UMA ANÁLISE DOS PRINCIPAIS LIVROS - TEXTO DE GEOMETRIA, ADOTADOS NO BRASIL – UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-MATEMÁTICA DESDE A VINDA DA FAMÍLIA REAL ATÉ A REPÚBLICA.

Katia Maria Pereira Dutra

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA.

Aprovada por:

Prof. Luiz Carlos Guimarães, Ph.D.

Prof. Ricardo Silva Kubrusly, Ph.D.

Prof. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2007

DUTRA, KATIA MARIA PEREIRA

Uma Análise dos Principais Livros - Texto de Geometria, Adotados no Brasil – Uma Abordagem Histórico-Matemática Desde a Vinda da Família Real até a República [Rio de Janeiro] 2007

VIII, 142 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2007)

Dissertação – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Livros-texto-História 2. Geometria-Ensino

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UMA ANÁLISE DOS PRINCIPAIS LIVROS-TEXTO DE GEOMETRIA, ADOTADOS NO BRASIL – UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-MATEMÁTICA DESDE A VINDA DA FAMÍLIA REAL ATÉ A REPÚBLICA.

Katia Maria Pereira Dutra

Março/2007

Orientador: Luiz Carlos Guimarães

Programa: História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Este trabalho faz uma análise e comparação de seis livros-texto de matemática, obras dos séculos XVIII e XIX. É uma análise histórica e matemática de livros de autores brasileiros e de traduções de autores franceses que foram utilizados no Brasil nesse período.

Procurou-se examinar aspectos significantes dos livros dessa época, enfocando não só o conteúdo como a metodologia, bem como as demonstrações realizadas.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

AN ANALYSIS OF THE MAIN GEOMETRY TEXT-BOOKS, ADOPTED IN BRAZIL – A HISTORICAL-MATHEMATICAL APPROACH FROM REAL FAMILY ARRIVAL TO REPUBLIC

Katia Maria Pereira Dutra

March/2007

Advisor: Luiz Carlos Guimarães

Program: History of Sciences and Technique and Epistemology

This work makes an analysis and comparison of six Mathematics text-books, works of XVIII and XIX century. It is a historical and mathematical analysis of Brazilian author books and French author translation, which were used in Brazil in that period.

It was sought to examine significant aspects of books from that time, focusing not only on content and methodology, but also realized demonstrations.

SUMÁRIO

RESUMO iii

ABSTRACT iv

INTRODUÇÃO 1

1. APRESENTAÇÃO DOS AUTORES DAS OBRAS 3

1.1. Pe. Manoel de Campos 3

1.2. Adrien-Marie Legendre 7

1.2.1 Sobre o tradutor Manoel Ferreira Araújo Guimarães 13

1.3. Sylvestre-François Lacroix 15

1.4. Francisco Villela Barbosa 20

1.5. Christiano Benedicto Ottoni 24

1.6. Timotheo Pereira 30

2. ESTUDO DO POSTULADO DAS PARALELAS 35

2.1 Um Breve Histórico 36

2.2 Comparação dos Autores 42

3. TÓPICOS DA GEOMETRIA ESPACIAL 54

3.1 Comparando as Definições dos Autores 54

3.2 Retas Perpendiculares no Espaço 68

3.3 Volume do Paralelepípedo 77

3.4. A Relação entre o Volume da Pirâmide e o Volume de um Prisma 90

3.5 Área do Cone 106

3.6 Volume da Esfera 116

CONSIDERAÇÕES FINAIS 126

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 131

NOTAS 134

ANEXO 140

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 6
Figura 1.2 12
Figura 1.3 19
Figura 1.4 23
Figura 1.5 29
Figura 1.6 34
Figura 2.1 40
Figura 2.2 44
Figura 2.3 48
Figura 2.4 47
Figura 2.5 48
Figura 2.6 49
Figura 2.7 50
Figura 2.8 51
Figura 2.9 52
Figura 2.10 53
Figura 3.1 57
Figura 3.2 58
Figura 3.3. 60
Figura 3.4 61
Figura 3.5 62
Figura 3.6 63
Figura 3.7 69
Figura 3.8 70
Figura 3.9 71
Figura 3.10 73
Figura 3.11 75
Figura 3.12 76
Figura 3.13 78

Figura 3.14	**79**
Figura 3.15	**81**
Figura 3.16	**83**
Figura 3.17	**86**
Figura 3.18	**86**
Figura 3.19	**90**
Figura 3.20	**91**
Figura 3.21	**94**
Figura 3.22	**96**
Figura 3.23	**98**
Figura 3.24	**99**
Figura 3.25	**100**
Figura 3.26	**101**
Figura 3.27	**103**
Figura 3.28	**104**
Figura 3.29	**107**
Figura 3.30	**111**
Figura 3.31	**114**
Figura 3.32	**115**
Figura 3.33	**118**
Figura 3.34	**121**
Figura 3.35	**123**

INTRODUÇÃO

Este estudo trata da análise e evolução de "livros texto/didáticos" de matemática, obras dos séculos XVIII e XIX. Naquela época, os textos utilizados nos ensinos básico e secundário eram os mesmos utilizados no ensino superior. (SCHUBRING, 2003). Os chamados "livros didáticos" de hoje são vistos pelos profissionais de ensino em sua maioria como obras superficiais e de cunho fundamentalmente comercial em oposição aos livros dos cursos superiores de saber clássico.

Este trabalho visa a estudar obras de alguns matemáticos proeminentes ao longo da história da matemática e do seu ensino no Brasil. Abordaremos tópicos da geometria plana e espacial com o objetivo de a evolução do ensino de certos conceitos de alguns sólidos geométricos.

A análise apresentada aqui não será apenas um relato histórico, mas também de cunho matemático.

No primeiro capítulo, começamos com um breve histórico dos seguintes autores e suas obras:

i) Pe. Manoel de Campos; "*Elementos de Geometria Plana e solida*" segundo a ordem de Euclides, principe dos geometras", 1735;
ii) Adrien-Marie Legendre; *"Elementos de Geometria"*, tradução de Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, 1809;
iii) Sylvestre-François Lacroix , "*Elementos de Geometria*", tradução de Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, 1824;
iv) Francisco Villela Barbosa, o marquês de Paranaguá, e seus "*Elementos de Geometria",* 1838;
v) Cristiano Benedito Ottoni, "*Elementos de Geometria*" e trigonometria rectilinea", 1857;
vi) Timotheo Pereira, *"Curso de Geometria",* 1890.

No segundo capítulo, estudaremos também o quinto Postulado de Euclides, além de contextualizá-lo e de descrever a obra euclidiana.

O capítulo terceiro fará comparações do teorema de retas perpendiculares no plano, do ponto de vista dos autores estudados. Neste capítulo faremos, também, uma análise de como alguns tópicos da geometria espacial são apresentados naquelas obras. Para isso compararemos as definições utilizadas e os aventuais axiomas usados pelos autores na construção daquela parte da geometria. Analisaremos alguns enunciados e demonstrações de teoremas, em particular os relacionados ao volume do paralelepípedo, ao volume do tetraedro e a relação entre eles. Observaremos o desenvolvimento do conceito e do cálculo do volume de um prisma e de uma pirâmide, bem como da área do cone e volume da esfera.

No quarto e último capítulo, procuraremos fazer uma reflexão final (o que não significa encerrar a discussão) acerca dos principais temas articulados em torno do tema central da dissertação.

Capítulo 1

APRESENTAÇÃO DOS AUTORES E DAS OBRAS

O universo dos livros didáticos de matemática de interesse histórico seja por sua metodologia, seja pela notoriedade do autor ou da instituição responsável, número de traduções e edições, etc., é relativamente pequeno.

A escolha das obras que serão nosso objeto de estudo foi baseada principalmente em sua importância no cenário do ensino da matemática no Brasil.

Neste capítulo apresentaremos as obras, juntamente com uma pequena biografia de seus autores. Procuramos concomitantemente, oferecer uma visão do contexto histórico-cultural em que esses textos foram escritos e utilizados.

1.1. Pe. Manoel de Campos

O primeiro autor estudado é o padre Manoel de Campos, autor do livro *Elementos de Geometria Plana, e Sólida, segundo a ordem de Euclides, príncipe dos geômetras*, de 1735.

O padre Manoel de Campos nasceu em Lisboa, provavelmente pelos anos de 1680. Foi professor em Madri, e depois na Aula de Esfera do *Collegio de Santo Antão* da Companhia de Jesus de Lisboa. Pertenceu à Companhia de Jesus, foi acadêmico da Academia de História (SILVA, 1911)

A publicação deste livro foi para ser usado na real Aula de Esfera, do então Collegio de Santo Antão, da Companhia de Jesus de Lisboa Ocidental. Segundo alguns autores de História da Matemática, entre eles Asger Aaboe (AABOE, 2002, p. 89), Wagner Valente (VALENTE, 1999, p. 37) e Oliveira Castro (CASTRO, 1999, p. 13) o grande merecimento desse livro foi o de ser a primeira compilação de alguns tópicos dos *Elementos de Euclides* em português.

O livro do Padre Campos disserta sobre a divisão da Geometria como ela era vista na época. O prólogo segue apresentando um esclarecimento histórico crítico sobre a Geometria.

> *"Duas são as Geometrias; huma Practica* e outra *Especulativa*: a Practica, de onde nasceo a *Especulativa*, só trata das medidas vulgares, e proprias dos usos humanos; como são *Distancias, Alturas, Profundidades, Niveis, Aqueductos, Areas, Corpos,* etc. A *Especulativa*, que foy a que promoveo, e aperfeiçoou a *Practica*, estende-se, como disse, a toda a Quantidade continua. A *Especulativa* consta principalmente de 3 partes, a saber, *Elementos de Euclides, Esfericos de Theodósio, Cônicos de Apollonio*, a primeira, e a segunda (a que se pode ajuntar a Trigonometria) chama-se *Geometria Inferior*, a qual toda se absolve por via de Regoa e Compasso: e tem por objectos principais, nos Planos o Circulo, e nos Solidos a Esfera. A terceira chama-se *Geometria Superior*, a qual tem por objecto principal a Pyramide Conica, cortada em diferentes sitios com 3 planos, de que resultarão 3 mysteriosas curvas, a saber, a *Parabola*, a *Elipse* e a *Hyperbola*: a estas se ajuntão muitas outras de diferentes propriedades, como são a *Quadratriz*, a *Cissoide*, a *Espiral*, a *Conchoide* etc."
>
> (CAMPOS, 1735, Prolusão[1])

Os *Elementos de Geometria* de Campos são divididos em capítulos ou livros, como *Os Elementos* de Euclides. O de Campos é composto de nove livros.

O Livro I apresenta inicialmente as definições de Campos para os termos utilizados na obra. Ele divide o que chama de *proposições* em dois tipos:

- Problema: que ensinam a construir figuras;
- Theoremas: o que demonstram as propriedades das figuras já formadas.

A estas duas ele chama de "Proposições Perfeitas". Ele classifica Lema, Porisma, Corolario e Escolio como "proposições imperfeitas" e segundo este autor, "servem para demonstrar mais facilmente as primeiras, ou se inferem delas".

(CAMPOS, 1735, p.10).

Campos também se preocupa em colocar um quadro explicativo das abreviaturas utilizadas em seu compêndio.

A definição de Axioma e Postulado vem em separado, antes dos cinco Postulados e 15 Axiomas.

> Postulado: he o que se pede, e não se pode negar. Pede-se pois para se conceder.

> Axioma: he uma sentença evidente, a qual por si mesma se manifesta, como a luz.
>
> (CAMPOS, 1735, pp. 7 - 8)

A seguir ele apresenta os cinco postulados e quinze teoremas. Prossegue com as definições elementares da geometria: ponto, linha, termos da linha, linha reta, superfície, termos da superfície, plano ou superfície plana, ângulos. Define postulado, axioma, proposições, escólio, corolário. Exemplifica as proposições e corolários. Aqui ele trata de retas, triângulos, ângulos, igualdade de triângulos, ângulos internos do quadrado, ângulos internos e externos de polígono qualquer, ângulos opostos de um paralelogramo, ângulos em um paralelogramo, teorema de Pitágoras. Nas proposições ele apresenta problemas, teoremas e corolários.

O Livro II apresenta quatorze proposições e traz estudo de transformações de áreas, de álgebra geométrica. Duas das proposições apresentam uma linguagem mais moderna, como o enunciado que conhecemos hoje como a lei dos cossenos.

O Livro III traz a definição de círculos e seus elementos, mas não faz distinção entre círculo e circunferência. Este livro apresenta ainda um estudo sobre as posições de retas e círculos, posições relativas entre dois círculos, ângulos e arcos na circunferência.

No Livro IV é estudada a inscrição e circunscrição de figuras retilíneas na circunferência, e é escrito por meio de problemas.

O Livro V trata de razão, proporção, semelhança e traz um apêndice próprio composto de treze parágrafos aonde ele explica as propriedades das proporções.

A semelhança de figuras, de triângulos, terceira proporcional, quarta proporcional, média proporcional, semelhança de polígonos é vista no Livro VI.

Manoel de Campos explica que não tratou dos livros de Euclides que explanam sobre aritmética, mas passa direto para sólidos geométricos no Livro VII, que equivale ao Livro XI de Euclides. Apresenta as definições de sólido, prisma, ângulos poliédricos, paralelepípedo e cubo.

O Livro VIII (ou XII) estuda a inscrição dos poliedros regulares na esfera (círculo) e traz um segundo apêndice com uma seleção de teoremas de Arquimedes, sobre esfera, cilindro e pirâmide cônica. Contém também um terceiro apêndice sobre a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.

---

[1] Prefácio.

Campos encerra com uma Diatriba[2] do ponto e da unidade. O autor considera importante e necessário fazer uma conexão da geometria com a física, na composição do contínuo. Procura esclarecer "as dificuldades" do modo com que uma e outra consideram a quantidade. O livro não contém índice ou sumário.

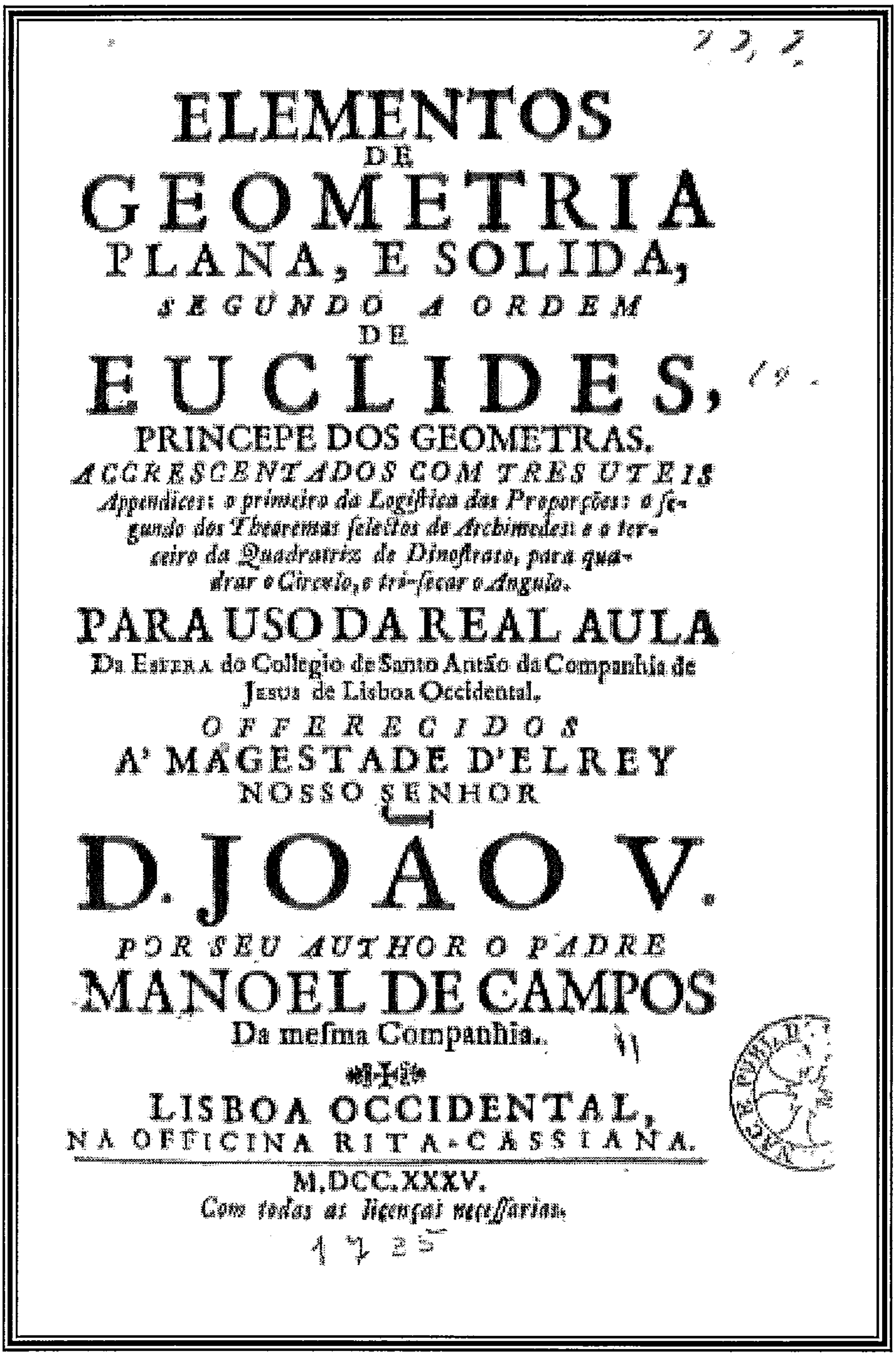

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
PLANA, E SOLIDA,
SEGUNDO A ORDEM
DE
EUCLIDES,
PRINCEPE DOS GEOMETRAS.
ACCRESCENTADOS COM TRES UTEIS
Appendices: o primeiro da Logistica das Proporções; o segundo dos Theoremas selectos de Archimedes; e o terceiro da Quadratriz de Dinostrato, para quadrar o Circulo, e tri-secar o Angulo.
PARA USO DA REAL AULA
Da Esfera do Collegio de Santo Antão da Companhia de Jesus de Lisboa Occidental.
OFFERECIDOS
A' MAGESTADE D'ELREY
NOSSO SENHOR
D. JOAÕ V.
POR SEU AUTHOR O PADRE
MANOEL DE CAMPOS
Da mesma Companhia.
LISBOA OCCIDENTAL,
NA OFFICINA RITA-CASSIANA.
M.DCC.XXXV.
Com todas as licenças necessarias.

Fig. 1.1

Frontispício do Livro do Padre Manoel de Campos

---

[2] Diatriba: discussão acerca de algo, crítica exarcebada.

1.2. Adrien-Marie Legendre

A obra a seguir é *"Elementos de Geometria"*, de 1809, tradução de Manoel Ferreira de Araújo Guimarães (1777-1838) da 5ª edição do original *"Éléments de Géométrie"*, de autoria do francês, Adrien-Marie Legendre[3] (1752-1833), de 1794.

Legendre nasceu em 1752, na França. Veio de família que, embora não fosse rica, tinha recursos suficientes para que ele se dedicasse ao estudo e à pesquisa (ÁVILA, 1991).

Ocupou vários cargos públicos como professor consultor científico, em especial na época da Revolução Francesa. (EVES, 2004).

Legendre produziu trabalhos importantes em Astronomia, Mecânica, Física matemática e Matemática nas áreas de Análise, Equações Diferenciais e Teoria dos números (EVES, 2004).

Em meados do século XVI, a França começou a escrever seus próprios livros textos. Isso gerou publicações de livros didáticos, que se preocupavam com as necessidades do estudante em detrimento das exigências do rigor. Esse "novo" estilo de livros não era conhecido em outras culturas.

Alguns matemáticos que faziam parte do grupo dos "matemáticos da Revolução Francesa" sentiam necessidade de maior rigorno estudo da matemática. Por exemplo, o matemático Lazare Nicolas Marguerite Carnot[4] que relatava certa precariedade da geometria de Bézout. Isto levou Legendre, que era um analista por excelência, à reorganização e à simplificação das proposições dos *Elementos* de Euclides e deu origem ao seu livro "*Éléments de Géométrie*", que alcançou muito sucesso em vários países. No prefácio da obra, Legendre diz que seu objetivo era apresentar uma geometria que satisfizesse o espírito. Obteve como resultado um texto notavelmente bem-sucedido, considerado uma das obras da Revolução, com grande influência no meio da educação.

Legendre dizia que a sua intenção era escrever um livro mais rigoroso, mas não exagerou este rigor às custas da clareza.

Sobre ele, Lacroix escreve: "O Sr. Legendre , em 1794, empreendeu fazer reviver entre nós o gosto pelas demonstrações rigorosas." (SCHUBRING, 2003, p. 142).

---

[3] Em algumas das suas cartas aparece a forma "Le Gendre". Em geral o nome é escrito Legendre.
[4] Matemático francês, foi aluno de Monge, se destacando com a *Géométrie de Position.*

Na verdade, conta Schubring, que o matemático Lagrange foi quem estava encarregado de escrever os "*livres élémentaires* para *Ècole Normale.* Mas que este pediu para trabalhar com Legendre. E foi Legendre quem sozinho escreveu o livro e tratou somente da geometria. Seu livro ganhou o concurso para utilização na *École Normale* e depois disso teve diversas edições e traduções.

Na Itália recém unificada, em 1867, o livro de Legendre foi substituído pelo de Euclides, para o ensino secundário. Alegava-se falta de rigor de Legendre, mas Schubring (SCHUBRING, 2003, p. 144) levantou outras três razões:

A primeira seria política: a rejeição de um autor contemporâneo francês por um grego (grego sim, mas um clássico, afinal foi o "pai" da geometria).

A segunda razão, segundo Schubring, era:

> a intenção de alcançar uma integração adequada da instrução matemática com os valores dominantes das escolas secundárias italianas. Tais valores eram definidos pelos estudos literários e pela línguas clássicas conforme SCARPIS[5], 1911, p. 27)
> (SCHUBRING, 2003, p. 144).

Esta função, para os educadores italianos na época, era a de "ginástica mental" para desenvolver habilidades de raciocínio (SCARPIS, 1911), em oposição à matemática com "objetivos práticos".

A terceira razão principal para a rejeição a Legendre, era a de que a geometria euclidiana seria completa. Com base nesta idéia purista, seu ensino não deveria se apoiar na aritmética ou na álgebra. Legendre teria misturado estes assuntos em seu livro. Na verdade, segundo Schubring, Legendre tinha uma visão diferente de rigor, com um apoio mútuo entre álgebra e geometria. (SCHUBRING, 2004). Segundo Schubring, Legendre explicaria, em seu Livro III, (que trata das medidas nos polígonos, semelhança e proproção nas figuras, como veremos a seguir) que várias de suas demonstrações usariam artifícios algébricos. (SCHUBRING, 2004, p. 149)

Sobre este tópico, August Leopold Crelle, um dos tradutores dessa obra de Legendre, é citado por Shubring por sua defesa àquele:

---

[5] SCARPIS, v. (1911). *L'insegnamento della matematica nelle scuoleclassiche. I. I successivi programmi dal 1867al 1910.* Commissione Internazionale dell' Insegnamento Matemático, Atti della Sottocommissione Italiana (Roma).

> O uso da aritmética e da álgebra,..., não era pejudicial ao rigor na geometria – ao contrário, aumentava o seu rigor, já que essas disciplinas são mais abstratas (CRELLE[6] 1833, p.65 citado por SCHUBRING, p.149, 2003).

Crelle concluiu que o uso dessas disciplinas, deveria ser ampliado junto à geometria, e não diminuído, por maximizar o rigor.

Outras críticas à geometria de Legendre foram feitas, mas sob outro enfoque.

Schubring, Hermann Hankel e August Möebius acusam Legendre de deduzir a doutrina de semelhança "da já pressuposta aplicabilidade da álgebra à geometria" (SCHUBRING, 2003, p. 150) e "sem ter demonstrado aplicabilidade da análise à geometria (SCHUBRING, 2003, p. 150). Mas, ainda segundo o próprio Schubring.:

> a abordagem de Legendre teve o mérito de demonstrar a diferença entre ângulos, que possuem uma medida absoluta, e comprimentos, que não possuem. Essa diferença foi um dos elementos do nascimento das geometrias não-euclidianas.
>
> (SCHUBRING, 2003, p.151).

A tradução que utilizamos traz um *prólogo do tradutor* que, além das explicações sobre a sua própria tradução, traz também, a divisão do livro traduzido, funcionando como um índice.

O livro de Legendre é composto de oito Livros e de três apêndices Os quatros primeiros Livros tratam somente de figuras planas.

No Livro primeiro, intitulado Princípios, ele apresenta as definições elementares de geometria, cerca de 25, seguidas de 5 axiomas (não os postulados) de Euclides.

Explica os termos: axioma, teoremas, problemas, lema, (o nome proposição, é atribuído indiferentemente aos teoremas, problemas e lemas), corolário, escólio, hipótese:

> Axioma he huma proposição evidente por si mesma.
>
> Theorema he huma verdade que vem a ser evidente por meio de hum raciocinio que se chama demonstração.

---

[6] CRELLE, August Leopold (1822). "Vorrede. In: Legendre, Adrien Marie. *Die Elementte und der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen begleitet*, A. L. Crelle (hrsg). Berlim, pp iii-iv, e, [2. e.: Berlin, Rücker, 1833), pp.iii-vi] .

> Problema he huma questão proposta que requer huma solução.
>
> Lemma he huma verdade empregada subsidiariamente para demonstração de hum theorema ou solução de hum problema.
>
> O nome commum de proposição se attribue indifferentemente aos theoremas, problemas e lemmas.
>
> Corollario he a consequencia que se deduz de huma ou muitas proposições.
>
> Scholio he uma advertencia ácêrca de huma ou de muitas proposições precedentes, que tende a fazer perceber o seu encadeamenteo, a sua utilidade, a sua restricção ou a sua extensão.
>
> Hypothese he huma supposição feita, quer no enunciado da proposição, quer no decurso de huma demonstração.
>
> (LEGENDRE, 1809, p. 6)

Neste capítulo também há os significados dos sinais: sinal de igualdade (=), sinal de maior e menor (> e <), o sinal de mais, indicando adição (+), o sinal de multiplicação (x). Trata de teoremas de retas perpendiculares, ângulos suplementares, ângulos opostos pelo vértice; condição de existência de um triângulo, igualdade de triângulos, retas perpendiculares, ponto médio de um segmento, bissetriz de um ângulo, teoria das paralelas, retas paralelas cortadas por uma transversal, soma dos ângulos internos de um triângulo e de polígonos convexos, paralelogramos.

O Livro II aborda o estudo do círculo e a medidas dos ângulos. Traz definições e teoremas sobre os elementos da circunferência, posições de duas circunferências e medidas de ângulo inscrito numa circunferência. Ao final, são colocados problemas de construções geométricas relativos aos dois primeiros Livros.

O Livro III estuda as medidas dos polígonos e semelhanças. Algumas definições são apresentadas inicialmente e depois teoremas sobre igualdade de paralelogramos, áreas (de triângulo e quadriláteros), teorema de Pitágoras, diagonal do quadrado, relações métricas de um triângulo qualquer, teorema de Tales, teorema das bissetrizes, semelhança de triângulos. No encerramento são apresentados vários problemas relativos aos conteúdos apresentados. Esse livro foi muito criticado, por misturar álgebra à geometria. (SCHUBRING, 2003).

Legendre no seu quarto livro apresenta os polígonos regulares, área do círculo, estudo sobre o valor de π e semelhança de arcos. Os teoremas são relativos à semelhança de polígonos, inscrição e circunscrição de polígonos numa circunferência, área de um polígono regular, perímetro de um polígono regular. Neste livro as proposições ora representam teoremas ora problemas. E para encerrar o capítulo são apresentados vários problemas de demonstrações relativas aos quatro primeiros livros.

O estudo sobre plano e a linha reta no espaço é visto no Livro V. Os teoremas apresentados são relativos à intersecção de dois planos, retas perpendiculares, oblíquas e paralelas no plano, planos paralelos, ângulo de uma reta e um plano, ângulos formados por planos.

No Livro VI são abordados os poliedros através das definições básicas, seguidas dos teoremas sobre: semelhança de poliedros, estudo dos paralelepípedos, das pirâmides, dos prismas, das simetrias (em relação ao plano e ao ponto).

O Livro VII apresenta definições e teoremas sobre a esfera. Destacam-se, primeiramente, as definições sobre esfera e os teoremas relacionados a posições de plano e esfera, intersecção entre duas esferas, triângulos esféricos, poliedros esféricos. Neste livro as proposições são apresentadas em forma de teoremas e problemas.

No oitavo e último Livro, são estudados os três corpos redondos, isto é, de sólidos de revolução, obtidos através de "giros" de figuras planas em seu lado fixo como, cilindro, cone e esfera. Os teoremas são relativos à área lateral do cilindro, área lateral do cone, superfície esférica, superfície da zona esférica, volume de um cilindro reto, volume de um cone reto, volume da esfera, volume do setor esférico, tronco de cone (chamado de cone truncado), relação entre o volume de uma esfera e de um cilindro circunscrito. Na parte final do Livro VIII são propostos vários outros teoremas a serem demonstrados e problemas a serem resolvidos, relacionados aos livros que tratam da geometria espacial. O livro não apresenta índice ou sumário.

O autor acrescenta apêndices aos Livros, IV, VI e VII, sobre poliedros regulares.

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA,
POR
A. M. LE GENDRE;
TRADUZIDOS DO FRANCEZ, E DEDICADOS
AO
PRINCIPE REGENTE
NOSSO SENHOR
POR
MANOEL FERREIRA DE ARAUJO GUIMARÃES
Capitão do Real Corpo de Engenheiros, Lente de Mathematica na Academia Real dos Guardas-Marinhas.

La Geometrie ne semble exister que pour les esprits droits.
La Croix.

RIO DE JANEIRO.
NA IMPRESSÃO REGIA. 1809.
Por Ordem de S. A. R.

Fig. 1.2

Frontispício do Livro de Adrien-Marie Legendre

1.2.1 O Tradutor Manoel Ferreira de Araujo Guimarães

Manoel Ferreira de Araujo Guimarães nasceu em 1777, na Bahia. Foi habilitado para cursar matemáticas na Universidade de Coimbra, mas, por falta de recursos, não pode entrar na Universidade. Assim sendo, fez o curso na Academia de Marinha, em Lisboa, onde rapidamente tornou-se lente substituto; regente de várias disciplinas, obtendo o título de professor honorário (BLAKE, 1893).

Em 1805 voltou para o Brasil acompanhado do Conde da Ponte. Ocupou o posto de 1° Tenente da Armada e, com a indicação do Conde de Linhares, foi transferido para o corpo de engenheiros como capitão, sendo nomeado lente da nossa Academia de Marinha.

Ferreira Guimarães, desgostoso com a Academia de Marinha, pediu transferência para a Academia Militar em 1812. Durante sua carreira militar alcançou várias promoções, chegando ao posto de brigadeiro e em 1830, reformou-se e, ao mesmo tempo, foi dispensado dos cargos que exercia na época, como deputado das juntas da Academia Militar e diretor da imprensa régia (BLAKE, 1893)

Ferreira Guimarães acompanhou D. Pedro, em 1826, à Bahia. Ele foi um dos brasileiros da época que muito trabalhou para nossa Independência. Por este motivo foi eleito deputado à constituinte brasileira e à assembléia provincial na primeira legislatura.

De volta a sua terra, ocupou diversos cargos na sua província. Em 1834 foi nomeado lente da cadeira de geometria mecânica aplicada às artes, anexada ao Arsenal de Marinha.

Ferreira Guimarães foi comendador da ordem de São Bento de Aviz e cavaleiro da ordem do Cruzeiro. Gostava de escrever e, e por isso, devemos destacar a sua grande contribuição nas traduções de livros de matemática muito utilizados no ensino brasileiro (BLAKE, 1893)

Em 1800 traduziu *Curso Elementar e completo de mathematica pura*, traduzido do francês por La-Caille. Essa tradução foi enviada ao ministro D. Rodrigo de Souza Coutinho, quando Ferreira Guimarães ia cursar o 2° ano da Academia de Marinha. No mesmo ano traduziu também do francês, *Explicação da formação e uso das taboas logarithimicas* pelo abbade Marie.

Em 1802, Ferreira Guimarães traduziu o *Tratado elementar da analyse mathematica* por J.A.J. Cousin.

As traduções citadas foram feitas em Lisboa.

Já no Brasil, Ferreira Guimarães continuou a sua produção e, em 1809, traduziu os *Elementos de Geometria* por A. M. Legendre, no Rio de Janeiro, para ser adotado na Academia de Marinha no Rio de Janeiro.

Também em 1809, Guimarães traduziu os *Elementos de algebra* por Eduardo Euler, por ordem do Príncipe regente, para os alunos da Real Academia Militar da Corte. Não se tem conhecimento de outras edições desse livro. Existe um exemplar desse livro na Biblioteca Nacional, na secção de Obras Raras.

Ainda em 1809, outra tradução foi feita por Guimarães: o *Tratado de trigonometria* por A.M. Legendre, no Rio de Janeiro.

Em 1812 Guimarães publicou a *Variação dos triangulos esphericos* de sua autoria para uso da Academia Real Militar, no Rio de Janeiro.

Ferreira Guimarães em 1813 traduziu o *Complemento dos elementos de algebra* de Lacroix, adotado na Real Academia Militar da Corte, no Rio de Janeiro.

No ano seguinte escreveu os *Elementos de astronomia* para os alunos da Academia Real Militar do Rio de Janeiro.

Em 1815 publicou os *Elementos de Geodésia* para uso dos alunos da Academia Real Militar do Rio de Janeiro.

E em 1824, Ferreira Guimarães traduziu os *Elementos de Geometria* de Lacroix, para uso da Imperial Academia Militar.

Ferreira Guimarães traduziu do francês, em 1835, a *Geometria mecânica dos officios de das bellas-artes: curso normal para uso dos artistas e obreiros, dos contra-mestres e mestres de officinas e fabricas*, pelo Barão Carlos Dupin. Esse compêndio foi por muito tempo usado na aula do arsenal de marinha, na Bahia, mesmo depois da morte de Ferreira Guimarães.

Duas das traduções citadas serão analisadas nesta dissertação: os Elementos de Geometria de Legendre e o de Lacroix.

Ferreira Guimarães durante sua vida pública escreveu discursos, homenagens, defesas, etc. A defesa que com certeza mais marcou sua vida, foi a de seu filho, o major Innocencio Eustachio Ferreira de Araújo, que estava sendo julgado por ter se comprometido na revolução de novembro de 1837, perante o Conselho de Guerra, Ferreira Guimarães emocionou os que ali estavam presentes. Sua defesa foi brilhante, mas não conseguiu livrar o filho da acusação. Saiu do tribunal abatido com a condenação do filho e, em conseqüência do sofrimento, veio a falecer em 24 de outubro de 1838.

1.3 Sylvestre-François Lacroix

Lacroix (1765-1843) e seu *Elementos de Geometria,* tradução de Manoel Ferreira de Araujo Guimarães, de 1824, foi outra obra estudada.

Sylvestre-François Lacroix ou Mr. Lacroix nasceu em 1765, na França. Assim como Vilela, Lacroix foi professor em escolas militares. Isso foi durante o Antigo Regime, na França. Após a Revolução francesa, sua ascensão foi crescente e ele acumulou diversos cargos importantes. Depois da queda de Robespierre começou sua carreira propriamente dita.

Os livros textos de Lacroix fizeram muito sucesso e tiveram grande influência, não só na França, mas em muitos outros países da Europa, América do Norte e do Sul. Assim, suas obras foram traduzidas em vários idiomas e, algumas, várias vezes (SCHUBRING, 2003). Foi um dos autores franceses mais traduzidos no século XIX.

Lacroix participou da reorganização do sistema escolar francês. Em 1795 foi assistente de Monge[7] na *École Normale.*

Ocupou um posto no departamento para instrução pública. Nesse período foi professor de matemática em uma escola secundária e mais tarde professor da *École Polytechnique*, e posteriormente *Examinateur Permanent* daquela tradicional instituição. Também foi decano da *Faculté des Sciences* de Paris e professor do renomado *Collège Royal.*

Lacroix não descobriu conceitos novos em matemática, mas se especializou como autor de livros para difundir o ensino da matemática. É considerado um pioneiro na confecção de livros textos de matemática, coerentes com os avanços das descobertas científicas da época.

Segundo Schubring (SCHUBRING, 2003), Lacroix reconhecia os "empréstimos" que fazia a outros autores, o que era uma exceção na época. Apesar desse respeito com relação às citações de outros autores, Lacroix procurou controlar o

---

[7] Gaspard Monge (1746-1818) criador da geometria descritiva e "pai" da geometria diferencial, segundo Eves. (EVES, 2004). Participou ativamente da Revolução Francesa e ocupou diversos cargos políticos.

mercado de livros textos, impondo as obras de sua autoria. Notória foi a sua disputa com Legendre com
relação à publicação do livro texto de Geometria. (SCHUBRING, 2003).

Schubring cita que em sua carta à Legendre, Lacroix admitiu que adotou o livro de geometria de Bézout e que não tinha dificuldades de notar suas deficiências. Afirmava, inclusive, que havia adquirido imediatamente o livro de geometria de Legendre, tecendo elogios particularmente por seu rigor. (Schubring, 2003)

Lacroix adotou o livro-texto de Legendre na *École Centrale*. Durante o tempo em que adotou o referido livro, começou a anotar as suas experiências do dia a dia em sala de aula. Tais anotações deram origem a seu próprio livro-texto, que expressava sua visão metodológica. Na opinião de Lacroix, a arquitetura da geometria de Bézout era mais natural do que a de Legendre. Lacroix preferiu apresentar os teoremas e depois os problemas que necessitavam dele, afirmando achar mais natural. Finalmente Lacroix escreve que procurou preservar o que havia de melhor nos autores clássicos (Bézout e Legendre) e até mesmo buscando conceitos em Euclides e nos gregos em geral. Obtendo assim a "sua" geometria, uma apresentação mais analítica.

Biot, após ter recebido o livro de Lacroix, escreveu-lhe uma carta elogiando seu livro, dizendo que com o aperfeiçoamento do método analítico, a obra preparava o intelecto para uma verdadeira pesquisa, superando o livro de Legendre. (SCHUBRING, 2003, p. 127).

