

BAILANDO NA BEIRA DO ABISMO: CONSIDERAÇÕES SOBRE A
INCOMPLETUDE DA MATEMÁTICA

Luciane de Paiva Moura

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TÉCNICAS E
EPISTEMOLOGIA

Aprovada por:

Prof. Ricardo Silva Kubrusly, Ph.D.

Prof^ª. Ângela Rocha dos Santos, D.Sc.

Prof. Luís Alfredo Vidal de Carvalho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2007

MOURA, LUCIANE DE PAIVA

Bailando na Beira do Abismo: Considerações sobre a Incompletude da Matemática [Rio de Janeiro] 2007

VIII, 210 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Historia das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2007)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. O Teorema de Gödel

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Agradecimentos

A minha eterna gratidão aos meus pais Fátima e Henrique por tudo que abdicaram para que eu pudesse sonhar sempre. Por tudo que me ensinaram, pelo exemplo de vida e luta que me deram e que resultaram numa sabedoria que eu jamais encontraria em livro nenhum.

A minha irmã Natália pela vivência sempre tão cheia de felicidade. Sua admiração, torcida e apoio foram fundamentais e essenciais não só para a elaboração dessa dissertação mas para todos os passos e por tudo que eu já construí na minha vida.

Ao meu grande professor Ricardo Kubrusly que me mostrou novos mundos, novas maneiras de pensar. Muito obrigada por dividir comigo um pouco dos seus saberes, por todo o tempo e dedicação. Tenho muito orgulho de ter podido ser sua aluna durante todo esse tempo. Além de um excelente professor e um fundamental “desorientador” tenho certeza de ter encontrado em você um amigo.

A todos os meus familiares: avôs Beto e Bira, avós Paqueta e Therezinha, tios Caio, Kátia, Márcio, Lúcia, Zu, Marcelo, Tia Foca e Mônica, primos Bia, Cele, Lelê, Leo, Edgar, Cés, Dadá, Digo, Maria Clara e Ninha muito obrigada por ter sempre em vocês a certeza do amor, o que me faz enfrentar a vida com muito mais coragem.

Aos meus grandes amigos Heitor, Débora, Bell, Bruna, Marcela tenho a certeza de ter escolhido caminhos certos por ter a alegria de fazer parte da vida de cada um de vocês.

Ao Mário por ter me feito ter um outro olhar sobre mim, pelo apoio e pela grande contribuição para meu crescimento profissional e acadêmico.

E tantos outros que escolhi para serem meus irmãos como Leo, Livia e Aline, os amigos da graduação: Felipe (Bell), Fábio, Danilinho e Cecília, aos amigos de mestrado e grandes

colaboradores Virgínia, Diego, Donizete e Maurício (obrigada pelo título), ao pessoal da diretoria da EMPF Danielle, João Miguel, Rogério, Kelly, Felipe e Fabiana obrigada pelo exemplo de profissionais que vocês são.

E a Deus que permitiu tantas coisas boas na minha vida me dando a verdadeira paz e a certeza que nunca estive só....

Enfim, essa dissertação é dedicada a todos aqueles que passaram por mim deixando um pouquinho do que tinham de melhor para dar.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

BAILANDO NA BEIRA DO ABISMO: CONSIDERAÇÕES SOBRE A
INCOMPLETUDE DA MATEMÁTICA

Luciane de Paiva Moura

Março/2007

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

Programa: Historia das Ciências e das Técnicas e Epistemologia

Esse trabalho faz um apanhado histórico do desenvolvimento da matemática. É feita uma análise das três principais escolas de pensamento da matemática: intuicionista, logicista e formalista e das crises em seus fundamentos destacando os paradoxos que surgiram na teoria dos conjuntos e que resultaram no Teorema da Incompletude demonstrado por Gödel em 1931.

Apresentamos também, como apêndice uma série de demonstrações dos principais resultados que suportam a análise aqui apresentada. Entre eles, destacamos o Teorema de Cantor, a consistência e a independência da Hipótese do Contínuo e do Axioma da Escolha, e a demonstração do próprio Teorema da Incompletude na sua versão original.

Finalizamos o trabalho estabelecendo um diálogo entre o teorema de Gödel, representado por suas conseqüências filosóficas, e o pensamento de Wittgenstein, quando algumas questões são então levantadas, tais como a natureza dos objetos matemáticos, de como a matemática funciona e uma análise detalhada da eficácia e dos limites da matemática como linguagem.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

THE EDGE OF THE HILL : CONSIDERATIONS ABOUT INCOMPLETENESS THEOREM

Luciane de Paiva Moura

March/2007

Advisor: Ricardo Silva Kubrusly

Department: History of Science Techniques and Epistemology

This work describes the development of mathematics in a historical period. It provides a general analysis on the three mathematics schools: intuitionism, logicism, formalism with an emphasis on the crisis generated in the foundations of mathematics, specially the one dealing with the paradox of set theory and its major consequence: the Incompleteness Theorem proved by Gödel in 1931.

Demonstrations of the most important results that support the proposed analysis are presented in the appendix. There we visit results such as the so called Cantor's theorem, the consistency and independence of Continuum Hypothesis and of the Axiom of Choice, and the original version of Incompleteness Theorem.

Finally, the work establishes a dialog between Gödel's theorem, represented by its philosophical consequences, and Wittgenstein's ideas, and several questions are discussed, such as "Are mathematics objects real or ideal?", "How mathematics works?", and "What are the power and the limits of mathematics as language?".

Sumário

p.

Introdução	9
Capítulo 1: As Crises nos Fundamentos da Matemática	11
1.1 O que Fazer com os Irracionais?.....	12
1.2 O 5º Postulado de Euclides.....	13
1.3 O Cálculo Infinitesimal.....	14
1.4 Paradoxo de Cantor.....	15
1.4.1 As Surpresas de Cantor.....	16
1.4.2 Os Transfinitos.....	20
1.5 A Crise e os Gregos.....	30
Capítulo 2: As Escolas do Pensamento	32
2.1 A Escola Intuicionista.....	33
2.2 A Escola Logicista.....	35
2.2.1 Lógica Clássica.....	36
2.2.2 Leibniz.....	41
2.2.3 George Boole.....	42
2.2.4 Gottlob Frege.....	43
2.2.5 Giuseppe Peano.....	49
2.2.6 Alessandro Padoa.....	51
2.2.7 Bertrand Russell.....	53
2.2.7.1 Teoria dos Tipos.....	58
2.2.7.2 O Principia Mathematica.....	61
2.2.8 Os Axiomas de Zermelo.....	63
2.3 A Escola Formalista.....	65
2.3.1 David Hilbert.....	67
Capítulo 3: Paradoxos	73

Capítulo 4: Teorema da Incompletude	78
4.1 A Revolução.....	79
4.2 O Mapeamento.....	79
4.3 O Indecidível.....	83
Capítulo 5: Algumas Idéias para Serem Discutidas	89
Conclusão	103
Galeria de Fotos	106
Apêndice	108
Teorema 1 $\sqrt{2}$ é um Número Irracional.....	108
Teorema 2 O Conjunto dos Números Racionais é Enumerável.....	109
Teorema 3 O Conjunto dos Números Reais é Não Enumerável.....	111
Teorema 4 Teorema de Cantor.....	113
Teorema 5 Consistência da Hipótese do Contínuo e do Axioma da Escolha.....	113
Teorema 6 Independência da Hipótese do Contínuo e do Axioma da Escolha.....	126
Teorema 7 Teorema da Incompletude (Gödel–1931)....	165
Teorema 8 Existência de Números Transcendentes, Não Algébricos.....	212
Teorema 9 Paradoxo de Banach-Tarski.....	212
Referências Bibliográficas	214

Introdução

Meu interesse por matemática veio desde cedo. Mesmo antes de saber o que são objetos matemáticos e nem sequer imaginar as discussões existentes acerca desses objetos, esse problema rondou meu pensamento.

Estava na 8ª série do ensino fundamental, ia assistir à aula de matemática. A professora, então, nos levou para sala de vídeo sob a justificativa de fazer com que entendêssemos para que serve estudar matemática e onde pudéssemos observar suas aplicações.

O filme a ser exibido era o Pato Donald em a Matemática. Lembro-me como se fosse hoje de alguns trechos. O filme mostrava, por exemplo, como as notas musicais podiam ser extraídas de razões matemáticas. Aquilo me causou surpresa e admiração, fiquei fascinada. Achei que o filme fosse continuar a me maravilhar. Mas em seguida apareceram pétalas, folhas, natureza em geral e uma tentativa exaustiva de tentar aprisioná-las em círculos, pentágonos, hexágonos, etc, afirmando em seguida que era muito fácil encontrar formas geométricas na natureza.

E como seria confortável se isso fosse verdade. Se a frase “a matemática está na realidade” fosse aceita por todos os alunos, de certo modo, os professores, da tão peculiar disciplina, estariam, de uma vez por todas, salvos do embaraço ao serem indagados “para que serve estudar matemática?”. Porém para mim soou artificial. Fiquei incomodada. Ao mesmo tempo em que aquele filme me maravilhou ao me mostrar que diferentes razões originavam diferentes sons, não conseguia ver e me convencer de modo algum que pentágonos, quadrados e círculos estavam espalhados pela natureza.

Desde então, tento achar outros motivos para a existência da matemática. Talvez mesmo sem a plena consciência, devo ter feito matemática para saciar essa curiosidade, para descobrir onde

estão seus objetos já que na natureza, pelo menos para mim, ficou claro que não estavam.

Esse trabalho vem como uma resposta para isso. Consta de uma pesquisa histórica sobre o desenvolvimento da matemática e uma análise das crises em seus fundamentos. A partir daí, é feita uma observação das suas escolas de pensamento mostrando a escola intuicionista, o desenvolvimento da lógica clássica pelos logicistas e a construção do programa de Hilbert pelos formalistas até finalmente o aparecimento do Teorema de Gödel.

Com essa base, algumas questões são postas em discussão acerca da natureza dos objetos matemáticos, de como a matemática funciona, e se é possível que ela seja a linguagem que descreve a natureza.

No apêndice estão disponíveis algumas relevantes demonstrações que permeiam essas discussões como do teorema de Cantor, a consistência e a independência da hipótese do contínuo e do axioma da escolha, inclusive a demonstração do próprio teorema da incompletude.

É um mergulho nos fundamentos matemáticos levantando as discussões que há muito aflige os nomes responsáveis pela tentativa de construir a matemática sob a base mais sólida possível.

Capítulo 1 As Crises nos Fundamentos da Matemática

As Lições de R. Q.

Manoel de Barros

Aprendi com Rômulo Quiroga (um pintor boliviano):

A expressão reta não sonha.

Não use o traço acostumado

A força de um artista vem de suas derrotas.

**Só a alma atormentada pode trazer para a voz um
formato de pássaro.**

A arte não tem pensa:

O olho vê, a lembrança revê, e a imaginação transvê.

Isto seja:

Deus deu a forma. Os artistas desformam.

É preciso desformar o mundo:

Tirar da natureza as naturalidades.

Fazer cavalo verde, por exemplo.

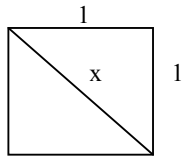
Fazer noiva camponesa voar – como em Chagall.

**Agora é só puxar o alarme do silêncio que saio por
aí a desformar. (...)**

1.1 O que Fazer com os Irracionais?

Um estudo sobre a história da matemática que vai desde a Grécia antiga até os dias de hoje, revela que os fundamentos da matemática passaram por grandes crises.

A primeira começou no século V a.C. e nada semelhante havia ocorrido anteriormente. Tudo começou pelo inesperado surgimento dos números irracionais¹ precipitada pela utilização do teorema de Pitágoras no cálculo da diagonal do quadrado de lado 1. Como mostra a figura abaixo.



Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Acredita-se que os pitagóricos já conheciam a impossibilidade de se medir a diagonal de um quadrado em relação a seu lado, através do processo da diminuição recíproca. Tal descoberta possivelmente contribuiu para o declínio da escola pitagórica, e afirmou a oposição entre os conceitos de extensão contínua (megethos) e de número (arithmos). A resolução dessa primeira crise não foi rápida nem fácil de se encontrar, pois por muito tempo, a $\sqrt{2}$ e todos os irracionais descobertos eram incômodos que deveriam ser entendidos pelos matemáticos.

¹ A demonstração que $\sqrt{2}$ é um número irracional pode ser vista no Teorema 1 do Apêndice.

Esta primeira crise começou a ser entendida e solucionada por volta de 370 a.C. por Eudoxus (408–305 a.C) que incorporou os irracionais aos números. Podemos encontrar os seus trabalhos no 5º livro dos *Elementos* de Euclides (330–260 a.C). A teoria coincide essencialmente com a moderna exposição sobre número real dada por Richard Dedekind (1831–1916) em 1872.

1.2 O 5º Postulado de Euclides

Uma outra crise na matemática está relacionada ao 5º Postulado de Euclides que diz: Dado um ponto P fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta s paralela à reta r dada. O 5º Postulado foi desafiador durante séculos e inúmeros matemáticos tentaram deduzi-lo a partir dos demais quatro axiomas e assim demonstrá-lo como um teorema. Na verdade, a existência da reta paralela era e é, facilmente, demonstrada com o restante dos postulados; a unicidade das paralelas é que necessitava de ser postulada. É um indecidível, se considerássemos apenas os quatro primeiros postulados de Euclides.

A solução dessa crise demorou cerca de dois mil anos para aparecer e somente em 1829 o matemático russo Nikolai Lobachevski (1793-1856) publicou *Sobre os Princípios da Geometria* onde apresentava uma nova geometria, baseada em um novo postulado que viria a substituir o 5º e que dizia: Dado um ponto P fora de uma reta r pode-se traçar mais de uma reta paralela à reta r dada. Com essa nova geometria, uma nova concepção de espaço era possível, desmistificando assim a atribuição kantiana de verdade absoluta feita à geometria euclideana.

A publicação do trabalho de Lobachevski desengaveta vários outros, na mesma direção, cujas idéias estavam represadas pela crença kantiana de um único modelo possível para o espaço. O mundo estava maduro para uma geometria não-euclidiana.

Documentos comprovam que Carl Friedrich Gauss (1777-1855) já pensava sobre uma nova geometria antes mesmo da publicação de Lobachevski. A publicação em 1831 do trabalho *Ciência Absoluta do Espaço* do matemático húngaro Janos Bolyai (1802-1860) que re-inventa a mesma geometria não-euclideana independentemente de Lobachevski, demonstra, de outra maneira que as idéias de novas geometrias fervilhavam no início do século XIX.

1.3 O Cálculo Infinitesimal

Uma outra importante crise nos fundamentos matemáticos veio imediatamente após as importantes contribuições feitas por Leibniz e Newton ao cálculo no final do século XVII.

Na verdade, o cálculo já era desenvolvido desde a Grécia antiga. No início do século XVII, mesmo antes de se ter uma concepção de cálculo, já havia um grande interesse dos matemáticos e engenhosas estratégias para encontrar área, volume, máximo, mínimo e construir tangentes por métodos, na maioria das vezes, algébricos.

As importantes contribuições feitas por Leibniz e Newton (1643–1727) tais como: reconhecimento da relação inversa entre derivada e integral, sistematização das regras de derivação, tornaram o cálculo uma ferramenta tão poderosa e com tanta aplicabilidade que seus sucessores falharam ao considerar suficientemente sólida a base no qual essa matéria foi fundada e ao invés de demonstrações justificarem resultados, resultados justificavam demonstrações. Com o passar do tempo, contradições e paradoxos foram surgindo e a análise foi sendo construída sem alicerce, tornando-se evidente que uma séria crise nos fundamentos da matemática estava instalando-se.

Finalmente, no início do século XIX, Cauchy (1789–1857) deu o primeiro passo para a resolução da crise, tornando o conceito de limite o conceito fundamental do cálculo.

Com a subsequente aritmetização da análise por Weirstrass (1815–1897) e seus seguidores essa crise nos fundamentos matemáticos foi vencida e toda estrutura matemática foi redimida e solidificada sobre uma base inquestionável.

1.4 Paradoxo de Cantor

A crise, que se materializou repentinamente em 1897 e ainda não foi totalmente compreendida, foi trazida pela descoberta de paradoxos e antinomias na teoria geral de conjuntos de Cantor.

No final do século XIX, o infinito que até então era místico, veio a ser muito bem trabalhado quando Georg Cantor (1845–1918) decidiu ir contra a intuição, correspondendo biunivucamente conjuntos infinitos e aceitando infinitos completos na matemática. Mais tarde, Dedekind definiu classe infinita como aquela que pode ser colocada em correspondência biunívua com um subconjunto próprio de si mesma, passando a explorar o infinito atual. Até então, Aristóteles havia declarado que não existia nada que fosse um infinito atual, realizado. Para ele, não existia infinito atual pois o mundo estaria limitado pela abóbada celeste (a esfera de estrelas fixas), mas existia o infinito por divisão, o potencial².

Cantor elabora sua teoria dos conjuntos partindo de uma definição de conjunto: “Entendemos por “conjunto” qualquer coleção M de objetos m bem definidos e distintos da nossa percepção ou do nosso pensamento (chamaremos m elementos de M)”³.

² Podemos entender melhor a diferenciação entre infinito potencial e atual nos seguintes exemplos: Ao contarmos os números 0, 1, 2, 3,... obteremos desta maneira o infinito potencial, entretanto, ao considerarmos o conjunto dos números naturais teremos o infinito em ato.

³ "By a 'set' we understand any collection M of definite well-distinguished objects m of our perception or our thought (which we call elements of M) into a whole". MOSCHOVAKIS, Yiannis N. Notes on Set Theory. Springer, 1994.

Essa definição rompe com a restrição aristotélica sobre a forma de ser das infinitudes, referindo-se ao conceito de potência. O conceito de potência em Cantor generaliza o conceito de número, como correspondência enumeradora em Aristóteles, onde a enumeração finita é substituída por uma função biunívoca abstrata entre conjuntos, finitos ou não.

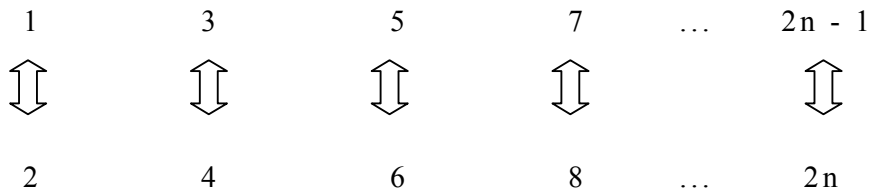
Esta definição de potência para conjuntos revela a Cantor uma notável descoberta. Entretanto, as demonstrações de teoremas que a utilizam introduzem inconsistências na teoria dos conjuntos, conhecidas como as antinomias (ou paradoxos) de Russell, de Cantor, de Burali-Forti (1861–1931), dentre outras, como veremos adiante. Estas descobertas puseram em risco todo o esforço já empenhado para estabelecer a solidez dos fundamentos da matemática moderna e seu avanço.

Veremos como reagiram matemáticos e filósofos envolvidos neste esforço, e as conseqüências de suas reações. Contudo, convém examinar alguns aspectos da teoria de Cantor, para melhor apreciarmos a importância do problema do infinito nos fundamentos da matemática.

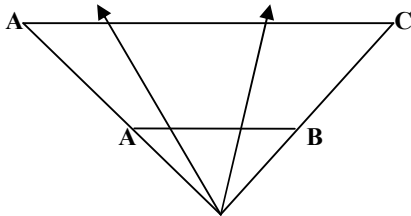
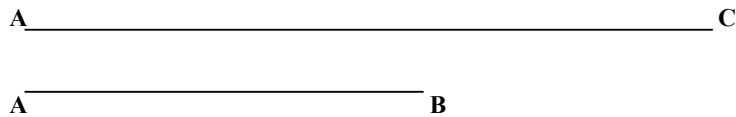
1.4.1 As Surpresas de Cantor

O método básico de contagem extremamente antigo, é correlacionar dois conjuntos de objetos, ou seja, estabelecer uma relação biunívoca.

Quando este método é aplicado a conjuntos infinitos acaba nos trazendo resultados inesperados. Por exemplo, considerando o conjunto dos números naturais, intuitivamente, sabemos que existem a mesma quantidade de números pares e ímpares. Logo, podemos estabelecer uma relação biunívoca entre eles.



Mas, e se agora tivermos segmento de reta \overline{AB} e um outro \overline{AC} onde $\overline{AB} < \overline{AC}$. Será que podemos estabelecer uma relação biunívua, como a anterior, entre eles?



Intuitivamente, não seria possível pois ficaria claro que existem mais pontos em \overline{AC} do que em \overline{AB} . Mas é possível estabelecer uma relação biunívua entre seus pontos (como mostra figura ao lado) e portanto \overline{AB} possui o mesmo número de pontos de \overline{AC} .

Cantor começa, então, usar a correspondência biunívua para comparar conjuntos infinitos. O conjunto dos números racionais, por exemplo, é um conjunto interessante para ser analisado, pois possui uma propriedade que os números inteiros e naturais não possuem. Entre quaisquer dois números racionais distintos, sempre existe um outro racional e portanto uma infinidade deles.

Por exemplo, entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{2}$ você pode encontrar $\frac{7}{20}$ (média aritmética entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{2}$). Entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{7}{20}$ você pode encontrar $\frac{11}{40}$ (média aritmética entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{7}{20}$). Podemos tirar a média aritmética quantas vezes for preciso. Porém, se analisarmos os números

naturais percebemos que entre 2 e 3 não há um outro número natural.

Logo, aparentemente, podemos concluir que existem mais números racionais que números naturais e que não é possível contá-los, ou seja, os números racionais são não enumeráveis pois não podem ser postos em correspondência biunívoca com os naturais. Entretanto não é isso que acontece. Cantor consegue rearranjar os irracionais de modo a tornar possível estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais e descobrindo assim, que eles são enumeráveis.

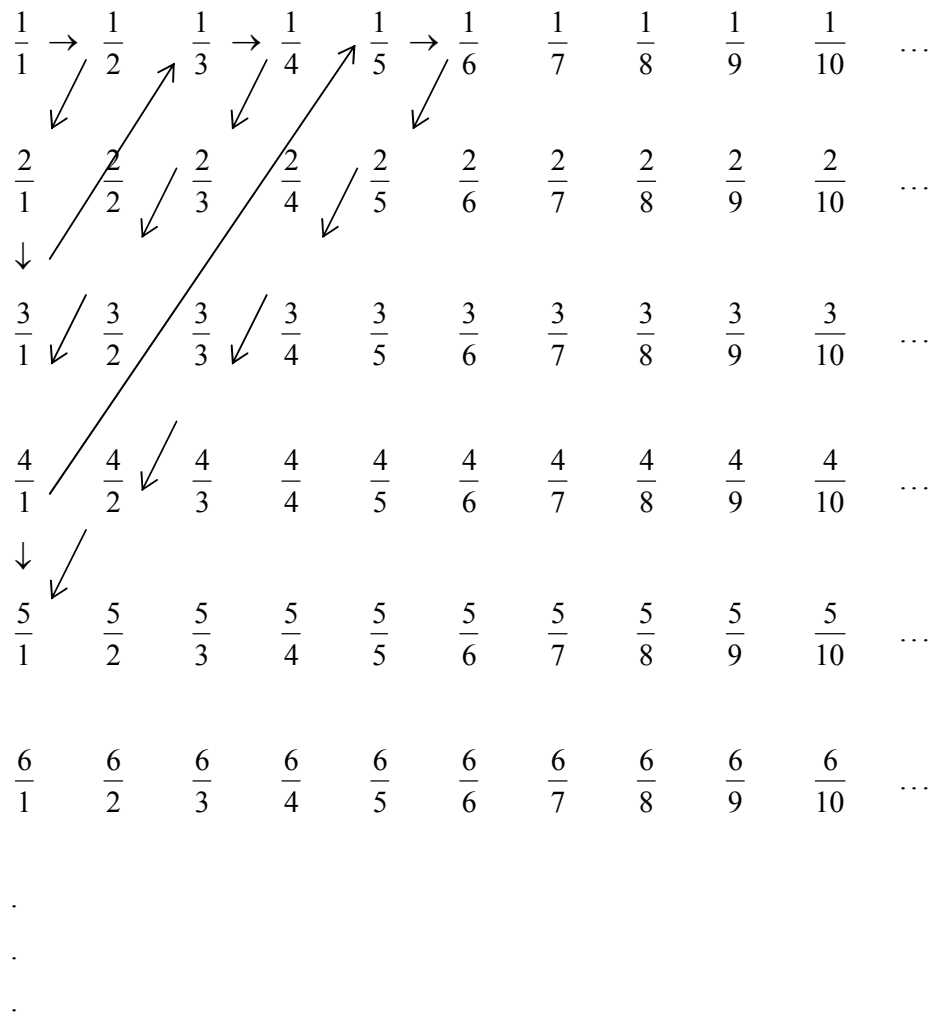
Cantor organiza sua estratégia do seguinte modo: primeiramente, arruma na primeira linha os números racionais de numerador 1, na segunda linha os números racionais de numerador 2 e assim sucessivamente⁴.

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$...	$\frac{1}{n}$...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$...	$\frac{2}{n}$...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$...	$\frac{3}{n}$...
.					
.					
.					
$\frac{n}{1}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{3}$...	$\frac{n}{n}$...
.					
.					
.					

⁴ Podemos estender a demonstração acima para números negativos.

É verdade que essa representação contém números equivalentes como, por exemplo, $\frac{1}{1}$ e $\frac{2}{2}$. Mas essas repetições não atrapalham, pois são facilmente eliminadas.

Assim, a correspondência entre os racionais e os naturais seria feita por meio do esquema:



Como vimos, os números $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ equivalentes a números já utilizados não atrapalham o processo. Assim, por exemplo, a correspondência biunívoca entre 17 racionais e os primeiros 17 números naturais está representada abaixo. Essa representação, claramente pode se estender indefinidamente

mostrando a correspondência biunívua entre os números racionais e os naturais⁵.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	
10	11	12	13	14	15	16	17		
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	...	
$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{1}$		

1.4.2 Os Transfinitos

Já que todos os conjuntos finitos são contáveis, podemos dar a cada um deles um número que represente a sua cardinalidade⁶.

Mas é claro que vamos querer ampliar essa noção para as classes infinitas contáveis. Assim, foi criado o primeiro dos números transfinitos para descrever a cardinalidade das classes infinitas contáveis. A cardinalidade de uma classe enumeravelmente infinita foi chamada por Cantor de \aleph_0 ⁷.

Dessa forma, começou-se a achar que todos os conjuntos infinitos poderiam ser postos em correspondência. Porém, ao trabalhar com os números reais (conjunto dos números racionais união conjunto dos números irracionais) ao invés de descobrir uma prova de que eles poderiam ser postos em correspondência biunívua com os naturais, Cantor descobriu justamente o oposto,

⁵ Cantor também faz essa correspondência entre naturais e racionais, mostrando que os racionais são enumeráveis de uma outra maneira como podemos verificar no Teorema 2 do Apêndice.

⁶ Cardinalidade do conjunto é o “tamanho” do conjunto, ou seja, o número de elementos que ele possui.

⁷ \aleph_0 lê-se: álefe-zero. Álefe é a primeira letra do alfabeto hebraico.

uma prova de que eles não poderiam ser postos em correspondência. Assim, uma de suas maiores vitórias foi conseguir mostrar que há classes com uma cardinalidade maior que \aleph_0 , como por exemplo, a classe dos números reais.

A prova é feita por contradição, conhecida como método da diagonal de Cantor.

Agora, faremos uma descrição de como Cantor estrutura sua prova: podemos representar os números reais em uma reta e também por decimais que possuam contáveis infinitos dígitos.

No método de Cantor, os decimais que possuem dígitos finitos, racionais que não são dízimas periódicas, são representados da seguinte forma: por exemplo 0,333 tornar-se-ia 0,332999... . Dessa forma, só existiria uma possível representação decimal para cada número real.

Observe, pelo exemplo abaixo, que esta escrita infinita, é válida.

Seja:

$$0,3329999\dots = a$$

Podemos obter:

$$(1) 1000 \times 0,332999\dots = 1.000a$$

$$(2) 10000 \times 0,332999\dots = 10.000a$$

Efetuando os cálculos e em seguida subtraindo (2) de (1):

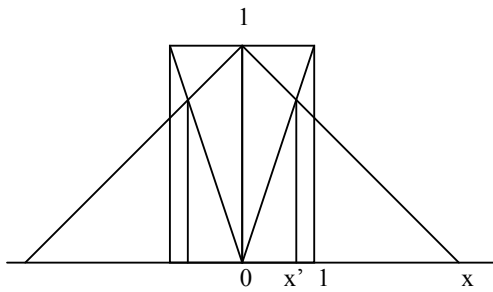
$$\begin{array}{r} 3.329,999\dots = 10.000a \\ - \underline{332,999\dots} = \underline{1.000a} \\ 2.997 = 9.000a \end{array}$$

Então temos que: $a = 0,333$

Assim, se a , por definição, é igual a 0,3329999... e também é igual a 0,333. Logo, $0,333 = 0,3329999\dots$.

Logo, teremos 0,999... como o decimal representativo de 1.

Para simplificar a apresentação da prova de Cantor estudaremos apenas o intervalo $[0,1]$. Esta simplificação pode ser feita sem problemas, já que o qualquer intervalo fechado é equivalente aos reais, como mostra a figura



Nesta figura, vemos que o número x que está fora do intervalo $[0,1]$ é projetado dentro deste mesmo intervalo em x' .

Agora, vamos admitir que todos os números reais de 0 a 0,999... possuam correspondência biunívoca com os números naturais.

Para exemplificar, considere uma seqüência (escolhida ao acaso) com 10 decimais.

0,9278457195
 0,2668655037
 0,0058858362
 0,0378452563
 0,3034635186
 0,3112567381
 0,4835002635
 0,1158243848
 0,4736784747
 0,5538415868

Vamos criar um novo decimal modificando o primeiro dígito do primeiro decimal da seqüência, o segundo dígito do segundo decimal dado e assim em diante.

0,8547551737

Esse o novo número criado, não está na lista original porque é diferente do primeiro número no primeiro dígito, do segundo número no segundo dígito e assim por diante.

Agora, vamos considerar uma representação decimal infinita contável. Consideremos a lista que contenha todos os reais de 0 a 0,999... .

$0,\beta_{11}\beta_{12}\beta_{13} \dots$

$0,\beta_{21}\beta_{22}\beta_{23} \dots$

$0,\beta_{31}\beta_{32}\beta_{33} \dots$

.

.

.

$0,\beta_{n1}\beta_{n2}\beta_{n3} \dots$

.

.

.

Procederemos da mesma forma. Mudaremos o primeiro dígito do primeiro número, o segundo dígito do segundo número, ..., o n-ésimo dígito do n-ésimo número e assim sucessivamente. O resultado então, será um novo decimal que não está na lista.

Mas a lista devia possuir todos os números reais de 0 a 0,999... . Logo, chegamos a uma contradição. Então, os números reais não podem ser postos em uma lista, o que significa em última análise que não podem ser postos em correspondência biunívoca com os números naturais⁸. Assim, descobrimos dois tipos de infinitos. Os infinitos enumeráveis, ou contáveis, como o conjunto dos números naturais e os não enumeráveis, como o conjunto dos números reais.

