $z + dz$ as coordenadas que determinam onde está dM depois de dt ; $dx = (\lambda x - \mu z)dt$, $dy = (\nu z - \lambda x)dt$ e $dz = (\mu x - \nu y)dt$; e sabendo que todos os elementos do corpo permanecem à mesma distância, tanto entre eles como do centro de massa, então, é impossível que todas as três equações sejam afirmativas ao mesmo tempo. É preciso sempre que:

$$(x + dx)^2 + (y + dy)^2 + (z + dz)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ou seja :

$$\boxed{xdx + ydy + zdz = 0}$$

42. Analisa as forças necessárias para haver a continuação do movimento supondo *dt* constante. Mencionando o princípio geral do movimento afirma que é necessário que o elemento *dM* seja solicitado por três forças segundo as direções dos três eixos.

$$\left.\begin{array}{l} Na\ direção\ OC: Fx = 2dM\,\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ Na\ direção\ OB: Fy = 2dM\,\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ Na\ direção\ OA: Fx = 2dM\,\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{array}\right\}$$

Essas forças podem ser tanto internas como externas. Como as forças internas se destroem mutuamente, a continuação do movimento é devido, somente, às externas.

43. Supõe, agora, que o eixo de rotação mude depois de um tempo *dt* de uma maneira qualquer de forma que $\lambda, \mu\ e\ \nu$ representem quantidades variáveis não constantes.

Como:

$$dx = (\lambda y - \mu z)dt$$
$$dy = (\nu z - \lambda x)dt$$
$$dz = (\mu x - \nu y)dt$$

Então:

$$d^2x = (\lambda dy + yd\lambda - \mu dz - zd\mu)dt$$
$$d^2y = (\nu dz + zd\nu - \lambda dx - xd\lambda)dt$$
$$d^2z = (\mu dx + xd\mu - \nu dy - yd\nu)dt$$

Ou melhor:

$$d^2x = (yd\lambda - zd\mu)dt + (\lambda dy - \mu dz)dt$$
$$d^2y = (zd\nu - xd\lambda)dt + (\nu dz - \lambda dx)dt$$
$$d^2z = (xd\mu - yd\nu)dt + (\mu dx - \nu dy)dt$$

44. Obteve as seguintes equações[xiv]:

$$\begin{cases} d^2x = (yd\lambda - zd\mu)dt + \left[\lambda\nu z - \nu\mu y - (\lambda^2 + \mu^2)x\right]dt^2 \\ d^2y = (zd\nu - xd\lambda)dt + \left[\mu\nu x - \lambda\mu z - (\nu^2 + \lambda^2)y\right]dt^2 \\ d^2z = (xd\mu - yd\nu)dt + \left[\lambda\mu y - \lambda\nu x - (\mu^2 + \nu^2)z\right]dt^2 \end{cases}$$

$Z\alpha, Z\gamma, Z\beta \rightarrow$ representam linhas por onde atuam as três forças que solicitam *dM* segundo a direção dos três eixos *AO,OB* e OC.

[xiv] Como: $d^2x = (yd\lambda - zd\mu)dt + (\lambda dy - \mu dz)dt$, então : $d^2x = (yd\lambda - zd\mu)dt + [\lambda(\nu z - \lambda x)dt - \mu(\mu x - \nu y)dt]dt$ e assim:
$d^2x = (yd\lambda - zd\mu)dt + (\lambda\nu z - \lambda^2 x - \mu^2 x + \nu\mu y)dt^2$. O mesmo raciocínio se aplica para d^2y e d^2z.

Assim, as três forças serão representadas pelas seguintes equações[xv]:

$$\begin{cases} F_{z\gamma} = 2\dfrac{dM}{dt}(yd\lambda - zd\mu) + 2dM\left[\lambda\nu z + \nu\mu y - (\lambda^2 + \mu^2)x\right] \\ F_{z\beta} = 2\dfrac{dM}{dt}(zd\nu - xd\lambda) + 2dM\left[\mu\nu x + \lambda\mu z - (\nu^2 + \lambda^2)y\right] \\ F_{z\alpha} = 2\dfrac{dM}{dt}(xd\mu - yd\nu) + 2dM\left[\lambda\mu x + \lambda\nu x - (\mu^2 + \nu^2)z\right] \end{cases}$$

45. Observa que para reduzir essas expressões a uma soma, ou para encontrarmos as forças totais, é preciso verificar que nas integrações não teremos outras variáveis além do elemento *dM* e das coordenadas *x, y* e *z* que determinam o local deste elemento, e que *dM* deve passar sucessivamente por todos os elementos do corpo, de forma que a integral $\int dM$ represente a massa do corpo *M*.