No Brasil, a importância de suas obras é observável no lançamento de cinco traduções, isso apenas nos três primeiros anos da imprensa em nosso país:

- TRATADO ELEMENTAR D' ARITHMETICA POR LACROIX, TRADUZIDO DO FRANCEZ POR ORDEM DE SUA ALTEZA REAL O PRINCIPE REGENTE NOSSO SENHOR. Para uso da
- Real Academia Militar, e accrescentado com taboas para a reducção das medidas Francezas antigas e modernas entre si, a medidas Portuguezas, e reciprocamente, por FRANCISCO CORDEIRO DA SILVA TORRES, Sargento Mór do real Corpo d' Engenheiros, e nomeado Lente da mesma Academia. RIO DE JANEIRO, 1810. NA IMPRESSÃO REGIA. por ordem de S. A. R.
- ELEMENTOS D' ALGEBRA POR MR. LA CROIX TRADUZIDOS EM PORTUGUES, POR ORDEM DE SUA ALTEZA REAL O PRINCIPE REGENTE NOSSO SENHOR, PARA USO DOS ALUMNOS DA REAL ACADEMIA MILITAR DESTA CORTE,

POR Francisco Cordeiro da Silva Torres, Sargento Mór do Real Corpo de Engenheiros, e Lente da mesma Academia. RIO DE JANEIRO. 1811. NA IMPRESSÃO REGIA. POR ORDEM DE S. A. R.

- TRATADO ELEMENTAR DE APLICAÇÃO DE ALGEBRA À GEOMETRIA POR LACROIX, TRADUZIDO DO FRANCEZ, ACCRESCENTADO, E OFERECIDO AO ILUSTRISSIMO E EXCELENTISSIMO SENHOR D. João D' Almeida de Mello de Castro, conde de Galveas Conselheiro, Ministro e Secretario d'Estado nos Negocios da Marinha e Dominios Ultramarinos engarregado interinamente da Repartição dos Negocios Estrangeiros e da Guerra Gran-Cruz das Ordens de S. Bento d' Aviz, e da Torre e Espada, Commendador da de Christo &c. &c.&c. POR JOSÉ VICTORINO DOS SANTOS E SOUZA, Capitão graduado do Real Corpo d' Engenheiros, Lente da Real Academia Militar. RIO DE JANEIRO. NA IMPRESSÃO REGIA. 1812. Por Ordem de S. A. R.
- TRATADO ELEMENTAR DE CALCULO DIFERENCIAL, E CALCULO INTEGRAL, POR MR. LACROIX POR ORDEM DE SUA ALTEZA REAL, TRADUZIDO EM PORTUGUEZ PARA USO DOS ALUMNOS DA REAL ACADEMIA MILITAR DESTA CORTE, POR FRANCISCO CORDEIRO DA SILVA TORRES, Sargento Mór do Real Corpo de Engenheiros, e Lente da mesma Academia. PARTE 1ª CALCULO DIFERENCIAL. RIO DE JANEIRO. NA IMPRESSÃO REGIA, 1812. Por Ordem de S. A. R."

(SCHUBRING, 2003, p.p. 127-128).

E ainda a tradução que estamos analisando, *Elementos de Geometria* por Lacroix, tradução do francês para o português por Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, 1824.

Alguns autores afirmam que a Geometria de Lacroix foi traduzida também por José Vitorino dos Santos, lente da Academia Real Militar, em 1812, para uso desta mesma academia. Em nossa pesquisa infelizmente não tivemos a oportunidade de nos certificarmos dessa informação, pois a biografia de José Vitorino, existente no dicionário Blake, não fala sobre essa tradução.

O livro de Lacroix apresenta inicialmente definições de axioma, teorema, corolário, problema, lema e escólio.

> Axioma, he uma verdade evidente por si mesma;
> Theorema, huma proposição, que se ha de demonstrar;
> Corollario, uma consequencia de proposição já demonstrada;
> Problema, huma questão, que se ha de resolver;
> Lema, huma proposição que so serve de preparação para outra.
> Scholio são as advertencias.
>
> (LACROIX, 1824)

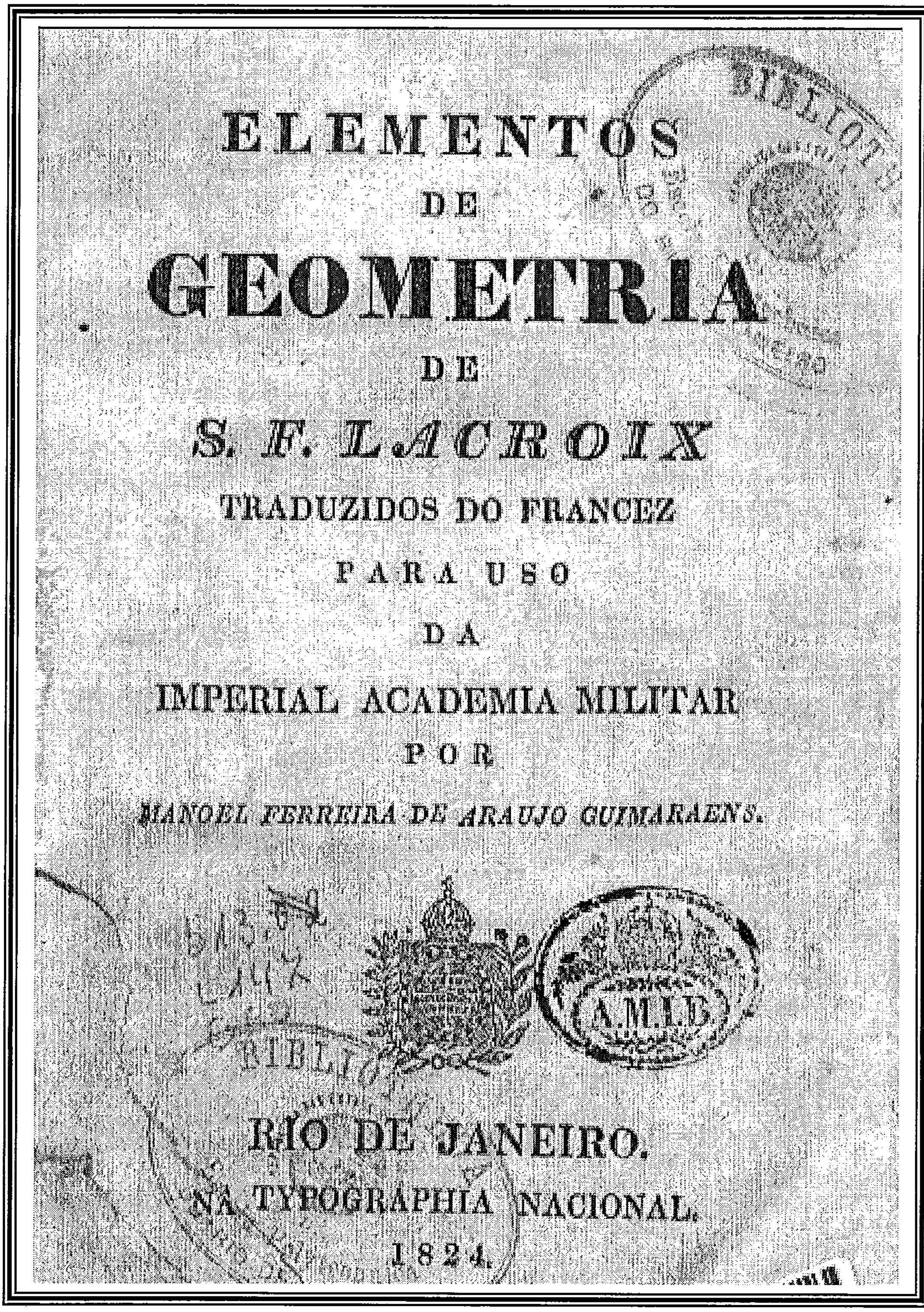
Lacroix coloca também que o teorema está dividido em hipótese e conclusão e salienta que nem sempre é possível invertê-los (a "ida e volta" ou se só se) e por isso "daqui vem a necessidade de demonstrar as oposições inversas". (LACROIX, 1824, prefácio).

A composição inicial da obra apresenta definições básicas, seguindas de duas grandes partes.

A primeira Parte trata da geometria plana e a segunda da geometria espacial. Essas Partes estão subdivididas em Secções.

Na primeira parte, a Secção primeira trata das propriedades das linhas retas e circulares, das linhas perpendiculares, das oblíquas e das retas, dos polígonos, da posição da reta e círculo, dos triângulos; semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, áreas, através de demonstrações de teoremas. Ao final dessa secção existe uma relação de problemas relacionados a toda geometria estudada na primeira parte.

A Secção primeira da segunda Parte apresenta estudos sobre os planos e corpos que ele denomina terminados em superfícies planas, que são paralelepípedos, cubo, poliedros. Destacando os planos e as linhas retas, prova os teoremas sobre planos e retas, ângulos poliédricos, poliedros convexos semelhança de poliedros; equivalência de poliedros e secções de planos sobre os poliedros (paralelepípedo, prisma triangular, pirâmide). A segunda Secção aborda os corpos redondos (cone, cilindro e esfera), por meio de teoremas demonstrados sobre áreas, volume, secção, inscrição e circunscrição de prismas nos corpos redondos e comparação dos corpos redondos. O livro, como os anteriormente estudados, também não apresenta índice ou sumário.



ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
DE
S. F. LACROIX
TRADUZIDOS DO FRANCEZ
PARA USO
DA
IMPERIAL ACADEMIA MILITAR
POR
MANOEL FERREIRA DE ARAUJO GUIMARAENS.

RIO DE JANEIRO.
NA TYPOGRAPHIA NACIONAL.
1824.

Fig. 1.3

Frontispício do Livro de Sylvestre-Françoise Lacroix

1.4 Villela Barbosa

A quarta obra analisada é de autoria de Villela Barbosa, *Elementos de Geometria*, de 1838, em sua 4ª edição.

Francisco Villela Barbosa (1769-1846), primeiro Marquês de Paranaguá, nasceu no Rio de Janeiro. Formou-se em matemática na Universidade de Coimbra em 1796. Desde 1801 entrou para a Academia Real da Marinha, em Lisboa, como lente substituto de matemática (AABOE, 2002, p. 90)

Em 1814 foi eleito membro da Academia Real de Ciências de Lisboa. Em 1815 publicou os *Elementos de Geometria*, cuja edição foi custeada pela Academia Real de Ciências, em Lisboa, autorizada por José Bonifácio de Andrade e Silva[8], secretário da Academia (AABOE, 2002). Este foi o primeiro livro de geometria escrito por um brasileiro.

O livro de Barbosa foi escrito quando ele era professor do primeiro ano da Academia Real da Marinha de Lisboa. O livro adotado até aquela época, para as aulas de geometria, era o do francês Étienne Bézout.

Villela Barbosa foi, mais tarde, promovido à lente catedrático. Em 1822, foi eleito deputado às Cortes de Lisboa. Abandonou todas as posições em Portugal, regressando ao Brasil; declarou que: "voava ao Brasil, para tomar parte em sua independência, atravessando, se possível, o oceano com sua espada na boca" (AABOE, 2002)

De volta ao Brasil ocupou posições de destaque. Foi nomeado coronel graduado do Real Corpo de Engenheiros sendo várias vezes ministro.

Em 1817, em aditamento à primeira edição de seus *Elementos de geometria*, Villela Barbosa publicou o *Breve tratado de geometria esférica*, o qual vem incorporado à sua geometria, nas edições posteriores desse livro.

---

[8] José Bonifácio de Andrade e Silva (1763-1838), brasileiro, nascido em Santos. Estudou em Coimbra e em Paris e em 1789 foi admitido como sócio livre da Academia de Ciências de Lisboa por suas pesquisas na área de Química.

Em 1812 foi eleito secretário dessa mesma Academia. Permanecendo no cargo até 1819 quando retornou ao Brasil.

A partir de 1822, já no Rio de Janeiro passa a envolver-se cada vez mais na política, participando ativamente do movimento de Independência do Brasil. Por essa razão recebeu a alcunha de "Patriarca da Independência". Em sua atividade política, a preocupação de Bonifácio com o desenvolvimento da ciência e educação em geral foi uma constante (FILGUEIRAS, 1986). Ainda segundo Filgueiras, "Nutriu-se das idéias dos filósofos do séc. XVIII, como eles acreditava no progresso da humanidade como consequência do progresso das ciências e do conhecimento." (FILGUEIRAS, 1986)

O livro de Barbosa adquiriu grande popularidade e, por isso, as edições de 1817, 1819 e 1837 também foram custeadas pela Academia Real de Ciências de Lisboa.(AABOE, 2002).

A Sociedade Literária do Rio de Janeiro em sua sessão de 1° de julho de 1836, mandou imprimir a sua custa a obra *Elementos de Geometria,* corrigida e aperfeiçoada pelo autor, que era sócio honorário daquela entidade. E em 1838, foi editado o livro, publicado no Rio de Janeiro pela Typografia Astral e, em 1846, também no Rio de Janeiro, pela Typographia Universal Laemert (AABOE, 2002)

Segundo Francisco de Oliveira Castro (CASTRO, 1999, p. 21), a 8ª edição é a última que se tem notícia, foi impressa em 1870, na tipografia da Academia Real das Ciências de Lisboa.

Villela Barbosa justificou que Bézout vinha sofrendo reformulações por outros autores, e que por isso resolveu escrever a sua própria geometria. (Ver prólogo da edição de Villela, de 1838) (VILLELA, 1838).

Apesar de dar mostra de conhecer as obras mais atualizadas de geometria publicadas na França, Barbosa preferiu manter a mesma estruturação didática de Bézout (VILLELA, 1838).

O texto de geometria de Bézout possuía preocupação didática, pois, segundo o próprio, (VILLELA, 1838) procurava simplificar e buscar muito da intuição para ensinar os seus alunos. Já do ponto de vista de Wagner Valente (VALENTE, 1999), Villela Barbosa tentou revestir o texto de Bézout de um discurso sobre o rigor, procurando utilizar termos que Bézout, evitava como: axioma, teorema e corolário.

Villela defende, em seu prólogo (VILLELA, 1838), um maior rigor ao texto de geometria, se comparado ao de Etiene Bézout.

> Nestes termos intendi por melhor, ordenar novo compêndio, que acostado ao de Bézout podesse servir aos mesmos fins.
>
> (VILLELA, 1838)

O livro de Vilela Barbosa, além de ser adotado na Real Academia da Marinha em Portugal, foi também adotado no Liceu Nacional de Lisboa.

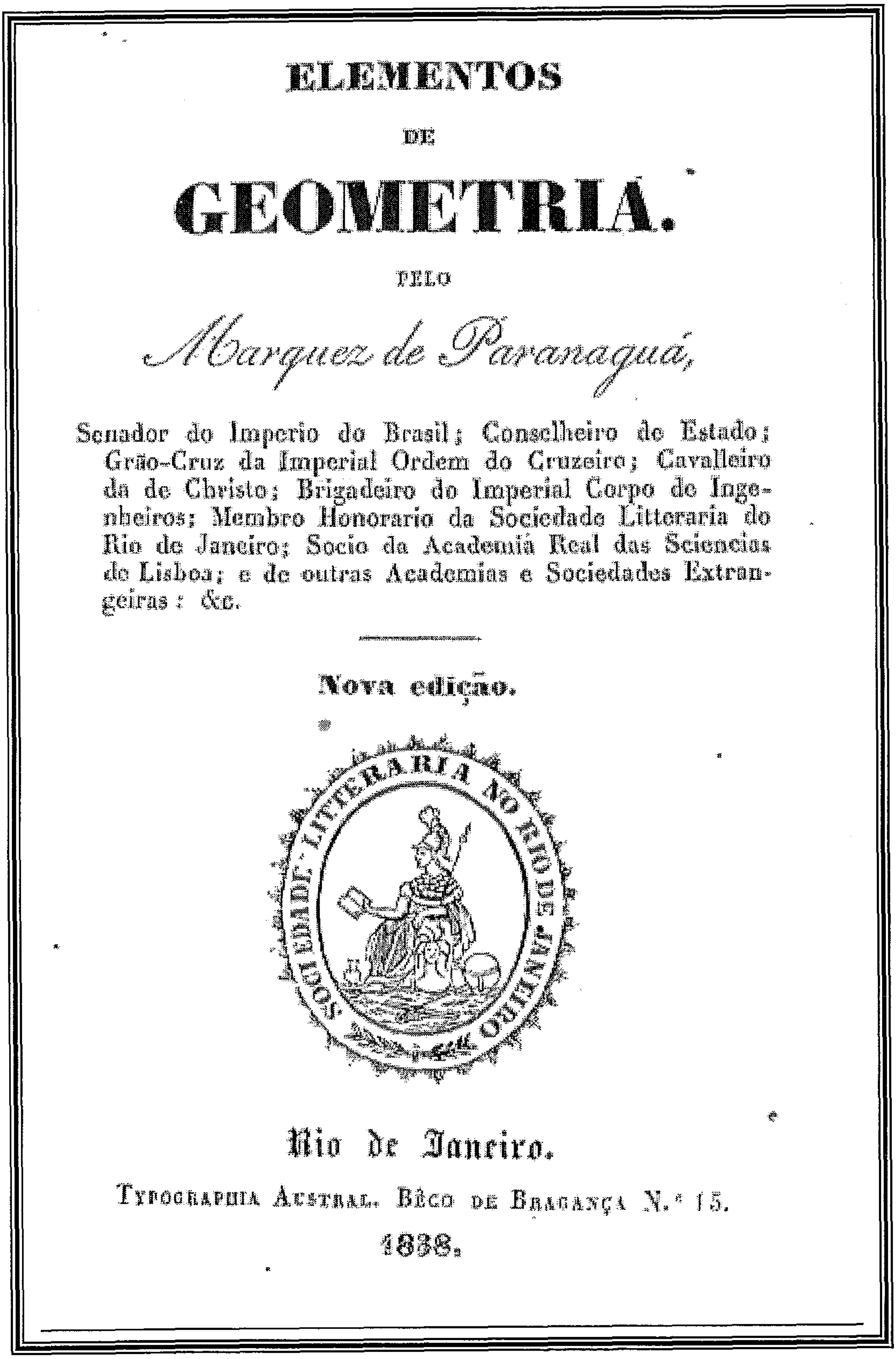
Os *Elementos de Geometria* de Barbosa traz a explicação dos termos e abreviaturas a seguir do prólogo e do índice com os termos Axioma, Theorema, Problema, Corollario de forma idêntica aos de Lacroix. Só o termo Scholio que foi definido de outra forma. Para Villela scholio era uma reflexão sobre uma ou mais proposições precedentes, enquanto para Lacroix eram as advertências.

Apresenta em seguida noções gerais, sobre corpos, superfícies e linhas. Nesse ponto, são apresentadas as definições relevantes. A obra prossegue dividida em quatro secções. A primeira delas trata de linhas, dos ângulos e suas medidas, das perpendiculares e oblíquas, das áreas de círculos, retas paralelas, dos ângulos, dos arcos de círculos e polígonos.

A segunda secção estuda as superfícies. A terceira secção trata de planos. A quarta secção aborda os sólidos: tetraedro, pirâmide, poliedro, cilindro, esfera e paralelepípedo, nesta ordem. Por último, temos um apêndice sobre geometria esférica.

O livro tem numeração consecutiva para definições, teoremas, axiomas e corolários.

O Livro de Registro de Exames (1781-1826), da Academia Real de Marinha de Lisboa, - manuscrito que se encontra na Biblioteca Central da Marinha de Lisboa,- indica que no período de 1801 a 1821, Villela Barbosa atuou como examinador do curso de matemática da Academia, o que justifica, em parte, o sucesso e as várias edições de seu livro, pois os alunos da academia procuravam estudar pelo livro de seu examinador. Isso também ocorreu na França, com as obras de Bézout, Legendre e Lacroix, que também foram, por muitos anos, examinadores.



ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA.

PELO

Marquez de Paranaguá,

Senador do Imperio do Brasil; Conselheiro de Estado; Grão-Cruz da Imperial Ordem do Cruzeiro; Cavalleiro da de Christo; Brigadeiro do Imperial Corpo de Ingenheiros; Membro Honorario da Sociedade Litteraria do Rio de Janeiro; Socio da Academiá Real das Sciencias de Lisboa; e de outras Academias e Sociedades Extrangeiras: &c.

Nova edição.

SOCIEDADE LITTERARIA NO RIO DE JANEIRO

Rio de Janeiro.

Typographia Austral, Bêco de Bragança N.° 15.

1838.

Fig. 1.4

Frontispício do Livro de Francisco Villela Barbosa, o Marquês de Paranaguá.

1.5 Christiano Benedicto Ottoni

Christiano Benedicto Ottoni, (1811-1896) nasceu em Serro, Minas Gerais. Veio para o Rio de Janeiro em 1828, junto com seu irmão Jorge Ottoni. Aqui chegando, encontrou-se com os seus irmãos Teófilo e Honório, que vieram em 1826 e estavam cursando o 2° ano da Academia de Marinha. Teófilo em apenas um mês preparou Christiano para o exame de ingresso à Academia. Em 1830 Christiano conclui o seu curso, tornando-se aspirante (cadete) e foi promovido à Guarda Marinha. No entanto, Christiano Ottoni não tinha nenhuma vocação para seguir a carreira militar. Desejava seguir para São Paulo com a finalidade de formar-se em Direito, mas dificuldades financeiras impediram o seu projeto. Havia uma vaga na cadeira de Geometria anexa ao Curso Jurídico, com o salário de seiscentos reis e, como ninguém a desejava, Ottoni se candidatou. Apesar de classificado como o melhor aluno de sua turma, a sua petição foi indeferida e só mais tarde é que o Marquês de Valença, amigo de seu pai, explicou os reais motivos da sua não indicação. Em sua *Autobiografia* (OTTONI, 1908) relata que soube de uma conversa entre Pedro I, o Ministro do Império, Conselheiro Silva Maia e o Marquês de Paranaguá e que este último teria afirmado: "Se V.M.I. me permite dar-lhe um conselho não pedido, direi que nunca assine despacho para homem desse apelido: em lhe soando aos ouvidos o nome de Ottoni – pode V.M. estar certo que se trata de um seu inimigo". (OTTONI, 1983, p. 30).

Esses e outros fatos geraram uma briga política entre Ottoni e Villela, que chegou ao ápice de levar Ottoni a publicar um livro o "*Juizo Critico sobre o Compêndio de Geometria adoptado pela Academia de Marinha do Rio de Janeiro.*" Sobre isso o próprio Ottoni escreve em sua autobiografia:

> A minha prisão, para qual procurarão pretexto em um excesso de licença de poucos dias, aliás justificado devidamente, causou-me grande irritação contra o Ministro da Marinha, Marquez de Paranaguá, o mesmo casmurro que em 1830 me privára de ir estudar direito em S. Paulo. Por isso houve quem atribuisse a sentimento de vingança um Juizo critico que sobre a Geometria delle publiquei em 1845 e que, modestia a parte, matou o livro. Não duvido que fosse a vingança um dos meus motivos: mas não foi o unico nem o principal. Escrevi conscienciosamente o que pensava do tal compendio que em verdade tinha pouco merito e fora imposto á Academia...

(OTTONI, 1908, p. 68)

O quinto livro analisado, *Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilinea,* é uma compilação de Christiano Benedicto Ottoni da 5ª edição do livro *Cours de Géométrie Élémentaire* de A.J. Vincent cuja 1ª edição data de 1826 (VALENTE, 1999). Ottoni relata em sua Autobiografia (OTTONI, 1857) que:

> De tudo o que eu conhecia da bibliographia mathematica, o que mais me satisfazia era a Arithmética e Algebra de Bourdon, e a Geometria de Vincent: erão as tres materias que eu ensinava.
>
> Compilando-os e modificando a exposição e os methodos no sentido de minhas observações no tirocinio do magisterio, emprehendi escrever novos compedios para o meu 1º anno, e n'elles trabalhei desde 1849 até 1853 ou 1854...
>
> Prestei sem duvida alguma, bom serviço ao ensino das mathematicas elementares; mas não me ficou orgulho de Author: já disse que compilei Bourdon e Vincent. Entretanto, não exaggeremos a modestia: quem confrontar a compilação com os escriptores compilados ha de encontrar algumas differenças de exposição e methodo, que me parecem melhoramentos...
>
> (OTTONI, 1908, p. 82)

Vicent foi professor de matemática do então *Collège Royal de Saint-Louis.* Essa obra destinava-se às escolas técnico-militares e depois de algumas adaptações foi utilizada no ensino secundário francês, (VALENTE, 1999).

Sobre a estruturação de seu livro, Ottoni explica no prefácio da primeira edição de 1853:

> Fui obrigado, pelos limites do ano letivo, a fazer grandes supressões que, todavia, não me parecem prejudicar a geometria elementar. Grande número de teoremas são literalmente produzidos; em alguns substitui as demonstrações do autor por outra que pareceram preferiveis [...].
>
> (OTTONI, 1853).

Valente relata ainda que Ottoni excluiu os capítulos de Vicent que tratavam das construções geométricas, bem como dois apêndices que incluíam cônicas, elipse, hipérbole e problemas que envolviam cálculo numérico (VALENTE, 1999). Também, segundo Valente, Ottoni retirou o capítulo que tratava dos princípios da geometria descritiva da parte de geometria espacial de Vincent. (VALENTE, 1999, p.149).

Segundo Ottoni, o seu compêndio, na segunda edição de 1857, depois de correções e alguns aditamentos, era destinado originalmente à Academia de Marinha, mas acabou sendo adotado por diversos estabelecimentos de instrução.

A segunda edição do livro de Ottoni, que foi a que analisamos, tem modificações e adaptações do professor Sabino Eloy Pessoa, a quem o próprio Ottoni cita em seu prefácio.

> ... Trabalho que deixei incompleto em 1854, e de que outras occupações inteiramente me desviárão.
>
> Substituido no exercicio da cadeira do 1° anno mathematico pelo meu illustrado collega o Sr. Sabino Eloy Pessoa, entreguei-lhe este legado de trabalho, recommendando ao seu zelo e reconhecida capacidade o aperfeiçoamento deste pequeno tributo, com que tive a fortuna de contribuir para a educação da mocidade brasileira.
>
> O Sr. Pessoa substituio algumas demonstrações *ad absurdum* por outras directas, extrahidas de autores modernos: additou algumas noções mais, e dedicou especiaes cuidados á correção dos erros que na 1ª edição, havia escapado. Tenho pois confiança que sahem á luz muito melhorados os – Elementos de Geometria.
>
> (OTTONI, 1857, Prefácio).

O livro é composto de uma introdução, onde são colocadas as noções preliminares sobre geometria, seguido de quatro Livros ou capítulos. Ottoni escreve sobre a estruturação e os objetivos do livro em sua Introdução:

> Os objetos de que trata a Geometria, ou sejão figuras, ou extensão mensuravel (nº 3) podem existir todos em um plano, ou occupar no espaço posições quaisquer: daqui vem a divisão da sciencia em duas partes: GEOMETRIA PLANA, e GEOMETRIA NO ESPAÇO, divisão adoptada nestes Elementos.
>
> Assim as materias naturalmente se classificão como se segue:
>
> 1° Livro. Das figuras planas.
>
> 2° Livro. Da extensão em um plano.
>
> 3° Livro. Das figuras consideradas no espaço.
>
> 4° Livro. Da extensão considerada no espaço.

> Cada livro ainda se divide em capitulos e estes em paragraphos. Os dous primeiros livros constituem a GEOMETRIA PLANA; os outros dous a GEOMETRIA NO ESPAÇO.
>
> (OTTONI, 1857, p.13)

O capítulo primeiro do primeiro Livro é sobre as figuras retilíneas e está dividido em cinco parágrafos. O primeiro parágrafo trata da perpendicularidade, por meio de definições, teoremas e problemas. O segundo parágrafo aborda a teoria das paralelas com teoremas e problemas. No terceiro parágrafo são estudadas as propriedades e a teoria da igualdade dos triângulos, com teoremas e problemas. O quarto parágrafo trata de quadriláteros, com definições e teoremas. O quinto parágrafo aborda os polígonos com definições e problemas de construções.

O capítulo segundo é composto de quatro parágrafos. Estuda as posições entre a reta e a circunferência, apresenta inicialmente as definições básicas e depois os parágrafos. O primeiro parágrafo trata das secantes e tangentes com teoremas e problemas. O segundo parágrafo se refere à medida dos ângulos inscritos, excêntrico e circunscrito apresentados através de teoremas e problemas. O terceiro parágrafo aborda as propriedades dos polígonos inscritos e circunscritos. No quarto parágrafo, por meio de teoremas e problemas, são estudadas as secantes e tangentes dos círculos.

O segundo Livro estuda a extensão em um plano, é composto de dois capítulos. O primeiro capítulo trata da extensão nas figuras retilíneas, sendo composto de quatro parágrafos. O primeiro parágrafo aborda as linhas proporcionais, terceira proporcional, quarta proporcional. O segundo parágrafo trata da semelhança de figuras, usando teoremas, problemas e construções geométricas. O terceiro parágrafo estuda os teoremas relativos às relações métricas no triângulo retângulo. O quarto parágrafo apresenta avaliação e comparação das áreas de polígonos.

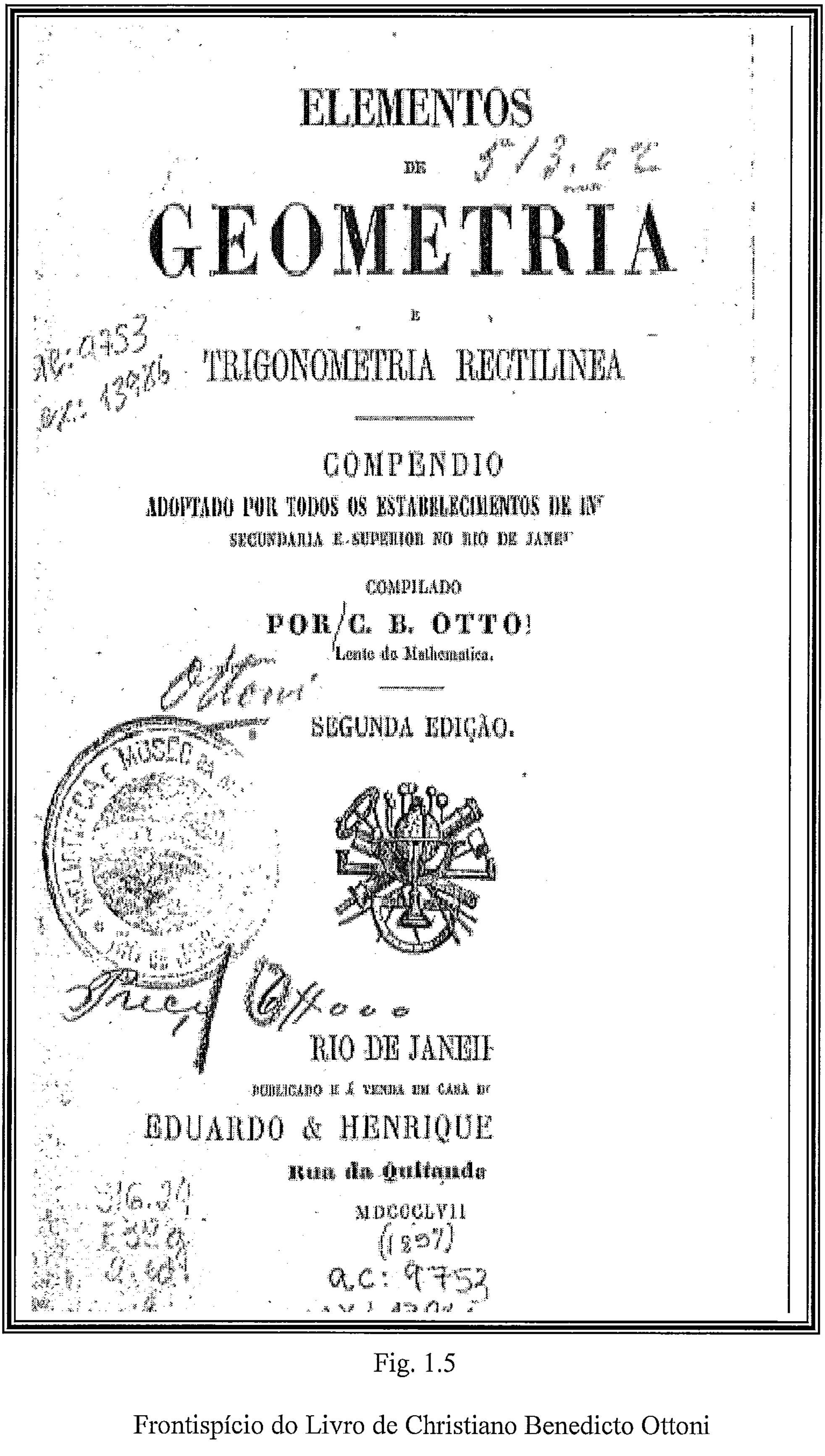
O capítulo dois do segundo livro traz um estudo da extensão nas figuras circulares composto de três parágrafos. O primeiro parágrafo trata das linhas proporcionais consideradas no círculo por meio de teoremas e problemas. O segundo, aborda a avaliação dos lados e das áreas dos polígonos regulares, apresentando teoremas e o terceiro, estuda a medida da circunferência e a área do círculo, por meio dos teoremas e problemas.

O Livro terceiro apresenta estudos sobre as figuras no espaço e é composto de dois capítulos. O primeiro capítulo trata dos planos e dos corpos terminados por superfícies planas, por meio de definições preliminares, sendo composto por quatro parágrafos. O primeiro parágrafo aborda as retas e planos perpendiculares e oblíquos entre si, utilizando teoremas. O segundo parágrafo trata das retas e planos paralelos, demonstrando teoremas. No terceiro parágrafo, o estudo é do ângulo poliédrico e é feito por meio de teoremas. O quarto parágrafo trata dos poliedros convexos com teoremas e problemas. O capítulo segundo trata dos três corpos redondos: cilindro, cone e esfera, sendo o primeiro parágrafo sobre cilindro reto. O segundo parágrafo estuda o cone reto e o terceiro parágrafo apresenta a esfera. Todo este capítulo é construído com demonstrações de teoremas.

O quarto livro, "da extensão considerada no espaço", é dividido em dois capítulos. O primeiro capítulo é sobre semelhança dos poliedros e avaliação e comparação de suas áreas e volumes, subdivide-se em apenas dois parágrafos. O primeiro parágrafo sobre a semelhança dos poliedros e o segundo, sobre as áreas e volume dos mesmos, traz teoremas e algumas definições. O segundo capítulo trata das áreas e volumes dos corpos redondos e é dividido em dois parágrafos. O primeiro parágrafo estuda o cilindro e a pirâmide cônica somente por teoremas. Já o segundo parágrafo aborda a área e o volume da esfera, apresenta preliminarmente definições com relação à esfera, seguida de teoremas.

O livro de Ottoni contém um apêndice sobre trigonometria retilínea em dois parágrafos. Definições preliminares são apresentadas antes do primeiro parágrafo, que estuda as fórmulas trigonométricas. Já o segundo parágrafo traz a resolução de triângulos: dos retângulos e dos obliquângulos.

O índice e as figuras se encontram no final do livro.



ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA

E

TRIGONOMETRIA RECTILINEA

COMPENDIO

ADOPTADO POR TODOS OS ESTABELECIMENTOS DE IN
SECUNDARIA E SUPERIOR NO RIO DE JANE

COMPILADO

POR C. B. OTTO

Lente de Mathematica.

SEGUNDA EDIÇÃO.

RIO DE JANEI

PUBLICADO E Á VENDA EM CASA DE

EDUARDO & HENRIQUE

Rua da Quitanda

MDCCCLVII

Fig. 1.5

Frontispício do Livro de Christiano Benedicto Ottoni

1.6 Timotheo Pereira

O sexto livro analisado é *Curso de Geometria*, escrito de acordo com o programa de admissão à *Escola Polytechica* por Timotheo Pereira, em 1890.

Timotheo Pereira nasceu em Redondela, na Galliza, Portugal, em 26 de março de 1861, mas se naturalizou cidadão brasileiro. Veio para o Brasil e se dedicou ao comércio, que abandonou posteriormente, para exercer o magistério particular. Em 1895 foi aprovado em concurso, escrevendo a tese "Series" e se tornou professor de matemática elementar do *Gymnasio Nacional (Colégio Pedro II)* Lecionou também nas escolas Normal e Naval (BLAKE, 1893).

O livro de Timotheo é composto primeiramente por uma introdução, contendo noções preliminares com definições elementares (ponto, reta, plano, círculo, ângulos) e com as figuras ilustrativas ao lado das definições. Nesta introdução Timotheo define as diversas espécies de proposições empregadas em Geometria, como:

> 9. *Axioma é uma proposição por si mesmo evi*dente, taes são:
> 1ª Quantidades iguaes multiplicadas ou divididas por quantidades iguaes dão resultados iguaes.
> 2ª *Duas cousas iguaes a uma terceira são iguaes entre si* e muitas outras:
>
> *Theorema:* é uma proposição cuja verdade é necessario demonstrar.
>
> No enunciado de um theorema distinguem-se de ordinário duas cousas principais, que são:
>
> *1ª Hypothese.*
>
> *2ª Tthese.*
>
> *Hypothese* é o que se julga existir, isto é: é uma supposição que se faz ácerca de um certo objecto que é assumpto do theorema.
>
> *These*: é o que se quer provar, isto é: é a verdade a que se quer chegar. A serie de raciocinios empregados para que, partindo da hypothese por meio d'elles, se chegue á these e vice-versa.
>
> *Reciproca* de um theorema é outro theorema em que a hypothese do primeiro occupa o logar da these e vice-versa.
>
> Quando a hypothese de um theorema pode ser decomposta em muitas proposições independentes uma das outras, este theorema admitte muitas reciprocas.
>
> Nem todos theoremas têm reciproca verdadeira.

Em alguns a reciproca é evidente, n'outros é necessario demonstral-a, e em alguns a reciproca é falsa.

Corollario é a consequencia immediata de uma proposição.

Lemma é uma proposição preliminar que serve de base e de auxiliar á exposição de uma theoria ou á demonstração de um theorema, ou á resolução de um problema.

Scholio é uma observação feita sobre uma ou muitas proposições que precederão.

Petição de principio é o raciocinio que se funda na proposição que se quer demonstrar.

Circulo vicioso é uma dupla petição de principio.