Cantor chamou a cardinalidade do conjunto dos números reais de contínuo (contínuo é uma outra maneira de se referir ao

⁸ Essa demonstração formal feita por Cantor pode ser encontrada no Teorema 3 do Apêndice.

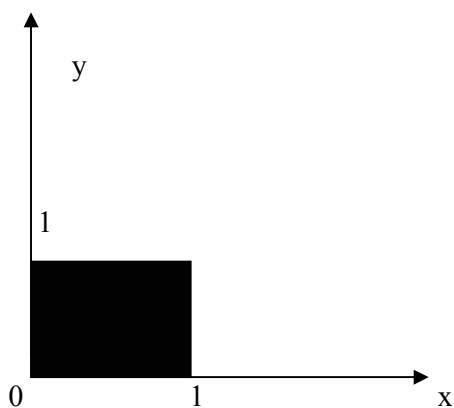
conjunto dos pontos de uma reta) e designou um novo cardinal transfinito para a classe não contável, não enumerável, dos números reais.

Referindo-se a cardinalidade do contínuo reconheceu que ela se aplica tanto às classes dos números reais como à dos pontos em um segmento linear. Se partimos da noção geométrica de um ponto, em qualquer segmento linear há um número infinito de pontos, ou seja entre quaisquer dois pontos há uma infinidade de outros. Formalizando: os pontos são densos em todos os lugares constituindo uma das características essenciais do contínuo⁹.

Logo, ambas as classes tanto de números reais como de pontos em um segmento linear são densas e possuem a mesma cardinalidade, C . Ou seja, é possível fazer uma correspondência um a um entre os números reais e os pontos de um segmento linear.

Já que o contínuo é o número de pontos de uma reta, se considerarmos os números de pontos do plano. Será que encontraremos um outro transfinito?

Novamente, para simplificar a representação, vamos considerar apenas uma parte do plano. Esse argumento pode ser generalizado para todo o plano.



Agora, vamos considerar um ponto qualquer do plano $P=(x,y)$. Para estabelecer uma correspondência biunívoca entre o

⁹ Uma outra característica importante para a continuidade é a do conjunto ser conecto.

ponto de um plano e o ponto de uma reta precisaremos de uma estratégia que possa converter um par (x,y) em um único número e vice e versa. Vamos novamente exemplificar, seja $x = 0,2568441\dots$ e $y = 0,5254718\dots$ para transformá-lo em um único decimal é só escolhermos como primeiro dígito, o primeiro dígito do primeiro decimal (x), como segundo dígito, o primeiro dígito do segundo decimal (y), como terceiro dígito, o segundo dígito do primeiro decimal (x), como quarto dígito, o segundo dígito do segundo decimal (y), e assim sucessivamente. O resultado seria $0,25526584474118\dots$. O resultado é um novo decimal entre 0 e $0,999\dots$. Usando essa regra de correspondência cada ponto da reta correspondente a um único ponto do plano e vice e versa, o que é suficiente para estabelecer que os dois conjuntos (reta e plano) possuem a mesma cardinalidade.

Mais ainda, se considerarmos as coordenadas em três dimensões (x, y, z) o mesmo método pode ser utilizado para mostrar que o número de pontos em um segmento de reta é o mesmo de todo espaço (matemático), ou seja, esses infinitos possuem a mesma cardinalidade.

Até agora, só vimos apenas dois tipos de infinito. Mas Cantor não parou por aí, achando infinitos de cardinalidades diferentes da cardinalidade do infinito enumerável e da cardinalidade do contínuo. Ele verificou que o conjunto potência dos naturais é igual ao contínuo, $2^{\aleph_0} = C$. Do mesmo modo o conjunto potência do contínuo C , 2^C , faz surgir um novo transfinito maior do que C . Assim, como 2^C gera um transfinito maior que 2^C . Existindo dessa maneira uma seqüência infinita de transfinitos.

Cantor também desenvolveu uma teoria para numerais ordinais infinitos.

Números ordinais são baseados no conceito de tipos de ordem. Se dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade, então eles podem ser correlacionados um a um. Se a correlação pode ser

feita de um modo em que a ordem de cada conjunto permaneça a mesma, então os conjuntos possuem o mesmo tipo de ordem. Todos os conjuntos finitos que possuam a mesma cardinalidade possuem o mesmo tipo de ordem.

Como cada conjunto finito de uma dada cardinalidade tem o mesmo tipo de ordem, o número total de tipos de ordem dos conjuntos finitos é \aleph_0 que representa a cardinalidade do conjunto dos números naturais.

Cantor mostrou que existem infinitas maneiras de ordenar um conjunto infinito enumerável e que esse conjunto infinito tem cardinalidade diferente de \aleph_0 , que pode ser chamado de $\aleph_1 = C$. Essa teoria de ordinalidade infinita continua gerando \aleph_2, \aleph_3 , etc, desenvolvendo infinitos cada vez maiores.

A partir daí, Cantor desenvolveu a hipótese do contínuo, essa hipótese estabelece que entre o \aleph_0 (cardinalidade dos naturais) e o \aleph_1 (cardinalidade dos reais) não existe outro transfinito, ou seja, não há um conjunto de cardinalidade intermediária ao dos números naturais e reais. Cantor nunca conseguiu provar sua hipótese, o problema só foi resolvido em 1963 por Cohen e o resultado foi surpreendente. Na verdade, a hipótese do contínuo é um dos indecidíveis existentes na matemática¹⁰.

Mais tarde, Cantor demonstrou seu teorema cuja idéia serviu como embrião para que fossem gerados paradoxos na teoria dos conjuntos.

Vamos então analisar o teorema de Cantor¹¹ que diz:

¹⁰ Essa demonstração pode ser vista no Teorema 6 do Apêndice.

¹¹ A demonstração feita por Cantor desse teorema pode ser vista no Teorema 4 do Apêndice.

Dado um conjunto A , o conjunto das partes de um conjunto $P(A)$ não pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto A .

Vamos entender melhor como Cantor demonstra, por absurdo, esse teorema.

Seja um conjunto A infinito, já que o resultado é trivial para conjuntos finitos. Vamos supor que A possa ser posto em correspondência biunívoca com $P(A)$.

Então, criaremos uma lista tal que para cada elemento de A terei um subconjunto a ele associado. Deste modo:

Elementos de A	Conjunto das Partes de A
a	$\{\dots\}_a$
b	$\{\dots\}_b$
c	$\{\dots\}_c$
.	
.	
.	

Sabemos que entre os subconjuntos de A está o conjunto vazio e o próprio conjunto A .

De posse dessa lista teremos duas e somente duas possibilidades¹².

Ou o elemento de A , a , pertence ao conjunto das partes de A $\{\dots\}_a$ que está sendo correspondido ou não pertence.

Sabemos que estas duas situações irão ocorrer pelo menos uma vez. Isto acontecerá porque o elemento que está sendo correspondido ao conjunto vazio, com certeza não pertence a ele e o elemento que está sendo correspondido com o próprio conjunto A com certeza pertence a ele.

¹² Pela lógica clássica, uma terceira possibilidade é impedida pelo princípio do terceiro excluído e da não contradição.

Agora, chamaremos de B o conjunto que possui como elementos, aqueles que não pertencem ao conjunto que se relacionam na lista acima. Logo, B está contido em A . Também podemos afirmar que B é um subconjunto próprio e possui pelo menos um elemento. Assim B pertence ao conjunto $P(A)$.

Como B é uma das partes de A , então, B está na lista feita anteriormente. Logo, existe um elemento b que está em correspondência com B .

Então, será que b pertence a B ?

Se b pertence a B , então, b não pertence a B pois B é o conjunto de todos os elementos que não pertencem a B .

E se b não pertence a B , b pertence a B . Mas b não pode pertencer e não pertencer a B ao mesmo tempo pois viola o princípio da não contradição.

Assim, como chegamos a um absurdo podemos concluir que o conjunto das partes de A não pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto A .

Partindo dessa idéia foi mostrado que a teoria cantoniana de ordinalidade continha um paradoxo conhecido como paradoxo de Burali-Forti. Cantor encontrou um outro paradoxo bem similar ao paradoxo de Burali-Forti, conhecido como paradoxo de Cantor.

Em 1897, o matemático italiano Burali-Forti foi o primeiro a publicar um paradoxo¹³ da teoria dos conjuntos. A essência deste paradoxo pode ser encontrada, por uma descrição não técnica de um paradoxo muito similar descoberto por Cantor dois anos depois. Em sua teoria dos conjuntos, Cantor teve sucesso ao provar que dado qualquer transfinito sempre existe um transfinito maior, ou seja, que o conjunto dos números transfinitos é infinito.

Agora, vamos considerar o conjunto no qual os membros são todos os conjuntos possíveis. Assim como em todo conjunto infinito, Cantor associa um transfinito a sua cardinalidade. Certamente, não há conjunto que possua mais elementos que o

¹³ Este paradoxo está enunciado na seção 2.2.7.

conjunto de todos os conjuntos. Logo, esse seria o maior transfinito possível o que geraria um absurdo. Pois como já vimos, Cantor mostrou que dado qualquer transfinito sempre existe um transfinito maior.

Como podemos perceber, os paradoxos de Burali-Forti e Cantor envolviam resultados da teoria dos conjuntos. Entretanto, Bertrand Russell descobriu em 1902 um paradoxo que não dependia de nada mais que o próprio conceito de conjunto. Antes de descrever o paradoxo de Russell, precisamos ter bem claro que conjuntos podem ser membros de si mesmo ou não. Vejamos alguns exemplos: o conjunto de todas as idéias abstratas é uma idéia abstrata, porém o conjunto de todos os homens não é um homem. Assim como, o conjunto de todos os conjuntos é um conjunto e o conjunto de todas as estrelas não é uma estrela.

Daí surge então a questão de Russell: Vamos representar o conjunto de todos os conjuntos que são membros de si mesmo por M , e o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmo de N . Agora, fica a pergunta: N é ou não membro de si mesmo? Se N for membro de si mesmo, então N é membro de M e não é de N , logo N não é membro de si mesmo. Por outro lado, se N não é membro de si mesmo, então N é membro de N e não é de M , concluindo N é membro de si mesmo. Como vemos, nos dois casos existem antinomias.

Várias tentativas foram feitas para tentar elucidar os paradoxos da teoria dos conjuntos. A descoberta de problemas na lógica e paradoxos na teoria irrestrita dos conjuntos trouxe à tona as investigações sobre os fundamentos da lógica.

São muito intrigantes as sugestões sobre qual caminho seguir para fugir das dificuldades dos paradoxos. Elas trazem a possibilidade do uso do terceiro valor lógico. Assim, por exemplo, no paradoxo de Russell onde temos “ N é um membro de si mesmo” essa afirmação poderia ser verdadeira e/ou falsa. A

existência de uma terceira possibilidade poderia ajudar a salvar a situação, mas não sabemos a que preço.

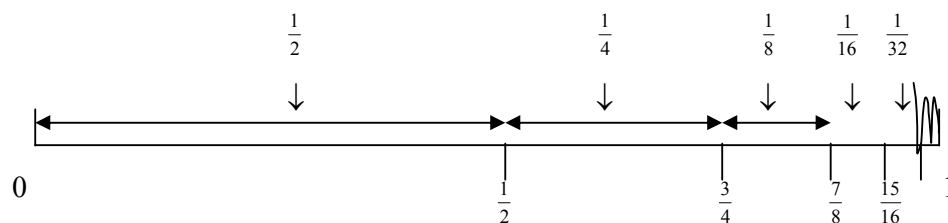
1.5 A Crise e os Gregos

Como vimos, os fundamentos matemáticos sempre trazem questões e inquietações em diversas épocas. Para que possamos entender melhor essas crises descritas acima é necessário partirmos de onde surgem.

Os problemas do infinito desafiaram a mente humana e ativaram sua imaginação como nenhum outro na história do pensamento.

Já no primeiro encontro com o infinito, além do surgimento do irracional, a matemática e a filosofia foram conduzidas a paradoxos. Os paradoxos com infinito começaram a surgir na antigüidade com Zenão de Eléia.

Resumidamente, o paradoxo de Zenão diz que em uma corrida entre Aquiles e a tartaruga, onde esta sairia na frente, Aquiles nunca conseguiria alcançá-la, pois apesar da tartaruga ser mais lenta, ela já havia partido na frente. Então, quando Aquiles chegasse a cada ponto da corrida a tartaruga que já estivera ali, já haveria partido. Ou seja, seria impossível Aquiles ultrapassar a tartaruga. Equivalentemente, se pensarmos numa flecha que percorre uma distância para atingir um alvo, notaremos que é impossível cobrir a distância dada, pois a primeira metade da distância deve ser atravessada, depois a metade da distância restante, depois a metade da que falta e assim por diante. Sempre ficará faltando uma distância a ser percorrida.



Logo, seguindo esse raciocínio, podemos concluir, assim como Zenão concluiu, baseado nestes dois paradoxos que o movimento é impossível.

Os gregos foram, pelo testemunho literário, não só pioneiros em tratar processos convergentes ilimitados por meios matemáticos, como visto na dicotomia descrita por Zenão de Eléia, mas também no emprego de demonstrações para suas proposições matemáticas, começando assim, o processo de desenvolvimento da lógica iniciada por Aristóteles, que seria um meio pela qual a matemática poderia se libertar das figuras geométrica e das limitações dos números, e permitir o desenvolvimento da capacidade abstrata da razão humana.

Capítulo 2 As Escolas do Pensamento

A Idéia

Augusto dos Anjos

De onde ela vem?! De que matéria bruta
Vem essa luz que sobre as nebulosas
Cai de incógnitas criptas misteriosas
Como as estalactites duma gruta?!
Vem da psicogenética e alta luta
Do feixe de moléculas nervosas,
Que, em desintegrações maravilhosas,
Delibera, e depois, quer e executa!

Vem do encéfalo absconso que a constringe,
Chega em seguida às cordas do laringe,
Tísica, tênue, mínima, raquítica ...

Quebra a força centrípeta que a amarra,
Mas, de repente, e quase morta, esbarra
No mulambo da língua paralítica.

Atualmente, existem três filosofias, ou escolas do pensamento, preocupadas com os fundamentos matemáticos chamadas de escolas logicista, intuicionista e formalista.

Das três principais filosofias matemáticas, cada uma possui um corpo de literatura associado altamente desenvolvido. Em relação a isso temos Russell e Whitehead (1861–1947) os principais expositores da escola logicista, a escola intuicionista liderada por Brouwer e a escola formalista desenvolvida principalmente por Hilbert.

Possivelmente existem outras filosofias matemáticas além dessas três. Filosofias independentes e filosofias que são constituídas por partes dessas três principais, porém nenhuma delas com relevância suficiente para serem destacadas.

2.1 A Escola Intuicionista

A tese intuicionista diz que a matemática é constituída somente por métodos finitos construídos intuitivamente por seqüências de números naturais.

A partir dessa base intuicionista de seqüência de números naturais, qualquer objetivo matemático deve ser construído puramente de maneira construtiva, utilizando um número finito de passos ou de operações.

A escola intuicionista foi originada por volta de 1908 com o matemático holandês L. E. J. Brouwer (1881–1966), apesar de alguns considerarem que as idéias intuitivas surgiram antes com Kronecker (1823–1891) em 1880 e Poincaré (1854–1912) por volta de 1902.

Com o passar do tempo, a escola teve seguidores de renome e exerceu uma enorme influência em todo pensamento sobre os fundamentos matemáticos.

Algumas das conseqüências da tese intuicionista são um pouco revolucionárias. Para os intuicionistas, algo cuja existência

deve ser provada precisa ser construtível em um número finito de passos, não é suficiente mostrar que a não-existência de algo induz a uma contradição. Isto significa que muitas provas de existência encontradas atualmente na matemática, não são aceitas pelos intuicionistas.

Um importante exemplo da insistência intuicionista na construção de procedimentos está na teoria dos conjuntos. Para os intuicionistas, um conjunto não pode ser visto como uma coleção já pronta, precisa ser considerado como uma lei no qual os elementos do conjunto podem ser construídos passo a passo. Esse conceito de conjunto não permite a possibilidade da existência de um conjunto contraditório como o conjunto de todos os conjuntos.

Para os intuicionistas, a lei do terceiro excluído pode ser utilizada em conjuntos finitos, porém, não pode ser utilizada em conjuntos infinitos, pois os resultados levam a antagonismos. Brouwer argumenta que a lógica, hoje denominada clássica e tida como originada em Aristóteles, foi na verdade abstraída da matemática dos conjuntos finitos, que é anterior a Aristóteles. Os matemáticos, então, tendo esquecido a verdadeira origem da lógica, estariam aplicando-a à matemática dos conjuntos infinitos.

Na lógica clássica, a lei do terceiro excluído nos diz que uma afirmação P num sistema lógico formal é verdadeira ou falsa¹⁴, não podendo ser nem falsa nem verdadeira. Para evitar que uma proposição seja paradoxal, isto é, falsa e verdadeira, temos o princípio da não contradição que proíbe a convivência do falso com o verdadeiro. Os intuicionistas negam a lei do terceiro excluído e sustentam que uma proposição só pode ser considerada verdadeira ou falsa quando há algum método de apurar isso.

¹⁴ O “ou” lógico, como sabemos, é equivalente ao e/ou da linguagem falada, o que este princípio proíbe é uma terceira opção.

Em 1980, A. Heyting (1898–1990) foi bem sucedido no desenvolvimento do simbolismo lógico intuitivo. Logo em seguida, matemáticos intuicionistas produziram sua própria lógica. No programa intuicionista, a lógica matemática é quase sempre irrelevante e é meramente usado em expressão ou comunicação.

Para Brouwer, os paradoxos originam-se da introdução de objetos ideais na matemática. Se toda matemática puder ser reconstruída nos moldes intuicionistas, teríamos uma resolução para a questão dos paradoxos (além da que iremos estudar mais adiante proposta por Gödel). Os intuicionistas foram bem sucedidos em reconstruir uma boa parte da matemática atual como a teoria dos conjuntos, porém ainda resta uma grande parte.

A matemática intuicionista foi posta de lado por ser considerada menos poderosa que a matemática clássica. Essa situação, porém, poderá se modificar no futuro, pois ainda existe possibilidade da reconstrução intuicionista da matemática clássica ser uma alternativa diferente e bem sucedida.

2.2 A Escola Logicista

A tese logicista diz que a matemática é um ramo da lógica. Muito mais que apenas uma ferramenta da matemática, a lógica seria sua progenitora. Todos os conceitos matemáticos são formulados em termos de conceitos lógicos, e todos os teoremas da matemática são desenvolvidos como teoremas da lógica.

A atual redução dos conceitos matemática para conceitos lógicos foi elaborada por Gottlob Frege. Também, a afirmação de teoremas matemáticos, significando um simbolismo lógico foi empregada por Giuseppe Peano. Esses homens foram precursores da escola lógica que ganhou notoriedade após a publicação do *Principia Mathematica* de Whitehead e Russell.

Para a tese logicista, a distinção entre a lógica e a matemática é meramente uma conveniência prática. Seu objetivo é encontrar leis lógicas gerais e delas deduzir resultados consistentes e que possam ser intuitivamente confirmáveis.

A partir de agora faremos uma abordagem ao desenvolvimento da lógica iniciando com Aristóteles.

2.2.1 Lógica Clássica

A lógica é uma parte da filosofia que tem por objetivo determinar quais as operações intelectuais são válidas. Por se tratar de um mero instrumento a serviço das ciências, a lógica preocupa-se fundamentalmente com o aspecto formal de um raciocínio ou de um argumento. Portanto a lógica está, a princípio, bem mais interessada na forma do pensamento e não no conteúdo.

Aristóteles contribuiu enormemente com a sistematização da lógica dedutiva. Apesar de não ter chegado a utilizar a palavra lógica, foi ele quem se dedicou, mais do que os filósofos anteriores, à análise do pensamento em suas partes integrantes, e às leis que pudessem validar os resultados das reflexões filosóficas. É provavelmente no sentido de *razão certa* que surge a necessidade aristotélica de um critério para o procedimento correto no pensar. Aristóteles nos diz que a analítica é a ciência da demonstração, o saber demonstrativo, e tem por objeto a proposição, seus termos (sujeito e predicado), e as conexões entre proposições: o silogismo.

Cabe destacar que Aristóteles não a considerava uma ciência, mas apenas um instrumento (órganon) para as ciências. Ou seja, a lógica seria um instrumento para o conhecer, melhor dizendo, um conjunto de procedimentos para ser empregado no raciocínio, e que obedece às leis universais e necessárias do pensamento, garantindo pensar corretamente, sem ocupar-se do

conteúdo pensado, mas exclusivamente da forma do pensamento tal como este se expressa lingüisticamente. Portanto, podemos estabelecer que a lógica se caracteriza por ser:

. Instrumental, uma vez que se limita a ser um instrumento para as ciências e para o pensar correto, sendo um discurso que mede a validade dos discursos científicos.

. Normativa, já que se pretende um conjunto de procedimentos para o pensar corretamente, ou seja, estabelece regras do pensamento.

. Formal, uma vez que não se interessa pelos objetos, isto é, conteúdos do pensamento, mas apenas pela forma pura e geral dos pensamentos, sendo um discurso sobre o discurso, um discurso sobre aquilo que se diz sobre as coisas.

. Geral, dado que as formas do pensamento, bem como suas leis e princípios independem do espaço e do tempo, ou seja pretendem-se imutáveis, universais e necessárias .

A lógica nos leva à idéia de forma dos enunciados e de como eles podem conduzir validamente a outros enunciados, gerando a cadeia de enunciados conhecida como argumento. Dessa maneira, Aristóteles estabelece algumas delimitações básicas acerca da estrutura das argumentações e seus elementos constituintes.

O termo é a unidade referencial da lógica, no sentido de que designa um objeto ou uma classe de objetos. Todo termo implica numa compreensão e numa extensão.

. Compreensão é o conjunto de elementos que estão implicados no conceito do objeto em questão, ou seja, é o conjunto de elementos que compõe o significado do termo.

. Extensão é o conjunto de objetos a que o conceito pode ser aplicado, ou seja, é o conjunto de objetos a que o termo se refere.

Já a proposição é a unidade elementar de um argumento qualquer e consiste ligação entre dois termos. Usualmente, em lógica básica, restringe-se o estudo da proposição à sua forma declarativa, isto é, aquela cuja estrutura geral pode ser indicada

por S é P , ou seja, um termo qualquer que, logicamente falando, é o sujeito da frase, está ligado a um outro termo no qual é afirmado ou negado com relação ao primeiro e, logicamente, comporta-se como predicado. Neste sentido, proposições declarativas são aquelas em que se afirma ou se nega alguma coisa.

As proposições podem ser classificadas quanto ao conteúdo sendo:

- . Analíticas: quando o predicado já está contido no conceito do sujeito.
- . Sintéticas: quando o predicado não está de nenhum modo contido no conceito do sujeito. Neste sentido, todas as proposições que afirmamos com base em experiências são sintéticas.

As proposições também podem ser classificadas quanto à extensão:

- . Singulares são aquelas cujo sujeito é um termo singular.
- . Particulares são aquelas cujo sujeito é um termo que só está aplicado a uma parte dos objetos a que ele pode ser aplicado.
- . Universais são aquelas cujo sujeito é um termo tomado em toda a sua extensão, universalmente.

A proposição categórica é simplesmente aquela em que se afirma ou se nega alguma coisa. Se combinarmos sua extensão com sua qualidade temos quatro tipos fundamentais de proposições categóricas:

- . Universal Afirmativa: afirma-se algo universal ou do sujeito que é universal.
- . Universal Negativa: nega-se algo universalmente do sujeito.
- . Particular Afirmativa: afirma-se algo de parte do sujeito.
- . Particular Negativa: nega-se algo de parte do sujeito.

O argumento é a forma lógica em que, de duas ou mais relações conhecidas, conclui-se uma outra relação que destas decorre logicamente. A argumentação pode ser feita de forma:

. Dedutiva: é aquela a cuja conclusão se deve chegar necessariamente, a partir das premissas dadas. A matemática utiliza procedimentos dedutivos, a demonstração matemática nada mais é do que indicar como se chega à conclusão a partir da verdade das proposições anteriores. Isto revela que a dedução é o processo lógico por excelência, aquele em que não recorremos de nenhum modo à experiência ou à experimentação, mas apenas às condições de inteligibilidade do argumento e às regras formais (não-empíricas) que podem determinar sua validade.

. Indutiva: é aquela a cuja conclusão se chega por enumeração dos casos singulares, a partir da experiência, e cujo caráter não é de necessidade mas sim de possibilidade. O único caso em que a indução pode não errar é quando ela pode considerar todos os casos singulares envolvidos na afirmação.

. Analógica: é aquela forma de indução que, ao invés de conduzir a uma conclusão universal, conduz a uma conclusão particular ou singular e cuja base de certeza é a mera semelhança entre os casos singulares envolvidos na afirmação.

O silogismo regular é um argumento típico dedutivo composto de três proposições: premissa maior, premissa menor e conclusão, onde três termos, maior, médio e menor, são comparados dois a dois.

A premissa maior é sempre aquela em que está o termo maior, a premissa menor é sempre aquela em que está o termo menor. Os termos, maior, médio e menor, são classificados de acordo com sua extensão e sua disposição silogística. O termo médio nunca aparece na conclusão, uma vez que ele foi usado apenas como termo de comparação. O termo menor é sempre o sujeito da conclusão, enquanto o termo maior é sempre o predicado da conclusão. Pelo princípio da compreensão temos que duas coisas idênticas a uma terceira são idênticas entre si. E pelo princípio da extensão temos que tudo o que se afirma ou nega

universalmente de um sujeito é afirmado ou negado universalmente acerca de tudo o que está contido neste sujeito.

Além dessas características o silogismo possui três regras:

. O silogismo deve ter três e somente três termos. Não se pode dar ao termo médio duas extensões diferentes (e, portanto, duas compreensões diferentes também). Não se pode usar o termo médio duas vezes numa extensão particular (o que conduz a mais de uma compreensão deste termo). Não se pode dar aos termos maior ou menor uma extensão maior na conclusão do que eles possuem nas premissas em que aparecem.

. Não se pode concluir nada de duas premissas negativas.

. Não se pode concluir nada de duas premissas particulares.

Os princípios básicos da lógica:

. Princípio da identidade: $A = A$. Uma proposição só pode ser conhecida e pensada se for percebida e conservada com sua identidade. Princípio da identidade é a condição para que definamos as coisas e possamos conhecê-las a partir de suas definições.

. Princípio da não contradição: Uma proposição não pode ser, simultaneamente, verdadeira e falsa.

. Princípio do terceiro excluído: Uma proposição só pode tomar um dos dois valores possíveis (ou é verdadeira ou é falsa) não sendo possível terceira hipótese.

Para operacionalizar a lógica utilizamos uma simbologia universalmente reconhecida:

. Conectivos enunciativos: São os sinais que se referem às associações e relações lógicas que podemos estabelecer entre enunciados simples. São eles:

. Negador (Não) \sim . Na negação: $\sim P$, lê-se: não P .

. Disjuntor (O) \vee . Na disjunção: $P \vee M$, lê-se: P ou M . Na regra da disjunção não tomamos o *ou* no sentido exclusivo.

. Conjuntor (E) \wedge . Na conjunção: $P \wedge M$, lê-se: P e M .

- . Condicional ou implicador (Se... então... ou implica) \Rightarrow . Na implicação: $P \Rightarrow M$, lê-se: *P implica M* ou *Se P então M*.
- . Bicondicional ou biimplicador (Se e somente se... ou ...é equivalente a...) \Leftrightarrow . Na biimplicação: $P \Leftrightarrow M$, lê-se: *P se e somente se M* ou *P é equivalente a M*.
- . Signo de conclusão (Logo...) \therefore .
- . Signos de pareação (isolamento em par de enunciados) Chaves: { , Colchetes: [, Parênteses: (.

2.2.2 Leibniz (1646–1716)

O objetivo de Leibniz foi criar uma doutrina compatível com os postulados de todas as correntes filosóficas, desde os modernos como Francis Bacon e René Descartes até os aristotélicos e escolásticos. Para isso, formula novas idéias sendo um dos principais tópicos de sua filosofia a doutrina das mônadas que diz que o universo é constituído de unidades espirituais e materiais indivisíveis e incomunicáveis entre si.

A partir do conceito de mônada Leibniz sustenta que o pensamento é uma combinação de palavras, se forem montadas todas as possíveis combinações de todas as palavras se chegará ao conhecimento de todas as idéias, verdades e descobertas possíveis.

Leibniz considera que certas formas de pensamento são básicas, pois de suas combinações resultam todas as idéias. Desta concepção Leibniz procurou desenvolver uma *linguagem característica universal*. Na tentativa de criar um sistema simbólico formal, uma álgebra ou cálculo do pensamento atribuiu símbolos aos conceitos mais básicos, que poderiam ser compreendidos por todos, independentemente de qualquer língua falada. A totalidade desses símbolos teria uso universal como uma língua ideal na qual os conceitos seriam perfeitamente representados. A combinação dos símbolos seria feita segundo

regras lógicas para o seu emprego, as controvérsias seriam acertadas por meio de cálculos.

2.2.3 George Boole (1815–1864)

A lógica proposicional iniciada por George Boole teve como objetivo modelar o raciocínio humano. Partindo de frases declarativas (proposições), que podem ser verdadeiras ou falsas, estuda-se o processo de construção e a veracidade de outras proposições usando conectivas como ou (\vee), e (\wedge), não (\sim), se...então....

Em 1854, George Boole publicou *An investigation into the Laws of Thought* onde definiu as teorias matemáticas da lógica e da probabilidade estabelecendo ao mesmo tempo a lógica formal e uma nova álgebra. Boole encarou a lógica de um modo novo e o resultado foi uma álgebra mais simples. Ele fez uma analogia entre os símbolos algébricos e os que representavam a lógica, sistematizando a lógica proposicional como álgebra. E isso deu início a álgebra da lógica conhecida como álgebra booleana.

Na lógica proposicional associa-se a cada proposição um valor lógico: ou verdade (1) ou falso (0). Cada proposição é representada por uma variável proposicional A, B, \dots .

Assim, dados os operadores \wedge, \vee e \neg e as variáveis proposicionais A, B, \dots , uma expressão da lógica proposicional E, F, \dots é definida indutivamente por:

1. Uma variável é uma expressão lógica;
2. Os valores lógicos 0 ou 1 são expressões lógicas;
3. Se E e F são expressões lógicas a sua conjunção (e) é uma expressão lógica, $E \wedge F$;

4. Se E e F são expressões lógicas a sua disjunção (ou) é uma expressão lógica, $E \vee F$;

5. Se E é uma expressão lógica a sua negação (não) é uma expressão lógica, \bar{E} ou $\neg E$;

2.2.4 Gottlob Frege (1848–1925)

Gottlob Frege nasceu em 8 de novembro de 1848 em Wismar, Merklenberg Schwerin (atualmente Alemanha). Estudou na Universidade de Jena e na Universidade de Gottingen, dedicando-se à matemática, à física e à química. Foi professor da Universidade de Jena no departamento de matemática durante toda sua vida profissional. Inicialmente ensinava todos os ramos da matemática mas as suas publicações eram fundamentalmente no campo da lógica.