Desta forma, em todas essas integrações, que somente examinam a variabilidade do ponto Z, as quantidades $\lambda, \mu\, e\, \nu$ com suas diferenciais $d\lambda, d\mu\, e\, d\nu$ e o elemento de tempo *dt* serão consideradas como invariáveis. Assim, a integral de cada uma dessas forças deve ser ZERO, porque pela natureza do centro de massa:

$$\int xdM = 0 \qquad \int ydM = 0 \qquad \int zdM = 0$$

46. Analisa o momento de cada força em relação aos três eixos.

Assim:

- A força $Z\alpha$ tem um momento...

... em relação ao eixo OC no sentido BA = $Z\alpha \bullet y$

... em relação ao eixo OB no sentido CA = $Z\alpha \bullet x$

[xv] Como: $F_{z\gamma} = 2\dfrac{dM}{dt^2}d^2x$, então : $F_{z\gamma} = 2\dfrac{dM}{dt^2}\left[\dfrac{yd\lambda - zd\mu}{dt} + \lambda\nu z - \nu\mu y - (\lambda^2 + \mu^2)x\right]$ e assim:

$F_{z\gamma} = 2\dfrac{dM}{dt}(yd\lambda - zd\mu) + 2dM\left[\lambda\nu z + \nu\mu y - (\lambda^2 + \mu^2)x\right]$. O mesmo raciocínio se aplica para as outras forças.

- A força $Z\beta$ tem um momento...

... em relação ao eixo OC no sentido AB = $Z\beta \bullet z$

... em relação ao eixo OA no sentido CB = $Z\beta \bullet x$

- A força $Z\gamma$ tem um momento...

... em relação ao eixo OB no sentido AC = $Z\gamma \bullet z$

... em relação ao eixo OA no sentido BC = $Z\gamma \bullet y$

Conseqüentemente as forças $Z\alpha, Z\beta, Z\gamma$ terão para o:

$\rightarrow$ *eixo OA um momento no sentido BC* $\rightarrow Z\gamma \bullet y - Z\beta \bullet x$

$\rightarrow$ *eixo OB um momento no sentido CA* $\rightarrow Z\alpha \bullet x - Z\gamma \bullet z$

$\rightarrow$ *eixo OC um momento no sentido AB* $\rightarrow Z\beta \bullet z - Z\alpha \bullet y$

47. Encontra o momento resultante em cada eixo. Assim:

- O momento que resulta para o eixo AO no sentido BC, será[xvi]:

$$\boxed{2\frac{dM}{dt}\left(y^2 d\lambda + x^2 d\lambda - yzd\mu - xzd\nu\right) + 2\frac{dM}{dt}\left[\lambda\nu yz - \lambda\mu xz + \mu\nu y^2 - \mu\nu x^2 - \left(\mu^2 - \nu^2\right)xy\right]}$$

- O momento que resulta para o eixo OB no sentido CA:

$$\boxed{2\frac{dM}{dt}\left(x^2 d\mu + z^2 d\mu - xyd\nu - yzd\lambda\right) + 2\frac{dM}{dt}\left[\lambda\mu xy - \mu\nu xy + \lambda\nu x^2 - \lambda\nu z^2 - \left(\nu^2 - \lambda^2\right)xz\right]}$$

- O momento que resulta para o eixo OC no sentido AB:

$$\boxed{2\frac{dM}{dt}\left(z^2 d\nu + y^2 d\nu - xzd\lambda - xyd\mu\right) + 2\frac{dM}{dt}\left[\mu\nu xz - \lambda\nu xy + \lambda\mu z^2 - \lambda\mu z^2 - \lambda\mu y^2 - \left(\lambda^2 - \mu^2\right)yz\right]}$$