Problema é uma questão que tem por fim determinar certas grandezas desconhecidas por meio de outras dadas que têm com as primeiras relações definidas pelo enunciado.

Discutir um problema é examinar os casos em que é possivel determinado ou indeterminado; ou impossivel, figurando sobre os seus dados todas as hypotheses possiveis.

(PEREIRA, 1890, p. 7 e 8).

Timotheo define ainda os métodos de demonstração.

10. METHODOS DE DEMONSTRAÇÃO.

A Geometria emprega muitos methodos para demonstração, porém de preferencia os tres seguintes:

1º Demonstração directa.

2º Demonstração por absurdo.

3º Demonstração por superposição.

Primeiro: A demonstração directa consiste em um raciocínio em que se combinão principios evidentes ou já demonstrados, deduzindo as suas consequencias e partindo directamente das verdades sabidas para as que se procura demonstrar.

Segundo: A demonstração por absurdo consiste em suppor que o theorema em questão não seja verdadeiro, e, combinando esta supposição com principios já estabelecidos e contestaveis, fazer sobresahir alguma contradicção com a hypothese.

Este methodo de demonstração, se bem que tão logico como o primeiro, não é comtudo tão facil e elementar, e emprega-se de ordinario sómente quando a demonstração directa não é conhecida, ou si se conhece é demasiado longa e complicada. As mais vezes da

> demonstracção por absurdo convem ás reciprocas dos theoremas demonstrados directamente.
>
> Estes dous methodos não pertencem exclusivamente á geometria, mas sim, a todos os ramos de conhecimentos humanos.
>
> *Terceiro*: A demonstração por superposição consiste em mostrar que, duas figuras sendo convenientemente applicadas uma sobre a outra, se ajustão perfeitamente todas as suas partes, isto é coincidem todos os seus pontos.
>
> Este methodo mais simples, mais claro, e mais fecundo que os outros sempre que elle é aplicavel, é exclusivo á geometria.
>
> (PEREIRA, 1890, p. 8 e 9)

No final da introdução, o autor explica que o livro é dividido em duas Secções. A primeira Secção trata de geometria plana, possui dois Livros. A segunda trata da geometria espacial e também está dividida em dois Livros.

O primeiro Livro da primeira Secção trata -das teorias de perpendicularidade e de paralelismo, das propriedades dos triângulos (igualdade de triângulos), dos quadriláteros e suas variedades, dos polígonos em geral, das posições e relações entre reta e circunferência, das secantes e tangentes; medida dos ângulos, dos polígonos inscritos e circunscritos e suas propriedades, das posições relativas entre duas circunferência. O segundo livro da primeira secção, estuda a extensão de um plano, destacando as linhas proporcionais, semelhança de figuras (triângulos, polígonos), retas concorrentes cortadas por duas paralela, relações métricas no triângulo retângulo, teoria das bissetrizes (internas e externas), das linhas proporcionais consideradas no círculo, avaliação dos polígonos regulares, retificação da circunferência, avaliação e comparação das áreas.

Na segunda Secção, o terceiro Livro trata das figuras consideradas no espaço, destacando as posições entre reta e plano, ângulos diedros e poliédricos, poliedros (prismas e pirâmides), decomposição de um poliedro em tetraedros, igualdade de poliedros, poliedros regulares (poliedros de Platão), e os três corpos redondos (cilindro,cone e esfera). O quarto Livro apresenta um estudo sobre semelhança de poliedros, poliedros inscritos e circunscritos, área e volume de poliedro, área da esfera (área da zona, fuso), volume da esfera e simetria.

Noções sobre algumas curvas: ciclóide, epiciclóide e secções cônicas também estão incluídas. Esses tópicos não foram abordados pelos outros autores que estudamos. No final do quarto Livro é apresentada uma lista de exercícios de conteúdos da segunda

Secção. O livro contém índice no final. Graficamente, o livro de Timotheo difere dos demais autores por trazer as figuras junto ao texto. Outra diferença é o fato de elas possuírem um fundo escuro, parecendo uma foto e daí ficarem melhores para a impressão da época[9].

Timotheo coloca uma nota ao final do livro, intitulada "*A quem leu*" que mais parece um recado ao leitor, onde explica seus objetivos e pretensões com aquela obra.

> É minha mais intima convicção que do que este livro contem nada é novo e nem mesmo tive em mira quando o organizei apresentar trabalho original: - primeiro, porque mathemática não se inventa; - segundo, porque as minha apoucadas habilitações não permitem.
>
> (PEREIRA, 1890, p. 397)

Timotheo teve a preocupação em tornar obscuro se fosse conciso, optando assim por explicações mais longas, ou seja, foi prolixo. Novamente citaremos "A quem leu":

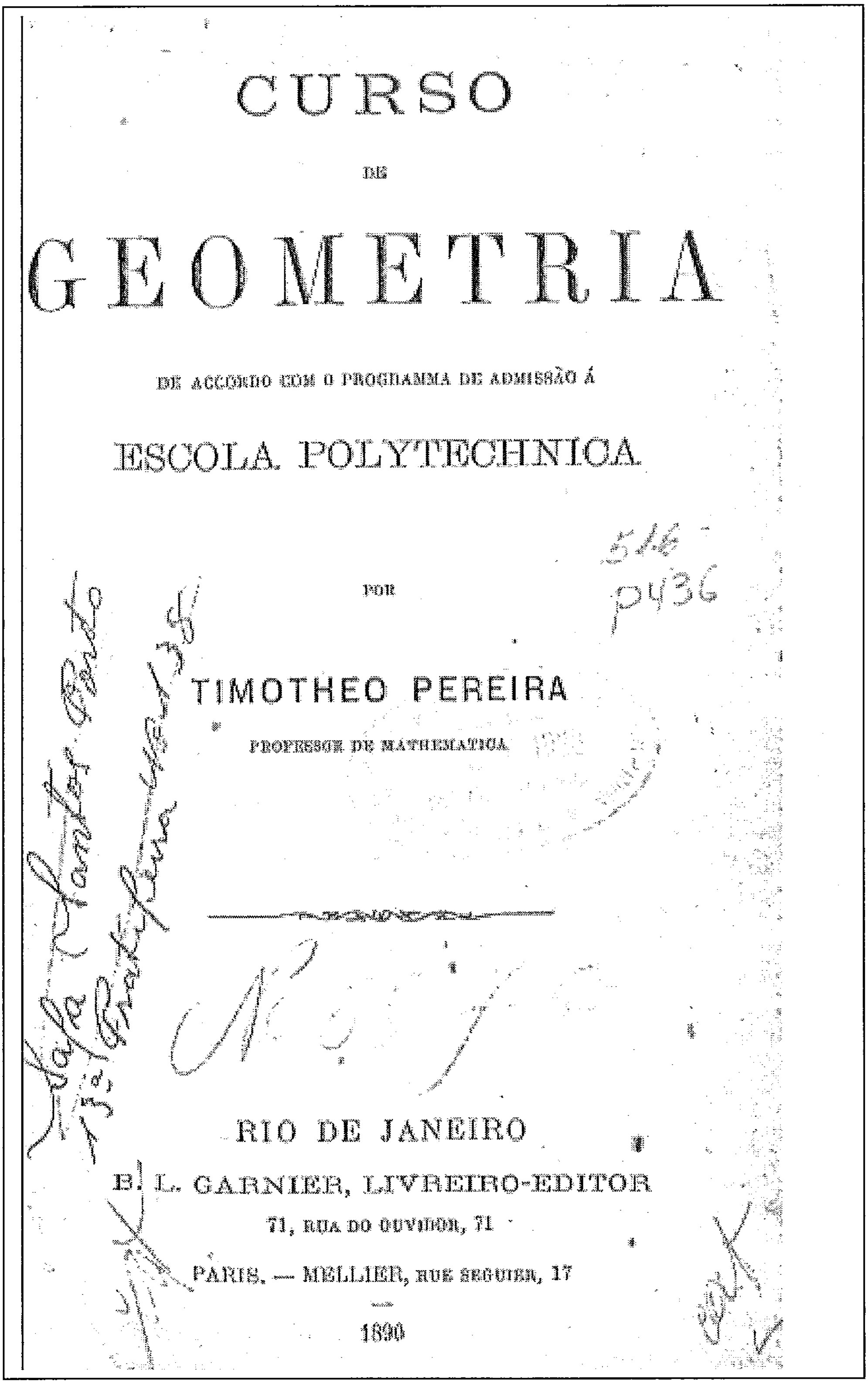
> Sei que n'um livro didactico a concisão e a clareza são elementos primordiaes e, portanto, indispensaveis; sei, igualmente, que um auctor deve ser synthetico poisque o professor é necessariamente analytico em sua exposição; mas, tambem não me acanho em confessar que é extremamente difficil saber onde um autor passa de conciso a obscuro... é bem possivel que eu tenha me tornado prolixo...
>
> (PEREIRA, 1890, p. 397)

Discordamos de Timotheo quando diz que "mathematica não se inventa", mas reconhecemos, que o autor foi humilde ao afirmar não ser um matemático, que cria (inventa matemática), mas que era de fato um professor que se preocupou em não "inventar", mas sim em explicar bem a matemática já existente para os que fossem estudá-la.

Segundo Valente, o livro de Timotheo alcançou, em 1927, a décima primeira edição (VALENTE, 1999, p. 166).

---

[9] Essa forma gráfica de apresentação do texto didático de geometria foi utilizada por PH. André, autor de livro didático *Èlements de Géometrie*, com a primeira edição em 1870, e que teve inúmeras edições, sendo também utilizada nas coleções de livros do ensino católico francês. (VALENTE, 1999, p. 166)



CURSO

DE

GEOMETRIA

DE ACCORDO COM O PROGRAMMA DE ADMISSÃO Á

ESCOLA POLYTECHNICA

POR

TIMOTHEO PEREIRA

PROFESSOR DE MATHEMATICA

RIO DE JANEIRO

B. L. GARNIER, LIVREIRO-EDITOR

71, RUA DO OUVIDOR, 71

PARIS. — MELLIER, RUE SEGUIER, 17

1890

Fig. 1.6

Frontispício do Livro de Timotheo Pereira

Capítulo 2

2. ESTUDO DO POSTULADO DAS PARALELAS

No capítulo anterior apresentamos uma visão panorâmica da história dos autores e obras que iremos estudar. Deste capítulo em diante, passaremos a analisar e comparar a geometria das obras anteriormente descritas.

Além disso, capítulo vamos analisar o quinto postulado de Euclides, também chamado de postulado das paralelas, segundo cada uma das obras.

Os *Elementos* de Euclides foi, possivelmente, o livro mais reproduzido e estudado na história do Ocidente. Foi o texto científico mais influente de todos os tempos (EVES, 2004).

Euclides procurou reunir a base do conhecimento matemático de sua época, em seu livro os *Elementos.* A obra não trata somente de geometria e nem contém todo o conhecimento geométrico de então. Por exemplo, um tópico que não se inclui em sua geometria, são as seções cônicas. Euclides sabia muito mais geometria do que apresentou nos *Elementos* e também escreveu outros livros, mas os *Elementos* foi, sem dúvida, o mais famoso. Sobre isso, Howard Eves comenta:

> Tão logo o trabalho apareceu, ganhou o mais alto respeito e, dos sucessores de Euclides até os tempos modernos... Nenhum trabalho, exceto a Bíblia foi tão largamente usado e estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos Elementos já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino da geometria. (EVES, 2004, p. 167)

Ao longo deste trabalho, pudemos perceber a real dificuldade de se ler e ineterprertar Euclides, hoje, em especial em português.

2.1 Um Breve Histórico

Não se descobriu, até hoje, nenhuma cópia dos *Elementos* que date da época de sua confecção. Grande parte das edições modernas de Euclides baseiam-se na obra do grego Teo (ou Têon) de Alexandria. Teo de Alexandria viveu quase 700 anos depois de Euclides, e em seus manuscritos faz - como muitos depois dele - uma revisão dos *Elementos* e acrescenta extensos comentários sem, no entanto, modificar a essência da obra original. Comentários como os de Proclo e Teo de Alexandria são mais úteis em termos de história do que em seus resultados matemáticos. Teo de Alexandria foi responsável por uma importante edição dos *Elementos* que se preservou. (BOYER, 1999, p. 189)

A primeira tradução latina, feita em 1120 pelo inglês Adelardo de Bath, não foi feita do grego, mas sim de antigas versões árabes. Outras duas versões latinas, feitas a partir do árabe são as de Gerardo de Cremona (1114-1187) e a de 1620, de Johannes Campanus. Esta última transformou-se na primeira edição impressa dos *Elementos*, feita em Veneza, no ano de 1482 (BOYER, 1999)

Segundo Eves (EVES, 2004) "uma tradução latina louvável, feita a partir do grego, é a de Commandino (1572). Essa tradução serviu de base para muitas outras subseqüentes, inclusive para a influente edição de Robert Simson da qual, por sua vez, derivaram tantas outras edições inglesas" (EVES, 2004, p.168). Commandino usou traduções que descendem diretamente dos manuscritos de Teo de Alexandria – os "manuscritos teoninos". Foi essa a versão de Euclides a de Simson, que utilizamos em nossa bibliografia como referência e para comparação com os livros escolhidos para análise desse trabalho.

A edição mais completa que temos dos *Elementos* hoje baseia-se nos trabalhos de Heiberg (EVES, 2004). Heiberg procurou excluir erros introduzidos pelos vários comentaristas de Euclides, a começar por Teo de Alexandria. Ele se baseou em manuscritos descobertos por F. Peyrard e confiscados da biblioteca do Vaticano, por ordem de Napoleão. Esses manuscritos consistem em uma cópia do século X de uma edição anterior à revisão de Teo de Alexandria.

Os *Elementos* estão divididos em treze seções, chamadas de Livros. A geometria é tratada nos Livros I, III, IV e VI (plana); e XI, XII e XIII (espacial)[10].

O grande marco e mérito dessa obra de Euclides é sua estrutura axiomática (AABOE, 2002). Um sistema axiomático baseia-se em **definições** dos elementos utilizados; afirmações assumidas como verdades, não demonstradas, que chamamos de **axiomas**; e afirmações demonstráveis a partir de verdades anteriores, que chamamos de **teoremas** ou **proposições**. É irrelevante para a teoria que os axiomas sejam de fato, verdadeiros, pois o que afirma é que *se* forem verdadeiros, *então* as deduções subseqüentes também o serão (AABOE, 2002). Uma teoria matemática axiomatizada é tanto melhor quanto menor for o conjunto de axiomas em que se baseia, e que possuem as seguintes propriedades:

- Completude – todas as afirmações feitas remetem-se aos axiomas, não existindo hipóteses tácitas.
- Consistência – não é possível deduzir dois teoremas contraditórios a partir dos axiomas.
- Independência – nenhum dos axiomas é conseqüência dos demais.

Euclides baseia todas as 465 proposições dos *Elementos* em uma lista de definições seguidas de apenas dez suposições, tomadas como verdades. Essas dez hipóteses estão divididas em dois grupos de cinco axiomas e cinco postulados. Euclides não explica essa diferenciação, mas a maioria dos matemáticos gregos classificava os axiomas como "noções comuns", auto-evidentes e comum a todas as ciências. Já os postulados seriam hipóteses características de uma ciência específica, no caso, da geometria plana. Postular significa "pedir para aceitar". Assim, Euclides pede ao leitor para aceitar as cinco hipóteses geométricas que apresenta em seus postulados. Os matemáticos de hoje não vêem necessidade dessa distinção.

Euclides utilizou também muitas hipóteses tácitas, que não contavam nem dos axiomas nem dos postulados. Muitas críticas foram feitas a Euclides por este fato.

Vários autores descrevem assim os dez axiomas de Euclides:

> "Axiomas:
>
> 1. As cousas, que são iguais a uma terceira, são iguaes entre si.

[10] Os demais Livros abordam assuntos diversos, a saber: Livro II transformações de áreas e álgebra geométrica pela escola pitagórica; Livro V: teoria das proporções de Eudoxo; Livro VII, VIII e IX: teoria elementar dos números; Livro X: classificação de alguns irracionais.

2. A cousas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.
3. E se de cousas iguais se tirarem o todo outras iguais, os restos serão iguais.
4. Duas quantidades, que se ajustam perfeitamente uma com outra, são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer das suas partes."

(AABOE, 2002) e (COMMANDINO, 1944).

"Postulados:

1. Pede, como cousa possível, que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto uma linha reta.
2. E que uma linha reta determinada se continue em direitura de si mesma, até onde seja necessário.
3. E que com qualquer centro e qualquer intervalo descreva um círculo.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. ***E se uma linha reta, encontrando-se com outras duas retas, fizer os ângulos internos da mesma parte menores que dois retos, estas duas retas produzidas ao infinito concorrerão para mesma parte dos ditos ângulos internos".***

(AABOE, 2002, COMMANDINO, 1944).

A versão de Simson que utilizamos para consulta está dividida em 12 axiomas e 3 postulados. Nela, como em todas as edições baseadas nos "manuscritos teoninos", o "postulado das paralelas" aparece entre os axiomas, (décimo primeiro ou o décimo segundo). Somente com Heiberg, é que o "postulado das paralelas" passou a ocupar a posição de quinto postulado. (EVES, 2004)

Ao analisarmos o Livro I dos "*Elementos*" de Euclides, podemos classificar suas proposições em três grupos, embora ele não as tenha separado formalmente. O primeiro grupo – proposições um a vinte e seis – trata quase exclusivamente da teoria elementar de triângulos. O segundo grupo – proposições vinte e sete a trinta e quatro – estuda a teoria das paralelas e prova que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. O terceiro grupo é composto das proposições trinta e quatro até o final do Livro I e aborda as relações entre áreas de paralelogramos, triângulos e quadrados, o Teorema de Pitágoras e seu inverso (EVES, 2004) e (COMMANDINO, 1944).

É importante observar que o "quinto postulado" não foi utilizado no primeiro grupo de proposições (as vinte e seis primeiras). Alguns acreditam que isso foi proposital, pois o quinto postulado não se mostra tão evidente quanto os quatro anteriores.

O quinto postulado foi motivo de polêmica já entre os matemáticos da época (BARBOSA, 1995). Mesmo para um leigo ele seria claramente diferente dos demais. É um postulado "grande", muito maior em tamanho, se comparado aos outros. Imediatamente perceptível também é sua maior complexidade, não sendo tão evidente por si próprio como os demais, parecendo mais uma proposição do que um postulado.

A independência do sistema de Euclides, em particular, do quinto postulado preocupou os matemáticos até meados do século passado. Por esse motivo, várias foram as tentativas feitas para demonstrá-lo.

Alguns nomes de estudiosos famosos que tentaram demonstrar o quinto postulado: Ptolomeu[11], o astrônomo, Proclo (410-485 a.C.), o estudioso John Wallis[12] (1616-1703), jesuíta italiano Gerolamo Saccheri (1667-1733), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), o alemão Carl F.Gauss (1777-1855).

Proclo (410-485) mais filósofo do que matemático. Boyer considera seu comentário sobre o livro I dos *Elementos* de Euclides "de grande importância, pois o mesmo pode se utilizar dos originais de História da Geometria de Eudemus obra hoje perdida bem como dos comentários sobre os elementos de Papus, também em grande parte perdida". (BOYER, 1999, p. 129).

Uma análise dessas "demonstrações" mostra que seus autores conseguiram apenas substituí-lo por hipóteses tácitas equivalentes e que lhes pareciam melhores do que a de Euclides.

Algumas dessas afirmações substitutas ou equivalentes utilizadas ao longo da história foram:

---

[11] É suposto ter nascido no fim do primeiro século.

Escritor de *Almagest*, obra sobre geometria esférica de grande influência até a Idade Média por suas tabelas de cordas trigonométricas.

[12] John Wallis, o mais influente predecessor de Newton, segundo Boyer (BOYER,1999), membro da Royal Society.

Wallis ficou conhecido por seus estudos de geometria analítica, e durante esse trabalho também tentou, com a ajuda daquela, uma demonstração do 5° Postulado.

1) Por um ponto fora de uma reta dada há somente uma reta paralela à primeira; (Postulado de Playfair[13]).
2) Há pelo menos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual a um ângulo raso;
3) Existe um par de retas igualmente distantes uma da outra em todos os pontos;
4) Por três pontos não colineares pode-se traçar uma circunferência;

Girolamo Saccheri (1667-1733), um jesuíta que ensinava em colégios de sua ordem na Itália. no ano em que morreu, publicou um livro "*Euclides ab omni naevo vindicatus*" (Euclides com toda a falha retirada) onde procurou provar definitivamente o postulado das paralelas. (BOYER, 1996, p. 301).

Girolamo Saccheri foi o primeiro a publicar em 1733 uma tentativa de demonstração realmente científica.

Ele utilizou uma abordagem inteiramente nova para tentar demonstrar o "quinto postulado". Pela lógica, o "quinto postulado" deveria ser uma conseqüência dos outros quatro, ou seja, dependente dos mesmos e demonstrável a partir deles.

Ao invés de tentar demonstrá-lo utilizando os outros quatro, Saccheri nega o quinto, procurando chegar a um absurdo.

Saccheri admite as primeiras vinte e oito proposições do Livro I, as quais, como já foi dito, não utilizam o postulado das paralelas. Com essa base, estuda o quadrilátero ABCD, onde $\hat{A} = \hat{B} = 90°$ e AD = BC.

"o quadrilátero de Saccheri"

Fig. 2.1

[13] John Playfair (1748-1819) matemático e físico escocês que divulgou esse postulado nos tempos modernos em um de seus livros. (ÁVILA, 2003).

Traça as diagonais AC e BD e utilizando teorema de congruência, contidos nas proporções um a vinte e oito, mostra que $\hat{D} = \hat{C}$. O que leva a três possibilidade, $\hat{D} = \hat{C}$ < 90°, $\hat{D} = \hat{C}$ = 90° ou $\hat{D} = \hat{C}$ > 90°. Saccheri nomeou essas possibilidades como *hipótese do ângulo agudo* , *hipótese do ângulo reto* e *hipótese do ângulo obtuso*. A idéia era mostrar que as hipóteses do ângulo agudo e do ângulo obtuso implicariam em uma contradição, sendo válida apenas a hipótese do ângulo reto, que traz como conseqüência o postulado das paralelas. Boyer relata que Saccheri chega ao absurdo na hipótese do ângulo obtuso, assumindo tacitamente a infinitude da reta. (BOYER, 1999). Mas o caso do ângulo agudo é mais difícil, e Saccheri força uma demonstração baseada em noções nebulosas e não explícitas. (BOYER, 1999) e (EVES, 2004). Ele estava tão absolutamente convencido de que a geometria de Euclides era a única válida, que não podia admitir a não-contradição. Por isso deixou de fazer o que teria sido a descoberta mais importante do século XVII, a das geometrias não-euclidianas.

Seu trabalho permaneceu esquecido por um século e meio e somente em 1889 foi retomado por outro italiano, Eugenio Beltrami. (EVES, 2004).

A tentativa de demonstração do matemático suíço, Johann H. Lambert (1728-1777), é semelhante à de Saccheri .

Os primeiros a suspeitarem da independência do postulado das paralelas, isto é, de que ele não poderia ser demonstrado a partir dos outros quatro, foram Carl Friedrich Gauss, o húngaro János (Johann) Bolyai (1802-1860) e o russo Nikolai Ivanovich. Lobachevsky (1793-1856). Eles utilizaram hipóteses equivalentes às dos ângulos agudo, reto e obtuso. Formularam a questão nos seguintes termos: por um ponto dado pode-se traçar mais de uma, uma ou nenhuma reta paralela à reta dada? Assumindo a infinitude da reta, a hipótese do ângulo obtuso é descartada. Mas Bolyai e Lobachevsky, independentemente, investigaram o que acontece a partir da aceitação da hipótese do ângulo agudo como verdadeira.

Como Gauss não publicou nada sobre o assunto, o mérito da descoberta das geometrias não-euclidianas ficou com Bolyai e Lobachevskiy (EVES, 2004).

Bolyai publica suas descobertas em 1832 e Lobachevsky em 1829-1830. Lobachevsky chama sua geometria de "imaginária" ou "pangeometria". Hoje ela é conhecida como Geometria Hiperbólica (BOYER, 1996).

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) trabalhou com a hipótese do ângulo obtuso, excluindo a infinitude da reta, e chegou também a outra geometria não eucilidana consistente, conhecida hoje como Geometria Elíptica ou Esférica (EVES, 2004).

Estas novas geometrias permitiram no século XX avanços na ciência, entre os quais o embasamento da Teoria da Relatividade por Albert Einstein (1879-1959), o que mostrou, ao contrário do que muitos pensavam, que essas geometrias possuíam aplicações práticas. Fatos como esses aconteceram em vários ramos da matemática.

A preocupação com a fundamentação da geometria levou David Hilbert a publicar em 1898 seu "*The Foundations of Geometry*". Neste livro ele reconstrói a geometria euclidiana, procurando apresentar todas as hipóteses tácitas utilizadas por Euclides, com muita preocupação com o formalismo e o rigor das demonstrações.

2.2 Comparação dos Autores

O Padre Manoel de Campos traz os postulados das paralelas logo no início da obra, na página nove do Livro I, após as definições e axiomas. Seu livro é baseado em traduções latinas dos "manuscritos teoninos". Naqueles o postulado das paralelas aparece como um axioma, o undécimo, como na obra de Campos, e não como postulado.

> A x i o m a
>
> 11 Se huma recta RX cortar outras duas rectas DE, XV, fazendo com ellas para qualquer das partes dous angulos internos EDX, DXV, menores que dous rectos; as dictas rectas continuadas para a mesma parte, concorrerão finalmente em algum ponto O.
>
> § A verdade deste Axioma não he tão clara, que não necessite de demonstração; assim como necessita a Prop. 29, que he outra verdade semelhante a esta: por isso Gemino, e Proclo a excluirão do numero dos princípios evidentes; nós a demonstraremos abaixo no Escholio da ditta Prop. 29. O padre Tacquet em lugar deste Axioma, substitue outros dous, os quaes constão manifestadamente da geração das parallelas; e servem para demonstrar a Prop. 27[i] sem dependencia delle
>
> * II As parallelas usão de perpendiculo commum; isto he, a Recta RO, que he perpendicular à recta FC, he tambem perpendicular à tua parallela BA.

(CAMPOS, 1735, p. 9)

Notemos que o axioma de Campos é o de Euclides, embora mais complicado é equivalente ao postulado de Playfair que já citamos anteriormente.

Já no livro de Legendre, o postulado das paralelas encontra-se inserido no texto. A estrutura do livro é um tanto diversa da do Padre Campos. Legendre inicia sua obra com cerca vinte e seis definições. Legendre destaca o estudo do que chamou de Teoria das Paralelas, a partir da proposição XIX até o final do Livro I, (proposições dezenove à trinta e dois).

No Livro I de Legendre, o postulado das paralelas aparece como uma proposição, a proposição XX, na página 21. Observe que Legendre tenta demonstrá-lo e ao fazê-lo tornou-se um dos grandes divulgadores dessa questão, uma vez que essa obra tornou-se famosa, como vimos anteriormente com várias traduções para outras idiomas, bem como várias edições. Já na versão do livro de Legendre, com as modificações e acréscimos de M. Blanchet[14], que chegamos a analisar, o postulado das paralelas aparece como proposição XXII, na página 22, não traz a demonstração, pois é assumida como evidente.

Sobre o assunto, Howard Eves escreve a tentativa de demonstração de Legendre, comparando-a a de Saccheri.

> Adrien- Marie Legendre ..., começou diferente , considerando as hipóteses de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor que, igual ou maior que dois ângulos retos. Assumindo tacidamente a infinitude da reta, foi capaz de eliminar a terceira hipótese, mas, apesar de várias tentativas não conseguiu descartar-se da primeira. Esses vários esforços apareceram nas sucessivas edições de seus *Élements de Géométrie*, um texto largamente adotado, e dessa forma Legendre contribuiu muito para popularizar o problema do teorema das paralelas.
>
> (EVES, 2004, p. 541)

Segue a proposição XX de Legendre com sua demonstração.

[14] Elementos de Geometria de Adrien Marie Legendre, com as modificações de M.A. Blanchet, traduzido da vigésima quinta edição por B. Alves Carneiro, em 1886, pela Livraria Garnier, no Rio de Janeiro.

PROPOSIÇÃO XX

THEOREMA

Em todo o triangulo, a somma dos trez angulos he igual a dois angulos rectos.

Havendo já provado que a soma dos trez angulos de um triangulo não póde exceder a dois angulos rectos, resta demonstrar

que esta mesma somma não póde ser menor do que dois angulos rectos.

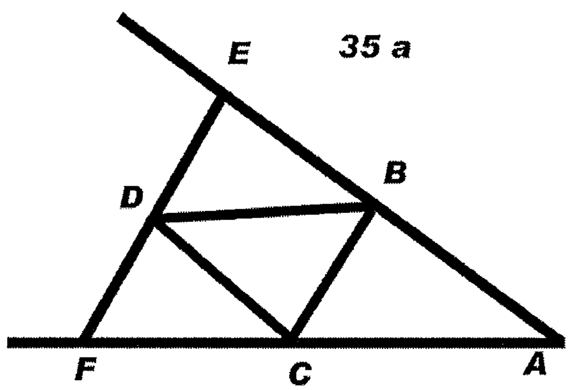


Fig. 2.2

Seja ABC (fig. 35.a) o triangulo proposto, e seja, se he possivel, a somma dos seus angulos = 2P – Z, marcando P hum angulo reto, e sendo Z essa quantidade qualquer que se suppoem faltar á somma dos angulos para que esta seja igual a dois rectos.

Seja A o menor dos angulos do triangulo ABC; sobre o lado opposto BC faça-se o angulo BCD = ABC, e o angulo CBD = ACB; os triangulos BCD, ABC, serão iguaes (pr. 7.)[ii], porque tem hum lado igual BC adjacente a dois angulos iguaes, cada hum a cada hum. Pelo ponto D tire-se huma recta qualquer EF, que encontre em O e em F os dois lados do angulo A prolongados (I).

Como a somma dos angulos de cada hum destes triangulos ABC, BCD he 2P – Z , e a de cada triangulo EBD, DCF não póde exceder a 2P (pr. 19)[iii], segue-se que a somma dos angulos dos quatros triangulos ABC, BCD, EBD, DCE, não passa de 4P – 2Z + 4P, ou 8P – 2Z. Se desta forma tirarmos a dos angulos em B, C, D, que he 6P, porque a somma dos angulos formados em cada ponto B, C, D, he 2P (pr. 2. cor. 3)[iv], o resto será igual á somma dos angulos do triangulo AEF. Logo a somma dos angulos do triangulo AEF não passa de 8P – 2Z – 6P, ou 2P – 2Z.

Assim em quanto he necessario ajuntar Z á somma dos angulos do triangulo ABC para que ella chegue a dois rectos, cumpre ao menos ajuntar 2Z á somma dos angulos do triangulo AEF para completar os mesmos dois rectos.

Por meio do triangulo AEF se construirá semelhantemente hum terceiro triangulo, tal que seja mister ajuntar ao menos 4Z á somma dos seus trez angulos, para que o todo seja igual a dois angulos rectos; e por meio do terceiro, se construirá da mesma maneira hum quarto, tal que se deva ajuntar ao menos 8Z á somma dos seus angulos para que o todo seja igual a dois angulos rectos, e assim em diante.

Ora, por mais pequeno que seja Z a respeito do angulo recto P, a serie Z, 2Z, 4Z, 8Z, cujos termos crescem em razão dupla, conduzirá bem depressa a hum termo igual a 2P, ou maior que 2P. Logo então se chegará a hum triangulo tal que seja necessario ajuntar á soma dos seus angulos huma quantidade igual ao maior que 2P, para que a somma total fosse sómente 2P. Esta consequencia he visivelmente absurda; logo não póde substituir a hypothese de que partimos; quer dizer, que he impossivel que a somma dos angulos do triangulo ABC, seja menor que dois angulos rectos: ella não póde ser maior em virtude da proposição precedente, logo he igual a dois angulos rectos.

(I) Suppondo que A he o menor angulo do triangulo ABC, e por consequencia menor ou não maior que dois terços do angulo recto, a fim de fazer mais sensivel a possibilidade de que huma recta tirada pelo ponto D, encontre ao mesmo tempo os dois lados AB, AC, prolongados.

(LEGENDRE,1809, p.21 e 22)

Sobre a falha na demonstração de Legendre, Geraldo Ávila escreve: "Num certo estágio da "demonstração" de Legendre é dito que pelo ponto D tira-se uma reta qualquer EF, que encontre em O e em F os dois lados do ângulo Â prolongados. Admitindo assim a existência de tal reta EF. Esse fato pode ser enunciado como "Por um ponto D no interior de um ângulo qualquer BAC, e sempre possível traçar uma reta que encontre os dois lados do ângulo em E e F respectivamente". (ÁVILA, 1992)

Outro resultado equivalente ao postulado das paralelas é dados por Legendre (proposições XXII, XXIII e XXIV).

P R O P O S I Ç Ã O XXIV

T H E O R E M A

Se duas linhas rectas AF, BD (fig. 36 a) fizerem com huma terceira AB dois angulos internos FAB, ABD, cuja somma seja menor ou maior que dois angulos rectos, digo que as duas linhas AF, BD, prolongadas sufficientemente, se hão de encontrar.

(LEGENDRE, 1809, p. 21, 22,25 e 26)

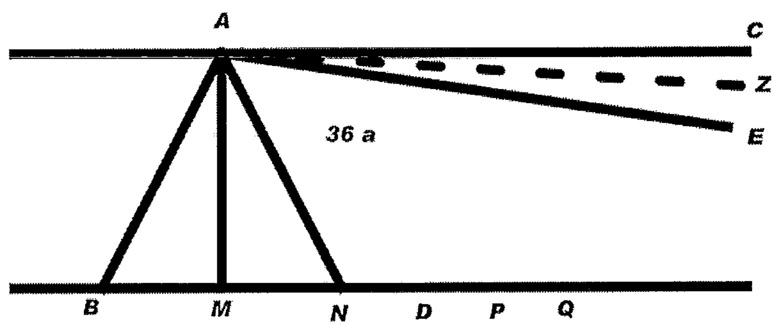


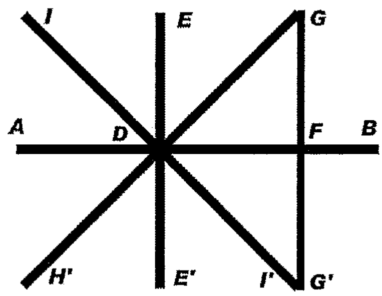
Fig. 2.3

O livro de Lacroix, como o de Legendre, destaca na primeira Parte da secção primeira, página 20 o que ele chama de Teoria das paralelas. Mas ele a estrutura de modo diverso de Legendre. Inicia essa "teoria" com a definição de retas paralelas, seguida do que ele denomina "Advertencia".

39. Duas rectas que, estando situadas no mesmo plano não se encontrão, se chamão *parallelas* entre si.

40. Advertencia. Tudo que se segue he fundado na verdade das proposições seguintes, cuja evidencia parece estar immediatamente ligada á idéia que temos da linha recta. 1º Se pelo ponto D, fig. 22, tirarmos uma recta HH', que faça com a linha DB hum ângulo HDB, menor que o recto EDB, ou que seja inclinada para a parte FG da reta GG, perpendicular sobre AB, ella encontrará GG', quando ambas se prolongarem sufficientemente, pela parte de cima de AB; 2º se pelo mesmo ponto D tirarmos a recta II' que faça com DB o ângulo IDB, com ella há de fazer pela parte debaixo de AB o ângulo I'DB, menor que o recto E'DB, ella se inclinará para a parte FG' da recta

GG' e por consequencia encontrará esta recta prolongada sufficientemente debaixo de AB.



22

Fig.2.4

Daqui resulta esta proposição, que he hum dos alicerces da theoria da parallelas: *huma recta, que he perpendicular a outra, he encontrada por todas aquellas, que são obliquas sobre esta; e por consequencia em hum plano somente se não encontram, ou são parallelas entre si, as rectas perpendiculares a huma mesma linha*(*).

(*) A imperfeição da theoria das parallelas consiste na difficuldade de provar immediatamente esta proposição. Para o conseguirem, muitos authores tem feito esforços inuteis; e outros, como Bezout, disfarçarão o vicio do raciocinio, o que me parece contra o rigoroso dever, que se impõe todo o author de obras elemenetares, de dar sempre noções exactas, e ainda mais de fazer conhecer escrupolosamente a origem dellas. Eu julguei conveniente pôr em evidencia este ponto delicado, formando, a exemplo de Euclides, hum *postulado*, mas que eu creio mais facil de conceder que o delle; porque appresenta a difficuldade reduzida aos menores termos. (veja-se nos *Ensaios sobre o Ensino* o paragrafo dos *Elementos de Geometria*.)

Muitos Geometras tem tentado provar a verdade deste postulado, quer directamente, quer transpondo a difficuldade; quase todos tem cahido em grandissimas diffusões, ou no inconveniente de compilar como discursos escuros proposições: que tem huma prova directa muito simples. Entretanto, deve ser exceptuada desta nota a demonstração, que deu M.Bertrand; ella me parece a mais simples e engenhosa de quantas eu connheço; eis-aqui o resumo.

He evidente que se ajuntarmos hum angulo qualquer edh hum numero sufficiente de vezes a si mesmo; como se mostra na fig. 23, em *hdh', h'dh", h"dh", h'"dh""*, conseguiremos formar hum ângulo total edh"" maior que o ângulo reto edb; mas se levantarmos sobre a recta DB as perpendicualres DE e FG, prolongada indefinidamente, formaremos huma facha EDFG, que não pode encher o ângulo recto EDB, por mais vezes que se ajunte a si mesmo. Com effeito, se tomarmos FK=DF, e levantarmos KL perpendicular sobre AB, e depois dobrarmos a figura ao longo de FG, a facha EDFG, cobrirá exactamente a facha GFKL; porque os angulos GFD, GFK sendo rectos, a parte DF cahirá sobre FK; e como DF = FK, por construcção, o ponto D ficará sobre o ponto K; demais, sendo recto o angulo FKL,.assim como EDF; a linha DE se ajustará sobre KL. Isto posto, como podemos tomar sobre a recta indefinida DB tantas partes iguaes a DF quantas quizermos, sem ao seu termo, formaremos hum numero tão grande, quanto quizermos de fachas iguaes a EDFG, sem podermos cobrir o espaço, indefinido comprehendido entre os dois lados do ângulo recto EDB. Daqui se segue, que consideradas relaticvamente a seus limites lateraes, a superficie ao ângulo edh he maior que a facha EDFG. Logo se construirmos nesta facha sobre a recta ED, hum ângulo EDH igual a edh, elle não poderá conter-se entre as linha ED e FG: o lado DH cortará necessariamente a recta FG.