Assim como Leibniz, Frege pensava que uma das características específicas da matemática era a possibilidade de construção de cálculos que podiam ser interpretados sem referência a números ou a quantidades.

Frege passa então, a tentar concretizar as idéias de Leibniz da construção de uma linguagem universal e de um cálculo racional e para isso, a querer mostrar que a aritmética era idêntica à lógica. Neste aspecto, diferencia-se de Boole que pretendia mostrar que a lógica era um ramo da matemática. Frege comenta a diferença da sua teoria para a de Boole: “Minha intenção não foi representar uma lógica abstrata em fórmulas, mas expressar objetos através de símbolos escritos de um modo mais preciso e claro do que possa ser feito através de palavras. De fato, o que desejo criar não é simplesmente um mero *calculus ratiocinator* mas uma *lingua characterica* no sentido de Leibniz.”¹⁵

¹⁵ HEIJENOORT, Van. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931*. New York: San Jose New York Lincoln Shanghai, 2000.p.2

Frege então passa a querer organizar, de modo a tornar claras, as contribuições dadas por Leibniz e Boole e a impor um rigor formal para que “em uma demonstração houvesse uma explicitação de seu início e que o processo de dedução fosse reduzido a um pequeno padrão de regras a fim de que não houvesse perigo de, inconscientemente, introduzirmos nas demonstrações aquilo que, precisamente, desejávamos demonstrar”¹⁶. Para isso, desenvolveu uma ideografia que chamou de *Begriffsschrift*. O principal objetivo desta obra é a construção de uma linguagem formalizada do pensamento puro, isto é, um sistema de notação mais regular do que a linguagem do cotidiano e melhor adaptado para garantir a exatidão na dedução. O modelo da obra de Frege é fornecido pela aritmética. As contribuições de sua obra são: as funções de verdade do cálculo proposicional, a análise da proposição em função e argumento ao invés de sujeito e predicado¹⁷, teoria da quantificação, um sistema lógico no qual derivações são feitas exclusivamente de acordo com a forma da expressão e uma definição lógica de seqüência matemática na luta pela reconstrução lógica da aritmética.

Ao confrontar a ambigüidade da linguagem usual com a inadequação dos sistemas lógicos existentes, Frege acaba recriando a lógica, e fundamenta uma lógica matemática moderna ao inventar notações simbólicas tais como quantificadores e variáveis.

Abaixo seguem as definições dos símbolos, segundo Frege:

1) Frege distingue os sinais de duas formas:

A primeira consiste nas letras que representam tanto números indeterminados como funções indeterminadas, como no exemplo apresentado por ele:

¹⁶ KNEALE, W., KNEALE, M. O Desenvolvimento da Lógica. Lisboa: 2ª edição, 1980. p.452

¹⁷ Frege observa que seria uma violência impor a distinção entre sujeito e predicado às sentenças matemáticas, substituindo-a pela distinção entre função e argumento. Essa distinção trazida da matemática foi adaptada às necessidades lógicas.

$$(a + b)c = ac + ab$$

O segundo tipo consiste nos sinais tais como +, -, $\sqrt{\quad}$, 0, 1 e 2 que possuem um determinado significado.

2) Frege define, então, julgamento. Um julgamento seria sempre expresso pelo símbolo

┆

Desta forma, o símbolo

┆_A

destina-se a exprimir que A está sendo julgado.

Para mostrar um conteúdo expresso pelo símbolo está sob consideração sem que o autor afirme ou negue, Frege utiliza o traço-conteúdo.

—

3) O símbolo utilizado para designar condição era

┆┐

Desta forma, por exemplo, o símbolo abaixo significa que Γ não deve ser negado enquanto Δ é afirmado.

┆┐ _{Δ} ^{Γ}

4) A negação de uma sentença seria feita através do símbolo:

$$\neg$$

Então o símbolo abaixo exprime: Não é verdade que Γ .

$$\neg \Gamma$$

5) Frege também define através do símbolo

$$\equiv$$

identidade de conteúdo.

Se tivermos, então, o símbolo

$$\vdash_{\Gamma \equiv \Delta}$$

temos que Γ e Δ têm o mesmo conteúdo, de tal maneira que tanto Γ pode ser sempre substituído por Δ como, Δ pode ser sempre substituído por Γ .

6) Para funções e argumentos Frege utiliza a seguinte terminologia

$$\Phi(\Gamma)$$

que exprime uma função indeterminada cujo argumento é Γ ;

$$\vdash_{\Phi(\Gamma)}$$

Significa que Γ tem a propriedade Φ ;

$\Psi (\Gamma, \Delta)$

É uma função de dois argumentos, Γ e Δ nesta ordem;

$\vdash_{\Psi(\Gamma, \Delta)}$

Γ está na relação Ψ com Δ ; Δ é o resultado da aplicação do procedimento Ψ no objeto Γ ;

7) Generalidade: Quantificador Universal

$\vdash_{\Gamma} \Phi(\Gamma)$

Este símbolo significa que a função é um fato seja qual for a interpretação que dermos ao argumento. Tudo é Φ ;

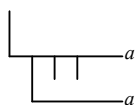
A partir daí, nesta mesma obra, além de ter explicado a sua notação, Frege também estabelece algumas teses lógicas, e princípios lógicos que ele chama de representação e derivação de alguns julgamentos do pensamento puro, tais como:

$\vdash \begin{array}{l} \text{---} a \\ | \\ \text{---} b \\ | \\ \text{---} a \end{array}$

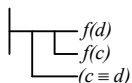
Significa que no caso de a ser negado enquanto b é afirmado, devemos excluir a possibilidade de a ser afirmado. Já que a não pode ser afirmado e negado ao mesmo tempo.

$\vdash \begin{array}{l} \text{---} a \\ | \\ \text{---} a \\ | \\ \text{---} a \end{array}$

Significa que a negação da negação de a (dupla negação) implica na afirmação de a .



A afirmação de a nega a negação de a .



No caso de c e d possuírem o mesmo conteúdo, enquanto $f(c)$ é afirmada $f(d)$ não pode ser negada. Essa proposição significa que se $c \equiv d$ sempre poderemos substituir c por d e vice e versa.



Significa que o conteúdo de c é idêntico ao conteúdo de c .

Frege cria símbolos lógicos e embora haja apenas três símbolos básicos relevantes, os símbolos de condição, negação e o quantificador universal podem ser combinados de inúmeras maneiras. Assim, não há limites para a complexidade das afirmações que podem ser expressas. Frege, desta maneira, oferece um esquema mais simples do que qualquer outro apresentado e ao mesmo tempo aparentemente inesgotável.

Contudo, a *Begriffsschrift* não teve grande aceitação pelos matemáticos e nem pelos filósofos. Mesmo não contando com uma boa aceitação de sua primeira obra, em 1884, Frege apresentou um novo livro: *Die Grundlagen der Arithmetik*. Nesta obra, Frege além de expor informalmente as suas opiniões e críticas a teorias sobre a aritmética, apresenta a sua própria teoria. Nela, analisa os conceitos básicos da matemática de tal maneira que a redução

da aritmética a operações de caráter essencialmente lógico se torna possível, o que demonstra sua esperança em publicar uma demonstração rigorosa da identidade entre a aritmética e a lógica.

Em 1893, Frege lança o primeiro volume da sua obra fundamental *Die Grundgesetze der Arithmetik*. Nesta obra, Frege estabeleceu axiomas e reinterpretou símbolos que tinha introduzido no *Begriffsschrift*, conservando-os¹⁸.

2.2.5 Giuseppe Peano (1858–1932)

Em 1889, Giuseppe Peano em seu *The principles of Arithmetic* faz a primeira tentativa de uma axiomatização da matemática em uma linguagem simbólica. Peano já havia usado a lógica de Boole e de Schröder (1841–1902) em investigações matemáticas e introduziu nelas um número de inovações que marcaram um avanço no trabalho.

Peano denota por símbolos todas as idéias que ocorrem nos princípios da aritmética, assim, toda proposição é dada somente através do significado desses símbolos. Os símbolos pertencem tanto a propriedades lógicas, como a aritméticas.

Na primeira parte do trabalho, o uso desses símbolos, assim como o de suas propriedades, são expostos na linguagem usual. Já os símbolos aritméticos vão sendo explicados conforme vão aparecendo.

Com essa notação, toda proposição assume a forma e a precisão que as equações têm na álgebra. De uma proposição derivam-se outras por procedimentos similares aos usados para resolver equações.

As proposições que são derivadas de outras são chamadas de teoremas e as que não são dedutíveis são chamadas de axiomas.

Após a matemática pura ter sido reduzida à teoria dos números naturais, Peano mostra que toda teoria dos números

¹⁸ Exceto o da identidade que substituiu pelo sinal usual de igualdade.

naturais pode ser derivada de três idéias primitivas (zero, número, sucessor) e cinco proposições primitivas (axiomas), além das da lógica. Se essas idéias e proposições pudessem ser definidas e provadas em termos de outras, toda matemática poderia, assim, ser provada.

Após introduzir noções e fórmulas lógicas, pretendia reescrever a aritmética em notação simbólica. Entretanto, foi adiante, pois seu livro trata também das frações, números reais, noção de limite e definições da teoria conjunto de pontos.

Em princípio, são nove os axiomas. Eles expressam proposições fundamentais de símbolos que não possuem definição. Hoje, nós consideraríamos que os axiomas 2, 3, 4, e 5, que tratam da identidade, pertencem à lógica subjacente. Os cinco demais axiomas se tornaram conhecidos universalmente como os axiomas de Peano. O último é a tradução do princípio da indução matemática. Contudo, Peano reconhece que seus axiomas vêm da teoria de Dedekind.

Abaixo seguem os cinco axiomas de Peano:

- . Zero é um número.
- . Se a é um número, o sucessor de a é um número.
- . Zero não é o sucessor de um número.
- . Dois números cujos sucessores são iguais são eles próprios iguais.
- . Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de todo número de S , então todo número está em S .

A notação de Peano é completamente superior àquela de Boole e marca uma transição importante para a lógica moderna. É

feita uma distinção entre o cálculo de proposições e das classes. Agora, temos dois cálculos diferentes, não apenas duas interpretações do mesmo cálculo. A notação para o quantificador universal é nova e conveniente. Há, entretanto, um defeito grave. As fórmulas simplesmente são listadas, não derivadas; e não poderiam mesmo serem derivadas, porque nenhuma regra de inferência é dada. Peano introduz uma notação para a substituição mas não indica nenhuma regra. O resultado é que, mesmo com todo o cuidado na escrita das fórmulas, não há lógica para ser usada. A passagem de determinadas fórmulas não pode ser realizada por um procedimento formal por falta de regras de inferência, requer algum argumento lógico intuitivo fornecido pelo leitor. A prova traz a tona à diferença entre axiomatização e formalização¹⁹. Em uma série de trabalhos publicados em seguida Peano pretende provar as fórmulas lógicas que simplesmente havia listado no *The Principles of Arithmetic* e ir além de Frege em seu *Begriffsschrift* e seus demais trabalhos. Mesmo sem alcançar seu objetivo o trabalho de Peano mostrou como teorias matemáticas podem ser expressas em linguagem simbólica, contribuindo enormemente para a difusão de novas idéias.

2.2.6 Alessandro Padoa (1868–1937)

No terceiro congresso internacional de filosofia, ocorrido em Paris de 1 a 5 agosto de 1900, congresso que contou com a participação, entre outros, de Poincaré, Peano, e Russell. Alessandro Padoa apresentou o trabalho *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque*. Nele, sua introdução

¹⁹ **Axiomatização:** Redução das proposições a símbolos lógicos em busca das verdades iniciais (axiomas) do sistema.

Formalização: Sistema dedutivo feito a partir dos axiomas por regras de inferência lógica com objetivo de mostrar a consistência do sistema.

lógica trata da relação entre um sistema e suas interpretações e mostra como resolver dois problemas a respeito de um sistema dedutivo: É possível definir um termo por meio de outros termos? Uma proposição é derivável de outras proposições?

Em relação ao segundo problema, Peano já tinha elaborado um método que deveria se tornar padrão. Padoa foi o primeiro a apresentar um método para estabelecer indefinibilidade, em um sistema dado, de um termo por meio de outros termos. Da seguinte forma: se definir um símbolo significa expressá-lo através de outros símbolos já considerados e provar uma proposição significa defini-la a partir de outras proposições já expressas, então, para qualquer teoria dedutiva teremos: quando um símbolo particular é dito definido ou não, precisamos acrescentar que é definido ou não é definido por meio de outros símbolos particulares e quando uma proposição em particular é dita provável ou não, precisamos acrescentar que é provável ou não por meio de outras proposições particulares. Desta forma, não é possível definir todos os símbolos particulares, nem provar todas as proposições particulares. Logo, em qualquer teoria dedutiva são necessários símbolos particulares que não são definidos, chamados de indefinidos (no sentido que não poderá ser dada uma definição para ele).

O método é apenas indicado, pois Padoa o considera intuitivamente evidente. Desta forma, não ofereceu uma prova, e tal prova não poderia mesmo ter sido dada, primeiro porque, o sistema de Padoa (que é de Peano) era mal definido e, segundo, que muitos resultados necessários para tal prova ainda eram desconhecidos naquele tempo. O método de Padoa permaneceu de algum modo esquecido por anos até que Tarski e Lindenbaum anunciaram um teorema que o justificasse. Os resultados de Tarski que foram publicados subsequente (1934, 1935, 1956) estabeleceram que o método pode ser aplicado a todo o sistema formalizado na teoria dos tipos.

2.2.7 Bertrand Russell (1872–1970)

Em junho de 1901, Bertrand Russell expôs o seguinte paradoxo: a classe de todas as classes não contém a si mesmo como elemento. Enviou uma carta a Frege em 16 junho 1902 comunicando *a contradição* como o chama.

No *The Principles of Mathematics* (1903) em uma passagem escrita provavelmente em 1901, menciona sem muita elaboração, que “a classe como um todo seria um tipo diferente dos termos da classe” e que “essa distinção lógica de tipos é a chave para todo o mistério”²⁰. Frege ficou tão perturbado com tal contradição que renunciou a tentativa de reduzir a aritmética à lógica. Não só Frege, mas também Alfred North Whitehead ficou desorientado, o que se reflete em sua fala: “Jamais se tem de novo uma alegre manhã segura”²¹.

Poincaré, como não aceitava a lógica matemática, exclamou com alegria que esta não era mais estéril, gerava contradições. O paradoxo estremeceu com as bases lógicas e até hoje seus efeitos são sentidos.

O matemático italiano Burali-Forti um pouco antes, em 1897, foi o primeiro a publicar um paradoxo da teoria dos conjuntos. O trabalho de Burali-Forti foi anunciado no encontro do *Circolo matematico di Palermo* em 28 março de 1897. O trabalho é a primeira publicação de um paradoxo moderno. Despertou imediatamente o interesse do mundo matemático, e provocou inúmeras discussões nos anos que se seguiram à sua publicação. Inúmeros trabalhos trataram do assunto, propiciando uma grande análise dos fundamentos da teoria dos conjuntos. O paradoxo é simples. Sabe-se que a toda a boa ordenação

²⁰ RUSSELL, Bertrand. *The Principles of Mathematics: Volume I*. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

²¹ RUSSELL, Bertrand. *Meu Desenvolvimento Filosófico*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1980.p. 57.

corresponde um único número ordinal. Também se sabe que ordinais formam uma boa ordenação. Considere, então, a coleção de todos os ordinais. Esta coleção é uma boa ordenação e, portanto, corresponde a um ordinal A . Logo, A excede todos os ordinais e excede-se a si próprio, o que é uma contradição.

A essência deste paradoxo pode ser encontrada, por uma descrição não técnica, já descrita no capítulo anterior, de um paradoxo muito similar descoberto por George Cantor dois anos depois. Em sua teoria dos conjuntos, Cantor teve sucesso ao provar que dado qualquer transfinito sempre existe um transfinito maior, ou seja, que o conjunto dos números transfinitos é infinito, como já foi descrito. Agora, vamos considerar o conjunto no qual os membros são todos os conjuntos possíveis. Assim como em todo conjunto infinito, Cantor associa um transfinito a sua cardinalidade. Certamente, não há conjunto que possua mais elementos que o conjunto de todos os conjuntos. Logo, esse seria o maior transfinito possível o que geraria um absurdo. Pois como já vimos, Cantor mostrou que dado qualquer transfinito sempre existe um transfinito maior.

Como podemos perceber, os paradoxos de Burali-Forti e Cantor envolviam resultados da teoria dos conjuntos, causando assim, uma maior preocupação entre os matemáticos do que entre os lógicos. Entretanto, o paradoxo de Russell não dependia de nada mais que o próprio conceito de conjunto e de elemento, atingindo certamente o campo da lógica. A carta comunicando a Frege sobre o paradoxo foi escrita pouco mais de um ano depois de Russell deparar-se com o paradoxo e este foi primeiramente publicado em *The principles of mathematics* (1903). Eis a carta²²:

²² HEIJENOORT, Van. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931*. New York: San Jose New York Lincoln Shanghai, 2000.p.124.

Friday's Hill, Haslemere, 16 Junho 1902.

Caro colega,

Há ano e meio tomei conhecimento do seu Grundgesetze der Arithmetik, mas apenas agora encontrei tempo para fazer um estudo mais rigoroso, como era minha intenção, sobre o seu trabalho. Estou em completo acordo consigo no essencial, particularmente quando rejeita qualquer elemento psicológico [Moment] na lógica e quando atribui grande valor a uma ideografia [Begriffsschrift] para os fundamentos da matemática e da lógica formal, as quais, em boa verdade, dificilmente se podem distinguir. Relativamente a muitas questões particulares, há no seu trabalho discussões, distinções e definições que dificilmente se encontrarão no trabalho de outros lógicos. Especialmente no que diz respeito à função, eu próprio fui conduzido a observações que são as mesmas, mesmo nos detalhes. Há apenas um ponto onde encontrei uma dificuldade. O colega diz que uma função também pode atuar como elemento indeterminado. Eu acreditava nisto, mas agora esta perspectiva parece-me duvidosa pela seguinte contradição. Seja w o predicado: para ser predicado, não pode ser predicado de si próprio. Pode w ser predicado de si próprio? A cada resposta o seu oposto segue-se. Portanto podemos concluir que w não é um predicado. Da mesma maneira, não existe nenhuma classe (como uma totalidade) de classes que, sendo cada uma tomada como uma totalidade, não pertença a si própria. Disto, concluo que, sob certas circunstâncias, uma coleção definível [Menge] não forma uma totalidade.

Estou a acabar um livro sobre os princípios da matemática no qual gostaria de discutir o seu trabalho profundamente. Já tenho os seus livros ou vou comprá-los brevemente, mas ficar-lhe-ia muito grato se me pudesse mandar separatas dos seus artigos de revistas. No caso de ser impossível, obtê-los-ei numa biblioteca.

O tratamento exato da lógica em questões fundamentais, onde os símbolos falham, tem ficado muito para trás. Nos seus trabalhos encontro aquilo que de melhor há no nosso tempo razão pela qual me permito exprimir o meu profundo respeito por si. É lamentável não ter sido

publicado a segunda edição do seu *Grundgesetze*. Espero que isto ainda venha a ser feito.

Muito respeitosamente este seu,

Bertrand Russell

A contradição acima mencionada, quando expressa na ideografia de Peano, lê-se da seguinte maneira:

$$w = \text{cls } \zeta \times '(x \sim' x). \dot{E}: w e w \dot{=} w \sim e w$$

Já escrevi a Peano acerca disto, mas ele ainda me deve uma resposta.

A resposta de Frege a Russell veio em seguida²³. Primeiramente, Frege chama atenção de Russell para um erro, sem muita importância, contido em *Begriffsschrift*. Em seguida, descreve sua reação ao se deparar com o paradoxo descrito por Russell.

Jena, 22 de Junho de 1902

Caro colega,

Muito agradeço a sua interessante carta de 16 de Junho. Fico encantado por saber que concorda comigo em muitos pontos e que tenciona discutir de maneira rigorosa o meu trabalho. Em resposta ao seu pedido, envio-lhe as publicações seguintes:

1. "Kritische Beleuchtung" [1895],
2. "Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano" [1896],
3. "Ueber Begriff und Gegenstand" [1892],
4. "Über Sinn und Bedeutung" [1892a],
5. "Ueber formale Theorien der Arithmetik" [1885].

²³ HEIJENOORT, Van. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931*. New York: San Jose New York Lincoln Shanghai, 2000.p.127.

Recebi um envelope vazio que parece ter sido endereçado por sua mão. Imagino que quis mandar-me algo que, acidentalmente, se perdeu no caminho. Se é este o caso, agradeço-lhe a sua gentil intenção. Junto envio a parte da frente do envelope.

Quando leio o meu Begriffsschrift de novo, verifico que mudei a minha opinião em vários pontos, como poderá constatar se o comparar com o meu Grundgesetze der Arithmetik. Peço-lhe que remova o parágrafo que começa por "Nicht minder erkennt man" na página 7 de Begriffsschrift ["Não é menos fácil de ver"] que está incorreto. Felizmente, essa incorreção não tem efeitos nocivos no resto do conteúdo do opúsculo.

A sua descoberta da contradição causou em mim a maior das surpresas e, poderia quase dizer, consternação, já que abalou a base sob a qual eu pretendia construir a aritmética. Parece, então, que transformar a generalização de uma igualdade numa igualdade de seqüência de valores [die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Werthverlaufsgleichheit] (§ 9 do meu Grundgesetze) nem sempre é permitido, que a minha Regra V (§ 20) é falsa, e que as minhas explicações no § 31 não são suficientes para garantir que a combinação de símbolos que proponho tem sentido em todos os casos. Tenho que refletir mais no assunto. Isto torna-se tanto mais sério quanto, com a perda da Regra V, não só os fundamentos da minha aritmética, como também os únicos fundamentos possíveis da aritmética em geral, parecem desvanecer-se. Contudo, penso eu, deve ser possível arranjar condições para a transformação da generalização de uma igualdade numa igualdade de seqüência de valores de maneira a que o essencial das minhas demonstrações permaneça intacto. Em qualquer dos casos, a sua descoberta é notável e irá certamente resultar num grande avanço na lógica, mesmo que à primeira vista não pareça bem vinda.

A propósito, parece-me que a expressão "um predicado é predicado de si próprio" não é exata. Um predicado é por regra uma função de primeiro-nível, e esta função requer um objeto como argumento e não pode ter-se a si próprio como argumento (assunto). Portanto, preferiria dizer "uma noção é predicado da sua própria extensão". Se a função $F(x)$ é um conceito, eu denoto a sua extensão (ou a classe correspondente) por

"e'F(e)" (para ser verdadeiro, a justificação para isto tornou-se agora questionável para mim). Em "F(e'F(e))" ou "e'F(e) \cap e'F(e)" teremos então um caso em que o conceito F(x) é predicado da sua própria extensão.

O segundo volume do meu Grundgesetze irá aparecer brevemente. Terei, sem dúvida, que acrescentar um apêndice no qual a sua descoberta será levada em conta. Se ao menos já tivesse o ponto de vista correto para ela!

Muito respeitosamente este seu,

G. Frege

1 " \cap " é um sinal usado por Frege para reduzir funções de segundo nível para de primeiro nível.

Frege entende que a origem do paradoxo se dá pois a função não é um objeto é um *Werthverlauf*, algo completo em si mesmo. Após ter contato com o paradoxo, tentou de inúmeras maneiras eliminar a contradição de sua teoria. Não obteve sucesso em nenhuma tentativa. Os resultados não eram aceitos.

2.2.7.1 Teoria dos Tipos

Em todos os paradoxos lógicos existe uma espécie de auto referêcia reflexiva, isto é, a de incluir, como membro de uma totalidade, alguma coisa referente a essa totalidade que deve ser condenada.

Após várias tentativas, Russell e Whitehead propuseram uma nova maneira de eliminar os paradoxos da matemática chamada de teoria dos tipos. A solução do problema é apresentada em menos de trinta linhas. Além dessa solução examina outras possíveis, as acha menos satisfatórias e conclui que "não há nenhuma filosofia peculiar envolvida na contradição, que salta diretamente do

sentido comum e pode somente ser resolvida abandonando algumas verdades do senso comum"²⁴.

Russell passou, então, a tomar conhecimento de outros paradoxos, como por exemplo, do paradoxo de Burali-Forti e o de Cantor. Em dezembro 1905, Russell tinha abandonado a teoria dos tipos. Para superar as dificuldades levantadas pelos novos paradoxos apresentou então três novas teorias: a teoria do zigzag, a teoria da limitação do tamanho e a teoria das nenhuma-classes. Entretanto, logo, Russell reconheceu que as teorias se mostravam inadequadas à matemática clássica. Então, voltou atrás para a teoria dos tipos e prosseguiu desenvolvendo-a detalhadamente. O resultado desse estudo foi publicado em julho de 1908.

Russell vê o universo dividido em níveis, ou tipos. Determinadas coisas somente satisfazem uma condição dada se forem do mesmo tipo. Os membros de uma classe, então, devem ser todos do mesmo tipo. Russell é conduzido assim para uma distinção entre *todo* e *algum*: o *todo* representa uma certa (*aparente*) variável de quantificação universal, escalas sobre um tipo, e o *algum* é expresso pela variável (*real*) livre, que se refere a qualquer coisa não específica não levando em consideração o tipo. Russell vê como o cerne dos paradoxos o que ele chama o princípio do círculo-vicioso: "Nenhuma totalidade pode conter os membros definidos como termos de si mesmo"²⁵.

A idéia deles era basicamente a seguinte: um conjunto de tipo inferior (vamos chamá-lo de tipo 1) poderia somente conter objetos como membros e não poderia conter conjuntos. Já um conjunto do tipo 2 (superior ao do tipo 1) poderia conter objetos ou conjuntos do tipo 1 (inferior ao tipo 2). Claramente, nenhum

²⁴ RUSSELL, Bertrand. *The Principles of Mathematics: Volume I*. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

²⁵ HEIJENOORT, Van. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931*. New York: San Jose New York Lincoln Shanghai, 2000.

conjunto poderia conter a si mesmo pois se isso ocorresse, ele deveria pertencer a um tipo superior ao seu próprio tipo.

O tipo mais baixo compreende individuais; seu seguinte compreende o que ele chama de proposições de primeira ordem; e assim por diante. Estas proposições, ao contrário dos individuais, são notações, e podem conter variáveis. Ainda assim, como os individuais, possuem tipos e figuram como valores de variáveis quantificadas.

A teoria dos conjuntos é um componente indispensável da matemática. É o ramo da matemática cuja tarefa é investigar as noções fundamentais de número, ordem, e função, desenvolvendo as fundações lógicas, de toda aritmética e análise. Contudo, sua existência parecia estar ameaçada pois não havia nenhuma solução inteiramente satisfatória, nem mesmo a teoria dos tipos, para determinadas contradições, ou antinomias que podiam ser derivadas de seus princípios²⁶.

Somente depois com o estudo de Ernest Zermelo que se obteve um resultado satisfatório. O trabalho de Zermelo publicado em 1908 *Investigations in the foundations of set theory I* apresenta a primeira axiomatização da teoria dos conjuntos. A idéia básica de Zermelo assemelha-se a teoria de Russell, ambos recusam a considerar conjuntos como coleções. Conjuntos não são simplesmente coleções, são objetos que satisfazem a determinadas circunstâncias axiomáticas.

²⁶ Embora não tendo ido diretamente ao ponto, Ramsey foi o primeiro a abandonar a ramificação e o axioma da reutilibilidade. Ramsey foi alertado pela observação de Peano que os paradoxos se dividem em dois tipos: aqueles de pura teoria dos conjuntos e aqueles que articulam conceitos semânticos tais como o *falsity* e o *specifiability*. Ramsey observou que a única utilidade da ramificação da teoria dos tipos de Russell seria a resolução de paradoxos semânticos e estes, segundo Ramsey, devem ser deixados de lado pois extrapolam conceitos da lógica e da matemática. Essa idéia acabou sendo abandonada uma vez que seu uso ia completamente contra intuição.

Os axiomas de Zermelo²⁷ (1871–1953) são surpreendentemente pouco em números. O mais original é talvez o axioma III, o axioma da separação. Zermelo foi talvez o primeiro a ver claramente que a existência de conjuntos infinitos deveria ser assegurada por um axioma especial (axioma VII, do infinito).

Zermelo apenas indica seus axiomas, e declara ser incapaz de provar sua consistência. Mostra que as derivações usuais de um número de paradoxos conhecidos, como os paradoxos de Buralli-Forti e de Russell, não podem ser obtidas deles pois o conjunto de todos os ordinais e o conjunto de todos os conjuntos não existem no sistema. Prova então teoremas sobre conjuntos. O desenvolvimento vai até o teorema de Cantor, o teorema de König, e um teorema, que conecta duas noções do infinito.

Em 1898, Whitehead publicou o primeiro volume do *A treatise of universal algebra*. Em 1903, Russell publicou o primeiro volume do *The principles of mathematics*. Whitehead foi então persuadido a abandonar os planos para a publicação do segundo volume de seu livro e colaborar com o Russell no segundo volume dos *The principles*. Este volume nunca se materializou. Porém, o resultado da colaboração foi um trabalho independente dos *The Principles*. O resultado desse trabalho foi o *Principia Mathematica* e a concretização do que Frege e Peano, em suas diferentes maneiras, tinham projetado. São três volumes de um estudo detalhado da lógica e da teoria dos conjuntos, e uma construção da matemática clássica.

2.2.7.2 O *Principia Mathematica*

O *Principia* aborda o tratamento matemático pelos princípios matemáticos. É construído um sistema dedutivo e para que isso seja possível é necessário analisar a existência

²⁷ Os axiomas de Zermelo serão listados mais adiante na seção 2.2.8.

matemática e quais premissas são empregadas, onde são consistentes e se é possível reduzi-las a premissas mais fundamentais.

Grande parte do trabalho foi gasto na tentativa de entender e eliminar contradições e paradoxos que permearam a lógica. A notação utilizada seguiu o máximo possível à utilizada por Peano e quando necessário, a de Frege. As mudanças no simbolismo de Russell e Whitehead se dão pela invenção de símbolos ainda não existentes e não pelo descontentamento com o simbolismo anterior desenvolvido principalmente por Frege e Peano. Toda questão de análise lógica se deve a Frege. Quando há diferença entre o trabalho de Frege e o *Principia*, esta é feita em decorrência do surgimento de contradições que mostravam que Frege permitiu alguns erros ao elaborar suas premissas.

O *Principia Mathematica* começa com idéias primitivas e proposições primitivas correspondendo a termos indefinidos e postulados do desenvolvimento abstrato formal. Essas idéias primitivas e proposições não estão sujeitas a interpretações, porém são restritas a conceitos intuitivos da lógica. Eles devem ser vistos, ou pelo menos devem ser aceitos, como plausíveis descrições e hipóteses do mundo real. Em suma, prevalece como um ponto de vista mais concreto que abstrato e conseqüentemente nenhuma tentativa é feita para provar a consistência de proposições primitivas. No *Principia Mathematica*, a lei do terceiro excluído e a lei da não contradição são agrupadas em uma só lei.

O objetivo do *Principia Mathematica* é desenvolver conceitos matemáticos e teoremas a partir dessas idéias e proposições primitivas para poder barrar a ocorrência de definições impredicativas, ou seja, que o que está sendo definido participe da sua própria definição.