---

xvi

$Z\gamma \times y - Z\beta \times x \Rightarrow 2\frac{dM}{dt}\left(y^2 d\lambda - zyd\mu\right) + 2dM\left[\mu\nu yz + \mu\nu y^2 - \left(\lambda^2 y + \mu^2 y\right)x\right] \Rightarrow 2\frac{dM}{dt}\left(zxd\nu - x^2 d\lambda\right) + 2dM\left[\mu\nu x^2 + \lambda\mu xz - \left(\nu^2 y + \lambda^2 y\right)y\right]$
$\rightarrow 2\frac{dM}{dt}\left(y^2 d\lambda + x^2 d\lambda - yzd\mu - xzd\nu\right) + 2\frac{dM}{dt}\left[\lambda\nu yz - \lambda\mu xz + \mu\nu y^2 - \mu\nu x^2 - \left(\mu^2 - \nu^2\right)xy\right]$. O mesmo raciocínio se aplica para os outros eixos.

48. Integra essas três fórmulas para achar o momento total das forças que o corpo deve ser solicitado. Essas integrais se reduzem à integração das fórmulas, que dependem unicamente da forma do corpo e da distribuição da matéria que o constitui em relação aos três eixos fixos *AO, OB* e *OC*. Então, o[xvii]:

- momento de inércia em relação ao eixo *AO* é: $\int dM\left(x^2+y^2\right)=Mf^2$
- momento de inércia em relação ao eixo *OB* é: $\int dM\left(x^2+z^2\right)=Mg^2$
- momento de inércia em relação ao eixo *OC* é: $\int dM\left(y^2+z^2\right)=Mh^2$

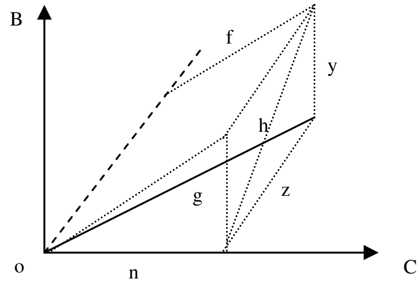
e...

$$\left.\begin{array}{l}\int xydM\left(em\ relação\ a\ OA\right)\\ \int xzdM\left(em\ relação\ a\ OB\right)\\ \int yzdM\left(em\ relação\ a\ OC\right)\end{array}\right\}$$

Contém as forças centrífugas que teriam os corpos, se eles girassem em torno de um dos 3 eixos.

49. Encontra os momentos totais que os corpos devem ser solicitados.

xvii



Pelo gráfico :

$f^2 = x^2 + y^2$

$g^2 = x^2 + z^2$

$h^2 = z^2 + y^2$

$g^2 = x^2 + h^2 - y^2$

I – Momento do eixo *AO* no sentido BC[xviii]:

$$\boxed{2M\left[f^2\frac{d\lambda}{dt}-n^2\frac{d\nu}{dt}+m^2\frac{d\nu}{dt}+\nu\lambda n^2-\lambda\mu m^2-\left(\mu^2-\nu^2\right)l^2+\mu\nu\left(h^2-g^2\right)\right]}$$

II – Momento do eixo OB no sentido CA:

$$\boxed{2M\left[g^2\frac{d\mu}{dt}-l^2\frac{d\nu}{dt}+n^2\frac{d\lambda}{dt}+\lambda\mu l^2-\mu\nu n^2-\left(\nu^2-\lambda^2\right)m^2+\lambda\nu\left(f^2-h^2\right)\right]}$$

III - Momento do eixo OC no sentido AB:

$$\boxed{2M\left[h^2\frac{d\nu}{dt}-n^2\frac{d\lambda}{dt}+l^2\frac{d\mu}{dt}+\mu\nu m^2-\lambda\nu l^2-\left(\lambda^2-\mu^2\right)n^2+\lambda\mu\left(g^2-f^2\right)\right]}$$

<u>Conclusão</u>: Os momentos destas forças dependem tanto das quantidades λ, μ, ν que se ligam ao eixo de rotação e ao movimento rotatório quanto das mudanças instantâneas $d\lambda, d\mu\ e\ d\nu$ que aparecem no intervalo de tempo *dt*.