Para sentir a força desta demonstração, se deve conceber que quando se applica o angulo recto *edf* sobre o angulo recto EDB, estas duas superficies devem sempre coincidir entre os seus limites lateraes *de* e *db*, DE e DB, por mais longe que se prolonguem: então so verá que se os angulos construidos nas fachas não sahissem das mesmas, deixarião hum vacuo indefinido, depois da ultima facha, e outro em cada facha; mas este que tem sempre lugar perto do vertice, he mais que compensado pelos espaços, que se lhes tornão communs, huma vez que tem sahido das fachas, porque cruzando-se os seus lados, elle se cobrem em parte: tal he o espaço, MNO, commum aos angulos EDH, GFH. Com esta explicação creio que não deve restar duvida alguma, fundada em que o infinito entra nas considerações precedentes, porque somente se trata de conceber que he sempre possivel metter no angulo recto hum numero de fachas, que exceda a hum numero dado, por maior que este seja.

(LACROIX, 1824 p. 20, 21 e 22)

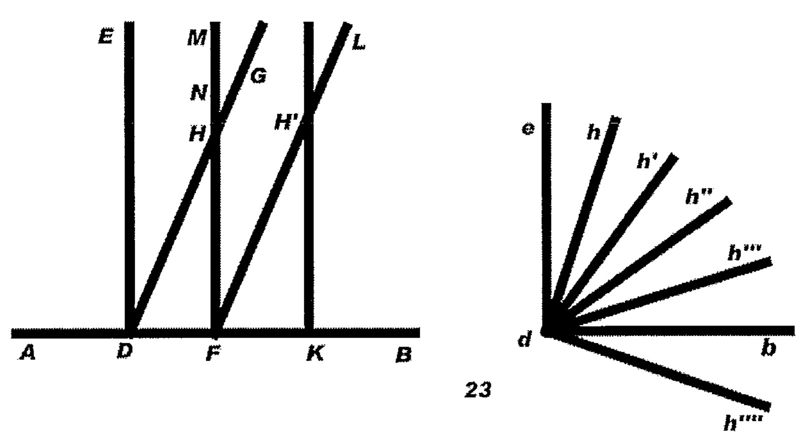


Fig. 2.5

Apesar de Lacroix não ter incluído uma demonstração própria, pode-se perceber que ele julga como um resultado demonstrável o postulado das parallelas, uma vez que apresenta a demonstração de Bertrand para o mesmo.

Villela Barbosa trata o postulado das paralelas como um axioma, no sentido de Euclides. Na primeira secção, página 26 ele inicia sua "subsecção", denominada "Das parallelas". Começa essa "subsecção" com o axioma 67 (postulado das paralelas).

> 67. Ax. Si duas rectas, que fazem angulos com uma terceira, prolongadas concorrem; outras duas rectas, que fizerem com a mesma, ou com outra terceira, angulos respectivamente eguaes para a mesma banda, similhantemente concurrerão. Com effeito, si os angulos (fig. 31) CAB, CBA são respectivamente eguaes aos angulos GEF, HFE, e as rectas AC, BC concorrem; tambem similhantemente concorrerão as duas EG, FH.
>
> (VILLELA, 1838, p. 26)

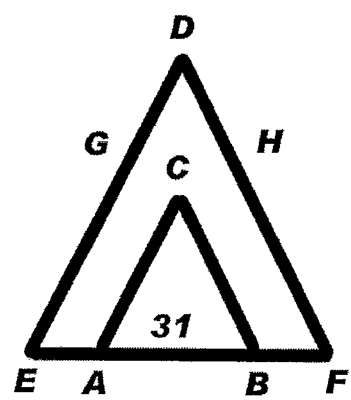


Fig. 2.6

Villela como Campos, enuncia o postulado de modo equivalente ao de Euclides.

Christiano Ottoni aborda o postulado das paralelas no Livro primeiro, capítulo primeiro, em "Das Figuras Rectilineas", Parágrafo Segundo, em sua "Teoria das paralelas". Ele inicia o assunto definindo retas paralelas (resultado 28)[v].

O postulado das paralelas aparece na página vinte e três, como conseqüência do que ele classificou como "principio" no resultado 29[vi].

1°. *Por um ponto A fora de uma recta BC (fig.20) não se pode traçar mais de uma parallela a mesma recta.*

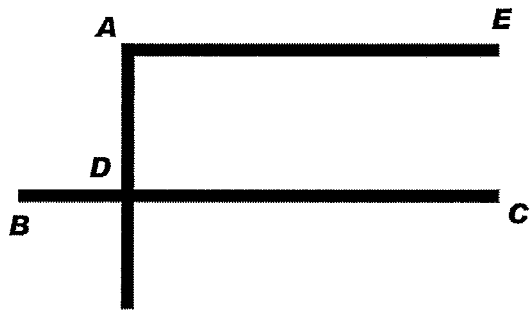


Fig. 2.7

Construindo AD perpendicular a BC, e AE perpendicular a AD, será AE parallela a BC (nº 28).
E será a única, porque outra recta que passe por A é oblíqua a AD, e portanto encontra BC (nº 29) (*).
2°. Duas retas AB, CD (fig. 21) paralleas a uma terceira EF, são entre si parallelas.

Se não o fossem encontrar-se-hião, e então haveria por um ponto duas parallelas a uma recta, o que é impossível (1°.).

(*) Esta proposição não tem a evidencia intuitiva de um axioma, mas alguns autores a adoptárão como base da theoria das parallelas, preferindo-a ao postulado de Euclides (nº 29), cuja demonstração se tem em vão procurado dar, fundada quando menos em noções de facil comprehensão para um principiante.

(OTTONI, 1857, p. 23 e 24).

Ottoni utiliza o enunciado equivalente ao de Playfair.

O livro de Timotheo Pereira trata o que ele denominou de "Teoria das Paralelas" na página vinte e seis, primeira secção do Primeiro Livro, "das Figuras Planas."

Ele inicia sua "Teoria das Paralelas" com a definição de retas paralelas. O postulado das paralelas aparece na página vinte e sete, como teorema quarenta e oito.

Como Ottoni, Timotheo enuncia seu teorema de forma equivalente a Playfair.

48.THEOREMA – P*or um ponto fora d'uma reta so se pode tirar uma parallela a esta reta (*)*

(*) Seguindo um grande numero de autores, adoptamos esta proposição para base da theoria da parallelas; muitos professores preferem expor a theoria das parallelas como se acha em Vincent *"PRÉCIS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE"*, edição de 1837. Começa este excellente autor expondo tres lemmas, cujas demonstrações forão dadas por Bertrand. Os tres lemmas acima estão excellentemente reunidos pelo illustrado senador Ottoni nos seus *"Elementos de Geometria"*, nesta proposição, que Euclides admitia sem demonstração, e é por isso chamada Postulado de Euclides. *A perpendicular e a obliqua a uma mesma reta, prolongadas sufficientemente, se encontrão,* cuja demonstração é a seguinte:

Seja AB

Uma recta, CB uma perpendicular a ella e EF uma obliqua. Vamos vêr que a obliqua e a perpendicular, prolongadas sufficientemente, se encontrão.

Levantemos pelo ponto F uma perpendicular a AB, a qual será parallela a DC, seja GF.

Considerando o ângulo EFG, vêmos que elle é uma fracção do ângulo reto DFG de modo que esta fração repetida um numero conveniente de vezes dará um ângulo recto e continuando dará dous, tres, quatro angulos rectos; n'esta occasião o ângulo abrangerá o plano todo.

Considerando a extensão plana CDFG contida entre as duas parallelas CD e FG, vêmos que é de um comprimento infinito, porém de uma largura limitada, e portanto por mais que seja repetida á direita ou á esquerda, nunca abrangerá o plano todo; *logo a extensão plana contida no ângulo EFG é maior do que a extensão plana contida entre CD e GF.*

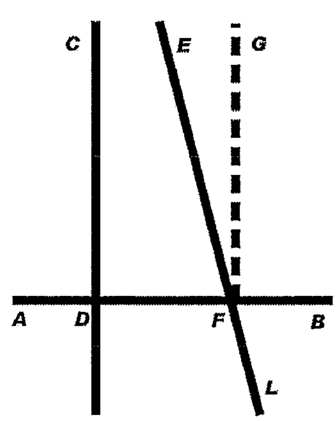


Fig. 2.8

Ora, GF é o limite commun das duas extensões EFG e CDFG; portanto, se a recta EF não encontrasse CD, ficaria o ângulo EFG contido em CDFG, ou, por outras palavras, a parte contida na menor; logo a recta EF encontra a recta CD. É bom notar que o encontro tem logar do lado do angulo agudo DFE, e não do obtuso DFL.

(PEREIRA, 1890, p. 27, 28)

Daí, Timotheo conclui o seguintes corolário.

> *Corollario. – Por um ponto fora de uma recta só se pode tirar uma parallela a esta recta.*
>
> Seja AB uma recta dada e C um ponto fora d'ella. Nós vamos provar que pelo ponto C só se pode tirar uma parallela á recta AB. Mostraremos primeiro como se tira uma parallela a AB.

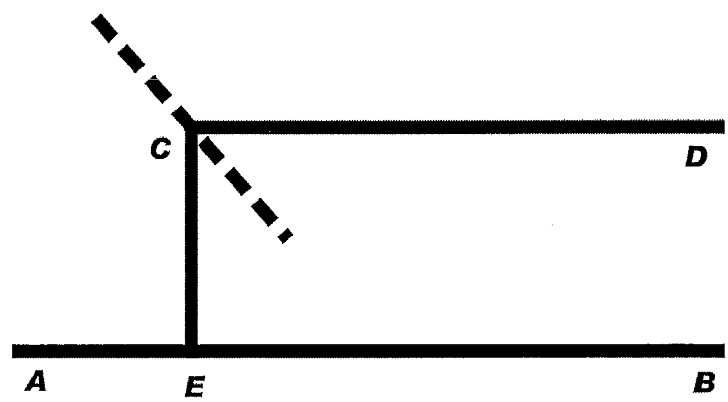


Fig. 2.9

> Baixemos do ponto C uma perpendicular a AB, seja CE; levantemos pelo ponto C.
>
> Seja AC uma recta e D um ponto fora d'ella; vamos vêr primeiramente que pelo ponto D se pode tirar uma parallela a AC. Beixemos do ponto D uma perpendicular a AC e levantemos pelo ponto D uma perpendicular á reta DB; esta será parallela á recta AC. Com effeito, a recta DB sendo perpendicular á recta AC, esta será também perpendicular a DB; a recta DE é também perpendicular á recta Db; então temos duas perpendiculares, que são DE e AC, a uma mesma recta DB; logo as duas rectas DE e AC são paralleas; fica assim *mostrado* como se pode tirar uma parallela a uma recta por um ponto fora d'ella.
>
> Quanto a poder-se tirar só uma, nós o admitiremos *sem demonstração.*
>
> (TIMOTHEO, 1890, p. 27 e 28)

Fig. 2.10

É interessante ver que tanto Timotheo quanto Euclides fazem questão de mostrar a existência de, pelo menos, uma reta paralela que passe pelo ponto, mas admitem a unicidade como sem demonstração.

Observemos que a demonstração de Legendre tornou-se conhecida (EVES, 2004) e (ÁVILA, 1992).

Podemos ver que assim como Legendre, Timotheo Pereira tratou o postulado das paralelas como um teorema (apesar de hoje saber-se não sê-lo) mas não tentou demonstrá-lo.

Capítulo 3

TOPICOS DE GEOMETRIA ESPACIAL

Neste terceiro capítulo, vamos comparar um pouco da geometria espacial, em particular o estudo das retas perpendiculares no espaço, a relação entre volume de prismas e pirâmides, e a área lateral de um cone e volume da esfera, do ponto de vista dos autores estudados.

Estas proposições foram escolhidas com o intuito de fornecer uma visão de temas variados dentro da geometria espacial.

Primeiramente descrevemos o conjunto de definições que cada autor lançou mão para embasar sua teoria, e como se mostra estruturada a geometria espacial em suas obras. A seguir analisaremos alguns enunciados e também algumas demonstrações de teoremas relevantes sobre retas perpendiculares no espaço, volume de um paralelepípedo, da pirâmide e da esfera, área do cone;

Para não sermos repetitivos omitiremos as demonstrações equivalentes que foram baseadas em um mesmo raciocínio.

3.1. Comparando as Definições dos Autores

Apresentaremos inicialmente as definições da geometria espacial na obra do Padre Campos. O Pe. Manoel de Campos trata da geometria espacial no que chama de Livro VII ou XI, na página 183.

Ele explica que:

> Neste livro pois (a quem em chamo VII e Euclides XI, e que corresponde ao I dos Planos) se estabelecem primeiramente os principios geraes da doutrina dos Solidos; e depois se trata particularmente dos corpos mais simplices (e em que se resolvem todos os rectineos) quaes são Parallelipidos, e Prismas.
>
> (CAMPOS, 1735, p. 183)

Campos inicia o Livro VII com quatorze definições. Já nossa versão de Euclides (a tradução de Frederico Commandino com os acréscimos de Simson, de 1944) traz trinta definições. Pe. Campos coloca somente as definições dos elementos espaciais que serão usadas neste capítulo, enquanto que Euclides coloca todas as definições de sólidos espaciais, inclusive os que serão tratados apenas no Livro XII (a saber: a relação entre o volume da pirâmide e do prisma, pirâmide cônica, cilindro e esfera).

Campos define sólido ou corpo, reta perpendicular no plano, planos perpendiculares, inclinação de uma reta em relação a um plano, inclinação do ângulo entre dois planos, planos paralelos, sólidos retilíneos, sólidos semelhantes, ângulo sólido, ângulos sólidos iguais, prisma, paralelepípedo e cubo.

Legendre começa seu estudo da geometria espacial no Livro V sobre planos e ângulos sólidos, página 143. Ele apresenta inicialmente as definições de reta perpendicular a um plano, pé de perpendicular, planos paralelos entre si, ângulos entre dois planos, planos perpendiculares e ângulo sólido. O primeiro assunto estudado no Livro V é sobre o plano e a linha reta no espaço Legendre aborda as posições relativas entre retas e planos, mas destaca para um segundo tópico as retas paralelas a planos. Os tópicos subseqüentes são: o estudo dos planos paralelos, ângulo entre uma reta e um plano, ângulos entre planos e ângulos poliédricos.

O estudo da geometria espacial continua no Livro VI de Legendre, página 167, que contém o estudo dos poliedros. Ele inicia o capítulo com cerca de vinte definições: sólido poliedro (ou poliedro); aresta; poliedro regular; prisma, (base, superfície lateral) altura de um prisma; prisma reto; classificação de um prisma segundo a base; paralelepípedo; paralelepípedo retângulo, cubo ou hexaedro regular; pirâmide e seus elementos; altura da pirâmide; classificação da pirâmide segundo a base, pirâmide regular e diagonal de um poliedro; poliedro simétrico; pirâmides triangulares semelhantes, poliedros semelhantes; vértice de um poliedro. Observamos que ele não chega a definir face nem apótema de uma pirâmide.

Cabe advertir que o conjunto de definições utilizadas por Legendre, embora menor do que o de Campos (vinte contra trinta) é mais “significativo”. Legendre separa o estudo dos corpos redondos em dois outros livros: esfera no Livro VII e os três corpos redondos (cilindro e cone, e esfera, novamente) no Livro VIII. No livro VII, o estudo de esfera traz as definições de esfera e apresenta um pouco de geometria esférica: aborda as figuras traçadas sobre a esfera, triângulos e ângulos esféricos, inscrição e circunscrição de sólidos na esfera. Já o estudo de esfera no Livro VIII é voltado para as demonstrações dos teoremas de área e volume.

A tradução em português de Legendre traz também três apêndices. O apêndice do Livro IV que aborda dois temas de geometria plana: polígonos *maximun* e polígonos isoperímetros. Os apêndices aos capítulos VI e VI que tratam dos poliedros regulares, os chamados Poliedros de Platão. Ele apresenta nesse apêndice apenas um teorema seguido de seis problemas sobre construções de poliedros regulares, os cinco primeiros relativos à construção de cada um dos cinco poliedros de Platão. O sexto e último problema desse apêndice é descobrir o raio da esfera inscrita e circunscrita, dado um lado do poliedro regular qualquer. Em seu Livro VII, Legendre inicia com cerca de dezesseis definições: esfera, centro da esfera, raio e diâmetro, círculo máximo e circulo menor, plano tangente à esfera, pólo, triângulo esférico, classificação dos triângulos esféricos, polígono esférico, fuso da esfera, cunha esférica, pirâmide esférica, zona da superfície esférica, segmento esférico, eixo ou altura entre a zona e um segmento, setor esférico.

No capítulo VIII, Legendre faz cerca de dez definições entre elas: cilindro, bases e eixo do cilindro, cone, base, lado ou apótema do cone, cone truncado ou tronco de cone, cilindros ou cones semelhantes, inscrição e circunscrição de cilindro no prisma.

Observamos que ele usa o termo cone – em contraposição à "pirâmide cônica" – utilizado pelo outros autores estudados. Legendre trabalha apenas com a definição de cilindro reto e cone reto.

De fato ele define o cilindro como sendo um cilindro reto.

> Chama-se *cylindro* o sólido produzido pela revolução de hum rectangulo ABCD (fig. 250), que se imagina girar em torno do lado immovel AB.
>
> (LEGENDRE , 1809, p. 249)

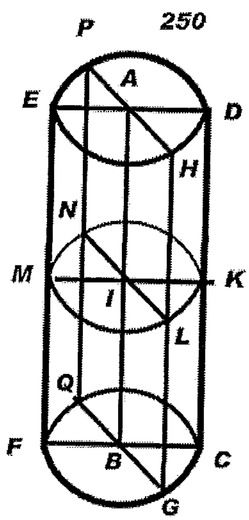


Fig.. 3.1

O livro de Lacroix separa a geometria em duas Partes: a Primeira Parte trata da geometria plana e a Segunda da geometria espacial. A Segunda Parte se divide em seções, a saber:

Secção Primeira:

- Planos e poliedros (p. 123)
- Planos e retas (p. 123 a p. 143)
- Poliedros (p. 143 a p. 156)
- Volumes (p.157 a p. 171)

Secção Segunda:

- Corpos redondos (p. 172 a p. 199)
- Comparação de corpos redondos (p. 200 a p. 203).

Lacroix enumera toda as afirmações, definições e resultados em uma seqüência única.

O assunto de planos e retas principia pelas afirmações que ele chama de definições. Não as nomeia, apenas disserta sobre elas. Lacroix afirma que: a reta está contida num plano, a intersecção de dois planos é uma reta, três pontos determinam um plano, duas retas concorrentes estão contidas em um plano, duas retas paralelas estão contidas em um plano. Prossegue com teoremas sobre posições relativas entre retas e plano e posições relativas entre dois planos. Ele chama o ângulo espacial de "ângulo sólido" ou "ângulo poliedro" e o diferencia de ângulo diedro e do ângulo triedro que define em 221, p. 137. Segue com teoremas sobre ângulos espaciais .

O estudo dos poliedros inicia-se na página 143, com a definição de poliedro (nº 227). Nessa mesma explanação (227) Lacroix define tetraedro, pirâmide, vértice de pirâmide e nomeia pirâmides pela base, mas apenas com exemplos.

> *227. O corpo SABDE, figura 127 he uma pyramide pentagonal, porque sua base he um pentagono... O tetraedro SABC, da figura 126, tambem he uma pyramide triangular. Todos os seus angulos polyedros tem tres faces, o que só tem lugar nos angulos adjacentes á base mas outras pyramides, e pode-se tomar por base a face que se quizes.*
>
> (LACROIX, 1824, p. 143)

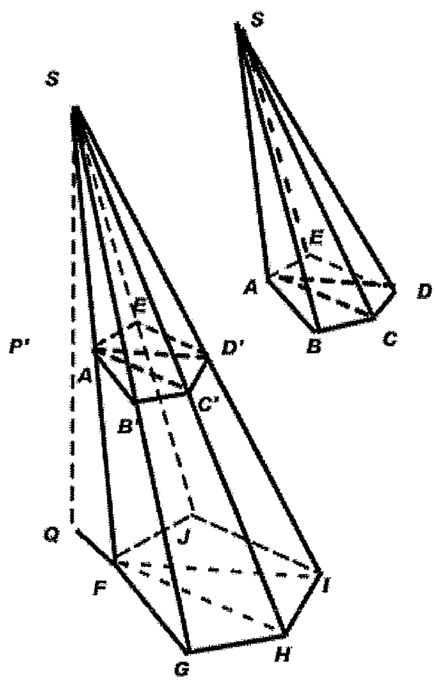


Fig. 3.2

Outras definições aparecem ao longo dos teoremas sobre poliedros: definição de poliedros semelhantes; prismas e paralelepípedo, Lacroix também faz afirmações ao longo do texto, que não demonstra, chamadas *Advertencias* . O tópico sobre Volumes apresenta uma única definição, a de volume (definição 247, p. 157), seguida dos teoremas. Lacoix apresenta uma definição geral de corpos redondos, mas adverte que só tratou do cilindro reto, cone reto e esfera.

> 267. Corpos redondos são aquelles que se formão fazendo girar huma figura plana em roda de huma linha recta. Aqui só trataremos especialmente de *cone recto*, do *cylindro recto*, e da *esfera*.
>
> (LACROIX, 1824, p.172)

Em comparação com os outros autores, Villela estrutura sua geometria espacial de maneira mais enxuta e precisa. Villela, como Lacroix, enumera em seqüência única resultados, afirmações e definições.

O livro de Villela está dividido em quatro Secções. A Geometria Plana ocupa as duas primeiras Secções. As demais Seccções, (e um apêndice) tratam da Geometria Espacial.

Villela Barbosa separa em secções diferentes os tópicos planos e ângulos poliédricos (3ª secção, p. 94) dos corpos – prismas, pirâmides, pirâmide cônica e esfera – (4ª secção, p. 117).

A terceira secção aborda primeiramente os planos, e sobre eles Villela apenas afirma sua infinitude.

Ao contrário de Lacroix, que apenas afirma, Villela demonstra que "a intersecção de dois planos é uma reta", no que chamou de teorema 203. Ele prossegue com teoremas sobre as posições entre retas e planos. Inseridas ao texto encontram-se outras definições, como a de reta oblíqua a um plano (nº 208, p. 97) e dois problemas de construção. As posições relativas entre dois planos são tratadas a partir da página 104 até a página 108. Ele inicia o assunto com a definição de ângulo diedro, seguida dos teoremas e corolários e prossegue com a definição de planos paralelos. Villela também faz afirmações, que não demonstra, dentro dos escólios. Este tópico apresenta dois escólios e um problema, além dos quatro teoremas de posição relativas entre planos

Os ângulos poliédricos, também chamados por ele de "ângulos sólidos", são estudados a partir da página 111. Villela define os ângulos poliedros de maneira mais precisa do que Lacroix, definindo ainda, ângulo triedro, ângulo tetraedro, etc. Ele esclarece que um ângulo triedro possui três ângulos retilíneos e três ângulos diedros e segue com os teoremas, ou seja, na terceira secção, Villela utilizou cinco definições ao todo. Diferentemente de Lacroix, Ottoni e Legendre e mesmo do Pe. Campos, Villela trata dos poliedros e corpos redondos na mesma secção (4ª secção p. 117). Ele inicia a quarta secção com as definições de poliedros, poliedros semelhantes, pirâmides (vértice, base e altura da pirâmide, nomenclatura).

> 250. Tem o nome de *pyramide* o polyedro, em que uma das faces é qualquer polygono, e todas as mais são triangulos, que tem por bases os lados desse polygono, e todos o mesmo vertice. Este se diz tambem *vertice* da pyramide: aquelle polygono *base*.
>
> A perpendicular tirada do vertice sobre o plano da base é a *altura* da pyramide.
>
> As pyramides tomam differentes nomes conforme a figura das suas bases. Si é triangulo; chama-se *pyramide triangular*, ou *tetraedro* simplesmente. Fig. 121. Si quadrilatero; *pyramide quadrangular*. Fig. 122. &c. E sua a base é polygono regular, a a altura da pyramide cáe no centro desse polygono, diz-se que a pyramide é *regular*. Fig. 123.
>
> (VILLELA, 1838, p. 118)

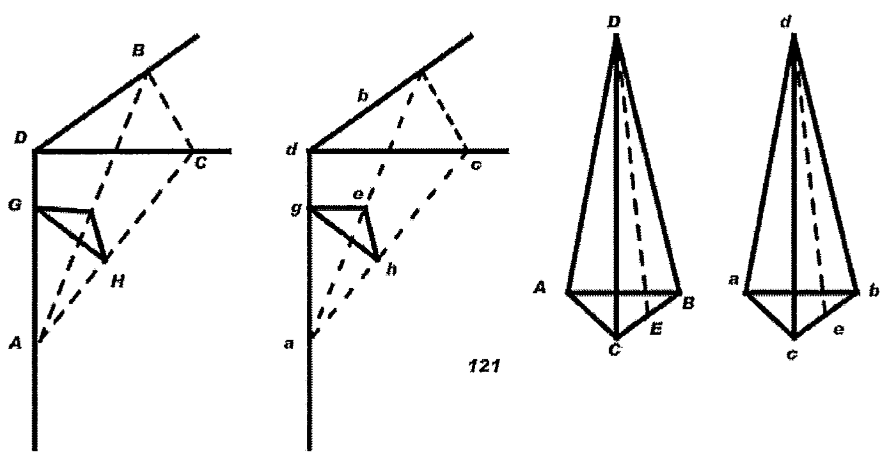


Fig. 3.3

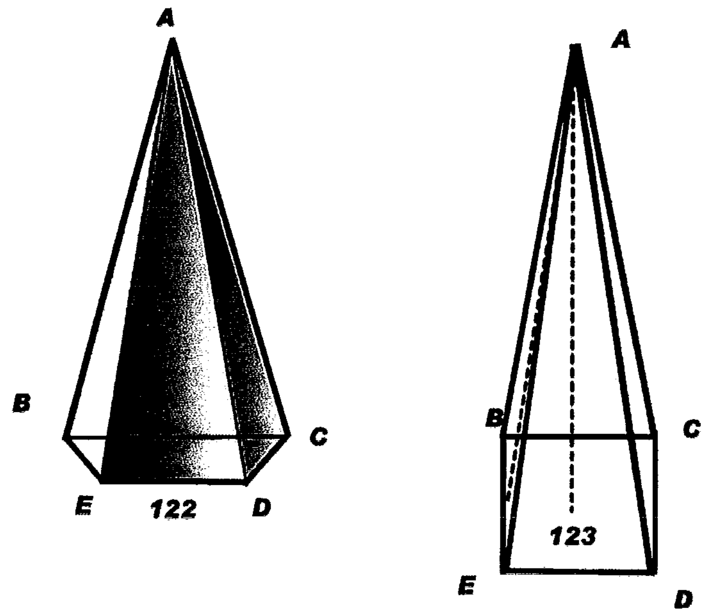


Fig. 3.4

Em relação às pirâmides, Villela só não define aresta.

Legendre apresenta a definição de pirâmide regular, mas Villela, Ottoni e Timotheo, além de apresentarem a definição, afirmam que os triângulos de suas faces são congruentes e isósceles, mas apenas Villela demonstra esse resultado em seu teorema 251.

> *251. THEOR. Em qualquer pyramide regular as faces, que terminam no vertice, são todas triangulos isosceles, e eguaes.*
>
> Seja (fig. 123) a pyramide-regular ABCDE, cujo vertice é A. Digo que as faces BAC, CAD, &c, são triangulos isosceles, e eguaes.
>
> *Demonstr.* Por ser regular a pyramide (hyp.), a perpendicular tirada do vertice sobre a base cairá no centro desta. Logo são eguaes as arestas AB, AC, AD, &c. (210)[vii]. Mas tambem são eguaes os lados da mesma base, BC, CD, DE &c. Logo os triangulos BAC, CAD, &c. São isósceles (82)[viii], e eguaes (107)[ix].
>
> (VILLELA, 1838, p. 118 e 119)[15].

[15] Ver os resultados citados por Villela 82, 107, 210 nas notas.

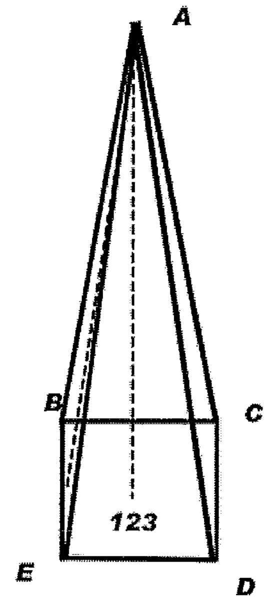


Fig. 3.5

Inserido no texto da quarta secção, encontramos as definições de prisma (254, p. 119) e seus elementos (altura, arestas e base de um prisma) prisma reto e oblíquo, nomenclatura dos prismas, paralelepípedo retângulo e o cubo), pirâmide cônica (reta e oblíqua); pirâmides cônicas semelhantes, tronco da pirâmide cônica, cilindro e seus elementos (base, lados[16], eixo, altura), cilindro reto, cilindro oblíquo, cilindros semelhantes, esfera e seus elementos (raio, diâmetro, segmento esférico, zona esférica, setor esférico). Observamos que apenas Villela e Ottoni generalizam o conceito de cilindro.

> 259. O corpo terminado por dous circulos eguaes e parallelos e por uma superficie, na qual todas as rectas tiradas da circunferencia de um dos circulos para a do outro são parallelas entre si, chama-se *cylindro*. Fig. 130e 131. As rectas dizem-se *lados*; e os circulos *bases*.
>
> A perpendicular tirada de uma das bases sobre o plano da outra base, chama-se *altura*: e a recta que passa pelos centros das bases, *eixo*.
>
> O *cylindro* é *recto*, quando o eixo é perpendicular á base. Fig. 130. E *obliquo*, no caso contrario. Fig. 131.

[16] Hoje utilizamos o termo geratriz.

> O cylindro recto pode ser considerar-se gerado pela revolução inteira de um rectangulo *ABC'C* (fig. 130) ao redor de um dos lados *CC'*, que se suppõe immovel.
>
> (VILLELA, 1838, p.122)

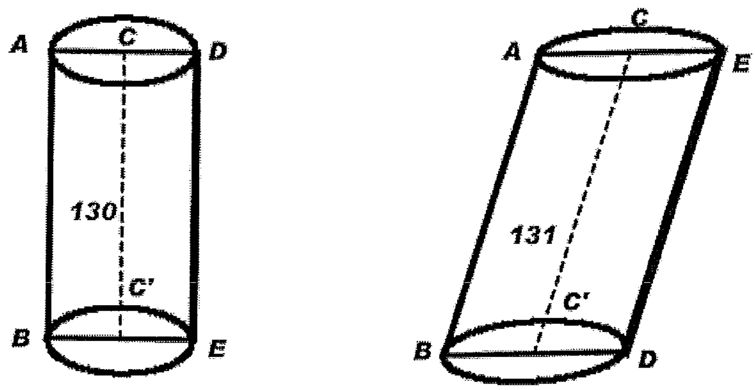


Fig. 3.6

O segundo tópico da quarta secção de Villela é sobre a congruência de tetraedros, o terceiro tópico é a semelhança de tetraedros, o quarto trata dos poliedros inscritos e circunscritos ao cilindro, à pirâmide cônica e à esfera, o quinto tópico é sobre a área dos corpos; o sexto trata das relações entre os paralelepípedos e tetraedros e o sétimo e último tópico da quarta secção estuda o volume dos corpos. A quarta secção apresenta vinte e oito definições ao todo, e muito bem escolhidas em termos de "significância".

Christiano Ottoni faz o estudo da geometria espacial em seus Livros III e IV. Ele também enumera todos os resultados, afirmações e definições em uma seqüência única, mas faz uma segunda numeração dos teoremas, por tópicos.

O estudo das figuras espaciais é feito no Livro III. Ottoni divide esse estudo em dois capítulos. O primeiro trata das relações de posição entre retas e planos, ângulos poliedros, poliedros (que ele chama de corpos terminados em superfícies planas) e poliedros convexos. Corpos redondos – cilindro, cone e esfera – são estudados no segundo capítulo. Ottoni, como Lacroix apresenta apenas a definição de cilindro reto e cone reto (nomeada também como pirâmide cônica reta).

No Livro IV ele amplia o estudo da geometria espacial, analisando semelhança, áreas e volumes dos poliedros e dos corpos redondos. Em sua obra Ottoni também separa os corpos redondos dos poliedros.

Ottoni inicia o capítulo I do Livro III, na página 145, demonstrando duas afirmações, baseadas na infinitude da reta e do plano.

1. três pontos determinam um plano[17] e;
2. a intersecção de dois planos é uma reta;

Ottoni prossegue definindo ângulo diedro, ângulo triedro, aresta, ângulo poliedro, "chamão alguns, impropriamente, ângulo sólido" (OTTONI, 1857, p. 142) faces do ângulo poliedro, planos diagonais, ângulos poliedros convexos, ângulos poliedros côncavos, poliedros e seus elementos (faces, arestas e vértices). Mescladas ao texto estão ainda as definições de reta e oblíqua a um plano, igualdade de ângulos diedros, planos perpendiculares a outro e ângulo entre planos. No tópico sobre ângulos poliédricos, Ottoni escreve que: "D'ora em diante admitiremos como evidente que é sempre possível construir um plano que corte todas as arestas de um ângulo polyedro convexo". (OTTONI, 1857, p. 162). Ele afirma ainda que todo ângulo triedro é sempre convexo. Ele faz a classificação dos triedros quanto ao número de diedros retos (uniretângulo ou retângulo, biretângulo e triretângulo). Ottoni também faz um paralelo entre os ângulos triedros e os triângulos – com exceção do Teorema 45[18]. Salienta que os teoremas de proposição dos triângulos podem ser provados para os triedros, mas que não faria, pois, segundo Ottoni, "as demonstrações destas propriedades não são essenciais para a inteligência do que se segue; pelo que as omitimos" (OTTONI, 1857, p. 167). Ottoni esclarece ainda que tais demonstrações (teorema 45 – soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º) podem ser encontradas no livro de Vicent[19].

Ele define triedro e poliedro simétrico (nº 222, p. 169). A seqüência de definições de Ottoni prossegue mesclada ao texto, com prismas e seus elementos (face, base, aresta e altura). Também faz a seguinte afirmação não demonstrada: "toda secção MNPQOR feita em um prisma por um plano parallelo as bases, é figura igual a qualquer

---

[17] Ottoni explica que havia tomado essa firmação como "evidente" no início do livro, ele chamou de nº 8, mas que é um princípio e que naquele ponto já poderia demonstrar.

[18] Teorema 45 – "Em todo triangulo ABC, a somma dos três ângulos é igual a dous rectos" (OTTONI, 1857, p.35)

[19] Segundo Valente, a geometria de Vicent, tem originalmente o título de *Cours de géométrie élémentaire, à l' usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechique ou aux Écoles militaires.* A primeira edição data de 1826, a partir da 5ª edição, o livro ganha o título de *Cours de Géométrie Élémentaire*, par A-J-H. Vincent, Professeur de mathématiques au Collège royal de Saint-Louis.... E é sobre esta última forma do livro que Ottoni se debruçara para construir sua compilação. (VALLENTE, 1999, p.148)

dellas" (OTTONI, 1857, p. 171). Observe que ao denominar a secção com um número finito de letras, (vértices) ele está enunciando o resultado (que não demonstra) através de um exemplo, no caso, do prisma de base hexagonal.

Ottoni continua com a definição e explicação da nomenclatura dos prismas segundo a base. Classifica-os em reto, oblíquo e regular. Também afirma que todo prisma pode ser dividido em prismas triangulares, mas não demonstra. Ele define paralelepípedo como caso particular de prisma.

Afirma, sem provar, que toda secção de um paralelepípedo, feita paralelamente a uma das faces, é um paralelogramo. (OTTONI, 1857, p.172)

Ottoni define ainda paralelepípedo reto, paralelepípedo reto retângulo e cubo, como caso particular deste último. Define diagonais do paralelepípedo e diagonais da face. Ao término do capítulo I (no 4° parágrafo) Ottoni coloca as definições de pirâmide e seus elementos – base, face, vértice da pirâmide, e altura. Explica a nomenclatura das pirâmides segundo a base, define pirâmide regular e apótema da pirâmide. Ao todo, no Livro II, Ottoni faz cerca de quarenta definições, algumas não relevantes e cinco afirmações não demonstradas.

As diversas afirmações que Ottoni faz sem demonstrar ao longo do texto talvez se devam ao fato de este livro ter sido baseado em notas de aula, como ele mesmo coloca em seu prefácio da 2° edição:

> ... avultou o dever, e o desejo de o aperfeiçoar quanto a mim dependesse." (se referindo à 1ª edição do livro)
> Desta tarefa não me descuidei, em quanto exerci o magisterio: dia por dia, pagina por pagina, colhi como pude os resultados da experiência do ensino, já para emendar incorreções e erros typographicos, já para melhorar o livro e adaptal-o quanto me fosse possivel ao fim a que se destina...
>
> (OTTONI, 1857).

Timotheo Pereira, como já foi dito, divide seu livro em duas grandes secções. A primeira sobre geometria plana está dividida em dois Livros. E a Segunda Secção trata da geometria espacial, também dividida em dois Livros: o Livro Terceiro e o Livro Quarto.

O Livro Terceiro de Timotheo, que começa na página 223, trata a parte inicial da geometria espacial: posições entre retas e planos, ângulos diedros, ângulos poliedros, ângulos triedros e propriedades dos prismas e pirâmides. Timotheo inclui um tópico em separado sobre a decomposição de um poliedro em tetraedros. Outro tópico que ele faz separadamente é sobre a existência dos cinco poliedros convexos regulares (os Poliedros de Platão).

Ainda no Livro Terceiro, Timotheo estuda a igualdade dos poliedros, a fórmula de Euler e os corpos redondos (cilindro, cone e esfera).