Nos três volumes são feitas definições e é utilizada uma simbologia complexa. Os três volumes são divididos em cinco partes.

Na Parte I, do volume I, o assunto é lógica matemática. São estabelecidas algumas propriedades de proposições, funções proposicionais, classes e relações. O assunto da primeira parte pode ser visto sob dois aspectos: como conexão dedutiva dependendo de proposições primitivas ou como cálculo formal. A partir de certos axiomas podemos deduzir proposições. Dessas proposições primitivas temos quatro meios de obter novas proposições, por: negação, disjunção, asserção e implicação.

Na Parte II, Russell e Whitehead trabalham com classes. São definidas noções de similaridade sobre a qual a aritmética dos cardinais é baseada. Trata também a noção de seleção²⁸ sob a qual a multiplicação dos ordinais e dos cardinais é baseada. E por fim, na Parte II é abordada indução matemática.

Na Parte III, definem e generalizam propriedades lógicas de números cardinais, em seguida, nota-se que as operações de adição, multiplicação e exponenciação podem ser aplicadas a cardinais finitos ou infinitos.

A Parte IV é o desenvolvimento de um tipo geral de aritmética na qual a aritmética ordinal é uma aplicação particular.

Já a Parte V é toda dedicada às séries.

E por fim, a Parte VI é dedicada aos números.

2.2.8 Os Axiomas de Zermelo

Os axiomas e as definições de Zermelo são retirados do trabalho *Investigations in the foundations of set theory I* (1908).

Eis os axiomas:

²⁸ Uma seleção de um conjunto de classes é a classe que consiste de um membro de cada classes do conjunto.

Axioma I (Axioma da Extensionalidade). Se todo elemento do conjunto M também é elemento do conjunto N e vice e versa, e se, além disso, $M \in N$ ²⁹ e $N \in M$, então, sempre $M = N$; ou, mais sucintamente: todo conjunto é determinado por seus elementos.

O conjunto que contém somente os elementos a, b, c, \dots, r sempre poderá ser denotado por $\{a, b, c, \dots, r\}$

Axioma II (Axioma de Conjuntos Elementares). Existe um conjunto (fictício), o conjunto nulo, 0 , que não contém elementos. Se a é um objeto do domínio, existe um conjunto $\{a\}$ contendo a e somente a como elemento; se a e b são dois objetos do domínio, existe um conjunto $\{a, b\}$ contendo como elementos a e b e nenhum objeto x diferente deles.

Axioma III (Axioma da Separação). Sempre que a função proposicional $\wp(x)$ for definida por todos os elementos do conjunto M , M possui um subconjunto M_{\wp} contendo como elementos precisamente esses elementos x de M para o qual $\wp(x)$ é verdadeira.

Axioma IV (Axioma do Poder do Conjunto). Para todo conjunto T existe um outro conjunto correspondente $\mathcal{P}T$, o poder do conjunto T , que contém como elementos precisamente todos subconjuntos de T .

Axioma V (Axioma da União). Para todo conjunto T existe um conjunto correspondente $\cup T$, a união de T , que contém como elementos precisamente todos elementos dos elementos de T .

Axioma VI (Axioma da Escolha). Se T é um conjunto cujo todos os elementos são conjuntos diferentes de 0 e mutuamente

²⁹ O símbolo \in é utilizado por Zermelo para designar subconjunto, ou seja, $M \in N$ significa que M é subconjunto de N .

disjuntos, sua união δT inclui pelo menos um subconjunto S_i contendo um e somente um elemento comum com cada elemento de T .

Axioma VII (Axioma do Infinito). Existe no domínio pelo menos um conjunto Z que contém o conjunto nulo como elemento e para cada elemento a também contém seu correspondente $\{a\}$ como elemento.

2.3 A Escola Formalista

O desenvolvimento do método axiomático tem início com Pitágoras e ganha força com Euclides. Para Euclides, os axiomas e postulados são princípios universais claros que podem ser aceitos por todos como verdadeiro e devem ser utilizados na base de processos dedutivos que constituem tal método.

Na tese formalista, temos um desenvolvimento axiomático da matemática ao extremo. Esta tese considera que a matemática é feita de um sistema simbólico formal. Os formalistas sustentam que os símbolos aritméticos são meras marcas no papel, destituídas de significado, e que a aritmética consiste em determinadas regras arbitrárias pelas quais tais marcas podem ser manipuladas. De fato, a matemática é vista como uma coleção do desenvolvimento abstrato, na qual os termos são meros símbolos e as afirmações são fórmulas envolvendo esses símbolos. A última base da matemática não está na lógica, mas somente na coleção de símbolos e no conjunto de operações com esses símbolos. No programa formalista, Hilbert constrói uma aritmética que não é puramente lógica. Além disso, Church mostra que inteiros podem ser definidos com um maquinário lógico menor do que se pensava necessário.

Para Hilbert, as proposições matemáticas podem ser divididas em duas classes: as proposições reais, que tratam do

finto e portanto podem ser verificadas com segurança. E as proposições ideais, que se referem ao infinito. Para Hilbert, os objetos ideais só podem ser aceitos na medida em que são gerados por regras que introduzimos para seu manejo. Desse ponto de vista, a matemática é destituída de uma significação concreta e contém somente elementos simbólicos ideais.

Assim, o estabelecimento da consistência dos vários ramos da matemática se torna uma parte importante e necessária no programa formalista para garantir que a relação entre objetos reais e ideais é legítima. Sem o acompanhamento de uma prova de consistência, todo estudo é essencialmente inconsistente.

A escola formalista foi fundada por David Hilbert após ele completar seu estudo postulacional sobre geometria. No seu *Grundlagen der Geometrie* (1899) ele transformou o material axiomático de Euclides na axiomatização formal da geometria de hoje. O ponto de vista formalista foi desenvolvido após Hilbert se deparar com a crise causada com os paradoxos da teoria dos conjuntos, o que se tornou em um grande desafio para os matemáticos clássicos devido as grandes críticas feitas pelos intuitivistas.

Apesar de Hilbert ter falado em termos formalistas no início de 1904, somente depois de 1920 ele e seus colaboradores: Bernays (1888–1977), Ackermann (1896–1962), von Neumann (1903–1957) entre outros iniciaram para valer o trabalho que agora é conhecido como o programa formalista.

O desenvolvimento da idéia para testar a consistência da matemática, foi chamado por Hilbert de teoria da prova. Hilbert esperava que ao transformar sentenças matemáticas em símbolos abstratos manipulados segundo as leis da lógica, todo raciocínio capaz de conduzir a um paradoxo ficaria evidente, ficando possível desta forma demonstrar sua consistência. A teoria da prova permitiria fazer afirmações a respeito das configurações

simbólicas do sistema axiomático e essas afirmações deveriam ser completamente construtivas.

Hilbert e Bernays planejaram dar uma exposição detalhada, e aplicável a toda matemática clássica, da teoria da prova no seu grande *Grundlagen der Mathematik*, que pode ser considerado o *Principia Mathematica* da escola formalista. O volume I foi publicado em 1934 e o volume II em 1939. Devido às dificuldades encontradas por Hilbert e sua equipe, não foi possível completar a teoria da prova.

O fato é que o programa de Hilbert, pelo menos em sua forma original, estava destinado ao fracasso, e essa verdade veio à tona com Gödel em 1931, antes mesmo de o *Grundlagen* ter sido publicado. Gödel mostrou, por métodos aceitáveis pelos seguidores das três principais escolas de filosofia matemática, que é impossível em um sistema dedutivo formalizado suficientemente rico, como o sistema de Hilbert, provar a consistência por métodos do próprio sistema. Esse resultado memorável é consequência de um outro fundamental no qual Gödel provou também a incompletude do sistema de Hilbert. Ele estabeleceu a existência de um sistema de problemas indecidíveis, dos quais um é a própria consistência da aritmética. O que revelou uma limitação não esperada nos métodos da matemática formal.

2.3.1 David Hilbert (1862–1943)

De fato, o século XIX foi todo dedicado ao desenvolvimento completo e rigoroso da matemática.

A descoberta das geometrias não Euclidianas no início do século fez com que os matemáticos parassem para pensar melhor nos seus fundamentos.

Cauchy e Weierstrass reformaram o cálculo. Como vimos, na Inglaterra, Boole e Augustus de Morgan (1806–1871) começaram a desenvolver a lógica simbólica. Em 1890, Peano, na Itália,

desenvolveu a aritmética na base axiomática e Frege na Alemanha, começou desenvolver a matemática unicamente através da lógica.

Desde que o paradoxo de Russell tornou-se conhecido a questão sobre consistência ficou cada vez mais em evidência.

Em 1899, David Hilbert já havia conseguido uma axiomatização satisfatória da geometria. Em seguida, em 1900, apresentou um conjunto de axiomas para o conjunto dos números reais e indicou que a questão sobre consistência destes vem antes da questão da consistência da geometria. Neste mesmo ano, no Congresso Internacional de Paris apresentou uma lista de problemas sobre a consistência o conjunto dos números reais que desafiou o mundo matemático. Segue abaixo a lista completa.

Problema 1: Problema de Cantor relativo a hipótese do contínuo (HC).

Problema 2: Demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética.

Problema 3: Pode-se provar que dois tetraedros, de mesma base e mesma altura, têm o mesmo volume?

Problema 4: Construir todos os espaços métricos em que as linhas são geodésicas.

Problema 5: Todo grupo contínuo é automaticamente um grupo diferencial?

Problema 6: Axiomatizar a física.

Problema 7: Irracionalidade e transcendentalidade de certos números.

Problema 8: A hipótese de Riemann e a conjectura de Goldbach.

Problema 9: Achar a lei de reciprocidade mais geral em todo campo de número algébrico.

Problema 10: Encontrar um algoritmo que determine se uma equação diofantina tem solução.

Problema 11: Classificar as formas quadráticas a coeficiente nos anéis algébricos inteiros.

Problema 12: Estender o teorema de Kroneker para os corpos não abelianos a um domínio de racionalidade algébrica.

Problema 13: Demonstrar a impossibilidade de resolver equações de sétimo grau através de funções de somente duas variáveis.

Problema 14: Demonstrar que certos sistemas completos de funções são finitos.

Problema 15: Desenvolver bases sólidas para a geometria enumerativa de Schubert.

Problema 16: Desenvolver uma topologia de curvas e superfícies algébricas.

Problema 17: Representação de formas definidas por somas de quadrados de funções racionais.

Problema 18: Construir um espaço com poliedros congruentes.

Problema 19: A resolução dos problemas de cálculo de variações são sempre necessariamente analíticas?

Problema 20: Problema de Dirichelet no caso geral.

Problema 21: Prova da existência de equações diferenciais lineares tendo um determinado grupo monodrômico.

Problema 22: Uniformizar as curvas analíticas através de funções automorfas.

Problema 23: Desenvolver um método geral de resolução no cálculo de variações.

No 3º Congresso Internacional de Matemática ocorrido em Heidelberg de 8 a 13 de agosto de 1904, David Hilbert apresentou o trabalho intitulado *On the foundations of logic and arithmetic*. Nele, Hilbert apresenta uma primeira tentativa de provar a consistência da aritmética. De fato, seu plano era mostrar que todas as fórmulas de uma certa classe possuem uma certa propriedade, e assim as fórmulas iniciais a possuem e as transmitem para as derivadas.

Além da busca por uma prova de consistência o trabalho faz uma crítica aos vários pontos de vista sustentados em relação aos fundamentos da aritmética e introduz termos que Hilbert vai desenvolver, modificar ou torná-los mais precisos nos seus futuros trabalhos, tais como: a redução da matemática a uma coleção de fórmulas, a existência extralógica de objetos básicos, suas combinações e a construção de uma lógica paralela com o estudo dessas combinações.

O trabalho de 1904, além de ter sido um marco na concepção hilbertiana, influenciou Julius König (1849–1913) que por sua vez inspirou von Neumann em sua busca por uma prova da consistência da aritmética.

Já em 1925, Hilbert publicou um trabalho intitulado *On the infinite*. Onde ele começa recordando como Weierstrass eliminou referências ao infinito na análise, também menciona Cauchy e D’Alambert (1717–1783) e revê a sua influência na física, na teoria dos conjuntos e na lógica. A segunda parte do trabalho é uma tentativa de provar a hipótese do contínuo.

Na década de 1920, Hilbert, então, atacou o problema número 2 da sua lista de 23 problemas apresentados em 1900. Imbuído pelo desafio de provar a consistência da matemática, ele desenvolveu um programa que reconstruía a matemática por um caminho que poderia levar a resultados aceitáveis.

Hilbert acreditava que se as regras fossem estabelecidas cuidadosamente, poderia tanto extinguir paradoxos como também desenvolver tudo com um perfeito funcionamento na matemática. Não seria essencial que as regras fossem intuitivamente óbvias, a única coisa que importava era se elas realmente funcionavam. Além do mais, ele acreditava que investigando o sistema por fora, através da metamatemática, ele poderia eventualmente provar a consistência da matemática e também demonstrar que esse sistema matemático seria completo.

O programa de Hilbert ficou conhecido como formalista e a obtenção de alguns sucessos o encorajaram a continuar. Algumas partes da matemática eram ambas consistentes e completas. Porém, algumas não. Não podemos mostrar na aritmética, por exemplo, que ela é completa e consistente ao incluirmos a multiplicação.

A não-existência de contradição é garantida somente pela consistência das proposições. Foi dessa forma que Hilbert concebeu uma nova maneira de aproximar-se do problema de

consistência. Ele esperou provar que uma fórmula contraditória nunca deveria ocorrer através de conjuntos apropriados de regras de procedimento. E se ele provasse que não seria possível a existência de fórmulas contraditórias então estaria estabelecida a consistência do sistema. No entanto, isso não foi possível.

Capítulo 3 Paradoxo

O Prazer do Difícil (The Fascination of What's Difficult)³⁰

William Butler Yeats

Tradução: Augusto de Campos

O prazer do difícil tem secado
A seiva em minhas veias. A alegria
Espontânea se foi. O fogo esfria
No coração. Algo mantém cerceado
Meu potro, como se o divino passo
Já não lembrasse o Olimpo, a asa, o espaço,
Sob o chicote, trêmulo, prostrado,
E carregasse pedras. Diabos levem
As peças de teatro que se escrevem
Com cinqüenta montagens e cenários,
O mundo de patifes e de otários,
E a guerra cotidiana com seu gado,
Afazer de teatro, afã de gente,
Juro que antes que a aurora se apresente
Eu descubro a cancela e abro o cadeado.

³⁰ The fascination of what's difficult/Has dried the sap out of my veins, and rent /Spontaneous joy and natural content /Out of my heart./There's something ails our colt /That must, as if it had not holy blood,/Nor on an Olympus leaped from cloud to cloud,/Shiver under the lash, strain, sweat and jolt /As though it dragged road metal. /My curse on plays /That have to be set up in fifty ways,/On the day's war with every knave and dolt./Theatre business, management of men. /I swear before the dawn comes round again /I'll find the stable and pull out the bolt.

Não poderíamos continuar sem parar para analisar alguns paradoxos que originaram as famosas crises nos fundamentos da matemática e causaram grande incômodo para os matemáticos que buscavam uma matemática perfeita: completa e livre de contradições. Em 1931, o teorema de Gödel vem como resposta à tentativa de fazer da matemática uma espécie de conhecimento intocável. Após 1931, muitos matemáticos ainda continuavam incomodados, agora não mais com os paradoxos, porém com a tentativa de assimilação da prova que abalaria toda uma estrutura esperada e provaria que a matemática pode não ser perfeita, mas é extremamente bela e fascinante.

A discussão sobre paradoxos não é recente. Há muito tempo são criados paradoxos e estes trazem a tona grandes debates.

Vejamos abaixo alguns exemplos de paradoxos:

Todos cretenses são mentirosos. – Epinêmides, um cretense

A afirmação que estou fazendo é falsa. – Eubulides

Na primeira afirmação, notamos que só existe contradição, se considerarmos a frase como verdadeira já que Epinêmides se declara como cretense. Porém, se a frase for falsa, teríamos que nem todos os cretenses são mentirosos e não geraríamos uma contradição. Já no paradoxo de Eubulides não temos outras circunstâncias. Se a afirmativa for falsa, então ela é verdadeira e se for verdadeira ela é falsa.

Como veremos, ao longo de várias épocas, todos discutiram uma outra versão, uma nova roupagem para o paradoxo de Eubulides. Aristóteles foi um deles. Sua versão na qual os gregos chamavam de *O Mentiroso* era a seguinte: *Essa afirmação é falsa*. Mais tarde, filósofos a desenvolveram em forma de diálogo:

Sócrates: Tudo que Platão diz é falso.

Platão: Sócrates só fala a verdade.

Em 1913, P. E. B Jourdain criou uma versão moderna do diálogo, dessa vez sem personagens. De um lado de uma carta estava escrito: *A afirmativa no outro lado da carta é verdadeira,*

enquanto do outro lado estava escrito: *A afirmativa no outro lado da carta é falsa.*

Alfred Tarski desenvolveu uma versão que nos lembra indução matemática. Você tem um livro de 100 páginas. Na página 1 está escrito, *A afirmativa na página 2 é verdadeira.* Na página 2 está escrito, *A afirmativa na página 3 é verdadeira.* Generalizando, na página n está escrito, *A afirmativa na página $n+1$ é verdadeira.* Porém, ao chegarmos à página 100 nos deparamos com a seguinte frase: *A afirmativa na página 1 desse livro é falsa.* As versões de Jourdain e Tarski são basicamente a mesma, a única diferença é que Tarski nos deixa em suspense por mais tempo.

José Bernadete, com outro propósito em mente, criou um livro de infinitas páginas. Onde na primeira página estaria escrito: *A afirmativa da última página é verdadeira.* E em todas as outras páginas estaria escrito: *A afirmativa da página anterior é falsa.* Quando você lesse a página 1, não haveria uma maneira de você checar se a afirmativa seria verdadeira ou falsa, já que o livro é infinito e que não há última página. Porém, quando você lê a página 2, descobre que a afirmação na página 1 é falsa. E quando lê a página 3, você descobre que a afirmação na página 2 é falsa o que implicaria na veracidade da afirmação na página 1. Entretanto, ao ler a página 4, alteramos mais uma vez o valor de verdade da página 1. Então, a afirmativa na página 1 é verdadeira ou falsa?

Existem inúmeras explicações para esse paradoxo. Nenhuma delas é completamente satisfatória, por isso ainda há uma busca pela resposta até hoje.

Existe um paradoxo de extrema importância, pois foi fundamental para teoria de Gödel. É o Paradoxo de Richard, inventado em 1905 por Jules Richard (1862–1956). O paradoxo de Richard veio à tona enquanto a euforia causada pelo paradoxo de Russell, publicado dois anos antes, ainda não havia diminuído.

Praticamente ao mesmo tempo, König apresentou na academia húngara de ciências, em forma de paradoxo, um novo argumento para mostrar a impossibilidade de fazer uma boa-ordenação do contínuo (já que após sua primeira tentativa, Zermelo provou que qualquer conjunto poderia ser bem-ordenado). Apesar da semelhança entre os paradoxos, estes são completamente independentes. Podemos entender melhor o paradoxo de Richard. A partir de idéias retiradas do site³¹ de Ricardo Kubrusly.

“Na língua portuguesa, propriedades sobre os números podem ser formuladas e definidas (poderíamos ter qualquer outro tipo de linguagem que pudéssemos fazer definições). Então, por exemplo, a propriedade de um número ser primo pode, desta maneira, ser definida como *divisível apenas por si mesmo e pela unidade*, a de um número ser par como *múltiplo de dois* e assim por diante. Cada uma destas definições contém um número finito de palavras logo, um número finito de letras do alfabeto, sendo possível portanto, serem arrumadas numa lista ordenada de definições das propriedades da aritmética.

Uma definição precederá a outra se o número de letras do alfabeto empregadas na sua definição, for menor do que o número de letras empregada na outra definição. No caso de duas definições empregarem o mesmo número de letras do alfabeto, o posicionamento na lista de definições será decidido baseado no critério da ordem alfabética. De posse desta lista, associaremos ao seu primeiro elemento o número 1, ao segundo elemento da lista o número 2, e assim sucessivamente.

³¹ <http://www.ufrj.im.dmm.br/risk>

Como cada definição ficará associada a um único número inteiro, pode acontecer em certos casos, que o próprio número associado a uma certa definição possua a propriedade descrita por ela. Por exemplo: se o número associado à definição da propriedade de um número ser primo, *divisível apenas por si mesmo e pela unidade*, é 19, temos claramente que ele, o 19, possui a propriedade descrita pela expressão de número 19. Por outro lado pode acontecer, o que deve ser inclusive mais provável, o contrário: que o número associado à definição de uma certa propriedade da aritmética não possua a propriedade descrita pela definição a que ele se refere. Por exemplo: se o número associado à definição da propriedade de um número ser par, *múltiplo de dois* é 35, temos, também claramente, que ele o 35, não possui a propriedade a que ele se refere, ou seja, a de ser um número par. Os números que se referem aos casos descritos no segundo exemplo, serão chamados de richardianos, isto é, um número será richardiano se ele não possuir a propriedade aritmética descrita na definição associada a ele na lista de definições aritméticas, confeccionadas da maneira explicada acima. Serão não richardianos, caso contrário, isto é, quando possuir a propriedade por ele designada na lista de definições das propriedades aritméticas.”

Agora, a propriedade de um número ser richardiano passa então a ser associada a um número N . Podemos então perguntar: será N richardiano? e mais uma vez, teremos como resposta: N é richardiano se e somente se N é não richardiano.

Capítulo 4 Teorema da Incompletude

Ausência

Carlos Drummond de Andrade

Por muito tempo achei que ausência é falta.
E lastimava, ignorante, a falta.
Hoje não a lastimo.
Não há falta na ausência.
A ausência é um estar em mim.
E sinto-a, branca, tão pegada, aconchegada nos
meus braços,
que rio e danço e invento exclamações alegres,
porque a ausência, essa ausência assimilada,
ninguém a rouba mais de mim.

4.1 A Revolução

“Sobre aquilo que não se pode falar, deve-se calar”.

Wittgenstein³²

É bem provável que nove anos antes Ludwig Wittgenstein (1889–1951) já previsse na linguagem o que Kurt Gödel (1906–1978) constatou e formalizou na matemática nos alertando com sua frase acima da incapacidade da linguagem ser completa e consistente.

Em 1931, Gödel transformou os paradoxos de linguagem em matemática. A idéia de Gödel era usar a matemática para explicar a própria matemática (usar a metamatemática). Essa noção de matemática introspectiva provou seu enorme poder e a sua implicação mais importante foi o teorema da incompletude que diz que toda formulação axiomática consistente da teoria dos números contém proposições indecidíveis. Em um sentido mais amplo, Gödel mostra com seu teorema que verdade e demonstrabilidade são coisas distintas.

Gödel desenvolve sua teoria inspirado no paradoxo do Mentiroso e no paradoxo de Richard utilizando o mapeamento como recurso.

4.2 O Mapeamento

A noção de mapeamento é importantíssima para a matemática. Temos como exemplo na geometria analítica, pontos sendo representado por pares de números. Uma característica importante do mapeamento é que deve existir uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos de objetos.

³² WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo:Edusp, 1993. p.281

O aspecto fundamental do mapeamento é que podemos provar que uma estrutura abstrata de relações incorporadas em um domínio de objetos também vale entre objetos de outro domínio. Foi basicamente esse aspecto que impulsionou Gödel a estruturar sua prova. A idéia de Gödel era aritmetizar a teoria da prova, ou seja, transportar todos os passos de uma prova, incluindo a linguagem da metamatemática, para aritmética, podendo assim utilizar suas relações.

Veremos agora como Gödel estruturou e pôs em prática essa engenhosa proposta.

Primeiramente, Gödel mostra que é possível atribuir a cada signo um único número, o que acaba servindo de identificação desse signo. Assim, como um único número é atribuído a cada signo, podemos facilmente identificar o signo se tivermos o número e vice e versa. Esse número que é atribuído é chamado de número de Gödel.

Vemos nas tabelas³³ abaixo como funciona o sistema de numeração. Na tabela 1 temos o exemplo de numeração de signos constantes.

TABELA 1

Signo	Número de Gödel	Leitura
\sim	1	Não
\vee	2	Ou
\supset	3	Se.. Então
\exists	4	Existe um..
$=$	5	É igual
0	6	Zero
S	7	O Sucessor imediato de
(8	Pontuação
)	9	Pontuação
,	10	Pontuação

³³ As tabelas abaixo foram baseadas nas apresentadas em NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R. Prova de Gödel. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

Podemos numerar também as variáveis numéricas (que podem ser substituídas por numerais e expressões numéricas), as variáveis sentenciais (que podem ser substituídas por fórmulas) e as variáveis predicativas (que podem ser substituídas por predicados).

Para atribuímos valores às variáveis devemos seguir algumas regras:

- 1) deve-se associar a cada variável numérica distinta um número primo distinto maior que 10;
- 2) deve-se associar a cada variável sentencial distinta, o quadrado de um número primo distinto maior que 10;
- 3) deve-se associar a cada variável predicativa distinta, o cubo de um número primo distinto maior que 10;

Exemplificaremos melhor nas tabelas abaixo a numeração de variáveis numéricas (tabela 2), sentencial (tabela 3) e predicativa (tabela 4).

TABELA 2

Variável Numérica	Número de Gödel	Substituição
X	11	0
Y	13	1
Z	17	Y

TABELA 3

Variável Sentencial	Número de Gödel	Substituição
P	11^2	$x \Rightarrow y$
Q	13^2	$(\exists x) (x = sy)$
R	17^2	$p \supset q$

TABELA 4

Variável Predicativa	Número de Gödel	Substituição
P	11^3	Primo
Q	13^3	Composto
R	17^3	Maior do que

Então, se tivermos a sentença matemática $(\exists x) (x R y)$, existe um x tal que x é maior que y . Teremos a seguinte numeração:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 (\quad \exists \quad x \quad) & & (\quad x \quad R \quad y \quad) \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 8 & 4 & 11 & 9 & 8 & 11 & 17^3 & 13 & 9
 \end{array}$$

Porém, seria muito mais fácil de trabalhar, se ao invés de um conjunto de números tivéssemos apenas um único número. Gödel então, resolve simplificar a numeração da seguinte maneira: fazendo o produto dos nove primeiros primos (porque nove é o número de símbolos), cada um elevado ao número de Gödel correspondente ao signo elementar. Assim, para a sentença acima teríamos o número que podemos chamar de m , onde m é da seguinte forma:

$$m = 2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^{17} \times 19^{13} \times 23^9$$

Dessa maneira, a toda seqüência finita de signos elementares podemos atribuir um número de Gödel. O mais impressionante é que se tivermos um número de Gödel podemos rapidamente identificar a expressão que ele simboliza, pois pelo teorema fundamental da aritmética temos a certeza que um inteiro composto possui uma única decomposição em fatores primos.

Vejamos pelo esquema abaixo como essa identificação funcionaria:

A) Dado o número de Gödel 243.000.000

B) Decompondo em fatores primos temos:

$$243.000.000 = 2^6 \times 3^5 \times 5^6$$

C) Temos, então, os números 6 5 6



$$0 = 0$$

D) Assim, a sentença correspondente ao número de Gödel

$$243.000.000 \text{ é } 0 = 0$$

4.3 O indecidível

Como vimos, o desenvolvimento da matemática conduziu a formalização. Havia uma enorme busca pela prova da consistência da matemática. Segundo Gödel, os sistemas mais completos construídos até aquele momento eram o *Principia Mathematica* e os axiomas de Zermelo-Fraenkel.

Ambos os sistemas eram tão gerais que todos os métodos de demonstração usados até então, poderiam formalizar-se neles, ou seja, podiam ser reduzidos a axiomas e regras de inferência.

Então, seria razoável supor que estes axiomas e regras de inferência seriam suficientes para decidir todas as questões matemáticas que possam ser expressas nesse sistema. Mas não foi assim que funcionou, alguns problemas simples não podiam ser decidíveis com base apenas nos axiomas. Ou seja, Gödel mostrou que em todo sistema formal existem proposições que são indecidíveis, ou seja, ela nem sua negação podem ser provadas dentro do sistema.

O sistema formal utilizado por Gödel para a elaboração de sua demonstração foi uma sobreposição dos axiomas de Peano a

lógica do *Principia Mathematica*. Para ele, um sistema formal deveria especificar: seus símbolos básicos, suas fórmulas, seus axiomas, e a relação de ser *uma consequência imediata de*. Os resultados da demonstração de Gödel podem ser encontrados em qualquer sistema formal que contenha proposições aritméticas.

Para provar que um sistema é consistente é necessário encontrar uma proposição que não possa ser demonstrada, já que na lógica clássica, uma contradição implica a trivialidade do sistema, isto é, que tudo é verdadeiro.

1) Se $(A \wedge \tilde{A}) \Rightarrow B$

Ou seja, se há contradição, toda proposição é verdadeira.

A partir de 1) podemos concluir que:

Se $\exists B$ não verdadeiro $\Rightarrow \forall (A \wedge \tilde{A})$

Se nem tudo vale \Rightarrow o sistema é livre de contradições, consistente.

Agora, a busca de Gödel para evitar o paradoxo, através do mapeamento, é tentar provar a existência de algo que existe e não pode ser provado. O resultado, no entanto, foi que Gödel se viu mapeando o paradoxo de Richard para a aritmética, construindo uma sentença matemática que é tanto auto referente como auto excludente, mas evitando as imprecisões contidas no paradoxo original.

Antes de fazer sua demonstração formal³⁴ Gödel descreve informalmente o que vai fazer em seu raciocínio³⁵. Seu objetivo é obter uma proposição indecidível, isto é, uma proposição A para qual nem A nem não A são demonstráveis.

Seja, então, uma fórmula com precisamente uma variável livre, a chamarei de expressão de classe.

³⁴ Essa demonstração pode ser encontrada no Teorema 7 do Apêndice

³⁵ Explicação baseada na dada por Gödel em GÖDEL, Kurt. O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. Lisboa: Editora da Fundação Calouste Gulbenkian, 1979, p.248 ss

As expressões de classe podem estar de alguma maneira ordenadas. Assim, a expressão de classe de ordem n representarei por $R(n)$.

Seja α uma expressão de classe e $[\alpha, n]$ a fórmula que resulta da expressão de classe α quando substituo a variável livre pelo número natural n .

Definiremos uma classe k de números naturais do seguinte modo:

$$n \in k \Leftrightarrow \sim \text{Bew } [R(n); n]$$

Isto é, $n \in k$ se e somente se a fórmula não é demonstrável quando a variável é substituída por n .

Podemos também definir que existe uma expressão de classe S tal que $[S, n]$ que diz que $n \in k$. Ou seja, que não pode ser demonstrada.

Essa fórmula estará ordenada, terá uma ordem certa e definida tal que $S = R(q)$.

Mostraremos que $[R(q); q]$ é indecidível.

Se $[R(q); q]$ fosse demonstrável ela diria que $q \in k$, e assim $\sim \text{Bew } [R(n); n]$, ou seja, não pode ser demonstrável.

Por outro lado se $\sim [R(q); q]$ fosse demonstrável $q \notin k$ logo $\text{Bew } [R(q); q]$, ou seja, ela e sua negação poderiam ser demonstráveis.