50. Relaciona as fórmulas ao eixo de rotação *0z*.

Já vimos que:

$$\begin{cases} 0x = \nu\mu \\ xy = \mu u \\ yz = \lambda u \end{cases}$$

... e que a velocidade angular em torno do eixo é $\varpi = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$; assim, em qualquer sentido que esta velocidade seja dirigida, se achará considerando o elemento do corpo situado em *X* (y=0 e z=0) segundo...

---

xviii $\int 2\frac{dM}{dt}\left(y^2d\lambda+x^2d\lambda-yzd\mu-xzd\nu\right)+\int 2dM\left[\lambda\nu yz-\lambda\mu xz+\mu\nu y^2-\mu\nu x^2-\left(\mu^2-\nu^2\right)xy\right]=$

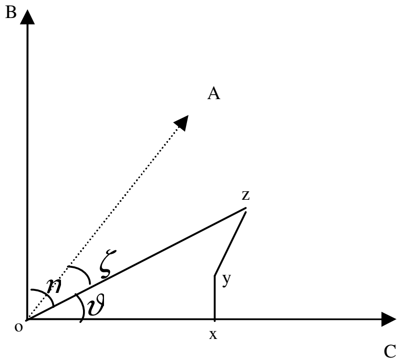
$=\int 2\frac{dM}{dt}\left[\left(y^2+x^2\right)d\lambda-\left(yd\mu-xd\nu\right)z\right]+\int 2dM\left[\left(\nu y-\mu x\right)\lambda z+\left(y^2-x^2\right)\mu\nu-\left(\mu^2-\nu^2\right)xy\right]=$

$=2M\left[f^2\frac{d\lambda}{dt}-n^2\frac{d\nu}{dt}+m^2\frac{d\nu}{dt}+\nu\lambda n^2-\lambda\mu m^2-\left(\mu^2-\nu^2\right)l^2+\mu\nu\left(h^2-g^2\right)\right]$

O mesmo raciocínio se aplica ao eixo *OB* e ao eixo *OC*.

$...OB = \nu z - \lambda x \Rightarrow OB = -\lambda x$

$...OA = \mu x - \nu y \Rightarrow OA = \mu x$



Portanto, o ponto se elevará no plano *BOC* e descobriremos facilmente em qual sentido o corpo girará em torno do eixo *Oz*. Seja agora, a velocidade angular ω_z em torno do eixo *Oz*, de forma que $\omega_z = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$. Em seguida, sejam ζ, η, ϑ os ângulos AOz, BOz, COz e que:

$$Oz = u\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} = u\omega_z$$

Podemos escrever que[xix]:

$$\cos\zeta = \frac{\lambda}{\omega}, \cos\eta = \frac{u}{\omega}, \cos\vartheta = \frac{\nu}{\omega}$$

Teremos sempre:

$$\boxed{\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\vartheta^2 = 1}$$

E assim, podemos escrever:

$$\boxed{\lambda = \omega\cos\zeta,\ \mu = \omega\cos\eta, \nu = \omega\cos\vartheta}$$

51. Presume que para a variação do eixo de rotação *Oz*, os ângulos ζ , η e ϑ variem e, além disso, a velocidade angular varie . Obtém assim:

$$\begin{cases} d\lambda = d\omega\cos\zeta - \omega d\zeta sen\zeta \\ d\mu = d\omega\cos\eta - \omega d\eta sen\eta \\ d\nu = d\omega\cos\vartheta - \omega d\vartheta sen\vartheta \end{cases}$$

Devido ao fato de $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\vartheta^2 = 1$, teremos:

$$\boxed{d\zeta sen\zeta\cos\zeta + d\eta sen\eta\cos\eta + d\vartheta sen\vartheta\cos\vartheta = 0}$$

[xix] Pelo gráfico :

- $\cos\zeta = \frac{\lambda u}{Oz} = \frac{\lambda u}{u\omega} \Rightarrow \cos\zeta = \frac{\lambda}{\omega}$
- $\cos\eta = \frac{\mu u}{Oz} = \frac{\mu u}{u\omega} \Rightarrow \cos\eta = \frac{u}{\omega}$
- $\cos\vartheta = \frac{\nu u}{Oz} = \quad \Rightarrow \cos\vartheta = \frac{\nu}{\omega}$