Esse Livro apresenta cerca de 70 definições inseridas no texto. Timotheo procura definir todos os elementos que usa. Ele (como Ottoni, Lacroix e Villela) faz uma enumeração única, ao longo da obra, das definições, teoremas, corolários, escólios, observações e lemas.

O Livro Terceiro começa com a definição de plano ou superfície plana, mas o autor observa que "Definimos planos ou superfície plana; não indicamos, porém como se pode conceber a geração d'um plano a qual pode ser de diversas maneiras" (PEREIRA, 1890, p. 223). Ele faz diversas definições que os outros autores não fazem, por exemplo: ângulos diedros adjacentes, ângulos diedros opostos, ângulo poliedro convexo, plano diagonal do poliedro.

Tal qual Ottoni, define triedro retângulo, triedro bi-retângulo, triedro tri-retângulo. A seguir define poliedro e seus elementos (faces, arestas, vértices, diagonal do poliedro, poliedro côncavo e convexo).

Em seguida, define prisma e paralelepípedo e faz todas as definições convencionais pertinentes: (base, face, altura, aresta), classificação em prisma reto e oblíquo, nomenclatura segundo o polígono da base.

Ao tratar de pirâmides, Timotheo faz todas as definições (exatamente as mesmas que Ottoni) e em ordem semelhante trata da nomenclatura. Timotheo não fornece a nomenclatura por meio de exemplos, como Ottoni, mas exemplifica a lógica do processo:

> 373. Pyramide...
>
> ... Conforme fôr polygono da base um triangulo, um quadrilátero, um pentagono, etc., a pirâmide se chama triangular, quadrangular, pentagonal, etc.
>
> (PEREIRA, 1890, p. 264)

Timotheo é o único dos autores a estudar a Fórmula de Euler, que ele chama de Teorema de Euler. Lacroix a enuncia e dá um exemplo, mas fora do corpo do texto, em nota de rodapé, nas páginas 151 e 152.

> O numero dos angulos de hum polyedro, o das suas faces, e o das suas arestas, enchem huma condição notavel descoberta por Euler, a saber: designando S o numero dos ângulos polyedros, H o das faces, A o das arestas, temos sempre S + H = A + 2. No cubo, por exemplo, S = 9 , H = 6, A = 12.
>
> (LACROIX, 1824, p. 152)

Também entre as obras analisadas, seu compêndio é o único a apresentar a definição geral da superfície cilíndrica e tomando o cilindro como uma parte da mesma.

> 382. CYLINDRO. – *Chama-se superficie cilindrica a superficie gerada por uma recta que se move parallelamente a si mesma apoiada sobre uma linha qualquer...*
>
> *Cylindro* é uma porção do espaço limitada por uma superficie cylindrica e dous planos secantes parallelos chamados bases do cylindro.
>
> (PEREIRA, 1890, p.271).

Villela define cilindro de uma forma mais geral, mas não tanto quanto Timotheo.

> 259. O corpo terminado por dous círculos eguaes e parallelos e por uma superficie, na qual todas as rectas tiradas da circunferência de um dos círculos para a do outro são parallelas entre si, chama-se *cylindro*. Fig. 130 e 131. As rectas dizem-se *lados*; e os círculos *bases*.
>
> (BARBOSA, 1838, p.122)

Timotheo define geratriz, diretriz, eixo e altura de um cilindro.

Ele faz o mesmo raciocínio com relação à definição de superfície cônica e cone.

Define cone truncado. Com relação ao estudo da esfera Timotheo e Legendre são os únicos que definem pólos.

O Livro Quarto (p. 285) traz cerca de vinte e quatro definições ao todo e trata de poliedros, poliedros inscritos e circunscritos, áreas de poliedros regulares conhecendo a aresta, volume de poliedros, volume dos poliedros regulares conhecendo a aresta, área da esfera, da zona, do fuso, volume da esfera, volume do segmento e da cunha esférica. Trata ainda do cilindro e do cone inscritos na esfera. Com relação a esses tópicos, as definições de Timotheo são semelhantes às de Ottoni e Villela.

Timotheo apresenta ainda neste último livro noções de figuras traçadas sobre a superfície esférica[20], ciclóide, epiciclóide e secções cônicas. Legendre e Villela trazem esse primeiro tema em suas obras. Legendre o faz no corpo do livro, no capítulo sobre esferas (cap. VII). Já Villela aborda o assunto em um apêndice, na página 171. Os três últimos temas são estudados apenas por Timotheo.

3.2 Retas Perpendiculares no Espaço

Vamos apresentar um teorema sobre retas perpendiculares no espaço, do ponto de vista de cada um dos autores, com a linguagem original e seguida da figura que o ilustra, segundo cada obra.

O livro do Padre Campos trata da perpendicularidade no livro VII (ou XI), página 186, no que ele denominou de Proposição IV:

PROPOSIÇÃO IV

"Se a recta AO, for perpendicular a 2 rectas; será também perpendicular ao plano, que por elas passa.

[20] Esse estudo era conhecido na época como geometria esférica. Não confundir com a geometria não-euclidiana de Riemann.

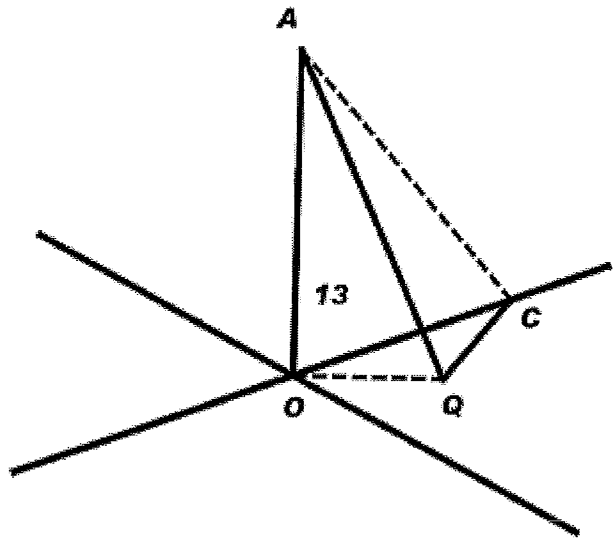


Fig. 3.7

Dem: Se não he; tire-se do ponto A, huma perpendicular ao ditto plano AQ; e juntos os pontos O, Q, com uma recta,tire-se a esta outra perpendicular no mesmo plano QC; aqual necessariamente ha de cortar alguma das rectas dadas em algum ponto C; como se collige do Escb.[21] do 3I[x] do I. Tire-se finalmente a recta AC, e considerem-se 4 triângulos rectangulos AOC (Hyp.) CQO (Const.) AQO, AQC (Def 3.)[xi]

O quadrado AC, he igual aos quadrados AO+OC (47.1)[xii] porem AO, he igual à AQ+OQ; e OC, he igual à OQ+OC: logo o quadrado AC é igual aos quadrados AQ+QC+2OQ. Porém (pela mesma 47.) houvera de ser igual somente aos dous AQ+AC: logo he igual e mayor a respeito dos mesmos ,&cc." (CAMPOS, 1735, p.186)

Com relação à proposição IV, do Pe. Manoel Campos podemos, observar, que sua demonstração foi feita por absurdo, usando do Teorema de Pitágoras. Ele chama de "quadrado" o lado oposto ao ângulo de 90°.

O autor trata de reta, o que seria segmento de reta, não nomeia o plano, nem as retas/segmentos. Usa uma linguagem muito sintética que dificulta a compreensão da proposição.

Já o livro de Legendre apresenta o teorema fundamental das perpendiculares no espaço no Livro V, página 145, em sua proposição IV

[21] Escolio da página 31 do Livro I.

PROPOSIÇÃO IV

THEOREMA

Se huma linha recta AP for perpendicular a outras duas PB, PC (fig. 183), que se cruzam no seu pé no plano MN, ella será perpendicular a huma recta qualquer PQ conduzida pelo seu pé no mesmo plano; e deste modo será perpendicular ao plano MN

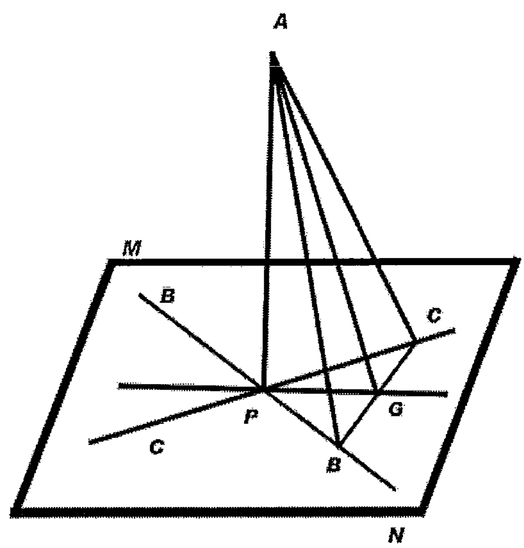


Fig. 3.8

Por um ponto Q, tomado á vontade sobre PQ, tire-se a recta BC no angulo BPC, de maneira que BQ = QC (probl. 5. livro 3.)[xiii], ajunte-se AB, AQ, AC. Como a base BC está dividida em duas partes iguaes no ponto Q, o triangulo BPC dará (14.3.)[xiv]

$$\overline{PC^2} + \overline{PB^2} = 2\overline{PQ^2} + 2\overline{QC^2} ;$$

O triangulo BAC dará igualmente

$$\overline{AC^2} + \overline{AB^2} = 2\overline{AQ^2} = 2\overline{QC^2}$$

Tirando a primeira igualdade da segunda, e observando que os triângulos APC, APB, ambos rectangulos em P,

dão $\overline{AC^2} - \overline{PC^2} = \overline{AP^2}$, $e\ \overline{AB^2} - \overline{PB^2} = \overline{AP^2}$ $AC^2 - PC^2$ =,

teremos,

$$\overline{AP^2} + \overline{AP^2} = 2\overline{AQ^2} - 2\overline{PQ^2} .$$

Logo tomando as metades, temos $\overline{AP^2} = \overline{AQ^2} - \overline{PQ^2}$ AP²=,

ou $\overline{AQ^2} = \overline{AP^2} + \overline{PQ^2}$; logo o triangulo APQ he rectangulo em P (I 3.3.); logo AP he perpendicular a PQ.

(LEGENDRE, 1809, p.145 e 146)

No livro de Legendre a demonstração é feita mais passo a passo, facilitando o entendimento.

O autor também não distingue os conceitos de reta e segmento. A figura que acompanha a demonstração traz todos os elementos nomeados.

A demonstração é feita por construção, utilizando o Teorema de Pitágoras, relação métrica no triângulo qualquer, mediatriz, ponto médio, embora não nomeados.

Esse teorema sobre retas perpendiculares no espaço, aparece na segunda parte do livro de Lacroix, na primeira secção, página 125.

"Theorema

196.Huma recta CD, fig. 108, levantada fora de hum plano AB, perpendicularmente a outras duas DE, DF, tiradas pelo seu pé D neste plano, he perpendicular a todas aquellas, que por este ponto se podem tirar no mesmo plano.

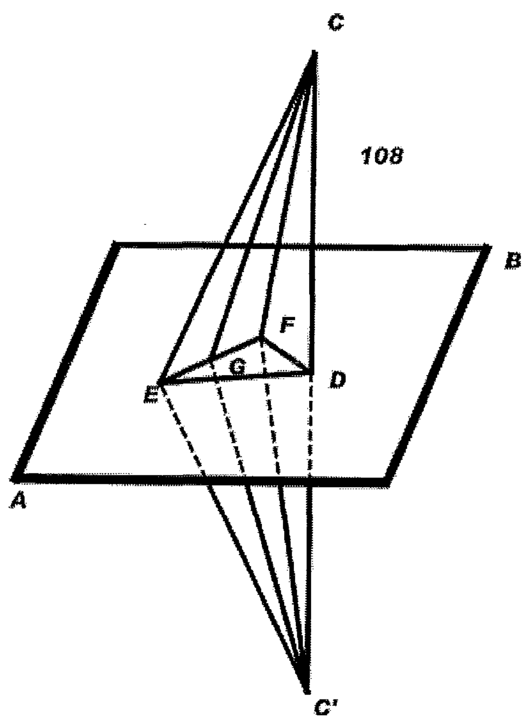


Fig. 3.9

Demonstração: Seja DG huma recta tirada pelo ponto D, de huma maneira qualquer, no plano AB; tire-se huma recta EF, que corte DG, prolongue-se, abaixo do plano AB, a recta CD, huma quantidade C'D=CD, tirem-se finalmente as rectas CE, CG, CF, C'E, C'G e C'F. Isto feito, como CD he perpendicular sobre DE e sobre DF, estas o serão sobre CC' (13)[xv]: as obliquoas CE e C'E, DF C'F, serão eguaes, porque se affastão igualmente do pé da perpendicular (27)[xvi]; e demais o lado EF sendo comum aos triangulos CEG e C'EG, estes terão todos os seus lados eguaes, e por consequencia serão eguaes (29)[xvii]; logo os seus angulos CEF e C'EF serão eguaes. Tambem serão eguaes os CEG e C1EG, nos quaes estes angulos são comprehendidos entre hum lado commum EG, e os dois lados eguaes CE e C1E (16)[xviii]. Daqui se segue que os lados CG e C'G são eguaes; e como se affastão igualmente do ponto D, daqui resulta que a reta DG he perpendicular sobre CD (27)[xix], e reciprocamente CD sobre DG (*).

197. Advertencia. A lina CD, que cabe em angulo recto sobre todas aquellas, que se podem tirar por seu pé neste plano, e por consequencia não se inclina de lado algum para o plano, lhe he perpendicular.

(*) *Esta demonstração, do mesmo genero que a de Euclides, porem mais simples, me foi communicada por M. Cauchy, jovem geometra muito distincto.* (LACROIX, 1824, p.125 e 126).

Lacroix justifica todas as afirmações citando resultados anteriores, o que foi motivo de elogio por parte de outros autores que classificam sua geometria como sendo mais "analítica".

Lacroix enumera cada passo dos resultados anteriores utilizados.

A demonstração de Lacroix é mais longa do que a de Legendre, pois este utiliza um "gyro em torno da base do triângulo ABC", fazendo o triângulo ABC coincidir as igualdades uma a uma.

Villela Barbosa trata da perpendicularidade no espaço na terceira secção, página 96.

206. Theor. Si uma recta for perpendicular a outras duas rectas no ponto, onde estas duas se cortam; será também perpendicular a *todas as mais rectas, que a tocarem, existente no plano das duas. (É se dirá perpendicular ao plano; e reciprocamente).*

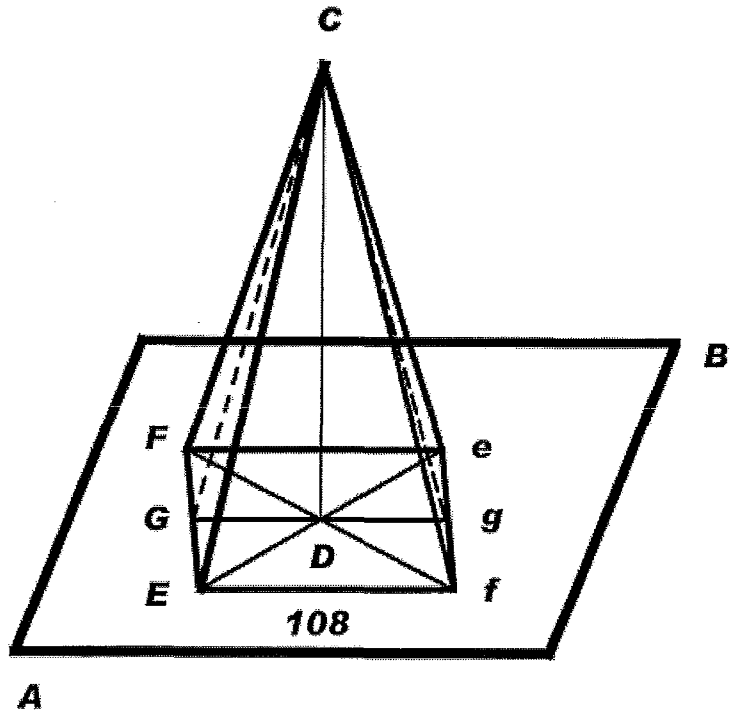


Fig. 3.10

Seja (fig.108) a recta CD perpendicular ás duas Ee, Ef, no ponto D, em que estas duas se cortam: e seja AB o plano, que ellas determinam. Digo que CD será também perpendicular a todas as mais rectas que a tocarem, existentes no plano AB.

Demonstr: Tire-se pelo ponto D no plano AB uma recta indefinida Gg: e tomem-se eguaes as partes DE, De, DF, Df. Tirem-se FE, Fe, serão eguaes os triângulos DEF, Def, como tendo dous lados respectivamente eguaes, e egual ao angulo formado por esses dous lados; a saber, EDF=eDf (102)[xx]. Logo será FE=fe; e por isso, e por serem eguaes as obliquas CF e Cf, CE e Ce, pois se desviam egualmente da perpendicular CD (38)[xxi]; serão eguaes os triângulos FCE, fCe (107)[xxii]; e logo o angulo CEF=angulo Cef. Temos também que os triângulos GDE, gDe são eguaes (105)[xxiii]; por ser DE=De (constr.), o angulo GDE= ANGULO gDe, e o angulo DEG=angulo Deg, pela egualdade dos triangulos DEF, Def. Logo será EG=eg: pelo que, e por termos concluido ser CE=Ce , e eguaes os angulos CEF, Cef; serão os triangulos CEG, Ceg. Mas é por isso CG=Cg; pela

> egualdade dos triangulos GDE, gDe, é DG=Dg: logo será CD perpendicular a Gg (42)[xxiv]. Mas a reta Gg foi tirada arbitrariamente pelo ponto D no plano AB. Logo CD será tambem perpendicular a toda outra recta, que a tocar, existente no dicto plano; isto é, CD perpendicular ao plano AB.
>
> (VILLELA, 1838, p.96)

A demonstração de Villela[22], como a de Lacroix é feita por construção, tomando um ponto fora do plano. Como Lacroix, ele também cita os resultados anteriores utilizados.

A demonstração de Villela, apesar de diferente das de Lacroix, utiliza (e cita) alguns dos mesmos resultados anteriores do segundo.

Ele primeiramente faz um enunciado geral do teorema fundamental das perpendiculares, seguido da hipótese e da demonstração.

Começa a demonstração pela construção dos segmentos ED, Ee congruentes, assim como FD e Dfe Fe e ef. Conclui que os triângulos FED e Def. (Caso LLL de igualdade de triângulos). Villela não nomeia assim, mas justifica a igualdade passo a passo. Utilizando resultado anterior (102). Daí, ele observa que os segmentos oblíquos DF = Cf e CE = Ce. Ele justifica utilizado um resultado anterior (38). Deduz de resultado anterior (107) a igualdade dos triângulos FCE e fce e daí a igualdade dos ângulos CEF e Cef. Prossegue pela igualdade de segmentos, triângulos e ângulos, até a congruência dos triângulos GDE e gDe e daí DG = Dg e a conclusão da perpendicularidade de CD com relação a Gg. Barbosa ainda justifica que, como Gg foi tomada como reta qualquer, CD é perpendicular ao plano AB.

Christiano Ottoni aborda a perpendicularidade no espaço no livro terceiro, capítulo primeiro, página 149.

Theorema (fig. 134)

> 191. *A recta AB, perpendicular a duas AM, NA no ponto A em que estas concorrem, é perpendicular a qualquer outra AO traçada pelo mesmo ponto no plano das duas .*

[22] Ver os resultados citados por Villela, nas Notas.

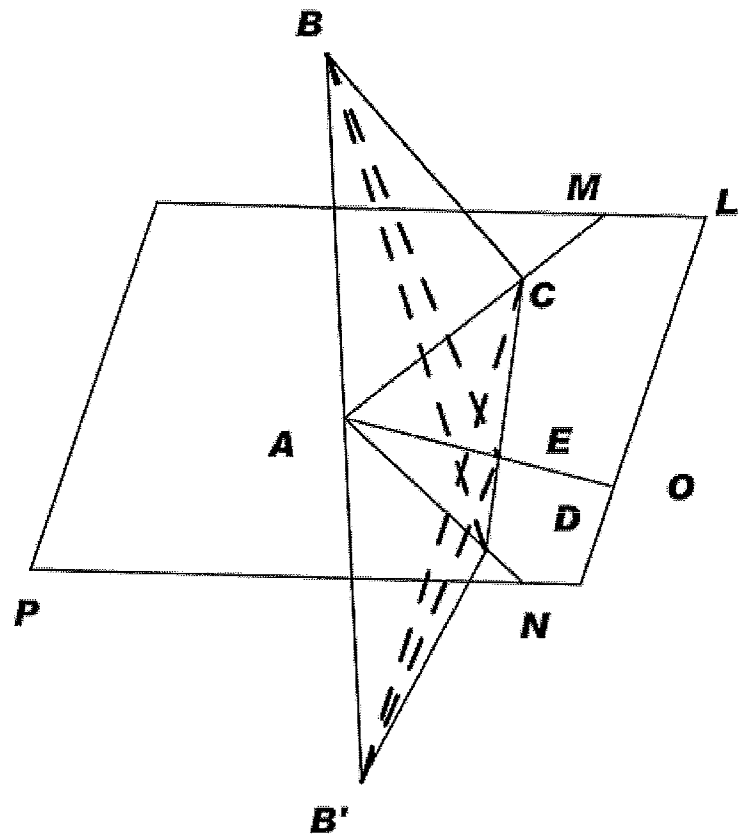


Fig. 3.11

> Prolongue-se BA para o outro lado do plano;m faça-se AB' = AB; cortem as tres rectas AM, NA, AO por uma linha qualquer CD; tirem-se as rectas BC, BE, BD, B'C, B'E, B'D. São iguaes, os triângulos BCD, B'CD por terem lados iguaes a saber:: DC commum, BC = B'C, BD-B'D (nº 23)[xxv]. Sobrepondo estes triangulos, BE coincide com B'E: logo BE=B'E, e conseguintemente AE é perpendicular a BB", ou AB a AE.
>
> Prova-se do mesmo modo que AB é perpendicular a todas as rectas traçadas por A no plano PL.
>
> (OTTONI, 1857, p.149)

A demonstração de Ottoni, feita por construção, segue o mesmo raciocínio de Lacroix. Na verdade, Cristiano Ottoni reescreveu a demonstração feita por Lacroix.

Inicialmente ele prolonga BA para o outro lado do plano, ou seja, constrói AB" por reflexão, pois define AB" = AB. A demonstração advém dos conceitos de igualdade de triângulos. Ele cita somente um resultado anterior.

O teorema fundamental da perpendicularidade no espaço encontra-se na página 226, na segunda secção do Terceiro Livro – Das figuras consideradas no espaço - de Timotheo Pereira.

308.THEOREMA: *A recta perpendicular a duas que passão pelo seu pé n'um plano, é perpendicular a qualquer outra recta tirada pelo seu pé n'este mesmo plano.*

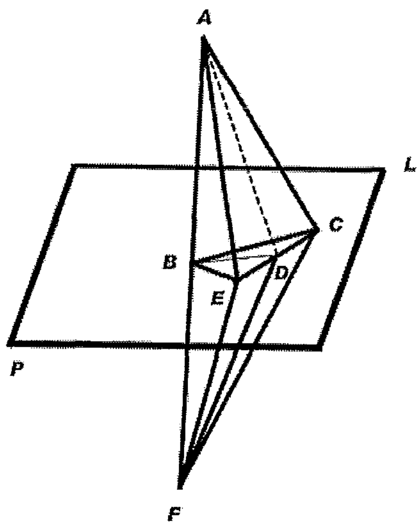


Fig. 3.12

Seja AB uma recta perpendicular as duas rectas BC e BE no plano PL, tiremos pelo pondo B uma recta qualquer, seja BD. Vamos provar que AB é também perpendicular a recta BD. Prolonguemos AB de outro tanto para baixo no plano PL, seja AB igual a BF, cortemos as tres rectas BC, BD e BD por uma recta qualquer, seja EC esta recta: liguemos os pontos A e F aos pontos C, D e E.

Considerando os dous triangulos EAC e FEC vemos que são iguaes, porque têm os tres lados respectivamente iguaes, a saber: O lado AE igual a EF como obliquas que se afastam igualmente do pé da perpendicular BE, visto ser por construção os desvios AB e BF iguaes; o lado AC igual ao lado CF tambem como obliquas que se afastão igualmente do pé da perpendicular BC, e o lado CE commum, ora os triangulos sendo eguaes, logo o angulo AED é igual ao angulo DEF.

Considerando os dous traiangulos AED e DFE, vemos que são eguaes porque têm um angulo igual comprehendido por dous lados respectivamente iguaes, a saber: o angulo AED é igual ao angulo

> DEF como acabamos de provar, o lado AE igual ao lado EF como acabamos de ver, e o lado ED commum, ora os triangulos sendo iguaes segue-se que os lados opostos aos angulos eguaes são tambem iguaes, logo o lado AD do primeiro é igual ao lado DF do segundo, ora sendo AD=DF segue-se que o ponto D é equidistante dos mesmos pontos A e F e como por construção o ponto B é tambem equidistante dos mesmos pontos A e F, conclue-se que a recta BD passa por dous pontos eqüidistantes de A e F, ora sabemos que a recta que passa por dous pontos equidistantes dos externos d"outra é perpendicular a AF; mas sabemos que quando uma recta é perpendicular a outra esta tambem o é à primeira; assim pos a recta AB é perpendicular a BD, o que demonstra o nosso theorema.
>
> (PEREIRA, 1890, p.226)

Podemos observar de que se trata da mesma demonstração de Lacroix e Ottoni que, se baseia na reflexão da perpendicular e no conceito de semelhança de triângulos. A diferença é que Timotheo procura detalhar as justificativas, sem citar resultados anteriores. É por conta deste tipo de apresentação de resultados que Timotheo se julga, ele mesmo, prolixo.

Observamos que somente o Pe. Campos e Villela Barbosa demonstraram esse teorema de forma original. Mas, uma vez que a de Campos é uma demonstração por absurdo, a de Villela, dentre as estudadas, pode ser vista como uma demonstração peculiar. É a única demonstração por construção, baseada de forma diferente de Legendre, Lacroix, Ottoni e Timotheo.

3.3 Volume de um paralelepípedo

O segundo assunto que compararemos nos cinco autores refere-se ao volume de um paralelepípedo.

PE. CAMPOS

O Pe. Campos aborda este tema na página 200 do Livro VII (ou XI), nas Proposições XXXI e XXXII.

PROPOSIÇÃO XXXI. *Theor.*

Todos os parallelipipidos, que tem iguaes bases AE, EN (seja qualquer figura) e a mesma altura Z, são iguaes

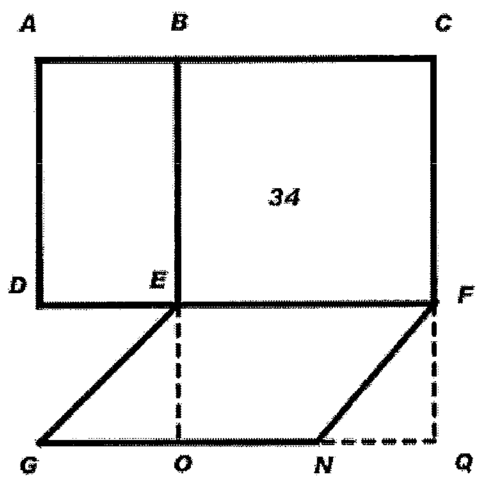


Fig. 3.13

Dem. Supponhamos que os parallelipipedos são rectos; e que estão dispostos de maneira, que os lados DE, EF, fazem huma recta. Continuem-se os lados AB, BE; e tirem-se as parallelas necessárias, até formar 2 parallelogramos BF, EQ, dos quaes o ultimo ja igual ao rectilineo EN (45 I)[xxvi] Sobre todos os 4 planos AE, BF, EN, EQ, imaginem-se levantados outos tantos parallelipipedos, todos da mesma altura Z. Porquanto AE . Z, he para BF . Z como AE para BF(25)[xxvii] isto he como, EN para BF (hip) isto he, como EQ para BF (constr.) isto he, como EQ . Z, para BF . Z (25)serão AE . Z, EQ . Z iguaes (9.5) porem EQ . Z , he igual à EN . Z, (Ant.) logo também AE . Z EN . Z, são iguaes entre si.

(CAMPOS, 1735, p. 200)

Observe que Pe. Campos em nenhum momento nomeia ou utiliza a terminologia “volume do paralelepípedo”, embora esteja tratando deste. Sua demonstração baseia-se na idéia de proporção entre segmentos.

Campos acrescenta que para se calcular o volume de paralelepípedos oblíquos, basta compará-los com paralelepípedos retos de mesma base. E daí prossegue com um resultado mais geral.

> PROPOSIÇÃO XXXII. *Theor.*
>
> *Quaesquer parallelipipedos, igualmente altos são entre si, como as bases.*

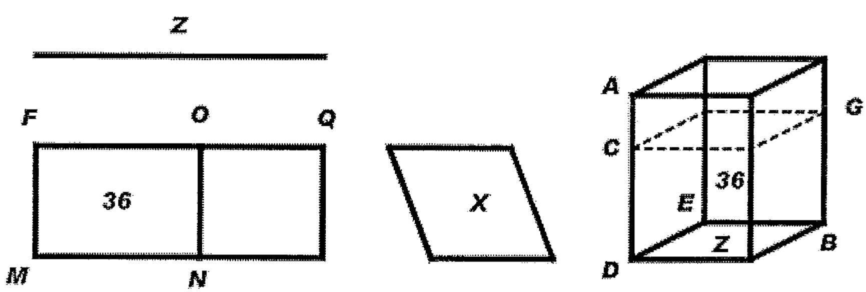


Fig. 3.14

> **Dem**. Sejão as bases NQ, e X; e seja a altura Z. Continue-se QO, e formese sobre NO, hum parallelogramo MO, igual à X. Imagine-se sobre todo o parallelogramo MQ, formado hum parallelepipedo com a mesma altura Z. Será MO . Z, para NQ . Z, comoMO, para NQ (25) porem MO, he igual à X (Constr.) e MO . Z, igual à X . Z (Ant.)logo substituindo iguaes por iguaes;isto he, plano por plano, e solido por sólido, será X . Z, para NQ . Z, como X para NQ.
>
> (CAMPOS, 1735, p. 200).

LEGENDRE

O volume de um paralelepípedo é estudado no Livro VI, dos poliedros. A tradução que temos de Legendre não se utiliza do termo "volume", mas sim "solidez". Legendre faz demonstração de um paralelepípedo e de um prisma qualquer.

PROPOSIÇÃO XIV

Theorema.

A solidez de hum paralelepípedo, he em geral a solidez de hum prisma qualquer, he igual ao produto da sua base pela sua altura.

Porque, 1°. hum parallelepipedo qualquer he equivalente a hum parallelepipedo rectangulo da mesma altura e de base equivalente (9). Ora a solidez deste he igual à sua base multiplicada pela sua altura; logo a solidez do primeiro he também igual ao produto da sua base pela sua altura.

2°. Todo o prisma triangular he metade de hum parallelepípedo de mesma altura, e de base dupla (6)[xxviii].Ora a solidez deste he igual a sua base multiplicada pela sua altura; logo a do prisma triangular he igual ao produto da sua base, metade da do parallelepipedo, multiplicada pela sua altura.

3°. Hum prisma qualquer se póde repartir em tantos prismas triangulares da mesma altura quantos triângulos se poderem formar no polygono que lhe serve de base. Mas a solidez de cada prisma triangular he igual a sua base multiplicada pela sua altura; e, como a altura he a mesma para todos, segue-se que a soma de todos os prismas parciaes será igual a soma de todos os triângulos que lhe servem de bases, multiplicada pela altura commum. Logo a solidez de um prisma polygonal qualquer he igual ao produto da sua base pela sua altura.

(LEGENDRE, 1809, p. 185 e 186)

Legendre juntou em um mesmo enunciado o volume de um paralelepípedo (qualquer) e de um prisma (qualquer). Por isso sua demonstração percorre vários resultados, desde o resultado de equivalência de volume entre um paralelepípedo qualquer e um paralelepípedo retângulo até ao de um prisma poder ser decomposto em prismas triangulares, uma vez que o volume de um prisma triangular pode ser calculado como metade do volume de um paralelepípedo de mesma altura.

Em seguida, Legendre apresenta um corolário, que é uma generalização (para prisma qualquer) da proposição XXXII de Campos (para paralelepípedo qualquer).

Corollario. Se compararmos dois prismas que tem a mesma altura, os produtos das bases pelas alturas estarão como as bases. Logo, dois prismas da mesma altura estão entre si como as suas bases; por uma razão semelhante dois prismas da mesma base estão entre si como as suas alturas.

(LEGENDRE, 1809, p.185 e 186)

LACROIX

Lacroix apresenta vários resultados concernentes ao volume de um paralelepípedo.

O teorema 248 é um resultado equivalente ao do Pe. Campos (proposição XXXI) e ao que veremos em Villela (teorema 305).

248. *Dois parallelepipedos construídos sobre a mesma base, e terminados superiormente pelo mesmo plano parallelo a base, são equivalentes em volume.*

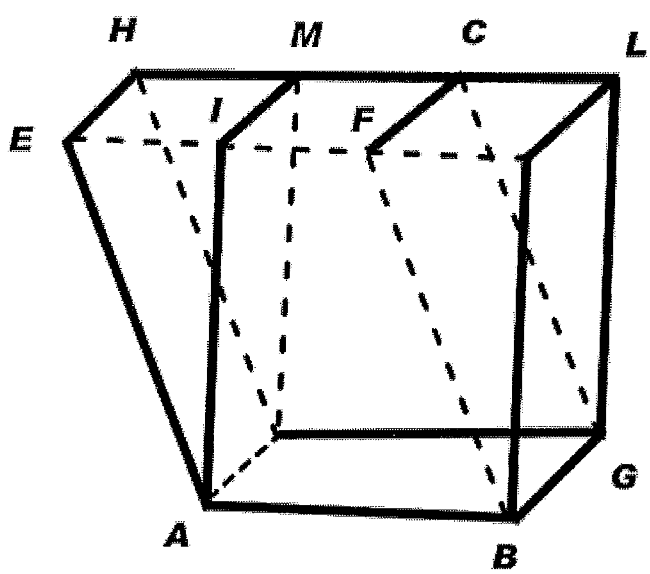


Fig. 3.15

Demonstração. Ha dois casos a considerar; em hum, representado pelas duas figuras 131, e de que trataremos primeiro os parallelepipedos propostos, AG e AL, estão encerrados lateralmente entre os mesmos planos parallelos, AK e DL. Neste estado de cousas, he visível que os prismas triangulares AEIDHM e BFKCGL, são iguaes (240)[xxix]; porque os triângulos AEI e BFK, que servem de base, são iguaes (16) em razão das parallelas AE e BF, AI e BK, e os parallelogramos AEHD e BFGC, AIMD e BKLC também são iguaes (238)[xxx]. Logo se tirarmos do polyedro AL, de huma parte o prisma AEIDAM, os parallelepípedos restantes, ABCDEFGH e ABCDIKLM, ou AG AL, serão equivalentes.

O segundo caso se acha representado na figura 132, em que os dois parallelepípedos ABCDIKLM e ABCDNOPQ, só tem de commum a base inferior ABCD, e o plano que contem suas bases superiores IKLM e NOPQ. Reduz-se ao precedente, prolongando os planos ABIK e DCLM, ao mesmo tempo que os planos ADQN e BCPO, para formar o parallelepípedo ABCDEFGH (239)[xxxi], que se acha primeiramente equivalente ao parallelpípedo ABCDIKLM, por estar encerrado lateralmente entre os planos parallelos AK e DL. O mesmo parallelepipedo ABCDEFGH, considerado como comprehendido entre os planos parallelos BP e AQ, também he equivalente ao parallelepipedo ABCDNOPQ, logo os parallelepipedos ABCDIKLM e ABCDNOPQ, ou AL e AP, são equivalentes entre si.

(LACROIX, 1824, p.147)

Lacroix demonstra a relação entre volume, base e altura para o caso dos paralelepípedos retângulos, no teorema 255, página 164.

255. *Os parallelepipedos rectangulos da mesma base estão entre si como as suas alturas.*

(LACROIX, 1824 p. 164)

Mas ele explicita de fato, a fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo, em sua "Advertência" 257, na página 166.

257. *Advertencia.* Se escolhermos para termo de comparação de todos os parallelepipedos rectangulos, o parallelepipedo rectangulo *ag*, fig. 139, que tem as três arestas contíguas *ab, ad, ae*, iguaes à linha tomada por unidade, ou por medida commum das rectas, o seu producto será a unidade, e teremos

$$ag : AG :: 1 : \overline{AB} \times \overline{AD} \times \overline{AE},$$

quer dizer que o *parallelepipedo rectangulo AG conterá tantas vezes o parallelepipedo rectangulo ag, quantas o producto das linhas AB, AD, AE, referidas à medida commum ab que contem a unidade.* He isto o que se deve entender quando se diz que a *medida do volume de hum parallelepipedo rectangulo he o producto das suas três arestas contíguas*; e se observarmos que o producto

$\overline{AB} \times \overline{AD}$, exprime o numero de quadrados iguaes a *ac* contidos na base AC (168)[xxxii], ou que he a mesma cousa, dá a medida da área da base, concluiremos que *o volume de hum parallelepipedo rectangulo tem por medida o producto de sua base pela sua altura*, avaliada ambas numericamente.

(LACROIX, 1824, p. 166)

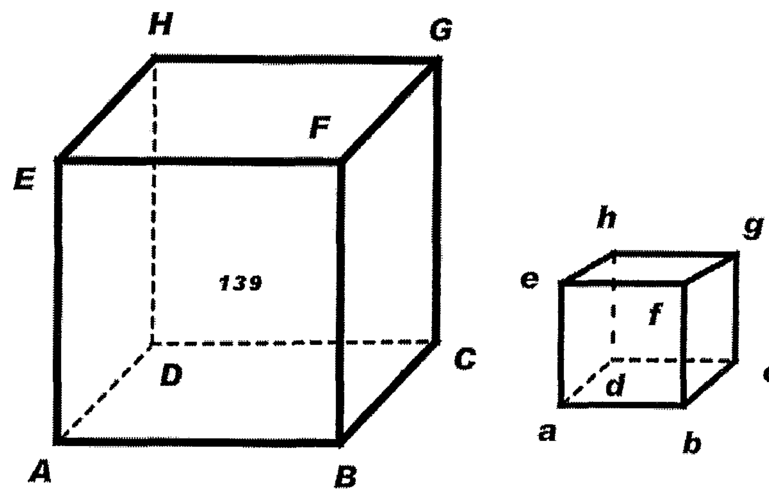


Fig. 3.16

Lacroix prossegue com o cálculo do volume de um cubo, no corolário 258.