Uma demonstração alternativa a demonstração formal de Gödel é a demonstração de Ricardo Kubrusly descrita a seguir:

Para facilitar, podemos criar uma fórmula $Dem(x,y)$ que representa: *o conjunto de fórmulas com número de Gödel x é uma prova da fórmula cujo número de Gödel é y* . Da mesma maneira podemos criar a fórmula $\sim Dem(x,y)$ que representa: *o conjunto de fórmulas cujo número de Gödel é x não é uma prova da fórmula cujo número de Gödel é y* .

Agora, considere a fórmula $\exists y(x) \sim Dem(x,y)$ que nos diz que: *existe uma fórmula cujo número de Gödel é y , para a qual*

qualquer conjunto de fórmulas cujo número de Gödel é x não é uma prova para ela, ou seja, a própria fórmula cujo número de Gödel é y . Em outras palavras, existe uma fórmula que não pode ser demonstrada. Chamaremos o número de Gödel que representará a fórmula $(x) \sim Dem(x,y)$ de $G(y)$. Assim, podemos notar que para cada y teremos um número de Gödel $G(y)$ diferente. Gödel provou que existe solução para a equação $G(y) = y$. Com isso, a fórmula cujo número de Gödel é y e que não pode ser demonstrada é a própria $(x) \sim Dem(x,y)$, ou seja, temos $(x) \sim Dem(x, G(y))$.

Assim, foi possível construir o tão desejado:

$$\exists y (x) \sim Dem(x,y), \text{ com } y = G(y)$$

A fórmula de número de Gödel y (que é ela mesma) não pode ser demonstrada. Ou seja, a fórmula que não pode ser demonstrada é que existe uma fórmula que não pode ser demonstrada.

Ao analisarmos a estrutura da fórmula, $(x) \sim Dem(x, G(y))$, que diz que não pode ser provada vemos que ela é paradoxal pois se a fórmula for verdadeira, ela poderá ser demonstrada como verdade do sistema, mas como ela diz que não pode ser demonstrada ela será falsa. Do mesmo modo, se admitirmos que ela é falsa, que não pode ser demonstrada como uma verdade do sistema, pelo princípio do terceiro excluído, ela poderá ser demonstrada, logo é verdadeira.

Assim, ao nos depararmos com a questão acima derrubamos de vez a expectativa de uma matemática consistente e completa.

Temos uma situação limite em que o sistema tem que optar entre o paradoxo e o indecidível.

De modo algum podemos abrir mão da consistência do sistema matemático, logo sem paradoxos, com certeza ela produzirá indecidíveis. Esses indecidíveis devem ser postos para fora do sistema, para que não gerem contradições e não resgatem a inconsistência. Logo, existirão afirmações que não podem ser

provadas dentro do sistema, que por sua vez não será capaz de provar ou contraprovar todas as suas afirmações, logo ele será incompleto. Assim, podemos tirar a primeira conclusão:

Se a matemática é consistente, ela é incompleta.

OBS: Não devemos nos preocupar pois, sem muitos danos, poderemos fora do sistema julgar como verdadeira ou falsa uma afirmação contida num indecível e introduzi-la no sistema anexando a ele um novo postulado.

Para construirmos a fórmula $\exists y (x) \sim Dem (x,y)$, acabamos afirmando a impossibilidade de se demonstrar dentro do sistema uma outra fórmula cujo número de Gödel é y , $(x) \sim Dem (x,y)$. Em seguida ao associarmos o número de Gödel $G (y)$ a essa fórmula, construímos um indecível pois a fórmula diz que ela mesma não pode ser demonstrada. Ou seja:

$$\exists y (x) \sim Dem (x,y) \Rightarrow (x) \sim Dem (x,G(y)).$$

Então, basta encontrar pelo menos uma fórmula que não pode ser demonstrada que estaremos demonstrando a fórmula que assegura a existência de um indecível e que como já vimos não pode ser demonstrada. Logo, podemos chegar a uma segunda conclusão:

Se a matemática é consistente, ou seja livre de paradoxos, sua consistência não pode ser provada dentro da própria matemática.

Se a afirmação acima não fosse verdadeira, poderíamos então demonstrar a fórmula $\exists y (x) \sim Dem (x,y)$ que resultaria na demonstração da fórmula $(x) \sim Dem (x,G(y))$ que não pode ser nem

provada, nem contraprovada para que o sistema se mantenha consistente.

Capítulo 5 Algumas Idéias para Serem Discutidas

Verdade

Carlos Drummond de Andrade

A porta da verdade estava aberta,
mas só deixava passar
meia pessoa de cada vez.

Assim não era possível atingir toda verdade,
Porque a meia pessoa que entrava
Só trazia meio perfil de verdade.
E sua segunda metade
Voltava igualmente com meio perfil.

Arrebentaram a porta. Derrubaram a porta.
Chegaram ao luminoso
Onde a verdade esplendia seus fogos.
Era dividida em metades
Diferentes uma da outra.

Chegou-se a discutir qual a metade era mais bela.
Nenhuma das duas era totalmente bela.
E carecia optar. Cada um optou conforme
Seu capricho, sua ilusão, sua miopia.

“As palavras e as coisas só se abraçam em certas ocasiões e mesmo assim com um certo desconforto.”

Walter Benjamin

Há muito tempo se discute se as estruturas matemáticas possuem uma existência real ou ideal para que a partir dessa definição se estabeleça o critério de definição do que realmente é verdade matemática.

Existem algumas opiniões a respeito desse problema. O realismo defende que proposições matemáticas são verdadeiras na medida em que encontram correspondência com a natureza, com o mundo físico. Já o idealismo acredita que a matemática possui objetos mentais. Dentro da visão idealista, podemos diferenciar a visão Platonista que afirma a independente existência de toda concepção matemática. E os intuicionistas que afirmam que tudo depende a priori de uma base intuitiva de sucessão temporal. Por fim, há o formalismo, que como já foi descrito nos capítulos anteriores, acredita que os objetos matemáticos são símbolos desprovidos de significados. O formalismo seria uma linguagem perfeitamente precisa, onde a partir de um número mínimo de axiomas e regras primitivas de inferência seria possível expressar qualquer proposição matemática por uma fórmula.

Neste Capítulo, venho defender uma visão nem tanto realista, pois como veremos na minha argumentação não creio que as verdades matemáticas sempre encontrem correspondência na natureza muito menos que os objetos matemáticos estejam no mundo real. Nem tão pouco sou formalista ao ponto de achar que os objetos matemáticos são sempre meros símbolos desprovidos de significados.

Acredito numa visão idealista, ou seja, que a matemática possui objetos mentais, entretanto não acho que a sucessão temporal exista nesse mundo ideal. Acho que a matemática não

precisa estar submetida ao tempo uma vez que o infinito permeia toda sua base. Também não acho que o Platonismo venha responder realmente o que é a natureza dos objetos matemáticos, pois diferentemente de Gödel creio que esses objetos são ideais dependentes da nossa estrutura mental.

Logo, ousou discordar com Gödel quando ele diz que objetos matemáticos são conceitos que formam uma realidade objetiva própria, que não pode ser criada ou modificada, mas somente percebida e descrita. Baseando sua argumentação na existência de proposições indecidíveis na matemática. Pois para Gödel, o criador necessariamente conhece todas as propriedades da sua criatura e a criatura não pode possuir outras propriedades além daquelas dadas pelo criador.

Mas de modo algum, a estrutura lingüística que é a matemática pode ser independente de nós, uma vez que somos nós que definimos seu corpo de axiomas e suas regras de inferência e as manipulamos mentalmente gerando novos resultados.

Meu ponto de vista então, está em consonância com o que diz Carnap (1891–1970). Acredito que as verdades matemáticas são conseqüências da adoção de uma estrutura, de uma armação lingüística que tem como objetivo uma fundamentação teórica onde os resultados necessariamente estejam de acordo uns com os outros e quando possível, com fatos empíricos, na tentativa de descrição do mundo.

De fato, não acredito que o teorema da incompletude venha afirmar um platonismo na matemática mas apenas constatar que a linguagem não pode dizer nada a respeito da sua própria estrutura.

Então vamos discutir um pouco mais esse assunto. Para fundamentar a argumentação posta anteriormente começarei discutindo o que são estruturas matemáticas e onde é possível encontrá-las. Sabemos que são estruturas matemáticas: números, conjuntos, formas geométricas, ...

É fato que não precisamos nos esforçar muito para nos depararmos com essas estruturas. Inúmeros objetos ao nosso redor possuem diversas formas geométricas. Além disso, medidas e quantidades são dadas em números, e conseguimos com facilidade quantificar praticamente tudo.

Porém, na verdade se analisarmos melhor, será que realmente nos deparamos com essas estruturas na realidade? Quando medimos um terreno e verificamos que este possui 10 metros de comprimento o que realmente se mostra na realidade não é o número 10 e sim a extensão de terra.

Do mesmo modo, quando calculamos a velocidade de um carro, por exemplo, o que estava na realidade não é a velocidade e sim uma determinada distância percorrida com o decorrer de um período de tempo (pelo menos que tive a sensação de ter decorrido).

Assim como, se detecto um crescimento da taxa de natalidade (e faço essa detecção em números) o que realmente percebo na realidade são crianças.

Mas se ao olhar minha mesa redonda finalmente tenho uma sensação de alívio pois enfim achei uma estrutura matemática na realidade (um círculo) logo sou surpreendida pois ao dividir o comprimento da circunferência pelo diâmetro não acho π .

Com base nesses argumentos, é possível que as estruturas matemáticas não sejam pré-existentes na medida em que não é possível acharmos números ou objetos perfeitos na realidade.

Essa idéia de que as estruturas matemáticas não estão na realidade objetiva se fortifica se estamos de acordo com Hilbert, que dizia que “em um certo sentido a matemática nada mais é que uma sinfonia sobre o tema do infinito”³⁶. O infinito é um elemento importante nessa discussão pois de fato parece não existir na natureza e assume papel fundamental indiscutível na matemática

³⁶ MARTINEZ, Javier de Lorenzo. A Ciência do Infinito. Scientific American Brasil, São Paulo, nº 15, Página 6 – 13, 2006.

situando-se na base da análise matemática como, por exemplo, na formalização do conceito de continuidade de uma função em um ponto³⁷. Além disso, quando analisamos as demonstrações que recorrem ao infinito real mais uma vez a presença do infinito na matemática corrobora para a conclusão de que esta seria uma construção absolutamente mental pois estas demonstrações perdem o caráter construtivo, ou seja, elas possuem apenas um caráter existencial sem que se possa construir o objeto cuja existência elas demonstram. Pode ser que em alguns casos a gente ainda não tenha descoberto o caminho dessa construção, porém em outros, essa construção já é de fato vista como impossível tais como acontece com os hiperinfinitos³⁸.

Se olharmos ainda a demonstração da existência dos números transcendent³⁹, nos deparamos com uma demonstração absolutamente não construtiva que para mostrar sua existência a nega para chegar a um absurdo.

Cantor fez a demonstração da seguinte maneira: ele demonstrou que o conjunto dos números reais é não enumerável e que o conjunto dos números algébricos é infinito enumerável fazendo uma bijeção entre os elementos do conjunto dos naturais e os elementos do conjunto dos números algébricos. Logo existem números reais que não são algébricos, mostrando assim, a existência dos números transcendent⁴⁰. É fácil ver que estes, por sua vez, são não enumeráveis⁴⁰.

³⁷ Uma função f é contínua no ponto x_0 se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

³⁸ Um conjunto é, por definição, infinito quando consegue corresponder biunivocamente seus elementos com elementos de pelo menos um de seus subconjuntos. Um conjunto é hiperinfinito quando além de apoiar-se na definição acima exige que a correspondência entre os seus elementos e dos elementos de seus subconjuntos conserve todas estruturas aritméticas adicionais do conjunto.

³⁹ Um número é transcendente quando não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros, ou seja, quando não é algébrico.

⁴⁰ A demonstração pode ser vista no Teorema 8 do Apêndice .

Como já argumentamos, os objetos matemáticos parecem não poder ser detectados na realidade. As formas geométricas não são passíveis de serem encontradas na natureza e se as construímos, mesmo assim, o que teremos são aproximações. Como será possível construir um quadrado cujo lado mede ℓ se sua diagonal deverá medir $\ell\sqrt{2}$? Por mais preciso que meu instrumento de medição seja, a diagonal feita por mim não medirá jamais $\ell\sqrt{2}$, pois $\sqrt{2}$ é um número incomensurável, de escrita infinita. É importante refrizar que não se trata de uma questão de aperfeiçoamento do instrumento de medida. É posto que, dentro do paradigma matemático vigente, nunca será possível a construção dessa diagonal e de qualquer outra como também não será possível jamais construir a altura de um triângulo equilátero, de lado ℓ , já que esta mede $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Sendo assim, mesmo que tenhamos a sensação que é possível encontrar números naturais e até inteiros na realidade, quando nos damos conta dos irracionais tudo muda de figura.

Aumentamos nossa inquietude quando nos deparamos com o Paradoxo de Banach – Tarski⁴¹. Nele não há contradição matemática, apenas uma não correspondência entre o teórico e o real fruto do mundo contínuo da matemática e das conseqüências do axioma da escolha⁴².

No paradoxo de Banach-Tarski, uma esfera pode ser decomposta em um número finito de pedaços de tal maneira que esses pedaços adequadamente deslocados (sem deformação) se reagrupem para formar duas esferas idênticas à esfera inicial. Mais ainda, uma esfera pode ser transformada num cubo, sem nenhuma restrição relativa ao volume inicial da esfera e final do cubo.

⁴¹ A demonstração desse paradoxo pode ser vista no Teorema 9 do Apêndice

⁴² O Axioma da Escolha é um indecidível matemático. Essa demonstração pode ser vista no Teorema 6 do Apêndice.

Deste viés, é mais plausível que as estruturas matemáticas sejam uma obra humana e, na verdade, com a possibilidade de aproximação sucessiva, os objetos reais, que existem na realidade objetiva, encontrem nelas uma maneira eficaz de leitura, de representação.

Desta forma, a matemática serviria de linguagem para a natureza e para a realidade.

Mas como é possível essa leitura? Como algo abstrato cheio de regras exclusivas do pensamento pode servir tão eficazmente para representar a realidade concreta?

A partir de agora, nosso objetivo é buscar respostas para essas perguntas.

Segundo Wittgenstein: “O mundo imaginário, por mais que difira do mundo real, deve ter algo – uma forma – em comum com ele.”⁴³. Logo, a matemática, com seus objetos ideais, deve possuir algo em comum com a realidade. “O disco gramofônico, a idéia musical, a escrita musical, as ondas sonoras, todos mantêm entre si a mesma relação interna afiguradora que existe entre a linguagem e o mundo”⁴⁴

Na verdade, acredito que a matemática, o mundo imaginário, e a física, o mundo real, possuem em comum a estrutura lógica decorrente das suas raízes iniciais. Explicarei melhor. O homem sempre buscou verdades sobre o mundo e para criar seus modelos teóricos precisou, em diversos campos, assumir verdades primeiras, que na maioria das vezes não puderam, e ainda não podem, ser comprovadas.

Essas verdades foram sendo manipuladas cuidadosamente com regras claras, ou seja, por uma lógica pois para ser conhecimento válido sempre se buscou o rigor da linguagem.

⁴³ WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo:Edusp, 1993. Aforismo 2.022

⁴⁴ WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo:Edusp, 1993. Aforismo 4.014

Sendo assim, algumas coisas precisavam ser intuídas para que a partir delas, se desenvolvesse a busca pelo conhecimento. Um exemplo claro dessa intuição é que o homem acreditava que o Sol girava em torno da Terra. A partir dessa premissa foi desenvolvida todo um conjunto de teorias.

É claro, que o homem ao mesmo tempo em que elaborava essas verdades iniciais, que podemos chamar de axiomas, acerca da experiência, do real, também o fazia acerca do ideal, do abstrato. Um exemplo de axioma acerca do abstrato é o clássico axioma de Euclides: Por dois pontos distintos passa uma única reta.

No momento em que elaboro verdades, baseada na intuição, sobre o ideal, como o axioma de Euclides, visto acima, estas produzem um sistema consistente. Mesmo que a intuição nos engane, essa verdade vai originar um modelo possível. Ainda na geometria posso elucidar a questão. Se assumo o 5º Postulado de Euclides⁴⁵ como verdadeiro, tenho a geometria euclideana. Se assumi-lo como falso crio as geometrias não euclidianas e de modo algum estas impedem, ou anulam a existência da primeira. No abstrato, dois modelos com verdades antagônicas podem co-existir com tranqüilidade.

Contudo, quando faço uma premissa intuitiva baseada na observação sobre a realidade, introduzo esta verdade no sistema e a partir dela desenvolvo uma teoria, como foi feito no nosso exemplo da crença que o Sol gira em torno da Terra, ou até mesmo da Terra ser plana. No momento em que constato que a observação não foi feita corretamente, tendo que assumir uma nova verdade, que a Terra é que gira em torno do Sol, ou que a Terra não é plana, estas gerarão um novo modelo teórico que, por ser contraditório com o primeiro, o anulará. Pois quando falo de Terra e Sol falo de realidade, logo, estou atrelada a ela, tendo a obrigação de descrever um modelo condizente com esta realidade.

⁴⁵ Por um ponto P fora da reta r , passa apenas uma única reta s paralela a r .

Desse modo, as teorias geradas a partir dos axiomas sobre o abstrato podem ser vistas como fazendo parte do corpo da matemática, já as teorias desenvolvidas com base nas verdades a respeito do real, compõem a física.

Assim, esses dois campos de conhecimento se distinguiriam por seus objetos. a física se baseia em objetos reais e cria leis modelando esta realidade, como por exemplo a Primeira Lei de Newton⁴⁶. Já a matemática possui objetos ideais, como já foi dito, e cria modelos abstratos. Ou seja, a existência da matemática é uma questão de consistência formal enquanto a existência da física está atrelada a experiência. Entretanto, o que estamos discutindo é que, muitas vezes esses modelos abstratos são utilizados como modelagem da realidade, como por exemplo a descrição do movimento de um projétil através de uma função.

Wittgenstein em seu *Tractatus Lógico-Philosophicus* faz aforismos a respeito da descrição da realidade, vejamos alguns:

“Figuramos os fatos”⁴⁷

“A figuração é um modelo de realidade”⁴⁸

“ O fato, para ser uma figuração, deve ter algo comum com o afigurado”.⁴⁹

“ O que toda figuração, qualquer que seja sua forma, deve ter em comum com a realidade para poder de algum modo –

⁴⁶ **Todo corpo tende a permanecer em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.**

⁴⁷ **WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo:Edusp, 1993. Aforismo 2.1**

⁴⁸ **WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo:Edusp, 1993. Aforismo 2.12**

⁴⁹ **WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo:Edusp, 1993. Aforismo 4.16**

correta ou falsamente – afigurá-la é a forma lógica, isto é, a forma da realidade”⁵⁰

“A figuração tem em comum com o afigurado a forma lógica de figuração”⁵¹

Dessa forma, baseado nessas idéias, a matemática com seus objetos ideais figura os fatos da realidade. E essa figuração é um modelo da realidade, uma construção simbólica do mundo. E isso se torna possível pois a figuração se enlaça com a realidade através da afiguração. Isto é, a matemática permearia a realidade através da física, pois ambas possuem a mesma estrutura lógica.

A relação afiguradora (física) consiste nas coordenações entre os elementos da figuração (matemática) e as coisas (a realidade). Segundo Wittgenstein, essa coordenação funciona como antenas dos elementos da figuração, com as quais ela toca a realidade.

Concluo então, que os números são essas antenas que fazem o elo entre o real e o ideal, concreto e abstrato.

Mas como isso acontece já que os números não estão na realidade? A resposta para isso é que os números representam a realidade como significado e não como significante e já na matemática o contrário acontece. Vou explicar melhor. O que existe na realidade é quantidade. Para a designação dessa quantidade foi inventada uma simbologia. Esse símbolo quando representa a realidade possui significado, ou seja, expressa acerca do mundo ao nosso redor, como por exemplo há 10 crianças na sala, o 10 representa a quantidade de crianças existentes na sala. Entretanto, podemos desprover esse símbolo de conteúdo, de conceito e trabalhar apenas com sua simbologia, com sua forma, o

⁵⁰ WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo:Edusp, 1993. Aforismo 2.18

⁵¹ WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. São Paulo:Edusp, 1993. Aforismo 2.2

número como significante. Logo, para representar a realidade o número se apresenta como significado, como conceito e para ser manipulado mentalmente se apresenta como significante, como forma. Desta forma é possível admitir que a matemática diga numericamente a respeito do mundo e concomitantemente possua números que não falam a respeito do mundo como por exemplo os irracionais. Os irracionais são apenas significantes de nenhum modo assumem um papel de significado, não representam a realidade.

De posse dessa explicação vamos tentar entender como isso funciona. Vamos retornar ao exemplo quando fazemos uma medição em um terreno. O que realmente está na realidade, como objeto, é a extensão de terra. Essa extensão pode ser quantificada, e a maneira que represento esta quantidade é através de uma simbologia inventada, através dos números. Esse número por sua vez está carregado de significado, impregnado de realidade, 10 representa a extensão de terra do comprimento do meu terreno, o 10 não se encontra no real é apenas uma simbologia, mesmo que significativa.

É possível então abstrair o significado do número e este se tornar significante e desta forma servirá de objeto matemático. Ou seja, o objeto matemático é o número em sua forma ideal, que pode ser manipulado e operacionalizado. Assim, por exemplo, posso fazer $10 - 2 = 8$. Nessa conta 10, 2, 8 são apenas símbolos mas quando retorno a realidade e atribuo significado a esses símbolos 10 pode ser o número de crianças que estavam na sala, 2 o número de crianças que saíram da sala e 8 o número de crianças que permanecem na sala.

Para querer inferir na realidade através do jogo mental, além de que se possua mesma estrutura lógica, é preciso que o número quantificador, como significado seja utilizado apenas como significante. Só assim consigo manipulá-lo chegar a um resultado

e fazer novamente a travessia e recarregar o que era apenas símbolo de realidade.

Podemos analisar um outro exemplo, dessa vez utilizaremos a modelagem do movimento pela fórmula. Vejamos o caso: $S = S_0 + V_0 t$. Essa fórmula descreve: Espaço é igual a espaço inicial mais velocidade inicial vezes o tempo. Novamente os números serão significado e significante e farão o elo de ligação entre a matemática e a realidade por intermédio da física.

A física através de experimentos observa que um carro parte com uma velocidade inicial V_0 , sem aceleração, de um determinado ponto S_0 e vai percorrendo distâncias S com o decorrer do tempo t . No final da observação terei inúmeros resultados relacionando o tempo decorrido com o espaço percorrido. Agora, deixo a significação de lado obtenho apenas pares de números. Assim, esses números como simbologia são objetos matemáticos e podem ser então manipulados por ela. A partir daí, consigo com o auxílio da geometria analítica marcar geometricamente esses pares de números em um plano cartesiano e consigo deduzir que esses pontos representam uma reta. E como sabemos retas são designadas por funções afins. De posse desses pontos facilmente encontro a função que designa essa reta. Essa função será capaz de inferir e prever que distância o carro percorreu depois de um determinado tempo decorrido, mesmo sem que o carro se mova, sem a experimentação, pois ela resultará em números que num primeiro momento são desprovidos de significado mas que em seguida podem ser retirados do abstrato, sobrepostos no concreto para falar com uma certa segurança sobre a realidade.

Em qualquer análise, a realidade é passível de ser modelada pela matemática. Desta afirmativa novas perguntas surgem. A natureza poderá ser modelada como um todo? E a matemática sempre que solicitada servirá de modelo teórico eficaz?

Encontrar uma resposta satisfatória a primeira pergunta é muito difícil, só saberei se posso descrever a natureza como um todo no dia em que efetivamente conseguir modelá-la como um todo, enquanto isso não acontece serão apenas conjecturas, então, não me prenderei demais a essa discussão.

Quero discutir a segunda questão levantada: a matemática servirá como modelo eficaz de modelagem da natureza? Podemos elencar duas possíveis observações. A primeira é a seguinte como foi descrito no exemplo do movimento do carro para que a modelagem aconteça é sempre necessária a observação pois a partir dela serão encontrados números cobertos de significados e destes serão extraídos números significantes que serão matematicamente manipulados e resultarão na base teórica. Tendo em vista esse processo é possível que falhemos na observação e não consigamos um modelo teórico tão eficiente, já que este não está descrevendo a realidade como ela realmente é. É o caso da quebra dos paradigmas como ocorreu com Galileu (1564–1642) que afirmou que nosso modelo não era geocêntrico e sim heliocêntrico.

Mas penso que ainda há a possibilidade de a observação estar em perfeita consonância com a realidade e não conseguirmos modelá-la matematicamente. Isto porque a matemática é um sistema formal que, como vimos no capítulo anterior relacionado ao teorema de Gödel, para ser consistente, precisa evitar paradoxos, tem que ser incompleto, ou seja, esse sistema possui afirmações que são indecidíveis, isto é, não podem ser julgadas como verdadeira ou falsa dentro da própria matemática. É possível que recorramos um dia à matemática a respeito de algo sobre a natureza e ela simplesmente silencie. Ou seja, que para executarmos uma modelagem, esta necessite comportar um indecidível.

Desta forma a resposta necessária deixa de ser dada completamente pelo sistema e tenha de ser inicialmente decidida por nós.

Se algum dia isso ocorrer, ou seja, buscarmos uma modelagem matemática para a realidade e essa modelagem recorrer a um indecidível, podemos imaginar que a matemática não é a linguagem ideal para a descrição da realidade.

Entretanto, parece-me bem razoável que a matemática possa realmente descrever a realidade no momento que ela se descobre incompleta, no momento que ela sabe que não dará conta de todas suas afirmativas, muito menos de todas as perguntas feitas a ela a respeito de outros sistemas.

Contudo, até agora, mesmo com quebras de paradigmas, a matemática consegue embasar teorias físicas com extrema eficácia. Até porque as quebras de paradigmas foram feitas no âmbito da física, da observação. Quando a gravitação da física clássica, como já foi citada, é estremecida pela teoria da relatividade o que é posto a prova é a questão física pois a matemática da teoria da gravitação é extremamente consistente e eficaz. Se ao invés de Einstein (1879–1955), Newton estiver correto não há nenhum problema com a matemática responsável pela teoria da gravitação.

Desta forma, será que o teorema de Gödel vem como o silêncio daquilo que não se pode falar? Ao nos darmos conta da incompletude matemática a descartaremos como linguagem incapaz ou nos daremos conta da sua eficiente capacidade de representação da realidade?

Conclusão

“ Sem dúvida já lhes perguntaram muitas vezes para que serve a matemática, e se essas delicadas construções que tiramos inteiras de nosso espírito não são artificiais, concebidas por nosso capricho.

Entre as pessoas que fazem essa pergunta, devo fazer uma distinção; as pessoas práticas reclamam de nós apenas um meio de ganhar dinheiro. Estes não merecem resposta; é a eles, antes, que conviria perguntar para que serve acumular tantas riquezas e se, para ter tempo de adquiri-las, é preciso negligenciar a arte e a ciência, as únicas que podem nos proporcionar espíritos capazes de usufruí-las. E por causa da vida perdem-se as razões de viver.

Aliás uma ciência unicamente feita tendo em vista aplicações é impossível; as verdades só são fecundas se forem ligadas umas as outras. Se nos prendermos somente àquelas das quais se espera um resultado imediato, faltarão os elos intermediários, e não haverá mais cadeia.

A matemática tem um tríplice objetivo. Deve fornecer um instrumento para o estudo da natureza. (...) Tem um objetivo filosófico e, ousar dizer, um objetivo estético.

(...) Seus adeptos, sobretudo encontram nela fruições análogas às proporcionadas pela pintura e música. Admiram a delicada harmonia dos números e das formas; maravilham-se quando uma nova descoberta lhe abre uma perspectiva inesperada.”⁵²

Henri Poincaré

O Teorema de Gödel vem como solução da terceira crise nos fundamentos da matemática. Essa crise é resultado da aparição de

⁵² POINCARÉ, Henri. *O Valor da Ciência*. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 1995. p. 89

paradoxos matemáticos, que inicialmente eram exclusivos da linguagem usual, que surgem com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos de Cantor.

Contudo, o teorema da incompletude vai muito além do que ser somente a solução de uma crise, pois na verdade evidencia a limitação da matemática como linguagem.

Isto ocorre da seguinte maneira:

Conseguimos mostrar que os objetos matemáticos são ideais, não estando na realidade. Contudo, de forma alguma essa ausência de objetos na realidade impede a matemática de modelar e desenvolver teorias abstratas sobre o real. Isto porque a física, que possui objetos reais, faz proposições acerca da realidade. Como a física possui a mesma estrutura lógica da matemática, ela consegue através dos números corresponder objetos reais a estruturas matemáticas.

Então, surge a sensação que, salvo as vezes em que as proposições feitas pela física a respeito da realidade não sejam proposições que verdadeiramente correspondam a essa realidade, sempre poderemos desenvolver teorias eficazes de modelagem e inferência através do arsenal matemático.

Contudo, em 1931, Gödel demonstra que a matemática para se livrar das contradições e paradoxos que ameaçam sua existência, pois se ela os contiver tudo que for gerado nessa teoria não será confiável, deve ser incompleta, ou seja, não é capaz de decidir sobre tudo dentro do seu próprio sistema.

Se pensarmos a matemática como corpo de conhecimento por si, apenas como objetivo estético, esse teorema traz o deslumbre pela estratégia de sua demonstração e gera apenas o incômodo de determinadas vezes sermos obrigados a parar, decidir sobre algumas afirmativas e recolocá-las no sistema como verdadeiras ou falsas para darmos continuidade ao nosso jogo mental sem problemas.

Mas se vemos a matemática segundo um outro objetivo, como instrumento de estudo da natureza, o teorema de Gödel traz à tona os limites, ou seja, a incompletude do sistema matemático, da linguagem que descreve o mundo.

Enquanto está tudo aparentemente confortável e a matemática consegue teorizar sobre o espaço e o movimento, vamos continuar a exaltá-la como um sistema forte, potente e eficaz (que realmente é) capaz de inferir, prever e descrever, vamos continuar a nos maravilhar com seus números e suas fórmulas.

Mas se algum dia ela resolver silenciar, a respeito do mundo, e deixar como tarefa nossa decidir, devemos parar e pensar que só desta maneira ela pode estar sendo realmente eficaz sendo a única arte que os sentidos não captam, apenas a razão.

Galeria de Fotos



Vila de Gödel em Brno



Gödel e seu irmão Rudolf (a esquerda)



Retrato de casamento: Gödel e Adele



O jovem estudante Gödel na Universidade de Viena



Gödel e sua mãe Marianne com Oskar Morgenstern



Recebimento de grau Honorário na Universidade de Rockefeller

Galeria de Fotos



Einstein e Gödel, 13 de Maio de 1947



Gödel em sua sala, Princeton



Um dos boletins de Gödel



Gödel em frente ao quadro negro



Oskar Morgenstern e Gödel



Gödel em seu escritório

Apêndice

Aqui, copilamos, a título de catálogo, as demonstrações matemáticas dos resultados comentados no corpo da dissertação. A seqüência do teoremas apresentados é o de sua aparição no texto principal.