Assim, como a substituição nessas equações é muito complicada e a posição dos três eixos é arbitrária, Euler imagina que no começo do elemento *dt*, o corpo girou somente em torno do eixo *AO*, de forma que $\mu = 0$ e $\nu = 0$ e portanto, o movimento se realiza no sentido *BC*. Com a velocidade angular ω e o valor de λ sendo positivo teremos:

$$\zeta = 0, \eta = 90^0, \vartheta = 90^0, \text{ com isso: } \lambda = \omega, \mu = 0\ e\ \nu = 0.$$

Depois do tempo *dt*, o eixo de rotação se afasta infinitamente pouco do eixo *AO*, de forma a descrever um ângulo $d\zeta$, com o eixo *OB* um ângulo $90^0 + d\vartheta$ e deve-se ter:

$$\boxed{d\zeta^2 = d\eta^2 + d\vartheta^2}$$

52. Encontra, então, as equações dos momentos requeridos em relação aos três eixos. Com as suposições já feitas pode-se escrever :

$$d\lambda = d\omega$$
$$d\mu = -\omega d\eta$$
$$d\nu = -\omega d\vartheta$$

Esses valores são substituídos pelas expressões já encontradas em (49) e assim o momento requerido para o eixo:

- ✓ *AO* no sentido *BC*:

$$\boxed{2M\left(f^2\frac{d\omega}{dt} + \frac{\eta^2\omega d\eta}{dt} + \frac{m^2\omega d\vartheta}{dt}\right)}$$

- ✓ *OB* no sentido *CA*:

$$\boxed{2M\left(-\frac{\eta^2 d\omega}{dt} - \frac{g^2\omega d\eta}{dt} + \frac{l^2\omega d\vartheta}{dt} + m^2\omega^2\right)}$$

- ✓ *OC* no sentido *AB*:

$$\boxed{2M\left(-\frac{m^2 d\omega}{dt} + \frac{l^2\omega d\eta}{dt} - \frac{h^2\omega d\vartheta}{dt} + n^2\omega^2\right)}$$

53. Avalia o que é necessário para acelerar o movimento de rotação de um corpo.

Para que o corpo gire constantemente em torno do <u>mesmo eixo AO</u> ($d\eta = 0$ e $d\vartheta = 0$),porém, com um movimento variável, é preciso que este corpo seja solicitado pelas forças, que fornecem para o eixo :

- ✓ *AO* um momento no sentido *BC*: $\dfrac{2Mf^2 dw}{dt}$
- ✓ *OB* um momento no sentido *CA*: $2M\left(m^2w^2 - \dfrac{n^2dw}{dt}\right)$
- ✓ *OC* um momento no sentido *AB*: $2M\left(n^2w^2 - \dfrac{m^2dw}{dt}\right)$

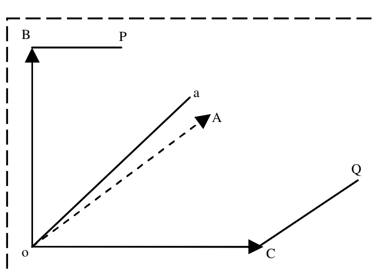
Para acelerar o movimento de rotação é preciso um momento de forças para o eixo *AO*, o qual seja proporcional a Mf^2, isto é um MOMENTO DE INÉRCIA do corpo em relação ao eixo *AO*. Entretanto, para que o corpo gire em torno do eixo imóvel AO com um movimento uniforme, é preciso que este corpo seja solicitado pelo lado de fora por forças que não tenham momento em relação ao eixo *AO*, mas que dão para:

- ✓ o eixo *OB* no sentido *CA* $\Rightarrow$ $2Mm^2\omega^2$
- ✓ o eixo *OC* no sentido *BA* $\Rightarrow$ $2M\eta^2\omega^2$

Assim, o movimento não persistiria sem o auxílio de forças externas, a menos que seja $m^2 = 0$ e $n^2 = 0$ ou $\int xzdM = 0$ e $\int yzdM = 0$, onde as forças centrífugas se destroem mutuamente.

<u>Pesquisa do movimento de um corpo sólido em torno de seu centro de gravidade onde as forças que o corpo é solicitado são dadas:</u>

54.