Com exceção de Pe. Campos, todos os autores estudados comentam sobre o caso particular do volume de um cubo e do fato deste ser a denominação usada para a terceira potência de um número.

Lacroix, como Legendre e Timotheo, também apresenta a idéia da decomposição de prismas e poliedros em pirâmides e tetraedros.

VILLELA

Villela Barbosa apresenta diversos teoremas sobre o volume de um paralelepípedo. O seu teorema 305 é um resultado equivalente ao 248 de Lacroix, inclusive sua demonstração segue o mesmo raciocínio daquele.

> 305. THEOR. *Si dous parallelipipedos tiverem a mesma base e a mesma altura, ou bases eguaes e alturas eguaes; terão volumes eguaes.*
>
> (BARBOSA, 1838, p. 151)

Outro resultado relevante sobre volume de paralelepípedo se encontra no teorema 314 de Villela, que trata do volume dos paralelepípedos retângulos.

> 314. THEOR. *Os volumes dos parallelipipedos rectangulos estão entre si, como os productos das suas bases multiplicadas pelas suas alturas.*
>
> (BARBOSA, 1838, p. 158)

Villela explica, inclusive, o que é medir o volume de um corpo, que chamou de resultado 316.

> 316. Porquanto *medir* o volume de um corpo é determinar, quantas vezes este contêm outro conhecido, o qual se considera então como unidade; e sabemos, que os volumes dos parallelipipedos estão entre si, como os productos das suas bases multiplicados pelas suas alturas; segue-se que, si denotar A a altura, e B a base de um parallelipipedo P, cujo volume se pretende avaliar; e a a altura, e b a base de outro parallelipipedo p; tomado para medida, ou unidade de volume; teremos conhecido daquelle, visto que podemos saber, quantas vezes contêm o deste. Com effeito, por ser $P : p :: B \text{ X } A : b \text{ X } a$, será $\frac{P}{p} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a}$: o que faz ver, que para avaliarmos o volume de qualquer parallelipipedo P devemos, depois de examinar quantas vezes na sua base B se contêm a base b da unidade de volume, e quantas na altura A se contêm a altura a, multiplicar esses dous

> quocientes, e o producto nos mostrará o numero de vezes, que o volume escolhido para medida se contêm no do parallelipipedo, que se tracta de avaliar.
>
> (BARBOSA, 1838, p. 161)

> 315. Coroll. Quanto pois dissemos a respeito dos parallelipipedos rectangulos se extende a quaesquer parallelipipedos; e por conseguinte aos prismas triangulares, e aos tetraedros. Por que todo o parallelipipedo é egual em volume ao parallelipipedo rectangulo da mesma altura, e de base equivalente. (307)[xxxiii]. E quanto aos prismas triangulares, e aos tetraedros; como os volumes daqueles são metades dos de parallelipipedos da mesma altura, &c. (308)[xxxiv]; e os destes são terços dos de prismas triangulares da mesma base e da mesma altura (313)[xxxv]; necessariamente hão de ter a mesma razão, que os desse parallelipipedos, e prismas.
>
> (BARBOSA, 1838, p. 160)

Villela prossegue analisando o caso particular do volume do cubo, em seu teorema 317.

> 317. O volume de um parallelipipedo avalia-se, multiplicando a base pela altura: e por tanto o de um cubo, pela terceira potencia da sua aresta.
>
> (BARBOSA, 1838, p. 161)

Villela finaliza o tema com o teorema 322, que é uma generalização dos resultados de volume de um paralelepípedo para o volume de um prisma qualquer.

> 322. THEOR. *O volume de qualquer prisma avalia-se multiplicando a base pela altura.*
>
> (BARBOSA, 1838, p. 163)

OTTONI

Ottoni esclarece, em sua definição de volume de um corpo, que o termo *equivalente* será usado para poliedros de mesmo volume.

Ottoni apresenta o volume de um paralelepípedo em seu 3° Teorema, página 194. Esse resultado é equivalente à proposição XXXI, do Pe. Campos, ao teorema 305 de Villela e ao 248 do Lacroix. A demonstração de Ottoni segue o mesmo raciocínio de Lacroix e Villela.

3º THEOREMA (fig. 173 e 174)

> *Dous parallelipipedos da mesma base e da mesma altura são equivalentes.*
>
> (OTTONI, 1857, p.194)

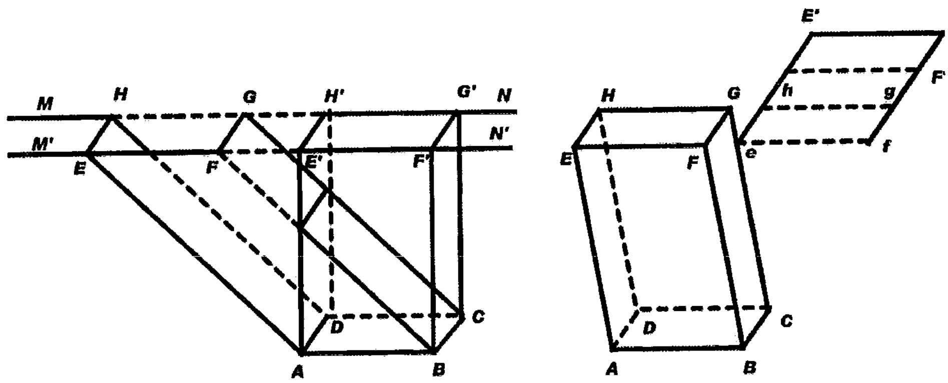


Fig. 3.17

Ottoni apresenta o volume de um paralelepípedo retângulo em seu resultado 263.

7º THEOREMA (fig. 181).

> **263.** *O volume de qualquer parallelipipedo rectangulo* ABCDEFGH *tem por medida o producto da area da base pela altura*

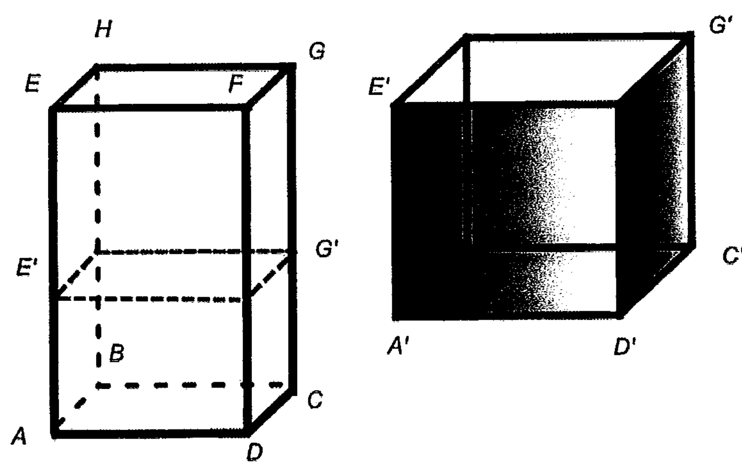


Fig. 3.18

> Suppondo que o parallelipipedo *A'G'* é o cubo construido sobres a unidade linear, e que este volume se escolhe para *unidade*, serão (n.º 224)[xxxvi]

$$\text{Vol. } A'G' = 1,\ A'E' = 1,\ A'B'C'D' = A'B' \times A'D' = 1 \times 1 = 1;$$

E a proporção acima se muda nesta

$$AG : 1 :: ABCD \times AE : 1,$$

da qual se deduz

$$AG = ABCD \times AE.$$

(OTTONI, 1857, p. 201)

Ottoni afirma, sem demonstrar, que o volume de um paralelepípedo retângulo tem por medida o produto de três arestas contíguas, o comprimento, largura e altura e que, no caso do cubo em particular, o volume é a terceira potência da aresta.

A seguir, Ottoni generaliza esse 7º teorema em um corolário, na página 202.

> 264. COROLLARIOS. 1.º *O volume de qualquer parallelipipedo é igual ao producto da base pela altura.*
>
> (OTTONI, 1857, p. 202)

> 5º *O volume de qualquer prisma é igual ao producto da base pela altura.* Prova-se dividindo o prisma em prismas triangulares, e sommando os volumes destes.
>
> (OTTONI, 1857, P.203)

Observe que Ottoni também se utiliza do conceito da decomposição de volumes, no caso de prisma em prismas triangulares, para o raciocínio da demonstração desse 5º corolário, que ele não chega a provar de fato.

TIMOTHEO PEREIRA

Timotheo Pereira trata do volume de um paralelepípedo e de um prisma no tópico sobre "Volumes dos Polyedros", do quarto Livro, Segunda Secção – a secção de geometria espacial, na página 297.

Timotheo, apesar de prolixo, é muito didático. Ele inicia o tópico pela definição do que é medir volume, mas sua definição é muito mais sintética do que a de Villela.

> 426. Avaliar ou medir o volume de um corpo é achar a relação numérica entre esse volume e outro tomado para unidade.
>
> (PEREIRA, 1890, p.297)

Ele segue demonstrando que dois paralelepípedos de mesma base e mesma altura são equivalentes, ou seja, têm o mesmo volume. Deste teorema, deduz um corolário sobre a igualdade de volume entre um paralelepípedo oblíquo e outro reto, equivalentes. Esse é um resultado utilizado por todos os outros autores com exceção ao de Pe. Campos.

Prossegue estudando as relações de volume de prismas triangulares, pirâmides e troncos de pirâmides. Timotheo aborda a relação entre o volume de um tetraedro e o volume de um prisma, antes de apresentar o teorema sobre a medida do volume de um paralelepípedo retângulo, na página 310, teorema 441.

> 441. THEOREMA: *Todo parallelepipedo rectangulo tem por medida, ou tem por volume, o producto da área da base pela altura.*
>
> Isto quer dizer que o parallelepipedo contem tantas vezes a unidade de volume quantas vezes o producto da area da base pela altura contiver a unidade. É costume tomar para unidade de volume o volume do cubo construido sobre a unidade linear isto é: aquelle que tem para aresta a unidade linear tendo portanto para a área da base a unidade de área.
>
> Seja V o volume de um parallelepipedo rectangulo cuja a área da base é B e cuja a altura é A.
>
> Tomemos a unidade de volume que é 1 cuja a área da base é 1 e cuja altura é 1.
>
> Comparando o parallelepipedo V como o parallelepipedo 1 como são dous parallelepipedos rectangulos em virtude do (nº 440)[xxxvii] elles estarão entre si como os productos das areas das bases pelas alturas, logo
>
> $$\frac{V}{1} = \frac{B \cdot A}{1}$$
>
> (1)
>
> ou mais abreviadamente
>
> (2) $$V = B \cdot A$$
>
> A proporção mostra que V contem tantas vezes a unidade, como B.A contem a unidade.
>
> (PEREIRA, 1890, p.311)

Timotheo ainda acrescenta no escólio 442, que o volume do paralelepípedo retângulo é o produto das três arestas contíguas. Ele segue generalizando o resultado para um paralelepípedo qualquer, no que denominou de teorema 443.

> 443. THEOREMA: *O volume de qualquer paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela altura.*
>
> (PEREIRA, 1890, p.311)

O resultado do teorema 444 de Timotheo, que é um corolário deste teorema, é equivalente ao teorema 248 de Lacroix, 305 de Villela e ao 3° teorema de Ottoni.

> 444. COROLLARIO I: *Dous paralelepipedos quaesquer da mesma altura e bases igual ou equivalentes, tem volumes equivalentes.*
>
> Com effeito: As bases sendo equivalentes e as alturas sendo iguais, o produto da area da base pela altura no primeiro é igual ao produto da area da base pela altura no 2° logo os dous volumes são equivalentes.
>
> (PEREIRA, 1890, p. 311)

Mas, devido aos vários resultados anteriores, sua demonstração é bem diversa da dos outros autores e bem mais concisa.

No teorema 446, Timotheo se utiliza de resultados anteriores e prova que "o volume de um prisma triangular é igual ao produto da área da base pela altura". Deste teorema ele finaliza o assunto deduzindo um corolário, que é uma generalização da idéia de volume do paralelepípedo para o volume do prisma qualquer.

> 447. COROLLARIO I: *O volume de qualquer prisma é igual ao producto da area da base pela altura.*
>
> (PEREIRA, 1890, p. 311)

Ele também o demonstra por meio da decomposição do prisma em prismas triangulares.

Timotheo é o único dos autores a colocar em seu livro uma secção que trata especificamente do volume de poliedros, conhecendo-lhes a aresta. Ali ele deduz as fórmulas de volume do tetraedro, do cubo, do octaedro e do icosaedro, conhecidas as arestas.

3.4 A Relação entre o Volume da Pirâmide e o Volume do Prisma

Um resultado importante e que aparece em todas as obras estudadas é a relação entre o volume de uma pirâmide e de um prisma.

PE. CAMPOS

Pe. Campos apresenta esse resultado na proposição VII do Livro VIII (ou XII), página 217.

PROPOSIÇÃO VII. Theor.

Toda a pyramide he a terceira parte do prisma, que tem com ella a mesma base, e altura.

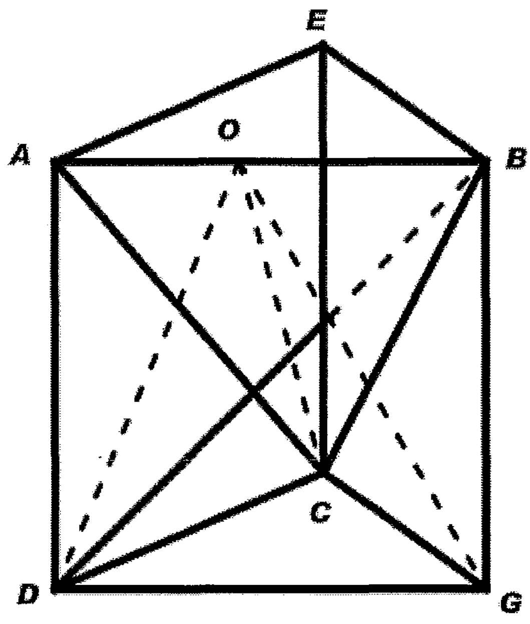


Fig. 3.19

Dem. Seja I a pyramide DCGO, triangular; a qual tenha a mesma base, e altura com o prisma DCGBEA. Tirem-se as rectas AC, CB, BD; e considere-se dividido o prisma em 3 pyramides. Porquanto os triangulos DBG, DBA, são iguaes (34.I)[xxxviii] serão as pyramides DBGC, DBAC, tambem iguaes (5) porem, pela mesma razão, as pyramides CAEB, CADB (isto he, a mesma pyramide DBAC) tambem são iguaes: logo todas as 3 pyramides, em que está dividido o prisma,

> são iguaes entre si; e por consequencia cada huma dellas he a terceira parte do mesmo prisma. Porém a proposta DCGO, he igual à DCGB (ou DBGC) logo tambem esta he a terceira parte do mesmo prisma.
>
> (CAMPOS, 1735, p. 217).

Campos não explicita, mas ele forma as retas AC, CB e BD como as diagonais das faces do prisma e justifica pela proposição 34 do Livro I (ver notas), que afirma que a diagonal do paralelogramo o divide ao meio e daí mostra que, pela divisão feita, as três pirâmides são iguais, ou seja, cada uma tem um terço do volume do prisma.

O Pe. Campos, assim como Euclides, utiliza-se de expressões como "esta base, metade daquela" onde "base" não significa o segmento linear, mas tem o sentido de "metade da área". Em "dois prismas são iguais", o termo *iguais* não significa somente *congruentes,* mas, na verdade, ele quer chamar a atenção para a igualdade de volumes.

LEGENDRE

Legendre apresenta esse teorema no Livro VI (poliedros). Observe que ele começa pelo volume da pirâmide de base triangular, com um corolário que o relaciona ao volume de um prisma triangular.

PROPOSIÇÃO XVII

THEOREMA

> *A solidez de huma pyramide triangular he igual ao terço do produto da sua base pela sua altura.*

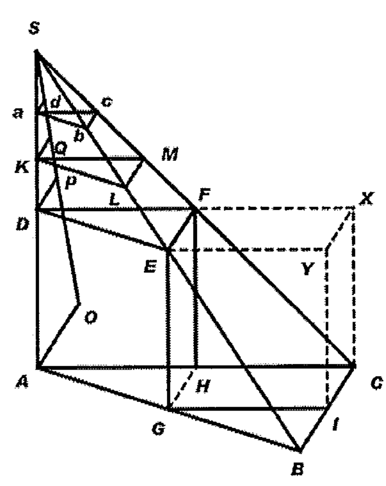


Fig. 3.20

Seja SABC huma pyramide triangular qualquer (fig. 215), ABC a sua base. SO a sua altura; digo que a solidez da pyramide SABC será igual ao terço do produto da superfície ABC pela altura SO, de sorte que teremos SABC = $\frac{1}{3}$ABC x SO ou = SO x $\frac{1}{3}$ABC.

Porque, se me negarem esta proposição, a solidez SABC deverá ser igual ao produto de SO por huma quantidade maior ou menor que $\frac{1}{3}$ ABC.

Seja 1º esta quantidade maior, de sorte que seja SABC= SO $\times\left(\frac{1}{3}ABC+M)\right)$. Se fizermos a mesma contrução que na precedente proposição, a pyramide SABC ficará dividida em dois prismas equivalentes entre si AGHFDE, EGICFH, e em duas pyramides iguais SDEF, EGBI. Ora a solidez do prisma AGHFDE he DFE x 2PO, ou DFE x SO. Tirando os dois prismas da pyramide inteira, o resto será igual ao dobro da pyramide SDEF, de sorte que teremos

$$2SDEF = SO\times\left(\frac{1}{3}ABC+M-DEF\right).$$

Mas, como as he dupla de SD, a superficie ABC he quadrupla de DFE (15), e assim $\frac{1}{3}ABC-DFE=\frac{4}{3}DFE-DFE=\frac{1}{3}DFE$; logo

$$2SDEF = SO\times\left(\frac{1}{3}DFE+M\right).$$

E por tanto, tomando as metades, teremos

$$SDEF = SP\times\left(\frac{1}{3}DFE+M\right).$$

Donde se vê que para ter a solidez da pyramide SDEF, se deveria ajuntar ao terço da sua base a mesma superfície M que já se havia ajuntado ao terço da base da grande pyramide, e multiplicar o todo pela altua SP da pequena pyramide.

Se dividirmos SD em duas igualmente no ponto K, e pleo ponto K fizermos passar o plano KLM parallelo a DEF, que encontre em Q a perpendicular SP, a mesma demonstração prova que a solidez s da pyramide SKLM será igual a $SQ\times\left(\frac{1}{3}KLM+M\right)$.

Continuando assim a formar huma serie de pyramides, cujos lados decresção em razão dupla, e as bases em razão quadrupla, chegaremos bem depressa a huma pyramide Aabc, cuja base abc será menor que 6M: seja S_o a altura desta ultima pyramide, e a sua solidez, deduzida das solidezes das pyramides precedentes, será $S_o \times\left(\frac{1}{3}abc+M\right)$. Mas temos $M>\frac{1}{6}abc$, e por conseqüência $\frac{1}{3}abc+M>\frac{1}{2}abc$; logo seria necessário que a solides da pyramide Sabc fosse maior quer $S_o \times \frac{1}{2}abc$. Resultado absurdo, porque provamos no Corollario II da proposição precedente, que a solidez de huma pyramide triangular he sempre menor que a metade do producto da sua base pela sua altura; logo I° he impossível que a solidez da pyramide SABC seja maior que $SO\times\frac{1}{3}ABC$.

SEJA 2° SABC = $SO\times\left(\frac{1}{3}ABC-M\right)$, provaremos, como no primeiro caso, que a solidez da pyramide SDEF, cujas dimensões são duas vezes menores, he igual a $SP\times\left(\frac{1}{3}DEF-M\right)$; e, continunado a serie de pyramides cujos lados decrescem em razão dupla, até hum termo qualquer Sabc, teremos do mesmo modo a solidez da ultima pyramide Sabc=$S_o\times\left(\frac{1}{3}abc-M\right)$. Mas formando as bases ABC, DEF. LKM...*abc*, huma série decrescente da qual cada termo he o quarto do precedente, chagaremos bem depressa a hum termo *abc*, igual a 12M, ou que será comprehendido entre 12 M e 3 M; então sendo M igual ou maior que $\frac{1}{12}abc$, a quantidade $\frac{1}{3}abc-M$ será ou igual a $\frac{1}{4}abc$, ou menor que $\frac{1}{4}abc$ de sorte que a solidez da pyramide Sabc será ou = $S_O\times\frac{1}{4}ABC$, ou $<S_o\times\frac{1}{4}abc$. Resultado também absurdo; porque,segundo o corollario I, da proposição precedente, a solidez de huma pyramide trianfular he sempre maior

que o quarto do producto da sua base pela sua altura. Logo 2º a solidez da pyramide SABC não póde ser menor que $SO \times \frac{1}{3} ABC$.

Logo em fim a solidez da pyramide $SABC = SO \times \frac{1}{3} ABC, ou = \frac{1}{3} ABC \times SO$, conforme o enunciado do theorema.

Corolário I Toda pyramide triangular he o terço do prisma triangular da mesma base e da mesma altura; porque ABC X SO he a solidez do prisma do qual ABC he a base e SO a altura.

Corollario II. Duas pyramides triangulares da mesma altura estão entre si como as suas bases, e duas pyramides triangulares da mesma base estão entre si como as suas altura.

(LEGENDRE, 1809, p.189, p.190, p.191, p.192)

Ele prossegue provando o mesmo resultado para uma pirâmide de base pentagonal, para então generalizar o volume de uma pirâmide qualquer.

PROPOSIÇÃO XVIII
THEOREMA

Toda a pyramide SABCDE (fig. 214) *tem por medida o terço do produto da sua base* ABCDE *pela sua altura* SO.

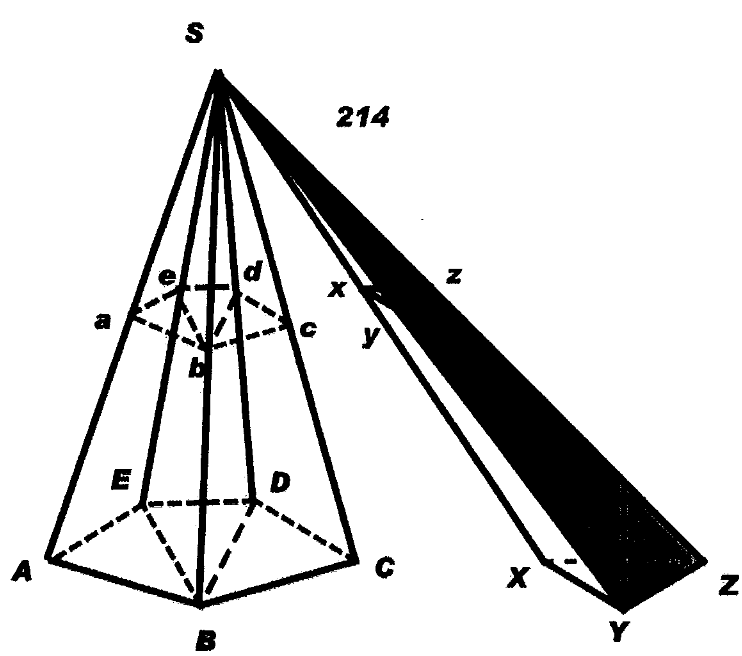


Fig. 3.21

> Porque, fazendo passar os planos SEB, SEC, pelas diagonais EB, EC, dividiremos a pyramide polygonal SABCDE em muitas pyramides triangulares que terão todas as mesma altura SO. Mas, pelo theorema precedente, cada huma destas pyramides se mede multiplicando cada huma das bases ABE, BCE, CDE, pelo terço da altura SO; logo a soma das pyramides triangulares, ou a pyramide polygonal SABCDE, terá por medida a soma dos triângulos ABE, BCE, CDE, ou o polygono ABCDE, multiplicado por $\frac{1}{3}SO$. Logo toda a pyramide tem por medida o terço do produto da sua base pela sua altura.

Legendre apresenta um corolário que é a generalização da relação entre o volume de uma pirâmide qualquer e um prisma de mesma base e altura.

> *Corollario I.* Toda a pyramide he o terço do prisma da mesma base e da mesma altura.
>
> *Corollario II.* Duas pyramides da mesma altura estão entre si como as suas bases, e duas pyramides da mesma base estão entre si como as suas alturas.

É nesse ponto que Legendre coloca que o volume de um poliedro pode ser obtido pela decomposição deste em pirâmides. Ele faz essa afirmação em um escólio.

> *Scholio.* Pode-se avaliar a solidez de todo o corpo polyedro, decompondo-o em pirâmides, e esta decomposição se póde fazer de muitas maneiras. Huma a mais simples é fazer passar os planos de divisão pelo vertice de hum mesmo angulo sólido, então teremos tantas pyramides parciaes quantas forem as faces do polyedro, excepto aquellas que fórmão o angulo sólido donde partem os planos de divisão
>
> (LEGENDRE, 1809, p. 193)

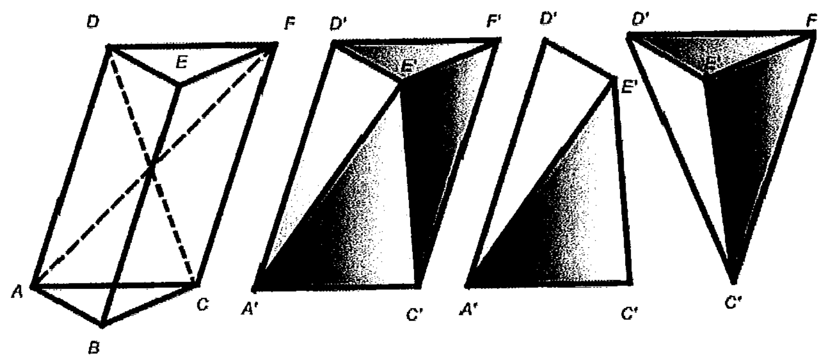
Observando como o tema é abordado por Lacroix, Villela, Ottoni e Timotheo, podemos perceber que Legendre o faz de forma singular.

LACROIX

Lacoix estuda esse resultado na página 163. Ele apresenta o teorema recíproco ao do Pe. Campos, por isso, desenvolve sua demonstração de modo inverso àquele, que divide um prisma triangular em pirâmides de base triangular.

THEOREMA

254. *Hum tetraedro he equivalente ao terço do prisma triangular da mesma base e de mesma altura.*



136

Fig. 3.22

Demonstração. Se pelos pontos A e C da base ABC, do tetraedro EABC, fig. 136, tirarmos as rectas AD, CF, parallelas a aresta BE, e pelo ponto E, hum plano parallelo a ABC, formaremos (237)[xxxix] hum prisma triangular ABCDEF. Se fizermos agora passar pelos vertices A, E, C, dos angulos triedros deste prisma, hum plano, elle separará primeiramente o tetraedro proposto EABC, que tem a mesma altura e a mesma base que o prisma: depois ficará huma pyramide quadrangular EACFD, representada a parte em E'A'C'F'D', que terá o vertice em E, e que terá por base a face posterior ACFD do prisma. Se pelos pontos D,E,C, fizermos passar hum novo plano, elle repartirá esta pyramide em dois tetraedros, EACD, ECFD, representados a parte em E"A"C"D", E'"C'"F'"D'"; suas alturas serão iguaes, porque tem o vertice no mesmo ponto E, e suas bases sobre o mesmo plano. Estas bases tambem serão iguaes; porque são metades do parallelogramo ACFD; logo os tetraedros EACD, ECFD

> serão equivalentes (ao precedente), mas podendo o segundo ser considerado como tendo por base o triangulo DEF, igual ao triangulo ABC, e o vertice no ponto C, terá a mesma base e a mesma altura que o prisma, e por consequencia será equivalente ao primeiro tetraedro EABC; logo os tetraedros EABC, EACD, ECFD, serão equivalentes;logo cada hum será equivalente ao terço do prisma triangular, que elles compõe.
>
> (LACROIX, 1824, p. 163 e 164).

Lacroix constrói um prisma de base triangular a partir de um tetraedro. Separa deste prisma o tetraedro inicial, e mostra que a pirâmide quadrangular restante pode ser dividida em dois outros tetraedros. Finaliza, demonstrando que os três tetraedros são congruentes.

> 262. 5º COROLLARIO. As mesmas medidas convem as pyramides; porque se repartirmos em triangulos a base ABCDE da pyramide SABCDE, fig. 127, e conduzirmos planos pelo vertice, e por cada huma das diagonaes AC, AD esta pyramide se achará repartida em tres tetraedros da mesma altura, e cujas bases serão respectivamente ABC, ACD, ADE: o volume de cada hum destes tetraedros sendo medido pelo terço do produto de sua base pela sua altura, a somma dos volumes de todos tres, ou o da pyramide proposta, será evidentemente igual ao terço do produto da somma das suas bases pela altura commum; isto he, ao terço do produto da base da pyramide prosta pela sua altura.
>
> Daqui resulta que duas pyramides estão entre si como os productos da sua base e sua altura, e somente como as suas bases, se as alturas são as mesmas, ou como as suas alturas, se as bases são equivalentes, ou finalmente que estas pyramides são equivalentes, quando tem a mesma altura, e bases equivalentes, quaesquer que sejão as figuras das bases
>
> (LACROIX, 1824, p. 168).

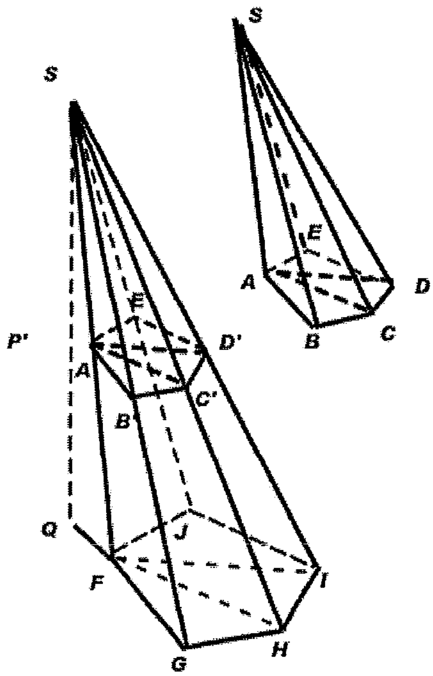


Fig. 3.23

Observe também que Lacroix demonstra o resultado de volume de uma pirâmide qualquer como um corolário, e se utiliza deste teorema 254 para prová-lo. Já Campos demonstra apenas o resultado geral do volume de uma pirâmide.

VILLELA

A estrutura desta parte do livro de Villela segue parecida com a de Lacroix. Villela também demonstra primeiro a relação entre o volume de um tetraedro e um prisma de base triangular, em seu teorema 313. Dez resultados depois, (dentre eles se encontram o do volume de um paralelepípedo retângulo, volume de paralelepípedo qualquer, volume de um prisma qualquer) Villela demonstra o cálculo do volume de uma pirâmide qualquer. Lacroix faz uma seqüência muito semelhante de resultados, entre os teoremas que vimos (254 e 262).

A demonstração do teorema 313 de Villela segue o mesmo raciocínio da demonstração da proposição VII de Campos.

313. THEOR. *Si um prisma triangular, e um tetraedro tiverer a mesma base e a mesma altura, ou bases eguaes e alturas eguaes; será o volume do tetraedro a terça parte do volume do prisma.*

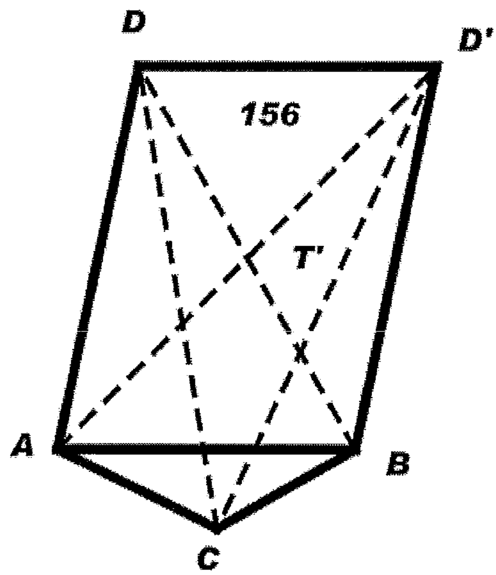


Fig. 3.24

Seja (fig. 156) o tetraedro ABCD da mesma base e altura do prisma triangular EGFBCD. Digo que o volume do tetraedro é a terça parte do volume dos prismas.

Demonstr. Tirem-se as rectas BF, FC, CE; e considere-se dividido o prisma nos tres tetraedros FBCD, FBCE, FECG. Por serem eguaes os triangulos BCE, ECG, terão volumes eguaes os dous tetraedros FBCE, FECG (312)[xi]. Pela mesma razão terão eguaes volumes os dous FBCD, CEFG (isto é FECG). Logo os tres, em que o prisma está dividido, tem entre si volumes eguaes: e por tanto cada um delles é a terça parte do volume do prisma. Mas o proposto ABCD tambem tem volume egual ao do tetraedro FBCD. Logo tambem o seu volume é a terça parte do prisma.

(VILLELA, 1838, p. 157 e 158).

Já a demonstração do teorema 323 de Villela é semelhante à do teorema 262 de Lacroix, ou seja, divide a pirâmide em tetraedros e toma o seu volume como a soma dos volumes dos tetraedros, cujo resultado já havia demonstrado.

323. THEOR. *O volume de qualquer pyramide avalia-se, multiplicando o terço da base pela altura.*

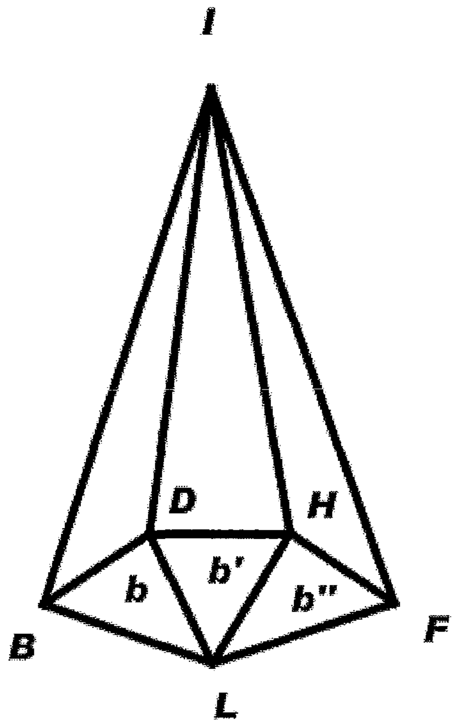


Fig. 3.25

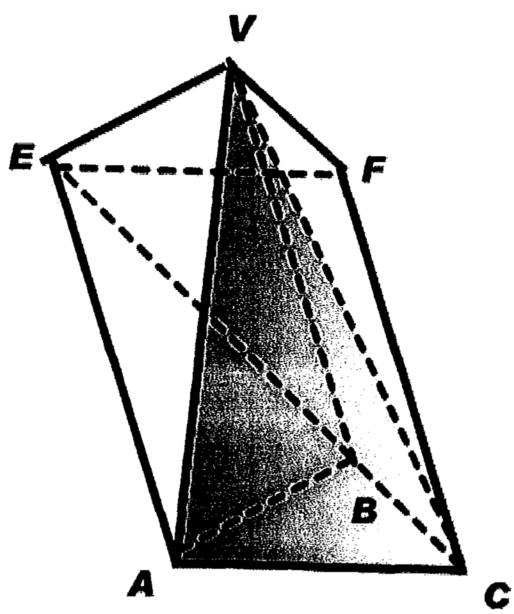
Seja (fig. 159) a pyramide IBDHFL. Denote B a base, A a altura, e V o volume. Digo que V= $\frac{1}{3}$ B x A.

Demonstr. Divida-se a base em triangulos; e conceba-se composta a pyramide dos tetraedros IBDL, IDLH, ILHF. O volume do primeiro avalia-se por $\frac{1}{3}$ b x A (318)[xli]; o do segundo por $\frac{1}{3}$ b' x A; e o terceiro por $\frac{1}{3}$ b" x A. Logo o valor do volume total da pyramide será $\frac{1}{3}$ (b + b' + b") x A; isto é, V = $\frac{1}{3}$ B x A.

(VILLELA, 1838, p.164)

OTTONI

Benedicto Ottoni estrutura didaticamente esse assunto de forma semelhante a Lacroix e Villela Barbosa. Primeiramente demonstra a relação entre o volume de um tetraedro de base triangular e um prisma, em seu resultado 260, que é um corolário de um teorema que afirma que dois tetraedros de bases equivalentes e alturas iguais têm volumes iguais.

> 260. COROLLARIO. *Todo tetraedro é a terça parte de um prisma triangular da mesma base e da mesma altura.*
>
> 
>
>
> Fig. 3.26
>
> Seja o tetraedro VABC (fig. 178). Tirem-se por V as rectas VF, VE iguaes e parallelas a BC, AB e tracem-se as rectas EF, AE, CF e CE : a figura resultante é evidentemente um prisma triangular composto de três tetraedros VABC, VACE, VECF: resta mostrar que estes tetredros são equivalentes. Ora, VAEC = VECF por terem o vértice commum V, e as bases iguaes AEC = CEF situadas no mesmo plano; VECF = VABC, porque tomando C por vértice do 1º , e V do 2º, terão elles basess iguaes ABC = VEF, e altura igual à do prisma. Logo, sendo equivalentes os três tetraedros, qualquer delles VABC é a terça parte do volume do prisma.
>
> (OTTONI, 1857, p.199)

A demonstração desse corolário de Ottoni lembra a de Lacroix (254), pois constrói, a partir de um tetraedro, um prisma de base triangular. Mas diferentemente dele, Ottoni decompõe o prisma diretamente em três tetraedros, que demonstra serem congruentes.

Mais à frente, em seu livro, Ottoni apresenta o seguinte resultado:

> 266. 7º O volume de qualquer tetraedro é igual ao terço do producto da base pela altura (nº 260)[xiii].
>
> 8º O volume de qualquer pyramide é igual ao terço do produto da base pela altura. Prova-se, dividindo a pyramide em tetraedros, e sommando os volumes destes.
>
> (OTTONI, 1857, p.203).