As dificuldades variam, indo de demonstrações bastante compreensíveis por um leitor leigo até algumas que exigem os olhos especialistas de matemáticos experientes.

TEOREMA 1: $\sqrt{2}$ é um número irracional

DEMONSTRAÇÃO:

Faremos esta demonstração por absurdo.

Suponha $\sqrt{2}$ um número racional.

Assim, podemos escrever

$$(1) \quad \sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

onde a, b são inteiros e primos entre si⁵³.

Podemos elevar ao quadrado a igualdade (1) obtendo:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2 \quad (2)$$

De (2) concluímos que a^2 é um número par, e conseqüentemente a também é um número par

Podemos, então, escrevê-lo da seguinte maneira:

⁵³ Dois números a e b são primos entre si quando o $\text{mdc}(a, b) = 1$, em outras palavras $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível

$$(3) \quad a = 2n$$

Assim, substituindo (3) em (2) teremos:

$$4n^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2n^2 \quad (4)$$

De (4) obtemos que b^2 é um número par, e conseqüentemente b também é um número par.

Desta forma, podemos concluir, que a e b são números pares.

Chegamos assim a um absurdo pois supomos que eles eram primos entre si.

Assim, $\sqrt{2}$ não é um número racional, pelo princípio da não contradição e do terceiro excluído concluimos então que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Como queríamos demonstrar.

TEOREMA 2: *O conjunto dos números Racionais é enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO:

Para demonstrar esse teorema precisaremos de dois teoremas auxiliares o teorema 2.1 e o teorema 2.2. Vejamos:

TEOREMA 2.1: *O conjunto dos números Reais algébricos é enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO:

Definição: Seja a equação

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

Dizemos que o índice da equação (1) é o número:

$$n + |a_n| + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_2| + |a_1| + |a_0| \quad (2)$$

Podemos fazer uma tabela relacionando índice e equações, como vemos no exemplo:

Índice	Equações
2	$x = 0$
3	$x^2 = 0, 2x = 0, x + 1 = 0, x - 1 = 0$
4	$x^3 = 0, x^2 = 0, x^2 = 0, x^2 = 0, x + 1 = 0, x + 1 = 0, x + 1 = 0, x + 1 = 0, x + 1 = 0$

E assim por diante.

Faremos assim, a listagem com todos os novos números algébricos provenientes das equações da tabela acima.

Se para cada índice, dispusermos os números em ordem crescente, obteremos a seqüência:

$$(3) \quad 0; \quad -1, 1; \quad -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; \quad -3, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 3; 4, \dots$$

O número 0 vem da única equação de índice 2, os números -1 e 1 das equações de índice 3, e assim por diante. Para qualquer índice n fixo, o número de equações é finito, porque o grau n e os coeficientes a_n, \dots, a_0 estão restritos a um conjunto finito de inteiros. Além disso, temos um teorema que nos diz que dado um polinômio de grau n , esse polinômio terá n raízes.

Portanto, todos os números reais algébricos vão aparecer na seqüência (3).

Logo, podemos corresponder os elementos da seqüência (3) aos naturais.

Concluimos desta maneira que os números Reais algébricos são enumeráveis.

TEOREMA 2.2. *Um subconjunto finito de um conjunto enumerável, é enumerável*

DEMONSTRAÇÃO:

Seja M um subconjunto infinito de um conjunto enumerável S , digamos $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$. Seja a_{i_1} o primeiro elemento de S que também esteja em M , a_{i_2} , o segundo, e assim por diante. Então M será o conjunto:

$$M = \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots\}$$

que, obviamente é enumerável.

Desta forma, como o conjunto dos números Racionais é um subconjunto do conjunto dos Reais algébricos, e pelo teorema 2.1 demonstramos que os Reais algébricos são enumeráveis. Podemos concluir, pelo teorema 2.2, que os Racionais também são enumeráveis, ou seja, podem ser postos em correspondência com os Naturais.

TEOREMA 3: *O conjunto dos números Reais é não enumerável*

DEMONSTRAÇÃO:

Em virtude do teorema 2.2, será suficiente mostrar este fato para os números Reais entre 0 e 1; especificamente para os números Reais x , satisfazendo $0 < x \leq 1$, de modo que 1 esteja

incluído e 0, excluído. Suponhamos que o conjunto dos números Reais entre 0 e 1 fosse enumerável, digamos

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$$

Escrevamos estes números em forma decimal, evitando representações finitas pelo uso da forma infinita periódica⁵⁴ em tais casos. Por exemplo, o número $\frac{1}{2}$ será escrito como 0,49999... e não 0,5. Teríamos

$$r_1 = 0, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots$$

$$r_2 = 0, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots$$

$$r_3 = 0, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \dots$$

Construiremos, agora, um número

$$\beta = 0, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$$

da seguinte maneira. Seja b_1 qualquer algarismo entre 1 e 9 porém diferente de a_{11} . Analogamente, seja b_2 qualquer algarismo não nulo, diferente de a_{22} . Em geral, seja b_k qualquer algarismo não nulo, diferente de a_{kk} . Então o número β é diferente de r_1 (pois eles diferem na primeira casa decimal), é diferente de r_2 (pois eles diferem na segunda casa decimal), e generalizando, é diferente de r_n (pois eles diferem na n -ésima casa decimal). Portanto β difere de cada um dos r 's. Mas β é um número Real entre 0 e 1 e obtemos assim uma contradição.

⁵⁴ Já foi demonstrada anteriormente a possibilidade dessa substituição

Logo, o conjunto dos números Reais entre 0 e 1 é não enumerável. Pela negativa do teorema 2.2 concluímos que o conjunto dos números Reais é não enumerável.

TEOREMA 4. *Teorema de Cantor: Para qualquer A , $\overline{\overline{A}} > \overline{P(A)}$*

DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos que φ é uma função de $\overline{\overline{A}}$ sobre $\overline{P(A)}$

Seja $z = \{x \in A / \sim x \in \varphi(x)\}$.

Então $z \subseteq A$.

Se $z = \varphi(y)$ para $y \in A$ então:

$y \in z \rightarrow \sim y \in \varphi(y) \rightarrow \sim y \in z$ e

$\sim y \in z \rightarrow y \in \varphi(y) \rightarrow y \in z$, o que é impossível.

TEOREMA 5. *Consistência da Hipótese do Contínuo (HGC) e do Axioma da Escolha (AE)⁵⁵*

DEMONSTRAÇÃO:

Começaremos fazendo uma definição.

DEFINIÇÃO. *Seja X um conjunto. O conjunto X' é definido como sendo a união de X e o conjunto de todos os conjuntos y para os quais existe uma fórmula $A(z, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k)$ em Zermelo-Fraenkel*

⁵⁵ Essa demonstração foi baseada na demonstração feita por Paul Cohen. Retirada de: GÖDEL, Kurt. O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. Lisboa: Editora da Fundação Calouste Gulbenkian, 1979. Página 104 a 127

(ZF) tal que se A_x representa A com todas as variáveis ligadas restritas a X , então para algum \bar{t}_i em X

$$y = \{z \in X / A_x(z, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k)\}$$

Note que $X' \subseteq P(X) \cup X$, $\overline{X'} = \overline{X}$ se X é infinito (e supomos Axioma da Escolha).

X' pode ser exprimível inteiramente dentro de ZF⁵⁶.

DEFINIÇÃO. Se $0 \leq \alpha$, definimos M_α fazendo $M_0 = \emptyset$ e $M_\alpha = (\bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta)$

DEFINIÇÃO. Um conjunto x é construtível se $\exists \alpha, 0 \leq \alpha$ e $x \in M_\alpha$

Como $X' \subseteq P(X) \cup X$ todos os conjuntos construtíveis são bem fundados e se $x \in M_\alpha$, a ordem de $x \leq \alpha$.

Esta construção está relacionada com a definição de conjuntos bem fundados e com a demonstração de consistência do Axioma da Regularidade.

Representaremos, agora, a classe dos conjuntos construtíveis por L de modo que $x \in L$ signifique apenas que x é construtível (e não que L é um conjunto).

Logo, para qualquer fórmula A , A_L representa a fórmula A com todas as variáveis restritas construtíveis.

O axioma da Construtibilidade nos diz que todo conjunto é construtível.

⁵⁶ Cohen faz essa demonstração rigorosa.

Seja a classe universal foi representada por V , assim, podemos escrever $V=L$.

Como a nossa definição de M_α foi feita por uma indução bastante simples é fácil ver que pode ser formalizada em ZF .

Assim, a frase declarativa $V=L$ é uma única frase declarativa em ZF .

Os resultados principais são os seguintes:

TEOREMA 5.1. *Se A é um axioma de ZF , então A_L é demonstrável em ZF .*

DEMONSTRAÇÃO:

Consideraremos este teorema o teorema segundo o qual os axiomas são satisfeitos em L . Para alguns dos axiomas a demonstração é trivial.

1. Uma vez que $\emptyset \in L$, o Axioma do Conjunto Vazio é satisfeito em L .

2. Uma vez que $X' \subseteq P(X) \cup X$ para todo X , segue-se que se $x \in M_\alpha$ e $y \in x$ então $y \in \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$ e assim $y \in L$. Logo cada M_α é transitivo e assim se $x \in L, y \in x \rightarrow y \in L$. Portanto, o Axioma da Extensionalidade é satisfeito em L .

3. Suponhamos agora $x \in M_\alpha, y \in M_\beta, \alpha \leq \beta$. Então x e y estão ambos em M_β . Ora $\{x, y\} = \{z / z \in M_\beta \ \& \ (z = x \vee z = y)\}$ de modo que $\{x, y\} \in M_{\beta+1}$. Portanto, o Axioma dos Pares não-Ordenados é satisfeito em L .

4. Se $x \in M_\alpha$, o conjunto $\{z / z \in M_\alpha \ \& \ \exists y (y \in M_\alpha \ \& \ y \in x \ \& \ z \in y)\}$ está em $M_{\alpha+1}$. Mas uma vez que M_α é transitivo este é

exactamente o conjunto soma de x e assim o Axioma do Conjunto Soma é satisfeito em L .

5. Para demonstrar o Axioma do Infinito enunciamos primeiro dois lemas que mais tarde serão úteis.

LEMA 5.1. *Seja $A(x)$ a fórmula: x é um ordinal. Então $\forall x(x \in L \rightarrow (A(x) \leftrightarrow A_L(x)))$. Em geral se X é um conjunto transitivo qualquer ou uma classe, $A(x) \leftrightarrow A_X(x)$.*

DEMONSTRAÇÃO.

A partir do Axioma da Regularidade, a condição de x ser um ordinal é uma condição apenas sobre os elementos de x .

Uma vez que L é transitivo esta condição é portanto a mesma quando relativizada a L .

LEMA 5.2. *Para todos os ordinais α , $\alpha \in M_{\alpha+1}$.*

DEMONSTRAÇÃO.

É óbvio que $\emptyset \in M_1$. Seja α o primeiro α para o qual o lema é falso. Então,

$$\beta < \alpha \rightarrow \beta \in M_{\beta+1} \rightarrow \beta \in X = \bigcup_{\gamma \leq \alpha} M_\gamma.$$

Seja $A(x)$ a fórmula: x é um ordinal. Uma vez que X é transitivo e pelo lema acima se tem que $x \in X \rightarrow (A_X(x) \leftrightarrow A(x))$.

O conjunto $\gamma = \{x \in X / A_X(x)\}$ é assim um conjunto de ordinais e pela transitividade de X é na verdade ele próprio um ordinal que excede todos os ordinais $\beta < \alpha$ e por isso $\gamma \geq \alpha$.

Pela transitividade de X' , $\alpha \in X' \subseteq M_{\alpha+1}$.

Uma vez que ω está assim em L , demonstramos o Axioma do Infinito.

6. A demonstração do Axioma da Regularidade é trivial.

7. O primeiro axioma não-trivial a ser considerado é o Axioma do Conjunto Potência.

Seja $x \in L$.

Seja $P(x)$ o conjunto potência de x e $P_L(x) = \{y / y \in P(x) \& y \in L\}$.

Para cada $y \in P_L(x)$ seja $\varphi(y) =$ primeiro α tal que $y \in M_\alpha$.

Pelo Axioma da Substituição existe um ordinal β que é o sup dos ordinais no contradomínio de φ .

Logo $y \in P_L(x) \rightarrow y \in M_\beta$.

Consideremos, agora, o conjunto $\{y / y \in M_\beta \& \forall t(t \in M_\beta \rightarrow (t \in y \rightarrow t \in x))\}$. Este conjunto está em M_β e é obviamente igual a $P_L(x)$. Logo $P_L(x)$ é construtível o que implica que o Axioma do Conjunto Potência é satisfeito em L .

8. Por fim verificaremos o Axioma da Substituição em L . Seja $A(x, y; t_1, \dots, t_n)$ uma fórmula em ZF e seja A_L a fórmula relativizada. Se $t_i \in L$ e A_L define $y = \varphi(x)$ como uma função unívoca em L , temos que mostrar que se $u \in L$, o contradomínio v de φ sobre u está em L .

LEMA 5.3. *Seja $y = \varphi(x)$ uma função unívoca definida por uma fórmula $A(x, y; t_1, \dots, t_n)$ para algum t_i e tal que $x \in L$ implica $\varphi(x) \in L$. Se $u \in L$ então $\exists w \in L$ tal que se v é o contra-domínio de φ sobre u , então $v \subseteq w$*

DEMONSTRAÇÃO.

Para cada x em u seja $g(x)$ o primeiro α tal que $\varphi(x) \in M_\alpha$.
Seja $\beta = \sup\{g(x)/x \in u\}$. Obviamente $v \subseteq M_\beta$ e $M_\beta \in L$.

Seja $A(x, y; t_1, \dots, t_n)$ uma frase declarativa que está relativizada a L e tal que para t_1, \dots, t_n particulares define $y = \varphi(x)$ como uma função unívoca em L . Seja $u \in L$ e seja v o contradomínio de φ sobre u . Pelo nosso lema, existe um α tal que $v \subseteq M_\alpha$.

Assim, podemos supor que u, t_1, \dots, t_n também pertencem a M_α .
Fazendo M_α o conjunto S do teorema de Löwenheim-Skolem descrito abaixo:

TEOREMA 5.1.1. *Seja $A(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula em ZF em que todas as variáveis, livres e ligadas, são restritas para estar em L (isto é, A está relativizado a L). Seja $S \in L$. Existe $S' \in L$ tal que $S' \supseteq S$ e para todo $\bar{x}_i \in S'$,*

$$A(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leftrightarrow A_{S'}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

A partir daí, temos que para algum $S' \in L$, $A(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow A_{S'}(x_1, \dots, x_n)$ para todo x, y em S' . Sabemos que $S' \in M_\beta$ para algum β de modo que uma vez que $v = \{y \in S' / \exists x \in u \ \& \ A_{S'}(x, y; t_1, \dots, t_n)\}$, v é definido pela condição que todas as variáveis são restritas a M_β logo $v \in (M_\beta)' = M_{\beta+1}$ de modo que $v \in L$ e o Axioma da Substituição é satisfeito.

Desta maneira, o teorema 5.1 está completamente demonstrado.

TEOREMA 5.2. $(V=L)_L$ é demonstrável em ZF.

DEMONSTRAÇÃO:

Para demonstrarmos o teorema 5.2 é necessário antes mostrar que a relação $Y = X'$ pode ser expressa em ZF e que conseqüentemente a proposição $V=L$ também pode ser expressa em ZF.

Para cada $r \geq 0$ seja X_r o conjunto de todos os conjuntos S de n elementos $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ para os quais existe uma fórmula $A(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_m)$ com exatamente r quantificadores e $\bar{t}_i \in X$ tal que $S = \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle / A_X(x_1, \dots, x_n); (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m) \}$.

Agora, mostraremos que a relação $Y=X_r$ é exprimível em ZF.

A relação $Y=X_0$ é expressa enumerando todas as fórmulas sem quantificadores e por indução sobre o comprimento das fórmulas, utilizando as diversas operações de Boole e definindo os conjuntos S que resultam de cada fórmula.

Por indução em r define-se agora $Y=X_r$ dizendo que um conjunto S de n -tuplos pertence a X_r se existe um conjunto T de $(n + 1)$ -tuplos em X_{r-1} tal que $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in S \leftrightarrow \forall x_0 \in X, \langle x_0, \dots, x_n \rangle \in T$ ou se existe um conjunto T de $(n + 1)$ -tuplos em X_{r-1} tal que $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in S \leftrightarrow \forall x_0 \in X, \langle x_0, \dots, x_n \rangle \in T$.

Então X' é finalmente definido como a união de X e o conjunto de todos os conjuntos de 1-tuplos que ocorrem em qualquer X_r .

Uma vez que os conjuntos M_α foram definidos por uma simples indução transfinita em termos da operação $X \rightarrow X'$, é claro que $V=L$ é expresso como uma frase declarativa de ZF.

Para demonstrar o teorema 5.2, precisamos ainda mostrar que construção dos M_α tem o mesmo resultado tanto quando efetuada no modelo L ou quando efetuada no universo L .

Sabemos que o fato de haver conjuntos M_α em L que satisfazem a definição relativizada de M_α segue-se do fato de L ser um modelo para ZF . E assim sendo, o teorema da indução transfinita e a existência da operação $X \rightarrow X'$ são satisfeitos em L .

O facto de os M_α construídos desta maneira serem idênticos aos M_α originais e portanto de $(V=L)_L$ ser satisfeito é uma consequência de um fato muito geral que não depende do fato de L ser um modelo para ZF .

Se estamos trabalhando com um dado conjunto transitivo ou classe B em que a construção dos M pode ser efetuada relativizada a B para um dado α em B então, o M_α que daí resulta tem que ser idêntico ao M_α comum.

Isto sucede por causa do caráter predicativo da construção, que implica que para verificar se $x \in M_\alpha$ basta analisar todos os M_β com $\beta < \alpha$ e não é afetado pela existência ou ausência de quaisquer outros conjuntos no universo. Vamos agora fazer isto de uma maneira formal.

Seja $B(x)$ uma fórmula qualquer que pode envolver outras variáveis livres que consideraremos fixas. Na nossa aplicação principal $B(x)$ representará $x \in L$. Suponhamos que $B(x)$ é transitiva, isto é, que $B(x) \& y \in x \rightarrow B(y)$. Para qualquer fórmula A escreveremos A_B exigindo a fórmula obtida que todas as variáveis em A satisfaçam $B(x)$.

Uma vez que para um t fixo podemos fazer $B(x) = x \in t$, vemos que esta relativização a um conjunto é um caso particular deste tipo de relativização.

DEFINIÇÃO. Uma fórmula $A(x_1, \dots, x_n)$ define uma relação absoluta se para todas as condições transitivas $B(x)$ tem-se. Além disso se B' é uma outra condição tal que $\forall x B(x) \rightarrow B'(x)$, então $B(x_1) \& \dots \& B(x_n) \& A_B(x_1, \dots, x_n) \rightarrow A_{B'}(x_1, \dots, x_n)$

Isto significa que para verificar $A(x_1, \dots, x_n)$ é suficiente verificar em qualquer classe transitiva que seja suficientemente grande. Seria absurdo exigir $A \rightarrow A_B$ uma vez que não temos nenhuma garantia de que a classe B seja suficientemente grande. Podia introduzir-se uma noção mais estrita da relação absoluta. Nela A é absoluto, se A é relativizado a uma classe B para a qual os axiomas de ZF são satisfeitos quando relativizados a B , então $A \sim A_B$.

Começemos por dar exemplos de relações que não são absolutas. A relação $y = P(x)$ não é absoluta uma vez que y pode ser o conjunto de todos os subconjuntos de x na classe B embora não seja o verdadeiro conjunto potência. Vemos aqui o carácter impredicativo do Axioma do Conjunto Potência que exige que se procure pelo universo inteiro todos os subconjuntos

possíveis. Um outro exemplo é a relação $x \leq y$. Se não há uma função 1 a 1 de x sobre y na classe B isto não implica que não possa existir esta função.

Damos agora uma sucessão de relações absolutas. O carácter absoluto de cada uma é óbvio se se tomar em consideração o carácter absoluto das relações precedentes. A transitividade de B desempenha um papel em algumas, e. g., a relação « $z = \langle x, y \rangle$ », uma vez que se z tivesse elementos que não estivessem em B não poderíamos verificar se z é um par ordenado permanecendo em B .

Finalmente demonstraremos $(V=L)_L$. Já demonstramos a existência de um conjunto M_α , para cada α que satisfaz uma

certa propriedade. Esta demonstração utilizou apenas os axiomas de ZF e uma vez que estes são satisfeitos em L , existe um conjunto M_α em L que satisfaz a condição relativizada.

Ora se $x \in L$, existe um α tal que $x \in M_\alpha$ e $\alpha \in L$. Mas os resultados já enunciados sobre o carácter absoluto implicam que o conjunto M_α definido relativamente a L é ainda M_α de modo que $x \in M_\alpha$ é satisfeita quando relativizada a L .

TEOREMA 5.3. $(V=L) \rightarrow AE \& HGC$ é demonstrável em ZF

DEMONSTRAÇÃO:

Uma vez que o Axioma da Construtibilidade, $V=L$, é satisfeito em L , para mostrar que AE e HGC são satisfeitas em L basta demonstrar o Teorema 5.3 que diz que $V=L \rightarrow AE \& HGC$.

TEOREMA 5.3.1. *Existe uma fórmula $A(u, v, X, Y)$ em ZF tal que se Y é uma boa ordenação do conjunto X , a relação $u < v \leftrightarrow A(u, v, X, Y)$ induz uma boa ordenação do conjunto X' .*

DEMONSTRAÇÃO.

Já mostramos como exprimir em ZF a relação $C(u, n, t_1, \dots, t_n), u = \{x \in X / B_{n,X}(x, t_1, \dots, t_n)\}$. Ora a boa ordenação Y induz uma boa ordenação natural no conjunto de todos os $(k+1)$ -tuplos possíveis $\langle n, t_1, \dots, t_k \rangle$ em que $t_i \in X$. Para cada $u \in X'$ podemos definir $\varphi(u)$ como sendo o primeiro $(k+1)$ -tuplo, para algum k , sob esta boa ordenação, tal que $C(u, \varphi(u))$ é satisfeita. Agora podemos definir A fazendo $u < v$ significar $\varphi(u) < \varphi(v)$.

Por indução transfinita podemos definir uma boa ordenação em M_α do seguinte modo: Se a boa ordenação foi definida para todo M_β com $\beta < \alpha$, faremos uma boa ordenação de $\bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$

De uma maneira trivial.

Assim, nosso teorema permite definir uma boa ordenação em M_α . Assim se $V=L$ é satisfeito, seja $\varphi(x)$ o primeiro α tal que $x \in M_\alpha$.

Definiremos então $x < y$ se $\varphi(x) < \varphi(y)$ ou se $\varphi(x) = \varphi(y) = \alpha$, e x precede y na boa ordenação de M_α . Assim, teremos uma única fórmula $A(x,y)$ que induz uma boa ordenação em *todos* os conjuntos.

Logo, $V=L \rightarrow AE$.

Deste modo, de AE segue que se X é infinito, $\overline{X'} = \overline{X}$.

Por indução transfinita pode-se mostrar que para α infinito, $\overline{M_\alpha} = \overline{\alpha}$

TEOREMA 5.3.2. Se $x \in M_\alpha$, α infinito e $y \subseteq x$ então $\exists \beta \overline{\beta} = \overline{\alpha}$ e $y \in M_\beta$

Uma vez que $w \in M_w$ temos que todo o conjunto de inteiros é construído por um número contável de passos.

Uma vez que o número de ordinais contáveis é \aleph_1 e $\overline{M_\alpha} = \aleph_0$ se α é contável, isto implicaria obviamente que o contínuo $C = \aleph_1$.

Se $x \subseteq w, x \in M_\alpha, x \in M_\alpha$

x é determinado por um número contável de valor de verdade de frases declarativas $n \in x$.

Logo, para cada n temos uma condição sobre α . Assim é se estas condições, em número contável, são satisfeitas para

qualquer α , também podem ser satisfeitas para um α contável. O mecanismo para tornar estas considerações precisas será fornecido pelo teorema de Löwenheim-Skolem que nos permite construir conjuntos menores com as mesmas propriedades de conjuntos maiores.

LEMA 5.4. *Existe um conjunto extensional T , $\overline{\beta} = \overline{\alpha}$, tal que $M_\alpha \subseteq T$ e M_β, β, γ são elementos de T e tal que a frase declarativa « β constrói M_β » é válida quando relativizada a T .*

DEMONSTRAÇÃO.

Começemos por reparar que a frase declarativa « β constrói M_β » é uma frase de ZF que diz que β é um ordinal e que existe uma função f definida para todo o $\gamma < \beta$ tal que para todo γ ,

$$f(\gamma) = \left(\bigcup_{\alpha < \gamma} f(\alpha) \right)' \quad \text{e} \quad f(\beta) = M_\beta.$$

Este lema é então uma consequência imediata do teorema de Löwenheim-Skolem

Sabemos que existe um único e-isomorfismo de T sobre um conjunto transitivo R .

A função φ é a identidade sobre M_α uma vez que este já é transitivo.

Também $\varphi(y) = y$ uma vez que $y \subseteq x$ e φ é a identidade sobre os membros de x .

Contudo, φ não tem que ser a identidade sobre β .

Seja $\varphi(\beta) = \beta'$. Então, β' é um ordinal relativo a R . Pelo carácter absoluto da propriedade de ser ordinal β' é realmente um ordinal.

Uma vez que $\beta' \subseteq R$ pela transitividade de R , $\overline{\beta'} \leq \overline{R}$ e assim $\overline{\beta'} \leq \overline{\alpha}$

Logo $y \in M_\beta$ é satisfeita quando relativizada a R e pelo seu carácter absoluto $y \in M_\beta$ é satisfeita.

Agora é trivial demonstrar a partir do teorema 5.3.2 *HGC*.

Em primeiro lugar observamos que para todo α infinito, $\overline{M_\alpha} = \overline{\alpha}$.

Isto demonstra-se por indução em α e o caso em que $\alpha = \aleph_0$ é

óbvio. Em geral, para um α , por indução vê-se que se $X_\alpha = \{M_\beta / \beta < \alpha\}$

então $\overline{X_\alpha} \leq \overline{\alpha} = \overline{\alpha}$

O número de fórmulas usadas para definir os elementos de M_α tem por isso cardinalidade $\leq \overline{\alpha}$. Assim a cardinalidade de M_α é $\leq \overline{\alpha}$. Mas, uma vez que $\beta \in M_{\beta+1}$ vê-se facilmente que $\overline{M_\alpha} \leq \overline{\alpha}$ e assim $\overline{M_\alpha} = \overline{\alpha}$. Ora se α é um cardinal, $\alpha \in M_{\alpha+1}$. Vemos assim, que se β é o cardinal seguinte depois de α , $P(\alpha) \subseteq M_\beta$ e assim $\overline{P(\alpha)} \leq \overline{\beta}$.

O teorema de Cantor agora nos diz que $\overline{P(\alpha)} > \overline{\alpha}$ e portanto

$\overline{P(\alpha)} = \overline{\beta}$, o que é exactamente *HGC*.

Também podemos escrever $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

Demonstramos assim completamente os teoremas 5.1, 5.2 e 5.3.

Embora **ZF** seja um esquema axiomático infinito, para

qualquer axioma A_n mostrámos como fazer uma demonstração de $A_{n,L}$ em ZF e uma melhor análise mostrará que, sob qualquer enumeração natural de demonstração P_m , a demonstração de $A_{n,L}$ é dada por $P_{\varphi(n)}$.

em que $\varphi(n)$ é uma função recursiva primitiva adequada. Assim se considerarmos ZF simplesmente como um sistema formal fizemos a demonstração de

$$(\text{Consis } ZF) \rightarrow (\text{Consis } ZF+AE+HGC)$$

TEOREMA 6. *Independência da Hipótese do Contínuo e do Axioma da Escolha*⁵⁷

DEMONSTRAÇÃO:

A nossa finalidade principal é mostrar que HC não pode ser demonstrada a partir de ZF (incluindo AE) e que AE não pode ser demonstrado a partir de ZF . Juntamente com os resultados do teorema 5 ficaremos com uma demonstração completa

A maneira mais natural de fazer uma demonstração de independência é mostrar um modelo com as propriedades desejadas.

Consideraremos apenas modelos padrão. No teorema 5, encontramos uma fórmula $A(x) \equiv x$ é construtível, tal que o modelo interior de todos os x que satisfazem $A(x)$ era o modelo desejado. Mostraremos que esses método não se aplicará nesta situação.

Para realizarmos nossa demonstração será necessário supor o axioma SM enunciado abaixo:

⁵⁷ Essa demonstração foi baseada na demonstração feita por Paul Cohen. Retirada de GÖDEL, Kurt. *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*. Lisboa: Editora da Fundação Calouste Gulbenkian, 1979. Página 128 a 179

AXIOMA SM. *Existe um conjunto M tal que se R é $\{ \langle x, y \rangle / x \in y \& x \in M \& y \in M \}$ então M é um modelo para ZF sob a relação R*

TEOREMA 6.1. *Seja $A(x)$ uma fórmula de ZF. Não se pode demonstrar em ZF que os axiomas de ZF e $\sim V=L$ são satisfeitos quando relativizados à classe dos x que satisfazem $A(x)$. O mesmo argumento aplica-se a ZF + $\sim AE$ e ZF + AE + $\sim HGC$*

DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos que existe $A(x)$. Seja M o modelo mínimo e $M' = \{ x / x \in M \& A_M(x) \}$. Então, uma vez que ZF é satisfeito para M teríamos M' como um modelo para ZF em que $\sim V=L$. Uma vez que $M' \subseteq M$ sabemos que M' é isomórfico a M e uma vez que $V=L$ é satisfeito em M é também satisfeito em M' o que é uma contradição.

Pode-se evitar recorrer à existência de um modelo mínimo como um conjunto considerando a fórmula $B(x) \equiv \forall M M$ (se M é um modelo padrão transitivo, $x \in M$). Com efeito trata-se o modelo mínimo como se fosse uma classe e desta maneira evita-se o Axioma SM.

Tendo mostrado que o método dos modelos interiores não se aplica a ZF é natural ver se numa versão aumentada de ZF se pode demonstrar a existência de um modelo interior para ZF + $\sim V=L$ (a demonstração acima mostra que para qualquer extensão natural $(ZF)'$ de ZF não se pode demonstrar em $(ZF)'$ a existência de um modelo interior para $(ZF)' + \sim V=L$).

A possibilidade mais simples é ZF + SM uma vez que SM afirma a existência de um modelo padrão para ZF.

TEOREMA 6.2. *De ZF + SM ou de qualquer sistema axiomático que contenha ZF e que seja consistente com $V=L$, não se pode demonstrar a existência de um modelo padrão não-contável em*

que AE seja verdadeiro e HC seja falsa nem mesmo um modelo em que AE seja verdadeiro e que contenha números reais não construtíveis.

DEMONSTRAÇÃO:

Para iniciarmos nossa demonstração devemos considerar a existência de modelos contáveis para ZF. Também, como um corolário do Teorema de Gödel para o Cálculo de Predicados, sabemos que um sistema consistente tem modelos de cardinalidade arbitrariamente grandes. No nosso teorema só nos referimos, claro, a modelos padrão.