Esclarece que tratará do caso em que:

$$\begin{cases} \int dM\left(x^2 + y^2\right) = Mf^2 \\ \int dM\left(x^2 + z^2\right) = Mg^2 \\ \int dM\left(y^2 + z^2\right) = Mh^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \int xydM = Ml^2 \\ \int xzdM = Mm^2 \\ \int yzdM = Mn^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 0x = \nu u \\ xy = \mu u \\ yz = \lambda u \end{cases} \quad \text{e} \quad \omega = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}.$$

55. Encontra as equações que determinam mudanças infinitamente pequenas $d\lambda$, $d\mu$ e $d\nu$, que serão produzidas num elemento de tempo *dt*. Se o corpo for solicitado por forças quaisquer, para achar a mudança de movimento, teríamos que relacionar todos os momentos com os três eixos. O momento que resulta dessas forças para o eixo:

- ✓ *AO* no sentido *BC* = *Pa*
- ✓ *OB* no sentido *CA* = *Qa*
- ✓ *OC* no sentido *CO* = *Ra*

Iguala, então, esses momentos àqueles que foram encontrados no (49)e obtém as três equações:

I - $\frac{Pa}{2M} = f^2 \frac{d\lambda}{dt} - n^2 \frac{d\mu}{dt} + m^2 \frac{d\nu}{dt} + \nu\lambda n^2 - \lambda\mu m^2 - (\mu^2 - \nu^2)l^2 + \mu\nu(h^2 - g^2)$

II - $\frac{Qa}{2M} = g^2 \frac{d\mu}{dt} - l^2 \frac{d\nu}{dt} + n^2 \frac{d\lambda}{dt} + \lambda\mu l^2 - \mu\nu n^2 - (\nu^2 - \lambda^2)m^2 + \lambda\nu(f^2 - h^2)$

III - $\frac{Ra}{2M} = h^2 \frac{d\nu}{dt} - n^2 \frac{d\lambda}{dt} + l^2 \frac{d\mu}{dt} + \mu\nu m^2 - \lambda\nu l^2 - (\lambda^2 - \mu^2)n^2 + \lambda\mu(g^2 - f^2)$

56. Admite que a resolução dessas equações nos conduzirá a fórmulas muito grandes. Então, supõe que o corpo gire em torno do eixo *AO* no sentido *BC* com uma velocidade angular ω e que depois do tempo *dt* o eixo de rotação mude, de forma que faz-se:

- com o eixo *OA* $\Rightarrow$ Um ângulo $d\zeta$,
- com o eixo *OB* $\Rightarrow$ Um ângulo $90^0 + d\eta$,
- com o eixo *OC* $\Rightarrow$ Um ângulo $90^0 + d\vartheta$ e

que a velocidade angular seja: ω + $d\omega$. Já vimos que: $d\zeta^2 = d\eta^2 + d\vartheta^2$

Assim:

$$\text{I - } \frac{Pa}{2M} = \frac{f^2 d\omega}{dt} + \frac{n^2 \omega d\eta}{dt} + \frac{m^2 \omega d\vartheta}{dt}$$

$$\text{II - } \frac{Qa}{2M} = \frac{-n^2 d\omega}{dt} - \frac{g^2 \omega d\eta}{dt} + \frac{l^2 d\omega d\vartheta}{dt} + m^2\omega^2$$

$$\text{III - } \frac{Ra}{2M} = \frac{-m^2 d\omega}{dt} + \frac{l^2 \omega d\eta}{dt} - \frac{h^2 \omega d\vartheta}{dt} - n^2\omega^2$$

57. Determina, enfim, as três equações que nos fornecerão para cada instante a mudança que o corpo sofrerá devido ou a alteração da posição do eixo de rotação ou a modificação da velocidade angular. Observa, porém, que será preciso mudar a posição dos três eixos *AO,OB* e *OC* afim de que o eixo de rotação seja sempre *AO*. Será preciso, também, recalcular para cada instante os v valores l^2, m^2, n^2, f^2, g^2, e h^2, pois, as mudanças da situação do corpo em relação aos três eixos, será causada por variações contínuas. Assim, a resolução das três equações seguintes nos fornecerá para $d\omega, d\eta$ *e* $d\vartheta$ os seguintes valores:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pa\left(g^2h^2 - l^4\right) + Qa\left(h^2n^2 + l^2m^2\right) + Ra\left(g^2m^2 + l^2n^2\right) - 2M\omega^2\left[m^2n^2\left(h^2 - g^2\right) + l^2\left(m^4 - n^4\right)\right]}{2M\left(f^2g^2h^2 - f^2l^4 - g^2m^4 - h^2n^4 - 2l^2m^2n^2\right)}$$