Observe que Ottoni não demonstra esse resultado, como o fazem Lacroix (262) e Villela (323), mas apenas dá a idéia da demonstração (que é a mesma de Lacroix e Villela).

Note que Ottoni, como os outros autores, não se utiliza em nenhum momento do termo *congruente*, mas sim de *equivalente* e/ou *igual.* Na verdade, o termo congruente não existia na época.

TIMOTHEO PEREIRA

A estrutura didática do livro de Timotheo, com relação a este assunto é semelhante a de Villela e Lacroix. Primeiramente, Timotheo demonstra a relação entre o volume de um tetraedro e de um prisma de base triangular para quinze resultados depois (dentre eles, volume de prismas, de tronco de pirâmides, volume do paralelepípedo retângulo, volume do paralelepípedo qualquer, volume do prisma qualquer, volume do tetraedro qualquer), demonstrar o volume de uma pirâmide.

> 434. THEOREMA *Todo tetraedro é a terça parte de um prisma triangular da mesma base e da mesma altura.*

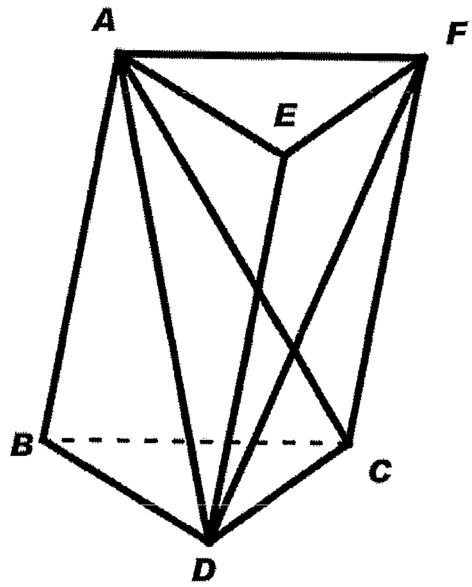


Fig. 3.27

Seja ABCD um tetraedro, vamos provar que elle é a terça parte de um prisma triangular da mesma base e da mesma altura.

Para formar o tal prisma, tiremos pelo ponto A uma parallela a BD e tomemos n'ella um comprimento igual a BD seja AE = BD, tiremos pelo mesmo ponto a uma parallela BC e tomemos n'ella uma porção igual a BC seja AF = BC, ligue-se o ponto F aos pontos E e Ce o ponto E ao ponto D fica assim o prisma triangular da mesma base que é BCD e da mesma altura porque os planos FAE e CBD são parallelos visto terem os dous ângulos FAE e CBD os lados parallelos, donde também resulta a igualdade dos triângulos BDC e AEF. O prisma BCDEFA é composto do tetraedro dado e da pyramide quadrangular AEFCD, tiremos o plano DAF que é o diagonal da pyramide quadrangular, esta fica dividida em dous tetraedros ADCF e ADEF, assim pois o prisma compoe-se de três tetraedros vamos provar que elles são equivalentes entre si.

Os dous tetraedros ADCF e ADEF são equivalentes porque têm a mesma base, que é para cada um a metade do parallelogrammo DECFE, e a mesma altura que é perpendicular baixada do ponto A sobre o plano commum das bases.

Porém sabemos que n'um tetraedro qualquer face pode ser base, assim para o tetraedro ADEF tomemos para a base a face AEF e então ficará o vértice sendo em D e portanto o tetraedro ADEF poderá ser lido DAEF ora este tetraedro e o tetraedro ABCD

> são equivalentes porque têm bases iguaes, que são os triângulos BDC e AEF e a mesma altura que é a do prisma, e como o tetraedro DAEF é equivalente a ADCF, segue-se que os três são equivalentes entre-si e portanto um d'elles é a terça parte do prisma.
>
> (PEREIRA, 1890, p.304)

Na demonstração deste teorema, Timotheo segue o mesmo raciocínio de Lacroix, com a diferença de detalhar, explicar e justificar cada passo da demonstração.

Timotheo é o único dos autores a demonstrar a recíproca deste resultado. Ottoni chega a enunciá-lo, mas não o demonstra, apenas escreve, após a demonstração de 260, que: "Incidentemente ficou provado que qualquer prisma triangular se pode dividir em três tetraedros da mesma base e altura do prisma." (OTTONI, 1857, p.199). Já Villela demonstra somente a volta (323).

> *435. THEOREMA: Todo o prisma triangular pode ser decomposto em tres tetraedros da mesma base a altura do prisma.*

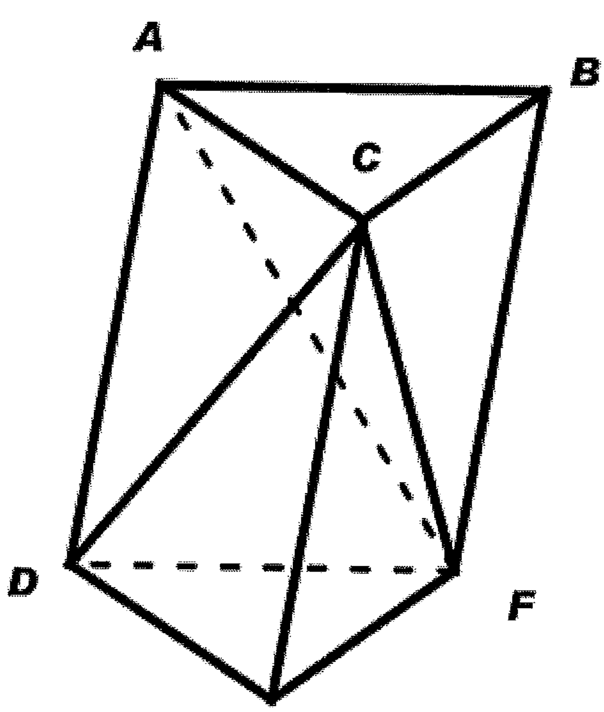


Fig. 3.28

> Seja ABCDEF uma prisma triangular, vamos provar que elle se decompõe em três tetraedros da mesma base e altura do prisma. Pelos pontos D, C e F façamos passa um plano; este plano forma o tetraedro CDEF que é um dos da these e a pyramide quadrangular CABDF. Pelos pontos ACF façamos passar um plano, o qual dividirá a pyramide em dous tetraedros que são CABF e CADF, estes tetraedros são equivalentes porque têm a mesma base, que é para cada um a metade do parallelogramo ABDF e a mesma altura que é a perpendicular baixada do ponto C ao plano commum da base, porém tomemos para a base o tetraedro CABF a face ABC, o que se pode fazer, e então será o seu vértice o ponto F e o tetraedro CABF pode ser lido FABC; ora, este e o tetraedro CDEF são equivalentes porque têm a mesma base e a mesma altura do prisma, e como o tetraedro FABC é equivalente ao tetraedro CADF, segue-se que os três tetraedros são equivalentes entre-si.
>
> (PEREIRA, 1890, p.p. 304 e 305)

Por último, mas não o último teorema sobre esse assunto, Timotheo conclui o volume de uma pirâmide qualquer, em seu resultado 450, na página 313.

> 450. COROLLARIO: *O volume de uma pyramide qualquer é igual à terça parte do producto da área da base pela altura.*
>
> (PEREIRA, 1890, p.312)

A demonstração deste corolário segue o raciocínio de Villela (323).

E tanto que ele enuncia como teorema 449, o volume de um tetraedro sem o relacionar com o do prisma.

> 449. THEOREMA: O volume de qualquer tetraedro é igual a terça parte do producto da área da base pela altura.
>
> (PEREIRA, 1890, p.312)

Ele o justifica citando o teorema 434, que já estudamos.

3.5 Área do Cone

PE. CAMPOS

A geometria do Pe. Campos não traz os teoremas referentes à área do cone no corpo de seu compêndio, mas em um apêndice, que ele chama de "Appendiz II" dos Theoremas Selectos de Arquimedes, pertencentes à Esfera, Cylindro e Pyramide Cônica.

É interessante comentar que Pe. Campos, no inicio do "Appendiz II" justifica-se por não incluir o estudo de teoremas referentes às Esferóides e Conoides[23]

> ... Muitos outros Theoremas deste Feniz dos engenhos, pertencentes âs Esfereoïdes, e Conoïdes, daremos no Appendiz da Geometria Superior, visto não terem lugar neste Tratado, em que só se trata da Geometria Inferior; isto he, daquela que somente se absolve por via da Regoa e Compasso, como deixamos notado no principio desta obra.
>
> (CAMPOS, 1735, p. 163).

A superfície da pirâmide cônica ou área do cone é enunciada por Campos em um corolário, na página 280, no "Appendiz II".

> COROLLARIOS.
>
> I. A superficie conica VSCR, he igual ao triangulo, cuja altura he o lado VC, e a base a circunferencia SCR. Demonstra-se do mesmo modo, que o Cor. I da II. Daqui se segue, que todas as propriedades, que se demonstrão dos triangulos rectangulos, se demonstrão também das superficies conicas das pyramides rectas: e assim
>
> (CAMPOS, 1735, p. 280)

Observe que a justificativa da demonstração repousa na área de um triângulo. Campos iguala a área lateral do cone, que é um setor circular, à área de um triângulo.

Daí $A_e = \frac{1}{2}$ base . altura $= \frac{1}{2} 2\pi R.\ g = \pi Rg$.

Esse corolário é referente à proposição da página 279

PROPOSIÇÃO XIII.*Theor.*

O circulo XMM, cujo rayo he medio proporcional entre o lado VC, da pyramide conica recta, e o rayo da base OC, he igual à superfície conica da mesma pyramide.

(CAMPOS, 1735, p.279)

O Livro IX ou XIII estuda a construção dos cinco sólidos regulares, por meio de “proposições problemas”. É curioso observar, após os problemas e corolários teóricos, que Campos insere uma “parte pratica” através de escólios, que ensinam a construir cada face do sólido com papelão para depois montá-los. E entre as figuras, que se localizam no final do livro, estão as planificações dos Poliedros de Platão.

LEGENDRE

Legendre apresenta o resultado da área do cone no Livro VIII sobre os três corpos redondos na página 262.

P R O P O S I Ç Ã O VII

T H E O R E M A

A superficie convexa de hum cône he igual á circunferencia da sua base multiplicada pela metade do seu lado.

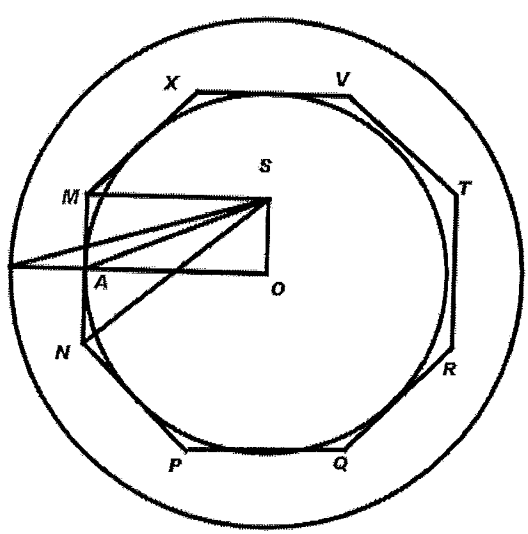


Fig. 3.29

[23] Curvas obtidas por cortes nos sólidos esfera e cone, como hipérbole, parábola e elipse.

Seja AO (fig. 259) o raio da base do cône dado, S o seu vértice, e SA o seu lado; digo que a sua superficie sera circ. AO X $\frac{1}{2}SA$. Porque seja, se he possivel, circ. AO X $\frac{1}{2}SA$, a superfície de hum cône que tivesse por vértice o ponto S e por base o circulo descrito com o raio OB maior que AO.

Circunscreva-se ao pequeno circulo hum polygono regular MNPT, cujos lados não encontrem a circunferência da qual OB he raio; e seja SMNPT a pyramide regular, que teria por base o polygono, e por vértice o ponto S. O triangulo SMN, hum dos que compõe a superfície convexa da pyramide, tem por medida a base MN multiplicada pela metade da altura SA, que he ao mesmo tempo o lado do cône dado; de ser esta altura igual em todos os outros triangulos SNP, SPQ, &c., se segue que a superficie convexa da pyramide he igual ao contorno MNPR, &c. multiplicado por $\frac{1}{2}$ SA. Mas o contorno MNPQR, &c., he maior que circ. AO; logo a superficie convexa da pyramide he maior que circ. AO x $\frac{1}{2}$ SA, e por consequencia maior que a superficie convexa do cône que com o mesmo vertice S tivesse por base o circulo descrito com o raio OB. Ora, pelo contrario, a superficie convexa do cône he maior que a da pyramide; porque, se encontrarmos base á base a pyramide a huma pyramide igual, o cône a outro cône igual, a superficie dos dois cônes envolverá de todas as partes a superficie da duas pyramides; logo a primeira superficie será maior que a segunda (le. 2.)[xliii]; logo a superficie do cône he maior que a da pyramide que nelle se comprehende. O contrario era consequencia da nossa hypothese; logo esta hypothese não tem lugar; logo I°. a circumferencia da base de hum cône multiplicada pela metade do seu lado, não póde ser medida da superficie de hum cône maior.

Digo 2° que o mesmo produto não póde medir a superficie de hum cône menor. Porque seja BO o raio da base do lado dado, e seja, se he possivel, circ. BO x $\frac{1}{2}$ SB a superficie do cône do qual o vertice he S, e AO, menor que OB, o raio da base.

Havendo feito a mesma construção acima, a superficie da pyramide SMNPT será igual ao contorno MNPT multiplicado por $\frac{1}{2}$

SA. Ora, o contorno MNPT he menor que circ. BO, SA he menor que SB; logo por dobrada razão a superficie convexa da pyramide he menor que circ. BO x $\frac{1}{2}$SB, que, por hypothese, he a superficie do cône, do qual o raio da base he AO; logo a superficie da pyramide seria menor que a do cône inscrito. Ora, pelo contrario, ella he maior porque encostando base a base a pyramide a huma pyramide igual, o cône a outro cône igual, a superficie das duas pyramides envolverá a superfice dos dois cônes, e por consequencia será maior. Logo 2º he impossivel que a circumferencia da base de hum cône dado multiplicada pela metade do seu lado, seja medida da superficie de hum cône menor.

Logo emfim a superficie convexa de hum Cône he igual á circumferencia da sua base multiplicada pela metade de seu lado.

Scholio. Seja L o lado de hum cône, R o raio da sua base, a circumferencia desta base será 2ωR, e a superficie do cône tera por medida 2ωR X $\frac{1}{2}$ L, ou ωRL.

(LEGENDRE, 1809, p. 262)

Observe que o enunciado de Legendre é equivalente ao da área do triângulo, mas não se baseia nesta idéia. Ele usa a metade da base pela altura e não a base pela metade da altura.

Legendre chama da geratriz de "lado". Em sua demonstração, ele deduz a área lateral de um cone como a área lateral da diferença entre o volume uma pirâmide (menor) inscrita e o de uma (maior) circunscrita.

LACROIX

Lacroix apresenta seu estudo sobre a área do cone na secção Segunda da Segunda Parte, intitulada "Dos corpos redondos". Como já dissemos antes, Lacroix define e estuda somente o cone reto.

Antes de tratar da área do cone, Lacroix apresenta um teorema (269) e um corolário (270) sobre a obtenção do cone como diferença entre um sólido inscrito e circunscrito ao cone.

THEOREMA

269. Se construirmos polygonos regulares, inscritos e circunscritos à base do cône, a ajuntarmos os angulos destes polygonos com o

vertice do cône, estas linhas determinarão pyramides chamadas regulares, porque todas as suas faces serão iguaes; e entre estas pyramides sempre poderemos achar duas, huma inscrita e outra circunscrita, taes que a differença de suas áreas seja menor que huma grandeza, dada, por mais pequena que seja esta grandeza.

(LACROIX, 1824, p.174)

270. *Corollario.* He evidente que quanto mais multiplicarmos os lados dos polygonos inscritos e circunscritos, tanto mais as pyramides inscritas e circunscritas se approximarão a confundir-se com o cone, e ao mesmo tempo tanto mais crescerá a área da pyramide inscrita, em quanto diminue a da pyramide circunscrita.

(LACROIX,1824 p. 175).

A seguir Lacroix enuncia o teorema sobre a área de um cone reto.

THEOREMA.

271. *A área de hum cone recto tem por medida metade do producto da circumferencia do circulo que lhe serve de base pelo seu lado, ou* $\frac{1}{2}CR$*, chamando a primeira C, e o segundo R.*

Demonstração. Se P representar actualmente o perimetro do polygono circunscrito, a área da pyramide circunscrita será expressa por $\frac{1}{2}PR$ (269), porque R he o mesmo que SG; e designando por X a verdadeira medida da área do cone, as três quantidades $\frac{1}{2}PR$, $\frac{1}{2}CR$ e X estarão no caso do nº 186, porque a primeira, sempre maior que as outras duas, em virtude do nº 270, e porque P > C, pode approximar-se a ellas tanto quanto se quizer: teremos portanto

$$X = \frac{1}{2}CR \text{ (*)}$$

(*) Este theorema se demonstraria immediatamente por hum raciocínio análogo ao da nota do nº 187, substituindo pyramides ao polygonos empregados da nota citada. O leitor achará finalmente a maneira, em que deveria modificar, este raciocínio para applica-lo às

> proposições dos números 275[xliv], 230[xlv], 297[xlvi] e 306[xlvii], que completão a medida da área e do volume dos corpos redondos.
>
> (LACROIX, 1824, p.176).

Lacroix baseia esta demonstração no resultado já comentado (269 e 270). Observe que o enunciado do Theorema de 271 baseia-se no raciocínio da área de um triângulo (do mesmo modo de Pe. Campos). A demonstração de Lacroix segue o mesmo raciocínio do que a de Legendre.

VILLELA

Villela Barbosa estuda as áreas de corpos em uma "subsecção", da Quarta Secção, página 139.

Nessa subsecção ele aborda: área de poliedros semelhantes, áreas de prismas, das pirâmides regulares, do tronco de uma pirâmide regular e de um cilindro reto, área do cone (294), área do tronco do cone, de um poliedro circunscrito, área da esfera e de um segmento esférico. Villela apresenta a área de um cone no teorema 294, e podemos observar que ele faz o enunciado do mesmo modo que Lacroix.

> 294. THEOR. *A área de qualquer pyramide cônica recta avalia-se, multiplicando a metade da circumferencia da base pelo lado da pyramide.*

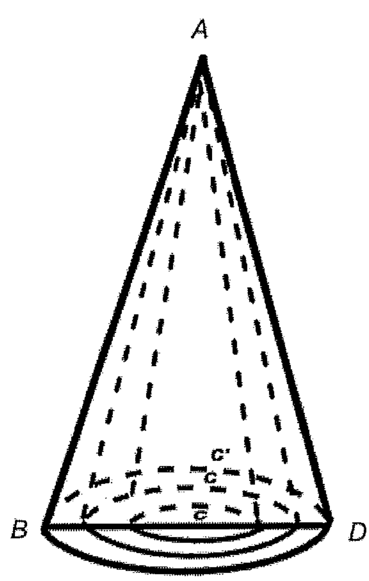


Fig. 3.30

Seja (fig. 142) a pyramide cônica recta ABCD. Denote L o lado AB, C a cicumferencia da base, e A a área do pyramide. Digo que A = $\frac{1}{2}C \times L$.

Demonstr. Si não é A = $\frac{1}{2}C \times L$; seja $\frac{1}{2}C \times L$ o valor da área de outra pyramide cônica recta maior, ou menor do que a proposta. Seja = área da pyramide cônica recta maior, da mesma altura, que tem por base o circulo concêntrico C'. Imagine-se circumscripta a pyramide cônica C uma pyramide regular, cujas faces não encontrem a superficie da pyramide cônica C'. Denote P o perimetro da base dessa pyramide. Será a sua área = $\frac{1}{2}P \times L$ (290[xlviii], 278[xlix] N.B.). Ora esta área é menor do que a da pyramide cônica C'; por ser ainda menor do que a da pyramide regular correspondente inscrita na dicta pyramide conica C'(como é fácil vêr), a qual é menor do que da mesma C' (283): logo será $\frac{1}{2}P \times L < \frac{1}{2}C \times L$; isto é, P < C: o que é absurdo. Pois seja $\frac{1}{2}C \times L$= área da pyramide cônica recta menor, da mesma altura, que tem por base o circulo concêntrico c. Imagine-se circumscripta a pyramide cônica c uma pyramide regular, cujas faces não encontrem a superfície da pyramide cônica C. Denote *p* o perímetro da base dessa pyramide regular, e *l* o apótema. Será a sua área = $\frac{1}{2}p \times l$. Ora esta área é maior do que a da pyramide cônica c; logo será $\frac{1}{2}p \times l > \frac{1}{2}C \times L$: o que é absurdo, por ser p < C, e l < L (210). E pois não é $\frac{1}{2}C \times L = área > ou < A$, será A = $\frac{1}{2}C \times L$.

(BARBOSA, 1838, p.144)

Barbosa, como Legendre e Lacroix, também baseia sua demonstração na idéia de comparação da área do cone com a de um cone maior ou menor.

OTTONI

Ottoni estuda a área do cone reto, no Capítulo Segundo, sobre áreas e volumes de corpos redondos. Ele apresenta antes dois teoremas: um sobre a área da superfície convexa de um cilindro reto (269) e outro sobre o cálculo do volume do cilindro (270)[24].

O teorema 271 de Ottoni trata não só da área do cone reto, bem como da área do tronco do cone reto.

> 271. A área da superficie convexa do cone recto é igual a metade do producto da circumferencia da base multiplicada pela aresta...
> Deduz-se do nº 243[l]. sendo l a aresta ou o lado da pyramide cônica, a área será
>
> $$S = \pi r l$$

O teorema 243, aonde Ottoni baseia sua demonstração anterior, está transcrito abaixo. Ele faz um paralelo entre a área lateral do cone e a área lateral da pirâmide, sendo que o cálculo de ambas pode ser obtido pelo o que ele chama de "desdobramento".

> 2ª THEOREMA (fig. 166)
>
> 243. *A superficie lateral de uma pyramide cônica póde ser applicada em toda a extensão sobre um plano (ao que se chama desdobra-la), e é representada por um sector cujo raio é a aresta, e cujo arco é igual ao comprimento da circunferencia da base.*

---

[24] Ver em Notas.

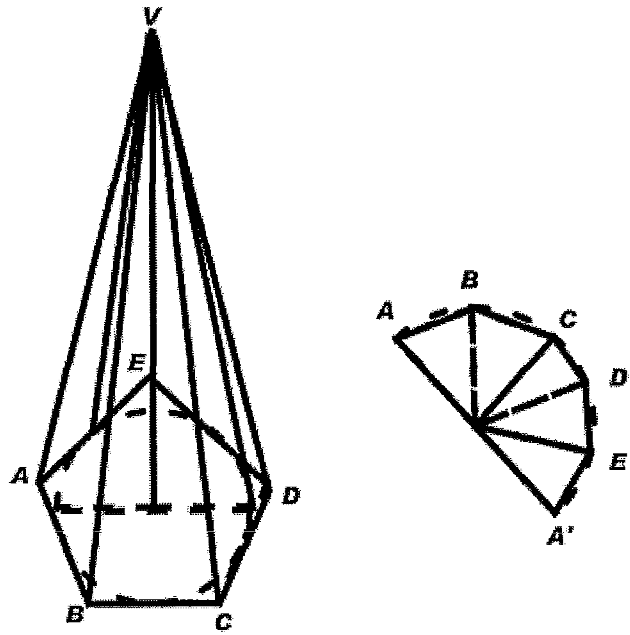


Fig 3.31

Imagine-se uma pyramide regular circumscripta á superficie cônica, e seja por exemplo a pentagonal VABCDE. Construindo em um plano os triângulos VAB, VBC... iguaes ás faces da pyramide, será a sua area lateral representada pelo sector de polygono VAA'; este sector é regular, porque sendo todas as faces da pyramide triângulos iguaes e isósceles temos

VA = VB = VC = ...

AB = BC = ...

∧ ABC = BCD = ...

Se o polygono da base, em lugar de cinco lados tiver 10, 20, 40,... será igualmente facil *desdobrar* a superficie lateral da pyramide; e o mesmo se imagina no caso de ter o polygono infinitos lados: ora, neste caso a porção do polygono AA' se confunde com o arco A"A"', cujo raio é VA" = á aresta da pyramide cônica, e cujo comprimento é o da circumferencia, base da mesma pyramide. Logo a superfície lateral da pyramide conica é igual á do sector VA"A"'; o que demonstra o theorema.

(OTTONI, 1857, p. 185)

TIMOTHEO PEREIRA

Timotheo trata da área de um cone no Quarto Livro, Segunda Secção sobre cone reto na página 277, no teorema 393.

> 393.THEOREMA: *A superfície lateral de uma pyramide cônica pode ser applicada em toda a sua extensão sobre um plano; e é representada por um sector cujo arco é igual ao comprimento da clrcumferencia da base e cujo raio é a aresta.*

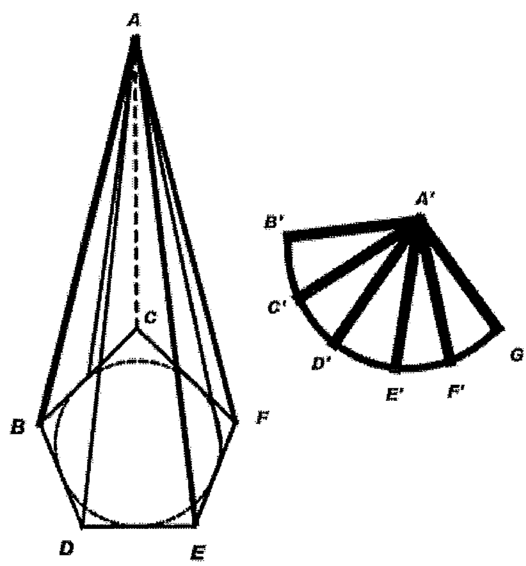


Fig. 3.32

Circumscrevamos um polygono regular a circumferência da base, um pentágono, por exemplo: façamos passar planos por cada um dos lados do plygono e pelo vértice da pyramide cônica, fica assim circumscripta ao cone uma pyramide pentagonal regular.

Tomemos n'um plano um ponto, seja A', e construamos os triângulos, A'B'D', D'A'E', etc., iguaes respectivamente as faces da pyramide pentagonal, a área da superfície lateral da pyramide pentagonal ficará representada pela do sector polygonal A'B'D'E'F'G. este sector é regular, porque, como sabemos, todas as faces da pyramide são triângulos isósceles e segue-se que as arestas AB, AC, AD etc. são todas iguaes; e, como por hypotese, o pentágono d base é regular, teremos também que os seus lados BD, DE,etc. são todos iguaes, e como os triângulos das faces são iguaes os ângulos

> BAD, DAE, etc. são iguaes, portanto aquelle sector polygonal será regular.
>
> Se em logar de o polygono circumscripto a base ter cinco lados, tivesse dez, vinte, quarenta, oitenta, etc. lado, e fizéssemos passar planos pelo vértice e por cada um dos lados d'estes polygonos, formaríamos uma pyramide circumscripta cuja área, era com o mesmo raciocínio, susceptível de ser applicada em toda a sua extensão n'um plano, imaginando que o numero de lados do polygono era infinito depois de imaginar planos pelo vértice e por casa um dos lados do polygono, formaríamos uma pyramide circumscripta de numero infinito de faces , a área da qual é fácil imaginar applicada em toda a sua extensõa n'um plano; ora, n'este caso, o sector polygonal terá infinito numero de lados e então é claro que cada um d'elles B'D' se confundirá sensivelmente com um elemento B'RD" da circunferência da base, a aresta AB será o raio, do sector, e o comprimento da base d'este sector será o comprimento da circumferencia da base da pyramide cônica; a área d'este sector representará a area da superfície lateral da pyramide cônica. Portanto podemos tomar a area da superfície do sector pela área superfície lateral da pyramide cônica que lhe é equivalente.
>
> (PEREIRA, 1890, p. 277 e 278).

Timotheo calcula a área lateral de um cone, planificando-a e comparando-a à planificação da superfície lateral de uma pirâmide poligonal regular, aliado à idéia citada anteriormente da infinitude de lados desse polígono, que é a mesma idéia de Ottoni, com a diferença que Timotheo não se utiliza de dois teoremas para isso, mas o faz somente em um.

3.6. Volume da Esfera

PE. CAMPOS

O Pe. Campos estuda o volume da esfera, juntamente com a área lateral de um cone reto, no "Appendiz II". Ele o enuncia não em um teorema, mas em um escólio, na página 296.

ESCHOLIO.

> *Deste engenhoso Theor. Se tira o modo de medir á corpulencia de qualquer esfera; porquanto se se multiplicar a sexta parte do diametro (ou a terceira do rayo) pela superficie da esfera, se terá a sua corpolencia. V.g. o diametro da Terra (segundo o ditto no esch de 6.) consta de 2006 1/3.1/2.6/4 legoas, cuja sexta parte são 334 1/3 e a superficie da mesma (segundo o ditto no Esch. da 24.)[ii] consta de 12.640,127 1/3. Digo, que o producto destes dous numeros, isto he, 4,226 . 15,905..he o numero da legoas cubicas, de que consta o solido da Terra.*
>
> (CAMPOS, 1735, p. 296)

A partir da idéia da demonstração do "engenhoso teorema" de Arquimedes é que Campos credita a técnica para o cálculo do volume. O teorema é sobre a igualdade de volume entre a esfera e um cone de altura igual ao raio da esfera e cuja base tem a mesma área que a superfície esférica. A técnica utilizada para demonstração desse teorema é a mesma que já comentamos para a demonstração do corolário II (392) de Timotheo.

Pe. Campos não chega a demonstrar esse escólio.

LEGENDRE

Legendre prova inicialmente a área de um setor circular. Faz esta demonstração, comparando a área do setor com um valor maior, ou menor, tomando por base o setor poligonal ENFC. Com base neste resultado, calcula o valor da superfície esférica e deduz o volume da esfera.

P R O P O S I Ç Ã O XVI

T H E O R E M A

> *Todo o sector esferico tem por medida a zona que lhe serve de base multiplicada pelo terço do raio, e a esfera inteira tem por medida a sua superficie multiplicada pelo terço do raio.*

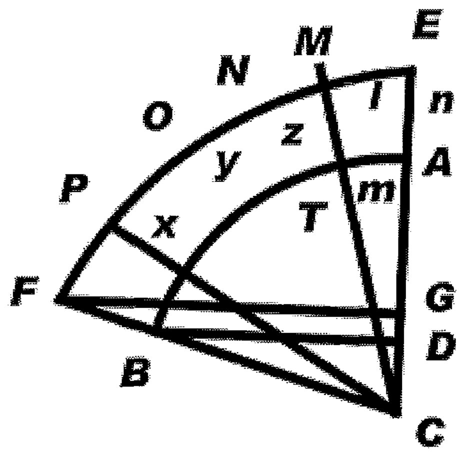


Fig. 3.33

Seja ABC (fig. 271) o sector circular que, na sua revolução em torno de AC, descreve o sector esferico; sendo a zona descrita por AB, AD X circ. AC, ou 2ω AC. AD (I2.), digo que o sector esferico terá por medida esta zona multiplicada por $\frac{1}{3}$AC, ou $\frac{2}{3}\omega . \overline{AC^2}$. AD.

Com effeito, I° supponhamos, se he possivel, que esta quantidade $\frac{2}{3}\omega . \overline{AC^2}$. AD seja a medida de hum sector esferico maior, por exemplo, do sector esferico descrito pelo sector circular ECF semelhante a ACB.

Inscreva-se no arco EF uma porção de polygono regular EMNF, do qual os lados não encontrem o arco AB; imagine-se que o sector polygonal ENFC gire em torno de EC ao mesmo tempo que o sector circular ECF. Seja o raio so circulo inscrito no polygono, e abaixe-se FG perpendicular sobre EC. O solido descrito pelo sector polygonal terá por medida $\frac{2}{3}\omega \times \overline{CI^2} \times EG$ (I5.); ora $\overline{CI}$ he maior que AC, por construção, e EG he maior que AD;porque, tirando AB, EF, os triangulos EFG, ABD, que são semelhantes, dão a proporção EG : AD :: EF : AB :: CF : CB; logo EG > AD.

Por estas duas razões $\frac{2}{3}$ ω x $\overline{CI^2}$ X EG he maior que $\frac{2}{3}$ω $\times\overline{CA^2}\times$ AD: a primeira expressão he a medida do solido descrito pelo sector polygonal, a segunda he, por hipothese, a do sector esférico descrito pelo sector circular EDF; logo o solido descrito pelo sector polygonal seria maior que o sector esferico descrito pelo sector circular ECF. Ora, pelo contrario, o solido de que se trata he menor que o sector esferico, porque nelle se contém; logo a hypothese de que pártimos não póde substituir; logo I° a zona ou a base de hum sector esferico multiplicada pelo terço do raio não póde medir hum sector esferico maior.

Digo 2° que o mesmo producto não póde medir hum sector esferico menor. Porque, seja CEF sector circular que pela sua revolução, produz o sector esferico dado, e supponhamos, se he possivel, que $\frac{2}{3}\omega\cdot\overline{CE^2}$. EG seja a medida de hum sector esferico menor, por exemplo, daquelle que resulta do sector circular ACB.

Conservando a construção precedente, o solido descrito pelo sector polygonal terá por medida $\frac{2}{3}\omega\cdot\overline{CI^2}$. EG. Mas CI he menor que CE; logo o solido he menor que $\frac{2}{3}\omega\cdot\overline{CE^2}$. EG, que, por hypothese, he medida do sector esferico descrito pelo sector circular AÇB. Logo o solido descrito pelo sector polygonal seria menor que o sector esferico descrito por ACB; ora, pelo contrario, o solido de que se trata he maior que o sector esferico, porque este se contém no outro. Logo 2° he impossivel que a zona de hum sector esferico multiplicada, pelo terço do raio seja a medida de hum sector esferico menor.

Logo todo o sector esferico tem por medida a zona que lhe serve de base multiplicada pelo terço do raio.

Hum sector circular ACB póde augmentar até vir a ser igual ao semi-circulo; então o sector esferico descrito pela sua revolução he a esfera inteira. Logo *a solidez da esfera he igual á sua superficie multiplicada pelo terço do raio.*

Legendre deduz como um corolário desse teorema, a comparação do volume de duas esferas por seus raios ou pelos seus diâmetros.

Corollario. *Como as superficies das esferas estão como os quadrados de seus raios, estas supercies multiplicadas pelos raios estão como os cubos dos raios. Logo as solidezes de duas esferas estão como os cubos de seus raios, ou como os cubos dos seus diametros.*

Legendre sintetiza os conceitos sobre área e volume de uma esfera em um escólio, que apresenta as fórmulas numéricas de superfície esférica e volume da esfera.

Scholio. Seja R o raio de huma esfera, a sua superficie será $4\omega R^2$, e a solidez $4\ \omega\ R^2 \times \frac{1}{3}\ R$, ou $\frac{4}{3}\ \omega R^3$. Se chamarmos D o diametro, teremos $R = \frac{1}{2} D$, e $R^3 = \frac{1}{8}\ D^3$; logo a solidez se exprimirá tambem por $\frac{4}{3}\ \omega \times \frac{1}{8} \times D^3$, ou $\frac{1}{6}\ \omega\ D^3$.

(LEGENDRE, 1809, p. 276, 277 e 278)

LACROIX

Lacroix apresenta o volume da esfera no estudo dos corpos redondos Secção Segunda da Segunda Parte de seu livro. Ele o faz em um corolário (305) que ele deduz do seguinte teorema (304)

THEOREMA

304. *O volume de hum sector esperico he igual a área da calotte, sobre o que se encosta, multiplicada pelo terço do raio, ou a* $\frac{1}{3} SR$, *denotando S esta área, e R o raio.*

(LACROIX, 1824, p.198)

Portanto Lacroix calcula o volume da esfera como um caso particular do volume do setor esférico.

305. 1° *Corollario.* Daqui se segue, que o volume da esfera he igual a sua área multiplicada pelo terço do raio, porque se tomarmos em lugar do arco ad, o quarto da circumferencia, ou am, o sector

esférico vira a se igual a semiesfera, porque o raio mO, perpendicular sobre AO, descreverá hum plano, que repartirá a esfera em duas igualmente; e teremos pela metade ou hemisfério superior $\frac{1}{2}S \times \frac{1}{3}mO$, tomando S pela área da esfera inteira, reunindo as duas metades, o total $S \times \frac{1}{3}$mO será o volume da esfera.

Sendo a área da esfera igual a quatro vezes a hum dos seus círculos máximos, ou a quatro círculos, $\frac{4}{3}R \times circulo,$ ou $\frac{2}{3}D \times circulo$, quer dizer, que o volume da esfera he igual a área de seu circulo maximo, multiplicada pelos dois terços do diametro

(LACROIX, 1824, p. 198)

VILLELA

Villela traz o cálculo do volume de uma esfera na Quarta Secção, no estudo "Dos Corpos".

331. Theor. O volume de qualquer sphera avalia-se, multiplicando o terço da área pelo raio.

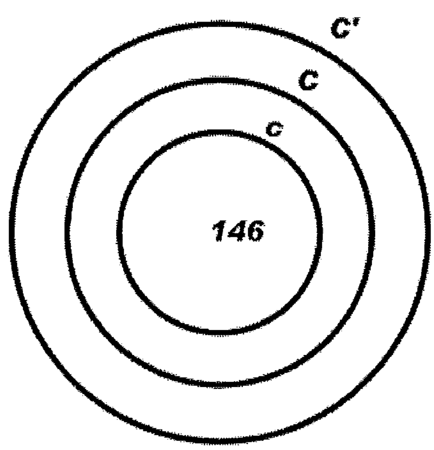


Fig. 3.34

Seja (fig. 146) a sphera representada pela circumferencia C de um dos circulos maximos. Denote R o raio, A a área, e V o volume. Digo que V= $\frac{1}{3}$ A x R.

Demonstr. Si não é V= $\frac{1}{3}$ A x R; seja $\frac{1}{3}$ A x R o valor do volume de outra sphera maior, ou menor do que a proposta. Seja = volume da sphera maior concentrica representada pela circunferencia C' de um dos seus circulos maximos. Imagine-se circunscripto a sphera proposta em polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da sphera C' (285)[lii]. Denonte S a área desse polyedro. Reflectindo que este pode tambem considerar-se, como um agregado de pyramides, cujas bases são as faces do mesmo polyedro, cada uma de cada uma, e que todas tem o vertice no centro da sphera, e por altura, o raio da mesma; será o volume = $\frac{1}{3}$ S x R (323).