Implicitamente estamos usando a consistência de ZF (Consis ZF), pois senão qualquer frase declarativa seria demonstrável. Uma vez que sabemos que Consis ZF \rightarrow Consis (ZF+V=L) basta, então, demonstrar que ZF+V=L implica que não há modelos não-contáveis com as propriedades do teorema.

Seja M um modelo padrão transitivo e não contável e $\alpha_0 = \sup\{\alpha/\alpha \in M\}$ e suponhamos que AE é satisfeito em M . Se α_0 não é contável M , α_0 contém todos os ordinais contáveis. Se α_0 é contável, então, R_β é o conjunto de todos os elementos de M de ordem β . Então para algum $\beta < \alpha_0$, R_β não é contável e pelo caráter absoluto da ordem R_β é definível em M . Assim, M contém um conjunto que é na verdade não-contável e pelo AE este conjunto pode ser bem ordenado em M e assim M contém um ordinal não-contável o que contradiz a nossa hipótese.

Assim, em qualquer caso, M contém todos os ordinais contáveis. De $V=L$ sabemos que todo o número real é construtível a partir de um ordinal contável e assim mostramos

que em M , todo o número real é construtível. Isto demonstra a segunda afirmação do nosso teorema e o lema seguinte nos dá a primeira afirmação.

LEMA 6.1. $ZF + (\text{todo o número real é construtível}) \rightarrow HC$.

DEMONSTRAÇÃO.

A nossa hipótese implica que o conjunto de todos os números reais C está em L . Em L , C tem a cardinalidade \aleph_1 . Isto significa que existe uma função dos ordinais contáveis relativamente a L sobre C . E uma vez que um ordinal contável em L é certamente contável existe uma função de \aleph_1 sobre C .

Consideraremos M um modelo fixo contável para ZF que será, por uma questão de precisão, o modelo mínimo. Então $V=L$ é satisfeito em M . Seja $\alpha_0 = \sup\{\alpha / \alpha \in M\}$. Então temos $M = \cup\{M_\beta / \beta < \alpha_0\}$

TEOREMA 6.3. *É consistente supor que para nenhum $\alpha > \alpha_0$, $\cup\{M_\beta / \beta < \alpha\}$ seja um modelo para ZF .*

DEMONSTRAÇÃO.

Se para todo $\alpha > \alpha_0$, $\cup\{M_\beta / \beta < \alpha\}$ não é um modelo para ZF nada mais há a demonstrar.

Por outro lado, seja α_1 , o primeiro ordinal para o qual ele é um modelo e $N = \cup\{M_\beta / \beta < \alpha_1\}$. Então é óbvio que em N é verdade que $\alpha > \alpha_0 \rightarrow M_\alpha$ não é um modelo para ZF e o teorema está demonstrado.

COROLÁRIO. *É consistente supor que para qualquer modelo N , $\alpha_0 = \sup\{\alpha / \alpha \in N\}$*

DEMONSTRAÇÃO.

Se N' representa os conjuntos construtíveis de N então $\sup\{\alpha/\alpha \in N'\} = \sup\{\alpha/\alpha \in N\}$ e o teorema implica que é consistente supor $\sup\{\alpha/\alpha \in N'\} = \alpha_0$.

Assim, seja qual for o modelo N que estejamos a construir temos que considerar os ordinais em M . Vamos tentar construir N alargando M com a introdução de novos conjuntos de ordem α em que $\alpha < \alpha_0$. Uma vez que os conjuntos de ordem finita são absolutos, a primeira possibilidade é encontrar um modelo N tal que para algum $\alpha \subseteq \omega, \alpha \in N$ e $\sim \alpha \in M$. Se N contém α , tem que conter também todos os conjuntos construtíveis a partir dele. Isto é, faça-se $M_0(\alpha) = \omega \cup \{\alpha\}$ de modo que $M_0(\alpha)$ seja transitivo e $M_\alpha(\alpha) = (\bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta(\alpha))'$ para $\alpha > 0$.

É óbvio então que $\alpha \in M$ implica $M_\alpha(\alpha) \in N$. Uma vez que estes são os únicos conjuntos que podemos ver que pertencem a N , é razoável ver que se N é da forma $\bigcup\{M_\beta(\alpha)/\beta < \alpha_0\}$ para algum $\alpha \subseteq \omega$. Se $\sim \alpha \in M$ então teremos certamente que α não é construtível em N . E teremos assim um modelo em que $V=L$ não é verdadeiro.

Se tomarmos um $\alpha \subseteq \omega$ arbitrário que não esteja em M , então em geral $N = \bigcup\{M_\beta(\alpha)/\beta < \alpha_0\}$ não será um modelo para ZF .

O ordinal contável α_0 , que não está em M , corresponde a uma boa ordenação de ω e assim a um sub-conjunto de $\omega \times \omega$ e portanto a um subconjunto do próprio ω . Interpretando α como sendo esse subconjunto então qualquer modelo para ZF que contenha α tem que conter α_0 , uma vez que é um

teorema de ZF que a toda a boa ordenação corresponde um único ordinal.

No entanto, se $x \in N \rightarrow$ ordem de $x < \alpha_0$ e assim não podemos ter $\alpha_0 \in N$. Assim, α tem que ter certas propriedades especiais se N for um modelo. Em vez de descrever α diretamente é melhor examinar as diversas propriedades de α e determinar quais é que são desejáveis e quais é que não são.

O α que vamos construir será designado como um conjunto genérico relativo a M . A ideia é que todas as propriedades de α têm que ser *forçadas* a serem satisfeitas apenas na base de α e se comportar como um conjunto genérico em M .

Esta idéia de decidir quando é que uma frase declarativa acerca de α é *forçada* a ser satisfeita é a chave da construção. É óbvio que há algumas propriedades de α que nenhum processo razoável pode interpretar como sendo verdadeiras ou falsas para um conjunto qualquer α .

Um conjunto finito P de frases declarativas da forma $n_k \in \alpha$ ou $\sim n_k \in \alpha$ que é auto-consistente será designado como uma *condição de forcing*.

Dado P , é razoável esperar que P *force* uma frase declarativa A acerca de α a ser satisfeita, ou *force* $\sim A$ a ser satisfeita. Ou ainda, se as condições em P não *forçam* A nem de uma maneira, nem de outra. Embora *forçar* esteja relacionado com a noção de implicação, difere desta no fato que: dado que P *force* A não é verdadeiro que qualquer α que satisfaça P satisfaça também A . O que é verdadeiro é que qualquer α que satisfaça P satisfaz também A .

Agora, mostraremos então que é possível encontrar uma sucessão infinita de condições de *forcing* P_n , tais que $P_n \subseteq P_{n+1}$. Esta sucessão será uma sucessão completa e uma vez que ela decide toda a propriedade acerca de α determina o próprio α .

Utilizando este a podemos demonstrar que N é um modelo e $\sim\alpha \in M$. Além disso, em N , uma frase declarativa A será verdadeira precisamente se é *forçada* por algum P_n na sucessão completa. Qualquer conjunto que resulte deste processo será chamado um conjunto genérico.

Antes de continuar vamos enumerar algumas propriedades que devem ser satisfeitas. Em primeiro lugar, o conceito de *forçar* tem que ser consistente, isto é, não queremos que P force A e que P force $\sim A$. Além disso, se P força A e $Q \supseteq P$ então Q força A . E para finalizar, para todo P e A existe um Q tal que $Q \supseteq P$ e ou Q força A ou Q força $\sim A$.

O nosso objectivo é encontrar um $\alpha \subseteq \omega$ tal que $\sim\alpha \in M$ e se $N = \bigcup \{M_\beta(\alpha) / \beta \in M\}$ então N é um modelo para ZF .

Examinaremos todas as frases declarativas possíveis acerca de N e decidiremos se queremos que elas sejam verdadeiras ou falsas. Isto exige que se dê nomes aos elementos de N antes de termos escolhido α e assim antes de termos N explicitamente. A maneira pela qual atribuímos nomes não tem nenhuma importância desde que não nos esqueçamos de nenhum conjunto em N .

DEFINIÇÃO. Um nome é uma função definida em ZF que associa a cada ordinal $0 < \alpha < \alpha_0$ um conjunto S_α , o espaço nominal e funções φ_α definida em S_α tais que os conjuntos S_α são disjuntos e se $c \in S_\alpha$, $\varphi_\alpha(c)$ é uma fórmula $A(x)$ que tem todas as suas variáveis ligadas restritas a X_x e que pode ter elementos de S_β com $\beta < \alpha$ funcionar como constantes. A função φ_α tem que colocar S_x em correspondência $1-1$ com o conjunto de todas estas fórmulas. O conjunto S_0 é definido como sendo o conjunto $\omega \cup \{\alpha\}$ em que α é um símbolo formal. Escreve-se então $S = \bigcup_\alpha S_\alpha$.

Cada $c \in S$ está num único S_x . Quando terminarmos e escolhermos finalmente um conjunto particular $\alpha \subseteq \omega$, estaremos em condições de definir para cada $c \in S_\alpha$ um conjunto \bar{c} do seguinte modo: Para c em S_0 , \bar{c} é obviamente definido. Para c em S_α , $\alpha > 0$, seja $\varphi_\alpha(c) = A(x, c_1, \dots, c_m)$, $c_i \in S_{\beta_i}$, $\beta_i < \alpha$ em que $A(x, t_1, \dots, t_m)$ é uma fórmula em ZF com todas as variáveis ligadas restritas a X_α . Para indicar que uma variável ligada a x está restrita a X_α , escreveremos $\forall_\alpha x$ ou $\exists_\alpha x$. Se definirmos X_α , indutivamente como sendo $\{\bar{c} / c \in S_\beta \ \& \ \beta < \alpha\}$ então $\bar{c} = \{x \in X_\alpha / A(x, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m)\}$.

Vamos definir os espaços nominais por indução transfinita. Talvez a maneira mais simples é talvez definir S_α como o conjunto de todas as fórmulas $A(x)$. Isto é, definimos S_α por indução como o conjunto de todas as fórmulas $(A(x, c_1, \dots, c_m))$ em que $c_i \in \bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta$ e tal que todos os quantificadores são da forma \forall_α ou \exists_α .

Isto significa que um elemento de S_α é uma fórmula de que alguns dos termos também são fórmulas. Logo, existe uma sucessão a_1, \dots, a_n com $\alpha_i \subseteq \alpha_j$, $j = i + 1$, finita de fórmulas nele e em que todo o quantificador tem um índice ordinal. Uma pequena dificuldade ligeira vem do fato de em ZF não termos símbolos formais uma vez que tudo é um conjunto. No entanto, os símbolos que precisamos são finitos em número de modo que podemos atribuir diversos inteiros para os representar. Então os elementos do espaço nominal S são sucessões finitas destes inteiros ou ordinais. É claro que só certas sucessões destas correspondem a fórmulas bem formadas e elementos de S mas as regras para decidir são simples e facilmente exprimíveis em ZF .

Estamos assim, preparados para examinar as frases acerca de N .

DEFINIÇÃO. *Uma frase declarativa limitada é uma frase declarativa em ZF em que todo o quantificador é da forma \forall_α ou \exists_α para algum ordinal $\alpha < \alpha_0$ e que pode envolver elementos de S como constantes.*

DEFINIÇÃO. *Uma frase declarativa não-limitada é uma frase declarativa em ZF que pode envolver elementos de S como constantes.*

Quando N for finalmente construído, as frases declarativas limitadas e não limitadas tornam-se frases declarativas reais acerca de N . Quando substituirmos cada c em S por \bar{c} e $\forall_\alpha x$ e $\exists_\alpha x$ forem interpretados como $\forall x$ ou $\exists x$ onde os x são restritos e têm que ficar em X_α .

As frases declarativas limitadas um tipo mais simples uma vez que falam apenas acerca dos elementos de X_α para algum α . Elas possuem uma hierarquia natural, como segue:

DEFINIÇÃO. *Se A é uma frase declarativa limitada seja ordem de $A = (\alpha, i, r)$ em que*

1. α é o primeiro ordinal tal que se \forall_β ou \exists_β ocorre em A , então $\beta < \alpha$. e se $c \in S_\beta$ ocorre em A , então $\beta < \alpha$.

2. r é o número de símbolos em A .

3. $i=0$ se α é um ordinal sucessor, $\alpha = \beta + 1$, \forall_α e \exists_α não ocorrem em A e nenhum termo da forma $c \in (\cdot)$, $c = (\cdot)$ ou $(\cdot) = c$ ocorre em A em que $c \in S_\beta$. De contrário $i=1$.

Se ordem de $A = (\alpha, i, r)$ então A fala apenas acerca dos elementos em X_α . O índice r é obviamente uma medida da comple-

xidade de A . O índice i é necessário porque quando encontramos um termo da forma c_1 e c_2 em que $c_1 \in S_\beta$ e $c_2 \in S_\gamma$ para $\gamma < \beta$.

DEFINIÇÃO. $(\alpha, i_1, r_1) > (\alpha_2, i_2, r_2)$ se $\alpha_1 < \alpha_2$ ou $\alpha_1 = \alpha_2$ e $i_1 < i_2$ ou $\alpha_1 < \alpha_2, i_1 = i_2$ e $r_1 < r_2$.

DEFINIÇÃO. Uma condição de forcing P é um conjunto finito de frases declarativas limitadas da forma $n \in \alpha$ ou $\sim n \in \alpha$ em que $n \in \omega$ e $n \in \alpha$ são considerados como pertencendo a S_0 e tais que para um dado $n, n \in \alpha$ e $\sim n \in \alpha$ não estão ambas em P .

Queremos agora definir P força A .

Considere o caso em que A é uma frase declarativa limitada. A definição procede por indução sobre a ordem A . O passo essencial consiste em reduzir A a frases declarativas de ordem mais baixa. Se A é da forma $\exists_\alpha x B(x)$ diremos que P força A se para algum $c \in S_\beta, \beta < \alpha, P$ força $B(c)$. Isto significa que de acordo com a idéia de que α é genérico, um conjunto existe apenas se existe um c fixo tal que para todo o α genérico que satisfaça $P, B(\bar{c})$ será verdadeiro. Esta é uma frase declarativa de uniformidade sobre α no sentido em que o conjunto que satisfaz $B(x)$ pode ter uma definição em termos de α .

Suponhamos que para algum Q que contém P se tem que Q força $\sim B(c)$ com $c \in S_\beta, \beta < \alpha$. Dizer então que P força A significará que nunca poderemos ter α satisfaça as condições de Q o que pareceria violar o carácter genérico de α na medida em que satisfaria algumas condições escondidas não mencionadas em P . Pode mesmo suceder que haja tantos $Q \supseteq P$ tais que para algum $c \in S_\beta, \beta < \alpha, Q$ force $\sim B(c)$ e isso tornaria absurdo dizer que P força A . Assim, diremos que P força $\forall_\alpha x B(x)$ se para todo $Q \supseteq P, c \in S_\beta, \beta < \alpha, Q$ não força $\sim B(c)$.

DEFINIÇÃO. Definiremos P força A , sendo A uma frase declarativa limitada, por indução sobre a ordem de A do seguinte modo:

1. P força $\exists_{\alpha} x B(x)$ se para algum $c \in S'_{\beta}$, $\beta < \alpha$, P força $B(c)$.
2. P força $\forall_{\alpha} x B(x)$ se para todo $Q \supseteq P$ e $c \in S_{\beta}$, $\beta < \alpha$, Q não força $\sim B(c)$.
3. P força $\sim B$ se para todo o $Q \supseteq P$, Q não força B .
4. P força $B \& C$ se P força B e P força C .
5. P força $B \vee C$ se ou P força B ou P força C .
6. P força $A \rightarrow B$ se ou P força B ou P força $\sim A$.
7. P força $A \leftrightarrow B$ se P força $A \rightarrow B$ e P força $B \rightarrow A$.
8. P força $c_1 = c_2$ em que $c_1 \in S_{\alpha}$, $c_2 \in S_{\beta}$, $\gamma = \max(\alpha, \beta)$ se ou $\gamma = 0$ e $c_1 = c_2$ como elementos de S_0 ou $\gamma > 0$ e P força $A_{\gamma} x(x \in c_1 \leftrightarrow x \in c_3)$.
9. P força $c_1 \in c_2$ em que $c_1 \in S_{\alpha}$, $c_2 \in S_{\beta}$, $\alpha < \beta$ se P força $A(c_1)$ em que $A(x) = \varphi_{\beta}(c_2)$.
10. P força $c_1 \in c_2$ em que $c_1 \in S_{\alpha}$, $c_2 \in S_{\beta}$, $\alpha \geq \beta$ e não $\alpha = \beta = 0$ se para algum $c_3 \in S_{\gamma}$, $\gamma < \beta$, se $\beta > 0$ $\gamma = 0$ se $\beta = 0$, P força $\forall_{\alpha} x(x \in c_1 \leftrightarrow x \in c_3) \& (c_3 \in c_2)$.
11. P força $c_1 \in c_2$ em que $c_1, c_2 \in S_0$ se $c_1, c_2 \in \omega$ e $c_1 \in c_2$ ou $c_2 = \alpha$ e a frase declarativa $c_1 \in \alpha$ está em P .

DEFINIÇÃO. Definiremos P força A em que A é uma frase declarativa não limitada por indução sobre o número de símbolos em A , do seguinte modo:

1. P força $\exists x B(x)$ se para algum $c \in S$, P força $B(c)$.
2. P força $\forall x B(x)$ se para todo $c \in S$, $Q \supseteq P$, Q não força $\sim B(c)$.
3. P força $\sim B$ se para todo o $Q \supseteq P$, Q não força B .
4. P força $B \& C$ se P força B e P força C .

5. P força $B \vee C$ se ou P força B ou P força C .
6. P força $B \rightarrow C$ se ou P força C ou P força $\sim B$.
7. P força $B \leftrightarrow C$ se P força $B \rightarrow C$ e P força $C \rightarrow B$.
8. P força $c_1 \in c_2$ $c_1 = c_2$ se as forças como frases declarativas limitadas.

No que se segue A designa uma frase declarativa limitada ou ilimitada.

LEMA 6.2. Para todo o P e A não se tem que P força A e P força $\sim A$.

DEMONSTRAÇÃO.

Segue-se imediatamente das definições, uma vez que se P força $\sim, P \supseteq P$ e assim, P não pode forçar A .

LEMA 6.3. Se P força A e $Q \supseteq P$ então Q força A .

DEMONSTRAÇÃO.

Demonstraremos em primeiro lugar para um A limitado por indução sobre a ordem de $A = (\alpha, i, r)$. Os casos 4 a 11 da definição de forçar não exigem discussão uma vez que P força A é reduzido a P força B , para algum B com a ordem de B menor do que a ordem de A .

Se P força $\exists_\alpha x B(x)$ então P força $B(c)$, $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$. Assim, por indução, Q força $B(c)$ e Q força $\exists_\alpha x B(x)$. Se P força $\exists_\alpha x B(x)$ e $Q \supseteq P$ então se $R \supseteq Q$, $R \supseteq P$ R não força $\sim B(c)$ para qualquer $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, e assim Q força $\forall_\alpha x B(x)$. Se P força $\sim B$, $Q \supseteq P$, $R \supseteq Q$, $R \supseteq P$. Assim R não força B e Q força $\sim B$. Se A não é limitada, o mesmo argumento aplica-se aos casos 1 a 7. Caso 8 é demonstrado considerando a demonstração feita para frases declarativas limitadas.

LEMA 6.4. *Para todo P e A existe um $Q \supseteq P$ tal que ou Q força A ou Q força $\sim A$.*

DEMONSTRAÇÃO.

Toda a frase declarativa em N , que é assim uma frase declarativa acerca de α , é decidível em algum sentido por um número finito de frases declarativas da forma $n \in \alpha$ ou $\sim n \in \alpha$. Se P não força $\sim A$, por definição, tem que ser porque para algum $Q \supseteq P$, Q força A .

DEFINIÇÃO. *Uma sucessão $\{P_n\}$ de condições de forcing é uma sucessão completa se $P_n \subseteq P_{n+1}$ para todo o n e para todo o A , limitado ou ilimitado, existe um n tal que ou P_n força A ou P_n força $\sim A$. Não se supõe que a sucessão $\{P_n\}$ esteja em M .*

LEMA 6.5. *Existe uma sucessão completa.*

DEMONSTRAÇÃO.

Uma vez que M é contável podemos enumerar todas as frases declarativas A_n . Define-se P_n por indução como sendo qualquer condição de forcing $Q \supseteq P_{n-1}$ tal que ou Q força A_n ou Q força $\sim A_n$.

Se $\{P_n\}$ é completa então, em particular, para qualquer k algum P_n força $k \in \alpha$ ou $\sim k \in \alpha$. Seja $\bar{\alpha} = \{k \mid \exists n P_n \text{ força } k \in \alpha\}$. Então $\bar{\alpha} \subseteq \omega$. Como dissemos, podemos definir agora uma função $c \rightarrow \bar{c}$ definida para todo o c em S que associa α com $\bar{\alpha}$ e podemos então definir N como $\bigcup \{M_\beta(\bar{\alpha}) \mid \beta < \alpha_0\}$. Podemos agora relacionar a noção de forçar com α de verdade em N .

LEMA 6.6. *A é verdadeira em N se e somente se para algum n P_n força A.*

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos A é limitado Se A é da forma $\exists_\alpha x B(x)$ e P_n força A então P_n força $B(c)$, $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$ e assim por indução $B(\bar{c})$ é verdadeira em N e por isso A também é. Logo, se A é verdadeira em N então para algum $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, $B(\bar{c})$ é satisfeita e assim por indução algum P_n força $B(c)$ e assim P_n força A. Se $A \equiv \forall_\alpha x B(x)$ e P_n força A, $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, então algum P_m , $m > n$ tem que forçar $B(c)$ uma vez que nenhum P_m pode forçar $\sim B(c)$.

Por indução, isto significa $B(c)$ é verdadeira em N e assim A é verdadeira em N. Suponhamos, então, que A é verdadeira em N. Se algum P_n força $\exists_\alpha x \sim B(x)$ então para algum $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, P_n força $\sim B(c)$ e assim $\sim B(c)$ é satisfeita em N e A é falsa em N. Logo, algum P_n tem que forçar $\sim \exists_\alpha x \sim B(x)$ o que significa que para $Q \supseteq P_n$, Q não força $\exists_\alpha x \sim B(x)$ e assim para todo $c \in S_\beta$, $\beta < \alpha$, Q não força $\sim B(c)$. Isto significa que P_n força $\forall_\alpha x B(x)$. Se P_n força $\sim A$ e A fosse verdadeira em N, por indução, algum P_m , $m > n$ tem que forçar A. Mas P_m força $\sim A$ o que contradiz o lema 6.2. Os outros casos são triviais. Se A não é limitada, os mesmos argumentos aplicam-se sem modificação, excepto que a indução agora se faz sobre o número de símbolos.

Como já vimos anteriormente, podemos atribuir inteiros distintos aos símbolos finitos da nossa linguagem. Então, toda frase declarativa limitada corresponde a uma sucessão finita de inteiros e ordinais. Estas sucessões têm que estar sujeitas às leis de formação das fórmulas bem formadas. De momento

permitiremos o aparecimento de ordinais *arbitrários* e não exigiremos que $\alpha < \alpha_0$. As frases declarativas limitadas são assim objetos dentro de ZF e não há nenhuma ambiguidade em nos referirmos a eles.

A definição de *forçar* que demos foi feita totalmente dentro de ZF e efetuada com uma indução transfinita simples. Mais especificamente, para cada ordem (α, i, r) existe um conjunto $T_{\alpha, i, r}$ que consiste nas fórmulas limitadas de ordem inferior a (α, i, r) e a definição foi feita por indução. Em nenhuma parte usámos a restrição de $\alpha < \alpha_0$. Assim, temos uma relação $F(P, A)$ exprimível em ZF que significa P força A .

LEMA 6.7. *$F(P, A)$ é uma relação absoluta.*

A definição foi feita por uma indução que exigiu apenas considerar objectos anteriores e aqui a relação é obviamente absoluta. A demonstração é essencialmente idêntica à demonstração segundo a qual a construtibilidade é uma relação absoluta.

Quando voltamos a nossa atenção para frases declarativas não limitadas, se olharmos para a definição de *forçar* sem supor que todos os ordinais são menores do que α_0 , a situação é bastante diferente. Então é impossível definir *forçar* em ZF por indução porque a indução informal foi feita por indução sobre o número de símbolos. Mas uma vez que permitimos constantes $\in S_\alpha$ para α arbitrário, não existe nenhum conjunto que consista nas frases declarativas com r símbolos.

Sem dúvida, se supusermos todo $\alpha < \alpha_0$ então pode ser expressa em ZF mas α_0 tem que aparecer na relação definidora.

LEMA 6.8. *Seja $A(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula (não limitada) em ZF , que não envolve constantes e com n variáveis livres. Existe uma relação $F(P, c_1, \dots, c_n)$ exprimível em ZF que é absoluta e que*

quando relativizada a qualquer modelo para ZF diz que P força $A(c_1, \dots, c_n)$.

DEMONSTRAÇÃO.

O lema é demonstrado por indução sobre o número de símbolos em A . Se A não tem quantificadores, o resultado já foi demonstrado uma vez que A é então uma frase declarativa limitada. Se A é uma função proposicional de frases declarativas mais simples a indução é óbvia. Se A é da forma $\forall y B(y, x_1, \dots, x_m)$ por indução existe uma frase declarativa $G(P, c_0, c_1, \dots, c_n)$ que significa que P força $B(c_0, \dots, c_n)$. Dizer que P força $A(c_1, \dots, c_n)$ significa $\forall Q, c_0 (Q \supseteq P \rightarrow \sim G(Q, c_0, \dots, c_n))$. Se A é $\exists y B(y, x_1, \dots, x_n)$ escreveremos simplesmente $F \equiv \exists c_0 (G(P, c_0, \dots, c_n))$.

Suponhamos que uma sucessão completa $\{P_n\}$ foi escolhida e seja N o conjunto resultante $\cup \{M_\beta(\bar{\alpha}) / \beta < \alpha_0\}$. Demonstraremos agora que N é um modelo para ZF.

A demonstração é paralela da demonstração segundo a qual os axiomas de ZF são satisfeitos em L . A verificação de todos os axiomas, com exceção do Axioma da Substituição e do Conjunto Potência, é trivial. Vamos primeiramente demonstrar para o Axioma do Conjunto Potência.

Seja $c_0 \in S_\alpha, \alpha < \alpha_0$, fixo. Somente $\alpha < \alpha_0$ e S_α com $\alpha < \alpha_0$ são considerados.

DEFINIÇÃO. Para cada c em S seja $R(c) = \{P / P \text{ força } c \leq c_0\}$.
 $T(c) = \{ \langle P, c' \rangle / P \text{ força } c' \in c \text{ e } c' \in S_\beta, \beta < \alpha \}$
 $U(c) = \langle R(c), T(c) \rangle$.

Repare que $R(c), T(c), U(c)$ são todos conjuntos em M . Portanto, estas funções são todas definíveis por fórmulas em ZF relativizadas a M . O ponto importante aqui é que estas definições não usam a sucessão completa particular P_n que foi

escolhida. $T(c)$ é um conjunto por causa da restrição importante $\beta < \alpha$.

LEMA 6.9. *Se $U(c_1) = U(c_2)$ e $\bar{c}_1 \subseteq \bar{c}_0$ então $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$.*

DEMONSTRAÇÃO.

Uma vez que $\bar{c}_1 \subseteq \bar{c}_0$ algum P_n na sucessão completa tem que forçar $c_1 \subseteq c_0$. Mas uma vez que $R(c_1) = R(c_2)$, P_n também força $c_2 \subseteq c_0$, deste modo $\bar{c}_2 \subseteq \bar{c}_0$. Se $c_1 \neq c_2$ então para algum $c_3 \in S_\beta$, $\beta < \alpha$ ou $\bar{c}_3 \in \bar{c}_1 \& \sim \bar{c}_3 \in \bar{c}_2$ ou $\sim \bar{c}_3 \in \bar{c}_1 \& \bar{c}_3 \in \bar{c}_2$. Supondo o primeiro sem perda de generalidade, tem que haver algum P_n que force $c_3 \in c_1$. Uma vez que $T(c_1) = T(c_2)$, P_n também força $c_3 \in c_2$ e assim $\bar{c}_3 \in \bar{c}_2$ o que é uma contradição. Logo $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$

Ora S não é um conjunto em M (é uma classe). No entanto o contra-domínio de $R(c)$ para todo o $c \in S$ está contido no conjunto potência de todo o P , relativo a M , uma vez que R é definível em M . Analogamente o contradomínio de T está contido no conjunto potência, relativo a M , do produto direto do conjunto de todo P e $\bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta$. Assim o contradomínio de $U(c)$ é um conjunto em M , \bar{U} . Para cada $u \in \bar{U}$, seja $f(u)$ o primeiro β tal que para algum c em S_β , $U(c) = u$ e $f(u) = 0$ se não existe um destes β . Seja $\beta_0 = \sup\{f(u)/u \in \bar{U}\}$ e assim $\beta_0 \in M$ uma vez que nos conservamos inteiramente dentro do modelo M ,

LEMA 6.10. *Se $\bar{c} \subseteq \bar{c}_0$ então para algum $c_1 \in S_\beta$ com $\beta < \beta_0$, $\bar{c}_1 = \bar{c}$.*

DEMONSTRAÇÃO.

Pela definição de β_0 existe um $c_1 \in S_\beta$ tal que $U(c) = U(c_1)$. O nosso lema anterior implica agora que $\bar{c}_1 = \bar{c}$.

TEOREMA 6.4. *O Axioma do Conjunto Potência é satisfeito em N .*

DEMONSTRAÇÃO.

Uma vez que todos os subconjuntos em N de \bar{c} são membros de $X_{\beta} = \bigcup \{M_{\beta}(\bar{\alpha}) / \beta < \beta_0\}$, o conjunto potência de \bar{c} em N é $\{x \in X_{\beta_0} / x \subseteq \bar{c}\}$ e por isso sendo definido por uma fórmula relativizada a X_{β_0} é um elemento de M_{β_0} .

Investigaremos agora o Axioma da Substituição. Uma vez mais o argumento é paralelo do argumento correspondente para L . Seja $A(x,y)$ uma fórmula que defina $y = \varphi(x)$ como uma função unívoca em N . Seja c_0 fixo, $c_0 \in S_{\alpha}$. Podemos definir em M a função $g(P,c) = 0$ primeiro β tal que para algum $c' \in S_{\beta}$, P força $\varphi(c) = c'$ e $g = 0$ senão existir nenhum destes β . Seja $\beta_0 = \sup \{g(P,c) / \text{para todo } P \text{ e todo } c \in S_{\beta}, \beta < \alpha\}$. Vemos assim, que o contradomínio de φ em \bar{c}_0 está contido em $M_{\beta_0}(\bar{c})$. Para obter o próprio contradomínio precisamos do seguinte teorema:

TEOREMA 6.5. *Seja $A(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula em ZF, Para cada β existe um $c \in S$ tal que independentemente da sucessão completa $\{P_n\}$ $\bar{c} \supseteq M_{\beta_0}(\bar{\alpha})$ e para todo $\bar{x}_i \in \bar{c}$, $A_N(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leftrightarrow A_c(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$*

DEMONSTRAÇÃO.