$$\frac{\omega d\eta}{dt} = \frac{Pa\left(n^2h^2 + l^4m^2\right) + Qa\left(f^2h^2 - m^4\right) + Ra\left(f^2l^2 + m^2n^2\right) - 2M\omega^2\left[m^2f^2h^2 - f^2l^2m^2 - m^2\left(m^4 - n^4\right)\right]}{2M\left(f^2g^2h^2 - f^2l^4 - g^2m^4 - h^2n^4 - 2l^2m^2n^2\right)}$$

$$\frac{\omega d\vartheta}{dt} = \frac{Pa\left(g^2m^2 + l^2n^2\right) + Qa\left(f^2l^2 - m^2n^2\right) + Ra\left(f^2g^2 + n^4\right) + 2M\omega^2\left[n^2f^2g^2 - f^2l^2m^2 - n^2\left(m^4 - n^4\right)\right]}{2M\left(f^2g^2h^2 - f^2l^4 - g^2m^4 - h^2n^4 - 2l^2m^2n^2\right)}$$

O leitor moderno reconhece aqui as equações :

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 = \tau_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = \tau_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = \tau_3$$

chamadas de equações de Euler para o movimento dos corpos rígidos, onde I é o tensor de inércia, ω a velocidade angular, e τ o torque total em relação a um ponto. Se houver um ponto do corpo que permaneça fixo, ele será considerado a origem dos eixos, e os momentos de inércia e os torques deverão ser calculados em relação e esse ponto.

Essa solução do corpo rígido é generalizada para corpos em geral com $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$.

Com isso vemos como uma vez estabelecida a lei para a massa puntual, ela foi usada para o desenvolvimento da equação de movimento do corpo rígido pelas mãos de Eüler. E também, o quanto foi importante a participação do teorema da queda livre de Galileu no entendimento do movimento geral de uma massa puntual e na elaboração das equações gerais do movimento (hoje chamadas de "equações de Newton"). Concluímos, ao rastrear os cálculos de Eüler que, ao analisar a variação de uma das coordenadas como uma "altura de queda", ele entendia a força com o mesmo conteúdo ontológico do peso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] TRUESDELL, C., *Essays in the History of Mechanics.* New York, Springer- Verlag, 1968.

[2] GUTHRIE, W.K.C., *The Greek Philosophers* (*from Thales to Aristotle*). New York, Harper Torchbooks, 1975

[3] ROSA, L.P., *Tecnociências e Humanidades: Novos Paradigmas, Velhas Questões.* São Paulo, Paz e Terra, v.1, 2005.

[4] DIJKSTERHUIS, E.J.,*The Mechanization of the World Picture-Pythagoras to Newton.*Princeton, University Press, 1986.

[5] ROLLER, Duane H.D., "Greek Atomic Theory" , *American Journal Physics*, 49, pp.206-210, 1981.

[6] VLASTOS,G.,*O Universo de Platão*, Editora Universidade de Brasília, 1987.

[7] FRANKLIN, A., "Principle of Inertia in the Middle Ages". *American Journal of Physics,* 44, pp. 529-544, 1976.

[8] ARISTOTLE, *Physics*, traduzido por R.P. Hardie and R.K.Gaye, citado em M.R. Cohen e I.E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science,* Harvard Universtity, Cambridge, pp.203-204, apud franklin, 1948.

[9] PHILOPONUS,J., *Commentary on Aristotle's Physics,* ref 10, pp.221-222, apud Franklin.

[10] MOODY,E.A., *Studies in Medieval Philosophy, Science, and Logic*.London, University of California, 1975.

[11] BURIDAN,J.,*Questions on the Eight Books of the Physics of Aristotle*, M.Clagett, pp. 534-535, apud Franklin.

[12] DIAS, P.M.Cardoso, "F=ma?!!(O Nascimento da Lei Dinâmica)". *Revista Brasileira de Ensino de Física.*v.28,n.2,p.205-234, 2006.