(VILLELA, 1838, p. 168)

Ele faz diferente de Lacroix, pois desenvolve primeiro o volume da esfera (331) e calcula o volume do setor esférico a partir deste, no teorema 334.

OTTONI

Ottoni também trabalha com o conceito de decomposição de um poliedro em tetraedros, para o estudo de volume, em particular para o estudo do volume da esfera.

O volume da esfera é tratado por Ottoni em seu segundo teorema do tópico de Área e Volume da Esfera, página 212. A demonstração deste teorema segue o mesmo raciocínio de Villela.

2º THEOREMA

279. *O volume da esphera é igual ao producto da superfície espherica pelo terço do raio.*

Porque, considerada a esphera como um polyedro de infinitas faces, e imaginando planos pelo centro e por cada aresta do polyedro, fica o volume dividido em pyramides cuja altura commum é o raio da esphera, e cujas bases são os elementos da superfície espherica. Ora, sendo o volume de cada uma destas pyramides igual ao terço do producto da base pela altura, terão todos estes productos o faxtor commum, terço da altura ou raio, que é preciso multiplicar pela somma das bases, ou pela superficie espherica. Semelhante raciocínio se applica ao sector.

Assim, chamando *r* o raio, *V* o volume da esphera,

$$V = 4\pi\, r^2 \times \frac{1}{3} r = \frac{4}{3} \pi\, r^3$$

Sendo d o diametro, $r = \frac{d}{2}$, e $V = \frac{4}{3}\, \pi\, \frac{d^3}{8} = \frac{1}{6}\, \pi\, d^3$

(OTTONI, 1857, p. 212)

Ele apresenta um resultado sobre comparação de áreas e volumes de duas esferas quaisquer de raios diferentes, com relação a seus diâmetros e raios.

TIMOTHEO PEREIRA

Ao tratar de esfera, Timotheo também apresenta um pouco da geometria esférica, embora a aborde com menos profundidade do que Legendre ou Villela.

484. THEOREMA: *O volume da esphera é igual à terça parte do producto da sua superficie pelo raio da esphera.*

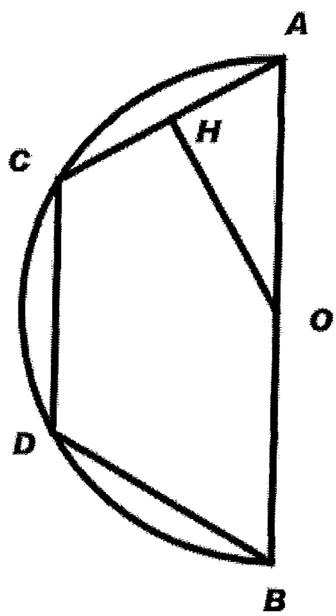


Fig. 3.35

Com effeito: inscrevamos na semi circunferência ACDB uma linha polygonal regular, o setor polygonal regular OACDB gera um volume que sabemos ser

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\ \text{sup.ACDB} \times \text{OH}$$

Ora, suppondo que se dobra indefinidamente o numero de lados da linha polygonal, o volume gerado tende a se confundir com o da esphera, a superfície do sector gerada por ACDB com a da esphera, o apothema OH com o raio R da esphera; ora, a igualdade de (1) sendo sempre verdadeira ainda o será no limite, logo

$$\text{Volume da esphera} = \frac{1}{3}\ \text{sup. esphera} \times \text{R}$$

Ora, sabemos que a área da esphera é $4\pi R^2$ logo substituindo no segundo membro de (2) virá a formula

$$V = \frac{1}{3} 4\pi R^2 R$$

ou

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3$$

(PEREIRA, 1890, p.337)

A demonstração acima é semelhante à de Ottoni e Villela.

Timotheo apresenta ainda uma segunda demonstração deste teorema, baseada na construção de infinitos planos tangentes à esfera, de modo a criar um poliedro que se "confunde" com a própria superfície da esfera. A seguir supõe planos passando pelo centro da esfera e pelas arestas do poliedro, de forma a decompô-lo em pirâmides com um vértice comum no centro da esfera e cujas bases são as faces do poliedro. Ele salienta ainda que, como essas bases podem ser decompostas em triângulos, as pirâmides poderiam ser decompostas em tetraedros cuja altura comum é o raio da esfera. Timotheo conclui então que como a soma dos volumes dos tetraedros é o volume da esfera e por outro lado a soma dos volumes dos tetraedros pode ser escrita como $\frac{1}{3}$ área da base $\times$ altura do tetraedro,

isso vem a ser $\quad \frac{1}{3}$ sup. esfera $\times$ R, que é

$$\frac{1}{3}\ \pi R^2 \times R = V = \frac{1}{3}\pi R^3$$

Timotheo salienta que podemos escrever o volume da esfera em função do diâmetro. Como Ottoni, Timotheo compara áreas e volumes de duas esferas, mas o faz em teoremas separados. Timotheo trata de áreas e volumes por meio de fórmulas. Ele também apresenta um estudo de geometria esférica no tópico denominado "Das figuras Traçadas sobre Superfícies esféricas".

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho que pretendi desenvolver está voltado para a minha área de formação, ou seja, desejei elaborar uma dissertação que abordasse um tema ligado à Matemática. Surgiu, então, o interesse de realizar uma revisão histórica e crítica do livro "Elementos de Geometria", escrito em 1815, por Francisco Vilela Barbosa (1769-1846), futuro Marquês de Paranaguá, nascido no Rio de Janeiro, membro da Academia Real de Ciências de Lisboa.

O livro em epígrafe apresenta a singularidade de não se constituir uma mera compilação de textos anteriores, como de hábito ocorrer com a maioria das obras de cunho didático voltada para a Geometria.

Mas ao longo do estudo deste compêndio, outros me chegaram às mãos. Também obras raras e de autores que se destacaram na história do ensino da Matemática no Brasil. Achei que seria de interesse e enriquecedor para os objetivos desta dissertação fazer uma comparação entre esses autores.

Certamente este trabalho não tem a pretensão de esgotar o assunto, inclusive porque, outras obras relevantes, por falta de tempo e de espaço não puderam ser aqui incluídas, como as de Clairaut, Bezout, Biot, etc. Deixo para outros esse desafio.

O acesso às obras analisadas não foi tarefa das mais fáceis. Foi com esse intuito que coloquei o apêndice com a localização das mesmas no município do Rio de Janeiro.

Feita, então, a definição das fontes básicas e a escolha das obras a serem pesquisadas, passamos ao seguinte dilema: o que colocar de cada uma delas? Pois, conforme nos aprofundávamos em cada uma, víamos inúmeras e interessantes diferenças entre elas e que espelhavam o caminhar da evolução do ensino da matemática naquele momento histórico (da vinda da Família Real até a República). Esta pesquisa inicia-se, então, pela apresentação dos autores e das obras escolhidas cuja seqüência de apresentação foi feita pela ordem cronológica da publicação das obras em questão. Uma seção deste capítulo é dedicada à figura de Manoel Ferreira de Araújo Guimarães que, como vimos, foi um personagem que se destacou, na tradução de obras de cunho matemático para o português, tornando um divulgador das obras facilitando o estudo dos conteúdos de matemática em países de língua portuguesa.

O capítulo segundo é dedicado ao estudo do postulado das paralelas, o quinto postulado de Euclides. Dada a relevância histórica deste tópico, vimos por bem a não apenas efetuar comparação de como ele é enunciado nos seis compêndios estudados, mas também de acrescentar um histórico sobre o assunto.

No terceiro capítulo realizamos comparação de tópicos da geometria espacial tal como ela se apresenta nas referidas obras. Um destaque inicial foi feito com relação às definições usadas pelos autores em sua geometria espacial. A seguir foi feito um apanhado de proposições que fornecessem um pouco da visão de como a geometria espacial era estudada naquela época.

Listamos e comparamos primeiramente os teoremas relacionados à perpendicularidade no espaço. O texto prossegue comparando teoremas sobre volume de um paralelepípedo e resultados afins como o volume do paralelepípedo retângulo, volume de um cubo, como medir volume de um corpo e à generalização feita por alguns dos autores para o volume de um prisma qualquer.

O tópico seguinte é sobre a relação entre o volume de uma pirâmide e um prisma, onde relacionamos, também, os corolários e outros teoremas que fazem parte da seqüência de exposição do tema por cada um dos autores. Como, por exemplo os resultados da relação entre o volume de um tetraedro e um prisma de base triangular.

O próximo assunto é sobre o cálculo de área (lateral) de um cone, conhecido na época por pirâmide cônica.

E o último tópico escolhido para análise nas seis obras foi o volume da esfera. Os dois últimos temas se relacionam a medições em corpos redondos e por isso têm em comum a técnica da decomposição de figuras e da comparação de uma curva com um polígono de infinitos lados.

Vale ainda mencionar que bem pouco se vê sobre as transformações no plano. Apenas um pouco do estudo de simetria (em Legendre e Timotheo).

Algumas obras trazem exercícios apenas no final da geometria plana e ao final da geometria espacial, como tipo de revisão. Há também os livros-textos que não trazem nenhum tipo de exercício, mas apenas problemas resolvidos, como exemplos para facilitar a compreensão do tema ou como aplicação de um resultado, como em Villela e Ottoni.

Os compêndios analisados por nós passaram a ser utilizados em vários estabelecimentos de ensino no Brasil como o de Ottoni, pelo Colégio Pedro II, em 1856, 1858, 1862, 1877, 1878 1892, 1893 (VECCHIA & LORENZ, 1998). O de Timotheo

Pereira pela Escola Politécnica e pelo Colégio Pedro II em 1895 e 1898, as traduções de Legendre e Lacroix e o de Villela Barbosa pela Academia Militar. Sendo que os de Legendre e Lacroix foram indicados para uso na Academia pela mesma Carta Régia que a criou (VALLENTE, 1999).

É fato também que os livros-textos daquela época não eram destinados a uma determinada série ou curso, como os livros de Ottoni e Timotheo que foram utilizados em diversos anos (séries), no Colégio Pedro II.

Do nosso ponto de vista, os livros que se sobressaem são os de Legendre e Villela, tanto na originalidade das demonstrações quanto na profundidade dos temas abordados bem como na completude dos tópicos enfocados.

Sem sombra de dúvidas, o de melhor qualidade entre eles foi o de Legendre, até porque ele não era somente um escritor de livros-texto, mas também um matemático de renome, com vários trabalhos de destaque em diferentes áreas da matemática e das ciências de um modo geral. Como vimos também, o texto de Legendre teve grande influência no mundo da matemática, sendo utilizado por muito tempo e em diversos países.

Mas, em nossa opinião o mérito com relação à originalidade é do autor brasileiro Villela, pois ele apesar de ele conhecer as obras de Legendre e Lacroix ainda assim procurou um caminho novo na escolha dos tópicos abordados e principalmente na nas demonstrações de suas proposições.

Também vale colocar que foi de certa forma muito injusta a crítica de Ottoni a Villela, crítica de fundo pessoal e político, como vimos. Conforme pudemos observamos, a obra de Ottoni não tem nada de original. Todas as demonstrações que analisamos em seu livro foram semelhantes às de outros autores, em geral de Lacroix e até mesmo de Villela.

Ottoni, durante o pouco tempo em que exerceu a profissão de professor, redigiu e publicou além do livro analisado por nós, outros dois livros de matemática (*Elementos de arithmetica* e *Elementos de álgebra*, publicados em 1852).

Também pudemos observar que, com o passar do tempo, houve uma maior didatização nos livros-texto, ou seja, uma maior preocupação com o entendimento do aluno, que se refletiu em uma semelhança na forma e no conteúdo de se estudar a matemática na rede escolar da época.

Nossas observações mostraram que o processo de didatização era, de certa forma, uma preocupação individual de cada autor, visando a uma compreensão mais fácil por parte de seus leitores, no caso, alunos em sua maioria Campos, por exemplo, parece se preocupar em apresentar e detalhar os tópicos mais complexos que ele considerava mais importantes, deixando de lado algumas vezes os que ele achava mais óbvios. Notamos no Livro IX que se refere a construção dos sólidos geométricos, em que ele sugere a construção de cada face do sólido através da planificação para em seguida montar o mesmo. Proporcionando ao leitor a ter uma melhor visualização e compreensão com o uso do material concreto.

A principal preocupação de Legendre foi a de escrever um livro com maior rigor, mas sem perder de vista o gosto do leitor pela matemática. Ao final de sua obra ainda coloca doze notas referentes a vários tópicos da geometria, com explicações muitas vezes mais detalhadas e aprofundadas do que o próprio autor como no caso, dos comentários de Legendre a cerca da fórmula de Euler.

Lacroix, apesar de não se destacar com descoberta de novos conceitos de matemática, teve grande valor como autor e divulgador de livros-texto, pois suas obras fizeram muito sucesso e correram o mundo espalhando o conhecimento da matemática em diversos países.

Timotheo não tinha preocupação em descobrir novos conceitos de matemática, mas de ser um divulgador desses conceitos.

Ele não foi um matemático de renome, mas professor regente. De todos os autores estudados foi o que mostrou maior preocupação com o entendimento do leitor, o aprendiz. Procurava detalhar as explicações, incluindo lista de exercícios, tanto que até auto-didata poderia tentar estudar pelo seu livro. Sua preocupação era tão intensa que ele resoulveu explicitá-la no texto "A quem leu" que vem no final do livro.

Também é observável que as obras eram estudadas e criadas para estabelecimentos militares, já que estas instituições precisavam transmitir os conhecimentos matemáticos necessários aos profissionais por elas formados.

Notamos que, se fossemos comparar os livros analisados com os livros atuais, verificaríamos que atualmente temos grande defasagem de rigor nos conteúdos. Parece que a preocupação é de uma "matemática mecânica", de uso mais pragmático e sem preocupações teóricas de natureza mais investigativa e complexa.

Entre os livros analisados certamente o de Timotheo é o que esta mais próximo dos livros-texto utilizados atualmente, nos cursos de grande excelência no que se denomina hoje "ensino médio".

Esperamos ter traçado um panorama da história do ensino da matemática no Brasil, dando destaque a personagens e obras que se destacaram nesta área do conhecimento e que, ao mesmo tempo, colaboraram para a disseminação desta "ciência" ou "forma de linguagem" universal que é a Matemática.

Acreditamos que esse seja um caminho de pesquisa rico a ser trilhados pelos nossos estudiosos na era de história da ciência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, Asger. *Episódios da História Antiga da Matemática.* Traduzido para o português pelo Prof. João Bosco Pitombeira de Carvalho, 2ª edição. Rio de Janeiro, RJ, SBM, 2002.

ÁVILA, Geraldo. *"Legendre e o postulado das paralelas"*. Revista do Professor de Matemática, nº 22, pp.16-28, Set. 1992.

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, RJ, SBM, 1995.

BLAKE, Augusto Vitorino Alves Sacramento. *Diccionario Bibliographico Brazileiro.* Rio de Janeiro, RJ, Imprensa Nacional, volumes III, II e VI, 1895.

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Revista por Uta C. Merzbach. Traduzido para o português por Elza F. Gomide. 2ª edição. São Paulo, SP, Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

CAMPOS, Manoel. *Elementos de Geometria Plana e Solida, segundo a ordem de Euclides*. Lisboa Ocidental, Officina Rita-Cassiana, 1735.

CASTRO, Francisco Mendes de Oliveira. *A Matemática no Brasil.* 2ª edição. Campinas, SP, Editora da UNICAMP, 1999.

COSTA, Glaucia Márcia L. *Os livros didáticos de matemática no Brasil do século XIX.* Dissertação de Msc., PUC, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.

EUCLIDES. *Elementos de Geometria dos seis primeiros livros do undécimo e duodécimo da versão latina de* Frederico Commandino. Adicionados e Ilustrados por Roberto Simson. Traduzido por Ângelo Brunelli. São Paulo. Edições Cultura, Série Científica, 1944.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* Traduzida para o português por Hugyno H. Domigues. Campinas, SP. Editora da UNICAMP, 2004.

FILGUEIRAS, Carlos A. L. "A química de José Bonifácio". *Química Nova,* v. 9, pp.263-268, 1986.

HILBERT, David. *Fundamentos de Geometria.* Traduzido para o português por Maria Pilar Pinheiro, com a colaboração de J. Silva Pinheiro. Lisboa, Publicação do Instituto de Alta Cultura, 1952.

LACROIX, Sylvestre-Françoise. *Elementos de Geometria.*traduzido para o português por Manoel Ferreira de Araújo Guimarães.Rio de Janeiro, RJ, Typographia Nacional, 1824.

LEGENDRE, Adrien-Marie. Elementos de Geometria. Traduzido para o português por Manoel Ferreira de Araújo Guimarães. Rio de Janeiro. Impressão Régia, 1809.

OTTONI, Christiano Benedicto. *Elementos de Geometria e trigonometria rectilinea.* 2ª edição. Rio de Janeiro, RJ, 1857.

___________________________ *Juízo Crítico sobre o Compêndio de Geometria adoptado pela Academia de Marinha do Rio de Janeiro.* Rio de Janeiro: Typografia Imp. E Const. De J. Villeneuve e Comp. Rio de Janeiro, RJ, 1958.

___________________________.*Autobigraphia.* Rio de Janeiro, RJ, Typograhia Leuzinger, 1908.

PEREIRA, Timotheo. *Curso de Geometria.* Rio de Janeiro, RJ. B.L. Garnier, livreiro-editor, 1890.

SCHUBRING, Gert. *Análise Histórica da Matemática, notas de aula.* Campinas, SP. Autores Associados, 2003.

SILVA, Clóvis Pereira da. *A matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento.* Curitiba, PR. Ed. Da UFPR, 1992.

SILVA, Innocencio Francisco. *Diccionario Bibliographico Portuguez.* Lisboa, Imprensa Nacional, volume V, Tomo 5°, 1840.

STRUIK, Dirk J. *História Concisa das Matemáticas.* Traduzida para o português por João Cosme Santos Guerreiro, 2ª edição. Lisboa, Editora Gradiva, 1992.

VALENTE, Wagner Rodrigues. *Uma história da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930).* São Paulo, SP, Editora Annablume: FAPESP, 1999.

VECHIA, Ariclê; LORENZ, Karl Michael (organizadores) *Programa de ensino da escola secundária brasileira: 1850/1851.* Curitiba, PR, Ed. Do Autor, 1998.

VILLELA, Francisco Barbosa. *Os Elementos de Geometria.* Rio de Janeiro, RJ. Typografia Austral, 1838.

NOTAS

---

[i] P RO P O S I Ç Ã O XXVII. Theor.

Se a recta GO, cortar duas parallelas BA, FC; (fig. 43) serão I. iguaes os ângulos alternos RLO, LOQ. 2. sera o externo GLA, igual ao interno para a mesma parte LOC. 3. e serão os dous internos para a mesma parte ALO, LOC, iguaes a dous rectos.

[ii] P R O P O S I Ç Ã O VII

Dois triangulos são iguaes quando tem hum lado igual adjacente a dois ângulos iguaes, cada hum a cada hum.

[iii] P R O P O S I Ç Ã O XIX - L E M M A

A soma dos três ângulos de hum triangulo não pode exceder a dois ângulos rectos.

[iv] P R O P O S I Ç Ã O II

Corollario III. Todos os ângulos consecutivos BAC, CAD, DAE, EAF (fig. 34) formados do mesmo lado da recta BF, valem em somma dois ângulos rectos; porque a soma delles he igual a do dois ângulos BCA, CAF.

[v] 28. *Preliminares. Chamão-se PARALLELAS duas rectas que, existindo no mesmo plano, não se encontrão, por mais que se prolonguem em qualquer sentido.* Segundo esta definição, duas parallelas existem sempre em um plano: demais, *ellas o determinão,* porque tomando dous pontos em uma, e um em outra, estes tres pontos *não em linha recta,* só podem pertencer a um único plano. Chama-se este *plano das parallelas.*

[vi] 29. A perpendicular CD, e a obliqua LO a uma recta EF necessariamente se encontrão, sendo prolongadas sufficientemente. O encontro tem sempre lugar da parte do angulo agudo LIH, e não do obtuso HIO.

Sente-se a verdade desta proposição , comparando a extensão plana contida no ângulo LIM com a extensão comprehendida entre a recta HI e as paralelas HC, IM prolongadas indefinidamente.

[vii] 210. Coroll. 1. Reciprocamente: si duas, ou mais obliquas a um plano, tiradas de um mesmo ponto fora delle, se desviarem egualmente da perpendicular abaixada do dicto ponto, ou fizerem com esta angulos eguaes; serão eguaes. E as que menos se desviarem, ou fizerem angulo menor, serão menores.

[viii] 82. ... Por isso: Chama-se *triangulo rectilineo*, ou *triangulo* simplesmente, a figura terminada por tres linhas rectas. Cada uma delas se diz lado do triangulo. Si todas as tres são eguaes; *triangulo equilatero*. Si duas somente eguaes; *triangulo isosceles*. Si todas deseguaes; *triangulo escaleno*.

[ix] 107. THEOR. Dous triangulos asão eguaes, quando tem tres lados respectivamente eguaes.

[x] E S C H O L I O. (31)

Deste fecundissimo Theorema, cujo uso he mui frequente por toda a Geometria, foy inventor Pythagoras, como diz Eudemo. Delle faz menção muitas vezes Aristoteles; e o traz por exemplar de huma perfeita demonstração. Por meyo delle se sabe, não somente quantos ângulos rectos fazem os tres de qualquer triangulo; senão tambem todos os angulos de qualquer polygono: e não sómente os internos; senão tambem os externos.

[xi] Definição 3. Termos da linha: são os pontos extremos, em que começa, e acaba; como A e B.

[xii] Proposição I. Theor.
Dadas duas rectas BA, AC, a primeira inteira, e a segunda cortada em quaesquer partes AX, XZ, ZC:serà a Rect. BAC, comprehendido da interia, e da cortada, igual a todos os rectangulos juntos, comprehendidos da mesma inteira, e de cada huma das partes da cortada, BAX : BA, XZ : BA, ZC.

[xiii] Problema V.
Por hum ponto dado A (fig. 142) *no ângulo dado* BCD *tirar a linha* BD, *de maneira que as partes **AB, AD**, comprehendidas entre o ponto A e os dois lados do ângulo, sejão iguaes.*

[xiv] 14.3 Proposição XIV: Theorema: Em um triangulo qualquer ABC (fig. 112), se tirarmos do vértice ao meio da base a linha AE, digo que teremos
$\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = 2\overline{AE^2} + 2\overline{BE^2}$.

Abaixe-se a perpendicular AD sobre a base BC, o triangulo AEC dará theorema XII.

$\overline{AC^2} = \overline{AE^2} + \overline{EC^2} - 2EC \times ED$.

O triangulo ABE dará pelo theorema XIII.

$\overline{AB^2} = \overline{AE^2} + \overline{EB^2} + 2EB \times ED.$

Logo, sommando e advertindo que EB=EC, teremos

$\overline{AB^2} + \overline{AC^2} = 2\overline{AE^2} + 2\overline{EB^2}$.

[xv] 13.*Corollario.* Da proposição precedente se segue que se continuarmos abaixo de AB, fig. 8, a recta AC, que faz com DB dois angulos rectos CAB e CAD, o seu prolongamento AE fará tambem, do outro lado de AB, dois angulos rectos, BAE e DAE, porque estes angulos, oppostos verticalmente aos angulos CAD e CAB, que se suppõe rectos, serão tambem rectos (9).

Daqui resulta igualmente que sendo CE perpendicular sobre DB, tambem DB he perpendicular sobre CE.

[xvi] 27. 1° *Corollario.* As linas CA, CB, CE, se chamão obliquas a respeito da lina AB; e por consequencia se diz que as obliquas, que se affastão igualmente da perpendicular, são iguaes, e as que se affastão mais são maiores, donde resulta evidentemente que se

duas obliquas são iguaes, não cahem do mesmo lado da perpendicular, mas se affastão igualmente de cada lado do seu pé.

[xvii] 29. Tirar sobre a linha AB, fig. 15, huma perpendicular, que a divida em duas partes iguaes.

[xviii] 16. Dois triangulos, que tem hum ângulo igual comprehendido entre dois lados iguaes, cada hum a cada hum, são iguais em todas as suas partes.

[xix] 27. 1° *Corollario.* As linas CA, CB, CE, se chamão obliquas a respeito da lina AB; e por consequencia se diz que as obliquas, que se affastão igualmente da perpendicular, são iguaes, e as que se affastão mais são maiores, donde resulta evidentemente que se duas obliquas são iguaes, não cahem do mesmo lado da perpendicular, mas se affastão igualmente de cada lado do seu pé.

[xx] 102. THEOR. Dous triangulos são eguaes, quando tem dous lados respectivamente eguaes, e egual o ângulo formado por esse dous lados.

[xxi] 38. Coroll. 1° Reciprocamente: si duas obliquas a uma recta, tiradas de um mesmo ponto situado fóra della, forem eguaes desviar-se-hão egualmente da perpendicular abaixada do dicto ponto, e farão com esta angulos eguaes. E si as obliquas forem deseguaes; a menor desviará mesmo, e fará ângulo menor.

[xxii] 107. THEOR. Dous triangulos são eguaes, quando tem tres lados respectivamente eguaes.

[xxiii] 105. THEOR. Dous triangulos são eguaes, quando tem hum lado egual, adjacente a angulos respectivamente eguaes; ou adjacente a um, e opposto a outro respectivamente eguaes.

[xxiv] 42. Schol. Conclue-se pois: que uma recta será perpendicular á outra, todas as vezes que passar por dous pontos, cada um dos quaes diste egualmente de outros dous tomados em est' outra.

[xxv] 23. Se de um ponto O fora de uma reta AB se tira a perpendicular OD, e qualquer numero de obliquas OE, OF, OG:
1° As obliquas OE, OF, que se desvião igualmente da perpendicular são iguaes.
2° Das obiquas OF, OG que se desvião desigualmente da perpendicular, a que mais se desvia OG é a maior.
3° A perpendicular OD é mais curta que qualquer das obliquas.

[xxvi] Parallelogrammo Rectangulo; ou absolutamente o Rectangulo ABDC, se diz ser. Comprehendido de quaesquer dous lados BA, AC, que formão hum dos seus angulos rectos.

[xxvii] PROPOSIÇÃO xxv. Theor.

Se a hum parallelipipedo RS, cortar hum plano NO, parallelo a qualquer dos lados oppostos RQ ou PS; cortallo há na mesma proporção, que a base TS: isto he, serà TO : OV = RO : OP*. O mesmo se entende dos prismas.

[xxviii] Altura de hum prisma he a distancia das suas duas bases, ou a perpendicular abaixada de hum ponto da base superior sobre o plano da base inferior.

[xxix] THEOREMA

240. Se os angulos triedros B e B'doa prismas AI e A'I', fig 128, forem compostos de polygonos iguaes e similhantemente dispostos, estes prismas serão iguaes.

[xxx] 238.O prisma ABCDEFGH, fig. 129, que também se denota por AG, e que tem por base hum parallelogramo ABCD, se chama parallelipideo; as suas faces oppostas, por exemplo ABFE, CDHG, são iguaes e parallelas. A sua igualdade he evidente pela construção do prisma (237), e o seu [parallelismo resulta do dos lados dos angulos EAB, HDC, iguaes entre si (217).

[xxxi] THEOREMA

239.Hum polyedro comprehendido entre seis planos, parallelos dois a dois, he hum parallelepipedo.

[xxxii] Advertência. Como medir grandezas não he outra cousa mais que comparar entre si as da mesma espécie; he evidente que a medida das áreas deve ter por objecto saber quantas vezes huma área qualquer contem outra, tomada arbitrariamente para servir de termo de comparação. Medir, por exemplo, o rectangulo ABCD, fig. 98, he procurar quantas vezes este rectangulo contem hum quadrado abcd, no qual se suppõe que o lado ab seja igual á recta tomada por medida commum dos comprimentos das rectas, e, conforme fica dito, teremos, concebendo a base e a altura AB e BC, referidas a esta medida

abcd : ABCD :: $\overline{ab}\times\overline{bc}:\overline{AB}\times\overline{BC}, ou::1:\frac{AB}{ab}\times\frac{BC}{bc}$; o que mostra que o rectangulo ABCD contem o rectangulo abcd, ou a área tomada por unidade, como o producto do numero de unidades lineares contidas na sua base AB, multiplicada pelo numero de unidade lineares contidas na sua altura BC...

[xxxiii] 307. Coroll. 2. Dous parallelipipedos da mesma ou egual altura, contruidos sobre parallelogrmmos equivalentes, tem volumes eguaes.

[xxxiv] 308. THEOR. O plano , que se tirar pelas diagonaes de duas faces oppostas de um parallelipipedo, dividilo-há em dous prismas triangulares de egual volume.

[xxxv] 313. THEOR.Si um prisma triangular, e um tetraedro tiverem a mesma base e a mesma altura, ou bases eguaes e alturas eguaes; será o volume do tetraedro a terça parte do volume do prisma.

[xxxvi] 224. O prisma toma nome de

Triangular, quadrangular, pentagonal, etc., segundo as bases são triangulos, quadriláteros, etc.

Recto ou *obliquo*, segundo as arestas são ou não perpendiculares ás bases: no prisma recto qualquer das arestas é a altura do prisma; as faces lateraes são rectangulos.
Regular, quando é recto e as bases são polygonos regulares.
Todo o prisma se divide em prismas triangulares, fazendo passar planos por uma das arestas EE'1, e pelas outras não pertencentes á mesma face.

[xxxvii] 440. Dous parallelipipedos rectangulos quaesquer são proporcionaes aos productos das areas das bases pelas alturas.

[xxxviii] Proposição XXXIV. Theor.
Em qualquer parallelogrammo BD, os ângulos, e os lados oppostos são iguaes: e a diagonal AC, o divide pelo meyo, em dous triângulos iguaes, e semelhantes.

[xxxix] 237. Distinguem-se também entre os polyedros com o nome de *prismas*, o que tem duas faces oppostas iguaes e parallelas, que se chamão de *bases*, e todas as outras são parallelogrammos.

[xl] 312. THEOR. *Si dous tetraedros tiverem a mesma base e a mesma altura, ou bases eguaes e alturas eguaes; terão volumes eguaes.*

[xli] 318. Coroll. 1° logo o volume de qualquer prisma triangular avalia-se, multiplicando a base pela altura (308). E o de um tetraedro, tomando a terça parte deste producto.
[xlii] 260. COROLLARIO. *Todo o tetraedro é a terça parte de um prisma triangular da maesma base e da mesma altura.*

[xliii] Lemma II.
Toda a superfície convexa OABCD (fig. 255) *he menor que a outra qualquer superficie que envolvesse a primeira, estribando-se sobre o mesmo contorno* ABCD.

[xliv] 275. O volume de hum cône tem por medida o terço do produto da área da área da sua base pela sua altura, ou $\frac{1}{3}CH$, representando por C a primeira, e por H a segunda.

[xlv] 230. Quando os triangulos, que formão dois angulos triedros homologos de dois tetraedros, são respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos, estes tetraedros são similhantes; e ainda o serão se duas faces de hum fizerem entre si o mesmo ângulo que duas faces do outro, forem similhantes a estas, e ajuntadas por lados homologos.

[xlvi] 297. A área da porção da esfera ou calotte esferica, descrita por hum arco menor que o quarto da circumferencia do circulo generante, he igual ao producto desta circumferencia pela parte do diametro que mede a altura da colotte.

[xlvii] 306. 2° Corollario. Se quizessemos obter o volume gerado por hum sector aOn, maior que o quarto de circulo, cortariamos da esfera inteira o sector gerado por nOp, e igual a $\frac{1}{3}mO \times$ área da calotte descrita pelo arco np; a differença seria $\frac{1}{3}mO$ multiplicado pela differença entre a área inteira da esfera e a da calotte descrita por np,

differença que he a área descrita prlo arco amn, ou a da calotte que serve de base ao sector proposto.

[xlviii] 290. A área de qualquer pyramide regular avalia-se, multiplicando a metade do perimetro da base pelo apothema da pyramide.

[xlix] 278.N.B. Os apothemas das pyramides regulares circumscriptas ás pyramides conicas rectas, são lados das mesmas pyramides conicas rectas.

[l] 243. THEOREMA. *A superfície lateral de uma pyramide cônica póde ser applicada em toda extensão sobre um plano (ao que se chama desdobra-la), e é representada por um sector cujo raio é a aresta, e cujo arco é igual ao comprimento da circumferencia da base.*

[li] Escholio.
Também daqui se tira o modo de medir a superfície de qualquer esfera, que he o seguintes. Dado o diâmetro da esfera, ache-se o seu circulo maximo, segundo o ditto no Escch. 6 e multiplique-se por 4.V.g o circulo maximo da Terra consta de 3.160,031 $\frac{2}{3}$ legoas quadradas: digo, que a superfície da mesma Terra constarà de 12.640,126 $\frac{2}{3}$....

[lii] 285. PROBL. *Dadas duas spheras concêntricas, circunscrever á menor um polyedro, cujas faces não encontrem a superfice da maior.*

ANEXO

Dada à dificuldade em localizar as fontes nas quais baseamos nossa pesquisa, achamos por bem acrescentar este anexo com os locais e dicas de acesso às obras raras que utilizamos para elaborá-la.

A Biblioteca da Marinha situada à Rua Mayrink Veiga nº 28, no Centro da Cidade do Rio de Janeiro. Este estabelecimento foi o melhor dentre os que utilizamos para pesquisa por diversos fatores:

- localização central, de fácil acesso com várias opções de transporte público (trem, metrô, diversas linhas de ônibus);
- ambiente confortável para o estudo, climatizado, claro e bem organizado;
- livros bem conservados;
- pessoal treinado e solícito, podemos destacar o atendimento da bibliotecária Altair Lapa de Santana e do Sargento Walter Pimentel;
- é permitido ao leitor digitalizar a obra;
- é oferecido o serviço de xerox;
- acesso livre à parte do acervo.

Nela encontramos:

- Elementos de Euclides dos seis primeiros livros, undécimo e duodécimo. Euclides, Imprensa da Universidade de Coimbra, 1846.
- Elementos de Geometria plana e sólida, segundo a ordem de Euclides, Príncipe dos Geometras do Padre Manoel de Campos, Officina Rita-Cassiana, Lisboa Ocidental, 1735.
- Elementos de Geometria de Cristiano Benedicto Ottoni, 3ª edição, 1870.
- Elementos de Geometria de Sylvestre-François, tradução de Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, de 1824.
- Elementos de Geometria de Adrien-Marie Legendre com as addições e modificações de M. A Blanchet, de 1886.
- Autobiografia de Cristiano Benedicto Ottoni, 1870.
- Dicionário Bibliográfico Brasileiro de Augusto Vitorino Alves Sacramento Blake.

O horário de atendimento ao público é: de 2ª feira a 6ª de 08:15 h às 15:45h.

No Real Gabinete Português de Leitura, também localizado no Centro da Cidade do Rio de Janeiro, à Rua Luís de Camões nº 30, encontramos obras de nosso interesse. Pode-se consultar no horário de 9:00 h às 18:00 h, de 2ª feira a 6ª feira, mas apenas os sócios podem efetuar empréstimos, e somente obras datadas a partir de 1950. Não há serviço de digitalização ou xerox nem é permitido ao consulente digitalizar as obras.

O ambiente não é dos mais propícios à pesquisa:

- pouca luminosiade;
- não é climatizado;
- o leitor não tem acesso ao acervo.

No Real Gabinete Português de Leitura encontramos:

- Elementos de Geometria de Francisco Villela Barbosa, Marquês de Paranaguá, as edições de 1837, 1838, 1846.
- Juízo Crítico sobre o Compêndio de Geometria, de Cristiano Benedicto Ottoni, de 1845.
- Curso de Geometria de Timotheo Pereira, de 1890.
- Fundamentos da geometria de David Hilbert, da Editora Gradiva, de 1952.
- Dicionário Bibliográfico Brasileiro de Augusto Vitorino Alves Sacramento Blake.

A Biblioteca Nacional, localizada no Centro da Cidade do rio de Janeiro, à Av. Rio Branco n 219, é um dos pontos de referência para quem faz pesquisa no Rio de Janeiro. Tem um horário amplo de funcionamento de 2ª feira a 6ª feira de 9:30 h às 19:30 h e sábado de 9:30 h às 17:30h, mas quanto à consulta às obras rara o horário é limitado podendo ser feita apenas até 16:00 h de 2ª feira a 6ª feira. Outro problema que acontece om freqüência é que algumas obras que parecem na consulta ao acervo, não são localizadas.

O ambiente para pesquisa é agradável:

- boa luminosiade;
- climatizada;
- possui serviço de digitalização;
- conservação precária das obras, muitas necessitando de restauração;
- pessoal de atendimento terceirizado;
- o leitor não tem acesso a nenhma parte do acervo.

As obras que localizamos nessa bilioteca foram:

- Elementos de Geometria de Adrien-Marie Legendre, traduzida por Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, de 1809.
- Elementos de Geometria de Francisco Villela Barbosa, Maquês de Paranaguá de 1846.
- Elementos de Geometria e Trigonometria rectilínea de Cristiano Benedicto Ottoni de 1891.
- Autobiografia de Cristiano Benedicto Ottoni de 1983.
- Dicionario Bibliographico Português de Innocencio Francisco da Silva.

Também encontramos obras, nas bibliotecas da Universidade Federal do Rio de Janeiro, na Ilha doFundão, no Rio de Janeiro.

- do Instituto de Matemática, localizada no prédio do Centro Tecnológico no bloco C, sala 120; no horário das 9:00 às 21:00 h.
- Biblioteca de Obras Raras ou Antigas, localizada no prédio da ligação ABC, na sala 106, no horário das 9:00 h às 16:30h.

Na Biblioteca do IMPA (instituto de Matemática Puera e Aplicada), localizada à Rua Dona Castorina, 110 – Horto, no Rio de Janeiro, o ambiente é excelente é para pesquisa, inclusive com acesso direto ao acervo. Não possui um acervo de obras tão antigas, mas encontramos o livro Elementos de Geometria de Francisco Villela Barbosa, o Marquês de Paranaguá de 1846 e Elementos da Geoemetria de David Hilbert, traduzido para o português.