[13] GALILEI,G., *Diálogo Entre os Dois Máximos Sistemas do Mundo Ptolomaico e Copernicano,* traduzido para o português por Pablo Rubén Mariconda, Discurso Editorial/ Imprensa Oficial, São Paulo, p.99, 2004.

[14] COPÉRNICO,N., *As Revoluções dos orbes Celestes,* Fundação Calouste Gulbenkian, p 42, Livro 1, cap 8, 1984.

[15] GALILEI,G.,op cit, p 94.

[16] GALILEI,G.,op cit, p 112.

[17] COPÉRNICO,N., op cit, livro 1, cap.5, p29.

[18] GALILEI,G.,op cit, p 194.

[19] Op cit, p 197.

[20] Op cit, pp. 224-225.

[21] Op cit, p 253.

[22] Op cit, p 228.

[23] Op cit, p 275.

[24] GAUKROUGER,S.,*Descartes – Uma Biografia Intelectual*, Editora da UERJ e Contraponto, 1999.

[25] BLACKWELL,R.J., " Descartes's Laws of Motion" , *ISIS,* 57, pp.220-233, 1960.

[26] DIAS, P.M.C., "*O Desafio do Círculo: Descartes e o "Demônio da Desilusão*" in: Saul Fuks (org.), *Descartes – 400 anos: Um Legado Científico e Filosófico,* Relume Dumará, Rio, 1997.

[27] WESTFALL, Richard S., *The Construction of Modern Science (Mechanisms and Mechanics)*, Cambridge University press, Cambridge, 1977.

[28] DESCARTES, R.,"Principles de la Philosophie", *in Ouvre de Descartes,* C. Adam e P. Tannery (editores), J. Vrin, Paris, 1971.

[29] SMITH, George E. "The Methodology of the *Principia*", in: Cohen, I. Bernard e Smith, George E. (editors) *The Cambridge Companion to Newton,* Cambridge University press, pp 138-173, 2002.

[30] DESCARTES, R., op cit, p133.

[31] DESCARTES, R., op cit, p134.

[32] DESCARTES, R., op cit, p132.

[33] DESCARTES, R., op cit, p135.

[34] GALILEI,G., *Dialogues Concerning Two New Sciences,* Dover Publications, Inc., New York, p 174, 1954.

[35] YODER, Joella G., *Unrolling Time, Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature,* Cambridge University press, 1990.

[36] HUYGENS, C., *L'Horloge Oscillante ou démonstrations géometriques au sujet du mouvement dês corps suspendus appliqué aux horloges;* traduzido para o francês, in: Oeuvres Completes de Christiaan Huygens, Société Hollandaise des Sciences, 22 vols, 1888-1950, v. XVI, 1929.

[37] HUYGENS, C., op cit, 17, pp 276-277, apud Yoder, 1929.

[38] HUYGENS, C., "De Vi Centrifuga", 1703, traduzido para o francês, in: Oeuvres Completes de Christiaan Huygens, Société Hollandaise des Sciences, 22 vols., 1888-1950, v. XVI,pp. 255-301, p.266, 1929.

[39] HERIVEL, J., *The Background to Newton's Principia,* Oxford, 1965.

[40] COHEN, B.I., *The Newtonian Revolution (with illustrations of the transformation on scientifics ideas),* Cambridge University Press, 1980.

[41] NEWTON, I., *The Principia (Mathematical Principles on Natural Philosophy),* A New Translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, University of California Press, London, p 102, 1999.

[42] NEWTON, I., op cit,p 416-417.

[43] Op cit,p 439.

[44] Op cit,p 444.

[45] Op cit,p 454.

[46] Op cit,p 462.

[47] Op cit,p 530.

[48] COHEN, B.I. "Newton's Second Law and the Concept of Force in the *Principia*" in: R.Pelter (ed.) *The Annus Mirabilis of Sir Isaac Newton (1666-1966),*The M.I.T. Press, p. 143-185, 1970.

[49] POURCIAU,B., "Newton's Interpretation of Newton's Second Law". *Arch.Hist.Exact Sci.*60,pp 157-207, 2006.

[50] EULER,L., "*Décourverte d'un Nouveau Principle de Mécanique",* Opera omnia II,5, pp. 81-108, 1750.