Sabendo que A_c significa A relativizado a \bar{c} . Suponhamos que A é da forma $Q_1 y_1 \dots Q_m y_m B(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ em que B não tem quantificadores. Para um φ arbitrário e $1 \leq r \leq m$ há funções $f_r(P: c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_{r-1})$ definidas para c_i, c'_j na união de todos os S_{δ} , $\delta < \alpha$ com a seguinte propriedade seguinte: Se $Q_r = \exists$, f_r é o primeiro γ tal que P força

$$(1) \quad Q_{r+1} y_{r+1} \dots Q_m y_m B(c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_{r-1}, y_{r+1}, \dots, y_m)$$

para algum $c_{\gamma} \in S$, $f_r = 0$ se não existe este γ . Seja $g_r(c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_{r-1}) = \sup \{f_r / \text{para todo } P\}$. g_r é definido em M . Se $Q_r = \forall$,

f_r e g_r são definidas da mesma maneira com (1) substituída pela sua negação. Seja γ_l , o supremum do contradomínio de g_r para todo r , $1 \leq r \leq m$ com c_i e c'_i percorrendo a união de todos os S_δ , $\delta < \gamma$. Seja $\gamma_l = h(\gamma)$. Obviamente h é definida em M . Agora defina-se $\beta_l = \beta$ e $\beta_{n+1} = h(\beta_n)$ e $\beta' = \sup \beta_n$. O lema é satisfeito se c se interpreta como o conjunto definido pela fórmula c é a união de $M_\gamma(\alpha)$ para todo o $\gamma < \beta'$. Este c corresponde ao conjunto a que chamamos $X_{\beta'}$ e a nossa construção facilmente permite a formação deste conjunto.

Vimos que o contradomínio z de φ sobre \bar{c}_0 está contido em algum \bar{c}_1 e por isso pode ser caracterizado como sendo $\{\bar{c} \in \bar{c}_1 / \exists x(x \in \bar{c}_0 \ \& \ A_n(x, \bar{c}, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n))\}$ em que c_2, \dots, c_n são as constantes que ocorrem na definição de φ . Pelo teorema podemos supor que todas as variáveis ligadas em A estão restritas em conjuntos fixos de N . Pela construção de N , isto define z por uma fórmula do tipo que implica $z \in N$ e o Axioma da Substituição está demonstrado. Assim N é um modelo para ZF .

LEMA 6.11. *Para cada $\alpha < \alpha_0$, $\exists c_x$, tal que a ordem de $\bar{c}_\alpha =$, independentemente de que $\{P_n\}$ se toma como sendo a sucessão completa.*

DEMONSTRAÇÃO.

O lema é óbvio para $\alpha \leq \omega$. Ora a ordem de $M_0(\alpha) = \omega + 1$ e por indução segue-se que a ordem de $M_\alpha(\alpha) = \omega + 1 + \alpha$.

Do conjunto \bar{c}_α com ordem de $\bar{c}_\alpha = \alpha$ facilmente se obtém um \bar{c}_β talque $\bar{c}_\beta = \alpha$ independentemente da sucessão de *forcing*. Trata-se de uma consequência do seguinte princípio geral: Seja $x = R(y_1, \dots, y_n)$ uma relação absoluta que define x como função dos y_i . Suponhamos que para cada α temos um β tal que se $c_i \in \cup \{S_\gamma / \gamma \leq \alpha\}$ existe um elemento x em X_β tal que $x = R(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$ é

satisfeita quando relativizada a X_β em que β é independente dos $\{P_n\}$. Então, para algum $c \in S_\beta$, $\bar{c} = x$ independentemente dos $\{P_n\}$.

TEOREMA 6.6. *Em N , \bar{a} não é construível.*

DEMONSTRAÇÃO.

Seja c_α um elemento de S tal que $\bar{c}_\alpha = \alpha$. independentemente dos $\{P_M\}$. Suponhamos que x é um elemento de L construído no estádio α sob qualquer boa ordenação natural da construção. Uma vez que a construção é absoluta α constrói também x em N . Para qualquer P , uma vez que P é finito, $\exists Q$ e n tais que $Q \supseteq P$ e ou $(n \in \alpha) \in Q$ e $\sim n \in \alpha$ ou $(\sim n \in \alpha) \in Q$ e $n \in x$. Se P forçou c_α constrói α , então α teria que construir $\bar{\alpha}$ no modelo N' definido por uma sucessão completa Q_n onde podemos fazer $Q_0 = Q$. Mas isto é uma contradição. Assim, uma vez que os ordinais em N são os mesmos que os de M e $\bar{\alpha}$ nunca é forçado por qualquer P a ser construível por qualquer c_α , $\bar{\alpha}$ não é construível por qualquer c_α , $\bar{\alpha}$ não é construível em N .

TEOREMA 6.7. *HGC e AE são satisfeitos em N .*

DEMONSTRAÇÃO.

A relação $x \in M_\alpha(\bar{\alpha})$ pode ser expressa em ZF como uma relação absoluta $F(x, \alpha, \bar{\alpha})$. Basta usarmos o mesmo argumento com que mostramos que $x \in M_\alpha$ era exprimível em ZF como uma relação absoluta. Uma vez que $M_0(\bar{\alpha})$ é bem ordenado, uma vez mais o mesmo argumento que se tinha utilizado para L pode ser utilizado aqui e mostra que se tem uma boa ordenação induzida sobre todo o N exprimível por uma fórmula que tem a única constante $\bar{\alpha}$.

A demonstração da *HGC* faz-se precisamente como anteriormente tendo em conta que os argumentos sobre a

relação

$x \in M_\alpha$ são substituídos por $x \in M_\alpha(\bar{\alpha})$.

LEMA 6.12. *Se $x \in M_\alpha(\bar{\alpha})$, α infinito, e $y \subseteq x$ para algum v em N , então $\exists \beta$ tal que $\bar{\beta} = \bar{\alpha}$ e $y \in M_\beta(\bar{\alpha})$.*

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos que $y \in M_\gamma(\bar{\alpha})$. Seja A o conjunto $\cup \{M_\beta(\bar{\alpha}) / \beta \leq \alpha\} \cup \{y, \gamma\}$. Uma vez que o AE é satisfeito em N podemos aplicar o teorema de Löwenheim-Skolem.

Assim, existe um conjunto B , $B \supseteq A$, $\bar{B} = \bar{\alpha}$ e tal que $x \in M_\alpha(\bar{\alpha})$, é satisfeita quando relativizada a B e o Axioma da Extensionalidade é satisfeito em B . Seja φ um isomorfismo de B sobre um conjunto transitivo B' . Então φ é a identidade sobre $\cup \{M_\beta(\bar{\alpha}) / \beta \leq \alpha\}$ uma vez que este conjunto já é transitivo. Do mesmo modo $\varphi(y) = y$ e $\varphi(\gamma) = \beta$ em que β é um ordinal e $\bar{\beta} \leq \bar{\alpha}$. Utilizando o argumento usual acerca do caráter absoluto tem-se que $y \in M_\beta(\bar{\alpha})$.

TEOREMA 6.8. *De $ZF+SM$ segue-se que existe um modelo padrão para ZF em que AE e HGC são satisfeitos e que contém $\bar{\alpha} \subseteq \omega$ tal que $\bar{\alpha}$ não é construtível. Assim, HGC e AE não implicam $V=L$.*

DEFINIÇÃO. *Seja A o conjunto de todos os pares $\langle P, Q \rangle$ em que P e Q são subconjuntos finitos disjuntos de ω .*

Seja $\langle P_1, Q_1 \rangle < \langle P_2, Q_2 \rangle$ se $P_1 \subseteq P_2, Q_1 \subseteq Q_2$. Um subconjunto B de A é *denso* se

i) para todo o $x \in A$, $\exists y \in B$ e $x < y$

ii) $x \in B$, $x < y$ implica $y \in B$.

Se $\{P_n\}$ é uma sucessão crescente de condições de *forcing* $\bar{\alpha} = \lim P_n$ se $\bar{\alpha} = \{n / \exists k (n \in \alpha) \text{ e } P_k\}$.

TEOREMA 6.9. Se $\bar{\alpha} \subseteq \omega$ existe uma sucessão completa $\{P_n\}$ com $\bar{\alpha} = \lim P_n$ se e somente se para qualquer subconjunto denso B de A que esteja em M , $\exists n$ tal que se $P = \bar{\alpha} \cap \{0, \dots, n\}$ e $Q = \{0, \dots, n\} - P$, então $\langle P, Q \rangle \in B$.

DEMONSTRAÇÃO.

Uma vez que $\{P_n\}$ ser uma sucessão completa depende apenas do $\lim P_n$, o teorema dá uma caracterização das sucessões completas. É claro, a partir da definição de um conjunto denso, que se B é dado então para qualquer P , $\exists Q \ Q \supseteq P$ tal que Q força $\bar{\alpha}$ a ter a propriedade do teorema. Isto implica que se $\{P_n\}$ é completa $\bar{\alpha}$ tem essa propriedade. Se $\bar{\alpha}$ satisfaz a nossa propriedade seja P_n qualquer sucessão com $\bar{\alpha} = \lim P_n$. Então, para qualquer frase declarativa dada, seja B o conjunto (que está em M) de condições de *forcing* que *forçam* ou a frase declarativa ou a sua negação. Este conjunto é denso e por isso pela nossa condição algum P_n força ou a frase declarativa ou a sua negação.

A Hipótese do Contínuo

Seja $\aleph_1, \tau \geq 2$, um cardinal fixo em M . Seja S definido do seguinte modo: para todo $\alpha < \aleph_\tau$, S_α consiste num elemento c_α e $\bar{c}_\alpha = \alpha$. Todos estes $c_\alpha \in G$. Para $\alpha = \aleph_\tau$, S_α consiste nos \aleph_τ elementos, todos em G , que representaremos por α_δ , $\delta < \aleph_\tau$. Para estes teremos $\bar{\alpha}_\delta \subseteq \omega$ e a sua presença garantirá que o contínuo é pelo menos \aleph_τ . Escrevendo ainda $\alpha = \aleph_\tau$, $S_{\alpha+1}$ consiste só nos elementos de G , do seguinte modo: Há \aleph_τ

elementos que serão $\{\beta\}$ para todo o $\beta < \aleph_\tau$ e os representaremos pelo símbolo $\{\beta\}$. Haverá também \aleph_τ elementos que se tornarão em $\{\delta, \alpha_\delta\}$ para $\delta < \aleph_\tau$ e os representaremos por $\{\delta, \alpha_\delta\}$. $S_{\alpha+2}$ consiste em \aleph_τ elementos em G que se tornarão $\langle \delta, \alpha_\delta \rangle$ para $\delta < \aleph_\tau$ e os representaremos por $\langle \delta, \alpha_\delta \rangle$. Finalmente, $S_{\alpha+3}$ consiste num elemento em G que representaremos por W e \overline{W} será $\{\langle \delta, \alpha_\delta \rangle / \delta > \aleph_\tau\}$. S_β para todo $\beta > \alpha+3$ não contém nenhum dos elementos de G e os seus elementos estão em correspondência 1 a 1 com as fórmulas cujas variáveis tomam valores em $\cup\{S_\gamma / \gamma < \beta\}$. Nesta construção estamos principalmente interessados nos α_δ e no conjunto W , mas uma vez que $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, temos que definir W numa sucessão de passos. As condições de *forcing* consistem em todos os conjuntos finitos P de frases declarativas da forma $n \in \alpha_\delta$ ou $\sim n \in \alpha_\delta$ para $n < \omega$, $\delta < \aleph_\tau$ e não contém $n \in \alpha_\delta$ e $\sim n \in \alpha_\delta$ para qualquer n, δ . Escrevemos $P < Q$ se $P \subseteq Q$ e $\phi(P)$ consiste em todas as frases declarativas $c_n \in \alpha_\delta$ em que $(n \in \alpha_\delta)$ está em P juntamente com as seguintes frases declarativas :

i) $c_\alpha \in c_\beta$ se

ii) $c_\alpha \in \{\alpha\}$

$$d \in \{\delta, \alpha_\delta\}$$

$$\alpha_\delta \in \{\delta, \alpha_\delta\}$$

em que $\alpha, \delta < \aleph_\tau$

iii) $\{\delta\} \in \langle \delta, \alpha_\delta \rangle$ e $\{\delta, \alpha_\delta\} \in \langle \delta, \alpha_\delta \rangle$ para $\delta < \aleph_\tau$

iv) $\langle \delta, \alpha_\delta \rangle \in W$ para $\delta < \aleph_\tau$

Seja $\{P_n\}$ uma sucessão completa e seja N o modelo resultante para ZF . Então $\bar{\alpha}_\delta \subseteq \omega$ e obviamente os α_δ são distintos uma vez que nenhum P pode forçar $\alpha_\delta = \alpha_{\delta'}$, se $\delta \neq \delta'$ uma vez que os P são simplesmente conjuntos finitos e para qualquer P , $\exists Q \supseteq P$ tal que para algum $n (n \in \alpha_\delta)$ e $(\sim n \in \alpha_\delta)$ estão em Q .

LEMA 6.13. *Em N todo conjunto é construtível a partir de \bar{W} . Isto é, se M_0 é o fecho transitivo de \bar{W} e $M_\alpha = (\cup \{M_\beta / \beta < \alpha\})'$ então $N = \cup \{M_\alpha / \alpha \in M\}$.*

DEMONSTRAÇÃO.

O fecho transitivo de X é entendido como sendo $\bigcup_n X_n$ em que $X_0 = X$ e X_{n+1} é o conjunto soma de X_n . O lema é óbvio uma vez que $\cup \{\bar{S}_\alpha / \alpha \leq \aleph_\tau + 3\}$ é precisamente esse fecho.

TEOREMA 6.10. *AE é satisfeito em N .*

DEMONSTRAÇÃO.

Uma vez que a construção $X \rightarrow X'$ é absoluta podemos exprimir em N a relação $x \in M_\alpha$ do lema 6.13. Uma vez que M_0 é bem ordenado, por causa de \bar{W} , este induz, pelos argumentos usuais, boas ordenações de todos os M_α e portanto de N . A boa ordenação é exprimível por uma fórmula com uma única constante, W .

DEFINIÇÃO. *Se não existe nenhum R tal que $P < R$ e $Q < R$ diremos que P e Q são incompatíveis.*

LEMA 6.14. *Seja B um conjunto em M de P mutuamente incompatíveis, então B é contável em M .*

DEMONSTRAÇÃO.

O argumento é todo efetuado em M . Suponhamos que B não é contável. Seja B_n o subconjunto de B que consiste naqueles P que contêm menos do que n frases declarativas. Alguns B_n têm que ser não contáveis (uma vez que AE é satisfeito em M de modo que a união contável de conjuntos contáveis é contável. Aliás o conjunto de todos os P é bem ordenado de modo que não precisamos de AE). Assim, podemos supor que todos os P em B têm menos do que n frases declarativas. Seja k o maior inteiro tal que para algum P_0 com k frases declarativas há P em B em número não contável tais que $P_0 < P$. Podemos ter $k=0$ e $P_0 = \emptyset$. B consiste apenas nestes P . Seja P_1 um elemento arbitrário de B e seja A_1, \dots, A_m as frases declarativas em $P_1 - P_0$. Uma vez que P_1 é incompatível com todos os outros P em B e todos os P em B contêm P_0 , tem que se seguir que para algum A_i , digamos A_1 , um número incontável de P em B contém $\sim A_1$. Ora $\sim A_1$ não está em P_0 uma vez que de outro modo $\sim A_1$ estaria em P_1 e há um número não contável de P em B que contém $P_0 \cup \{\sim A_1\}$ o que contradiz a definição de k .

LEMA 6.15. *Seja f uma função unívoca definível em N . Existe uma função g , definível em M , que faz corresponder a cada c em S um subconjunto contável, $g(c)$ de S e tal que para todo o c $f(\bar{c}) = c'$ para algum $c' \in g(c)$.*

DEMONSTRAÇÃO.

F é definida por uma frase que pode envolver \bar{c} para algum c em S . Podemos assim formar frases declarativas na nossa linguagem formal referindo-nos a f . Até indicação em contrário, as nossas noções situam-se em M . Para cada c, c' em S seja $A(c, c')$ o conjunto de todos os P tais que P força f a ser unívoca e c' é o primeiro elemento de S (sob uma boa ordenação natural) tal que para qualquer $Q > P$, Q força $f(c) = c'$. Obviamente se

$c' \neq c''$ os elementos de $A(c, c')$ são incompatíveis com os de $A(c, c'')$. Logo, usando AE em M e o lema 6.14 só há c' em número contável tais que $A(c, c') \neq \emptyset$. Seja $g(c)$ o conjunto de todos estes c' . Regressamos agora a N e seja c' o primeiro elemento de S tal que $f(\bar{c}) = \bar{c}'$. Uma vez que a construção dos S_α pode ser expressa em N , e a boa ordenação de S expressa em N , podemos considerar como sendo uma frase declarativa não limitada, legítima $T \equiv c'$ é o primeiro elemento de S tal que $f(c) = c'$. Então algum P_n tem que *forçar* T e o fato de f ser unívoca uma vez que estas são verdadeiras em N . Logo $A(c, c')$ não é vazia e $c' \in g(c)$ e o lema estão demonstrados.

TEOREMA 6.11. *Sejam α e β ordinais $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$ em M . Então, $\bar{\bar{\alpha}} < \bar{\bar{\beta}}$ em N .*

DEMONSTRAÇÃO.

Podemos supor α e β são cardinais. Seja f uma função unívoca em N de α sobre β tal que $f(x) = 0$ se $x \in \alpha$. $X_\gamma = \cup \{S_\delta / \delta < \gamma\}$ obviamente $\gamma \in X_{\gamma+3}$ para todo γ e $x \in X_\gamma \rightarrow$ ordem de $x \leq \gamma$. Pela demonstração do lema 6.15 segue que o contradomínio de f sobre $X_{\gamma+3}$ está contido em \bar{T} em que T é um subconjunto de X_β e a cardinalidade de T em M é $\leq \aleph_0$. $\bar{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha}$. \bar{T} contém o contradomínio de f . Se $c \in T$ então $c \in S_\gamma$ para algum $\gamma < \beta$. Uma vez que a cardinalidade de $T \leq \alpha$ em M , uma vez que $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$ em M , existe um $\gamma < \beta$ tal que $T \subseteq \cup \{S_\delta / \delta < \gamma\}$. Mas então a ordem de $\bar{T} \leq \gamma$ e assim \bar{T} não pode conter β e assim o contradomínio de f não pode incluir todo o β .

Sabemos agora que os cardinais em M são precisamente os cardinais em N . Uma vez que os α_δ são todos distintos vemos que:

TEOREMA 6.12. *Em N , $C \geq \aleph_\tau$. Logo HC é falsa em N .*

Tendo mostrado que $C \geq \aleph_\tau$, o problema agora consiste em determinar a cardinalidade de C em N .

LEMA 6.16.(König). *Seja A_α e β_α coleções de conjuntos tais que $A_\alpha < \beta_\alpha$ para todo α . Então, $\overline{\bigcup A_\alpha} < \overline{\prod B_\alpha}$ em que \prod representa o produto direto.*

DEMONSTRAÇÃO.

Suponhamos que f é uma função $\bigcup A_\alpha$ sobre $\prod B_\alpha$. Seja f_β a projeção de f sobre B_β . Então para cada α , f_α não pode ser uma função de A_α sobre B_α . Escolhe-se $x_\alpha \in B_\alpha$ que não esteja no contradomínio de f_α sobre A_α . Então $\prod_\alpha x_\alpha$ não está no contradomínio de f .

LEMA 6.17. *O contínuo C não é a soma de cardinais contáveis menores.*

DEMONSTRAÇÃO.

A única restrição sobre C é se $\overline{A_n} < \aleph_0$, então $\overline{\sum A_n} < \prod_{n=1}^{\infty} C = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = C$.

Mostraremos que em certo sentido é esta a única restrição possível sobre C .

LEMA 6.18. *Em M (isto é, supondo HGC) o número de subconjuntos contáveis de \aleph_τ é \aleph_τ se \aleph_τ não é uma soma contável de cardinais menores, e $\aleph_{\tau+1}$ se o for.*

DEMONSTRAÇÃO.

Repare que o número de subconjuntos contáveis de \aleph_δ para qualquer δ é $\leq \aleph_\delta^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_\delta \cdot \aleph_0} = \aleph_{\delta+1}$ pela HGC. Suponhamos agora que \aleph_τ não é uma soma contável de cardinais menores. Isto significa que não existe uma sucessão $\tau_n, \tau_n < \tau$ e no entanto $\sup \tau_n = \tau$. Dizemos então que τ não é co-final com ω . Ora qualquer subconjunto contável de \aleph_τ está assim contido em $\aleph_{\tau'}$ para algum $\tau' < \tau$. O número destes conjuntos é $< \aleph_{\tau+1} \leq \aleph_\tau$. Assim, o número de subconjuntos contáveis de \aleph_τ é $\leq \overline{\aleph_\tau} = \aleph_\tau$. Por outro lado, suponhamos agora que $\aleph_\tau = \sum A_n$ em que A_n são cardinais e $A_n < \aleph_\tau$. Suponhamos que $A_n < A_{n+1}$ e façamos $B_n = A_n - A_{n+1}$. O número de subconjuntos contáveis é pelo menos $\prod \overline{B} = \prod A_n$. Mas $\aleph_\tau = \sum A_n < \prod A_{n+1}$ e assim o número é pelo menos $\aleph_{\tau+1}$, mas também é no máximo $\aleph_{\tau+1}$.

DEFINIÇÃO. *Para qualquer frase declarativa A diremos que P é mínimo para A se P força $\sim \sim A$ (isto é, nenhum $Q > P$ força $\sim A$) e nenhum $P' < P$ tem esta propriedade.*

Dizer que P força $\sim \sim A$ é precisamente a condição segundo a qual se $P < P_n$ em que P_n é um dos termos de uma sucessão completa que define N , então A é satisfeito em N .

LEMA 6.19. *Para qualquer frase declarativa A o conjunto do P mínimo para A é contável em M .*

DEMONSTRAÇÃO.

Esta demonstração é quase idêntica à do lema 6.14. Seja B um conjunto não-contável de P mínimo. Como no lema 6.14 podemos supor que todo o P em B contém n frases declarativas. Seja k o maior inteiro tal que existe um P' com k condições e $P' < P$ para um número incontável de P em B . Podemos então supor $P' < P$ para todo o P em B . Ora uma vez que os P em B são mínimos, P' não pode *forçar* $\sim \sim A$. Logo, para algum $P'' > P'$, P'' *força* $\sim A$ e por isso P'' é incompatível com todo o P em B . Como no lema 6.14, isto significa que para algum $c \notin P'$, $P' \cup \{c\}$ está contido num número incontável de P em B o que contradiz a definição de k .

Podemos determinar agora a cardinalidade de C .

TEOREMA 6.13. *Em N , $C = \aleph_\tau$ se τ não é co-final com ω em M , $C = \aleph_{\tau+1}$ se τ é co-final com ω .*

DEMONSTRAÇÃO.

Para cada $c \in S$ e $n \in \omega$, seja $V(n, c)$ o conjunto dos P mínimos para $n \in c$. Se $V(n, c) = V(n, c')$ para todo o n e $\bar{c} \subseteq \omega$, $\bar{c}' \subseteq \omega$, então $c = c'$. Isto é verdade porque se P_k está numa sucessão completa e P_k *força* $n \in c$, deve haver um P' mínimo, $P' < P_k$. Então P' e portanto P_k *forçam* $\sim \sim n \in c'$ e assim $n \in \bar{c}'$. Logo, $\bar{c} = \bar{c}'$. Para um ω fixo o número de conjuntos possíveis $V(n, c)$ é no máximo $\bar{D} =$ o número de subconjuntos contáveis de \aleph_τ tal como é calculado em M . A nossa afirmação é que se E é o conjunto das sucessões contáveis em D $\bar{E} = \bar{D}$ (uma vez mais, todas estas noções es tão em M). E isto porque cada elemento de E dá origem a um subconjunto contável de D e cada subconjunto provém no máximo de 2^{\aleph_0} sucessões, de modo que pelo lema 6.18 tem-

se $\overline{E} \leq \overline{D}$. $\aleph_1 = \overline{D}$ e uma vez que $\overline{D} \leq \overline{E}$, $D = E$. Mostramos assim, que em N , $C \leq \overline{D}$. Se τ é co-final com ω vemos que em N , $\aleph_\tau \leq C \leq \aleph_{\tau+1}$

O lema 6.17 diz que C não pode ser igual a \aleph_τ e assim $C = \aleph_{\tau+1}$. Se τ não é co-final com ω , tem-se $C \leq \aleph_\tau$ e uma vez que $C \geq \aleph_\tau$, $C = \aleph_\tau$.

O Axioma da Escolha

No nosso primeiro modelo, introduziremos um conjunto V que consiste em subconjuntos genéricos de ω em número infinito. A construção será efetuada de tal maneira que só se poderá distinguir entre um número finito destes e um conjunto qualquer. Assim S_0 consiste em todos os inteiros, S_1 num número contável de símbolos a_n , cada um dos quais é genérico e acabará por ser um subconjunto de ω . S_2 consiste num conjunto genérico V que terá como membros exatamente os conjuntos a_n . S_α para $\alpha > 2$ consiste nos nomes para todas as fórmulas em ZF relativizadas a $\bigcup \{S_\beta / \beta < \alpha\}$ envolvendo talvez constantes desse conjunto. As condições de *forcing* P consistem em todas as colecções finitas de frases declarativas da forma $n \in a_m$ ou $\sim n \in a_m$ que não contenham ao mesmo tempo uma frase declarativa e a sua negação. A ordenação parcial dos conjuntos P é apenas a inclusão. Para cada P , $\phi(P)$ o conjunto das frases declarativas elementares forçadas por P consiste no seguinte:

- i) se $m, n \in S_0$ e $m < n$ então $(m \in n) \in \phi(P)$
- ii) se $(m \in a_n) \in P$ então $(m \in a_n) \in \phi(P)$
- iii) $(a_n \in V) \in \phi(P)$ para todo n .

Seja G o grupo de todas as permutações π de ω tais que $\pi(n) \neq n$ para um número finito de n e seja G_n o subgrupo de G igual a $\{\pi/\pi(m)=m \text{ para } m \leq n\}$. Definiremos agora como é que G atua sobre $S = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}$.

DEFINIÇÃO. Para $c \in S_0$, $\pi \in G$, seja $\pi c = c$. Para $a_n \in S$, seja $\pi(\alpha_n) = \alpha_{\pi(n)}$. Seja $\pi(V) = V$. Para $\alpha > 2$ $c \in S_{\alpha}$ e suponha que c corresponde a uma fórmula $A(x, c_1, \dots, c_m)$ em que $c_i \in X_{\alpha} \cup \{S_{\beta}/\beta < \alpha\}$ e subentende-se que A tem todas as variáveis restritas a X_{α} . Então $\pi(c)$ é o elemento de S_{α} que corresponde a $A(x, \pi(c_1), \dots, \pi(c_m))$.

DEFINIÇÃO. Seja A uma frase declarativa limitada, $A \equiv B(c_1, \dots, c_n)$ em que $c_i \in S$ e B é uma fórmula de ZF tal que cada quantificador tem um índice ordinal. Então $\pi(A) \equiv B(\pi(c_1), \dots, \pi(c_n))$, em que os índices ordinais não são modificados. E analogamente para frases declarativas não-limitadas.

DEFINIÇÃO. Se P é uma condição de forcing, $\pi(P)$ é uma condição de forcing definida por $(n \in a_m) \in P \leftrightarrow (n \in \alpha_{\pi(m)}) \in \pi(P)$ e $\sim(n \in a_m) \in P \leftrightarrow \sim(n \in \alpha_{\pi(m)}) \in \pi(P)$.

LEMA 6.20. P força $A \leftrightarrow \pi(P)$ força $\pi(A)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Seja A uma frase declarativa limitada. A demonstração procede por indução sobre a ordem de A . O lema só precisa ser verificado para as frases declarativas limitadas A , tais que ordem de $A = (\alpha, i, r)$ e $\alpha \leq 2$ uma vez que a indução é trivial. Basta considerar o caso em que A é da forma $n \in a_m$. Mas então é óbvio a partir da nossa definição da ação de G sobre P e A .

O resultado para frases declarativas não limitadas segue-se por indução sobre o número de símbolos.

LEMA 6.21. *Para cada $c \in S$, a frase declarativa A e a condição P , $\exists m$ tal que $\pi \in G_m \rightarrow \pi(c)=c$, $\pi(A)=A$, $\pi(P)=P$*

DEMONSTRAÇÃO.

Se $c \in S$ e corresponde a uma fórmula $A(x, c_1, \dots, c_n)$ tal que para algum m_i , $\pi \in G_{m_i} \rightarrow (c_i)=c_i$ então se $m = \max(m_i)$ obviamente $\pi \in G_m \rightarrow \pi(c)=c$. Se $c \in S_0$ ou $c \in S_2$, $\pi(c)=c$ para todo o π . Se $a_m \in S_1$, então $\pi(a_m)=a_m$, se $\pi \in G_m$. O caso das frases declarativas é tratado analogamente. O caso das condições P é trivial. Assim, embora haja a_n em número infinito, cada c é simétrico a respeito de todos eles com, talvez, exceções em número finito.

Represente agora N o modelo obtido escolhendo uma sucessão completa $\{P_n\}$.

TEOREMA 6.14. *N é um modelo para ZF em que o conjunto T é um subconjunto de $P(\omega)=C$ tal que T é infinito e no entanto não contém nenhum subconjunto contável.*

DEMONSTRAÇÃO.

Se $m \neq n$ então nenhum P pode forçar $a_m = a_n$ uma vez que podemos sempre encontrar algum $Q > P$ que força, para algum k , $k \in a_m$ e $\sim k \in a_n$. Assim, $\bar{a}_m \neq \bar{a}_n$ e obviamente T é infinito. Seja $c \in S$, suponha que algum P da sucessão completa $\{P_n\}$ força c é uma função f de ω em V , tal que $f(m) \neq f(n)$ se $m \neq n$. Seja r tal que $\pi \in G_r \rightarrow \pi(c)=c$ e tal que r é maior do que qualquer m tal que a_m ocorre numa frase declarativa de P . Na sucessão completa $\{P_n\}$ tem que haver algum $P' \supseteq P$ tal que P' força $f(k) = a_s$, para algum k e s em que s é maior do que r , uma vez que \bar{f} toma um número infinito de valores distintos. Seja $t > r$

um inteiro tal que a_t , não apareça em P' . Seja π a permutação que troca s e t e que é a identidade sobre todos os outros inteiros. Se $P'' = \pi(P')$ então P'' força $f(k) = a_t$.

Também se tem que P' e P'' são compatíveis, isto é, $Q = P' \cup P''$ é uma condição de *forcing*, uma vez que P' e P'' são idênticos exceto para as condições que envolvem a_s e a_t e P' não envolve t e P'' não envolve s . Assim Q força f a ser unívoca uma vez que $Q \supseteq P$ e no entanto força $f(k) = a_s$ e $f(k) = a_t$ o que é impossível.

COROLÁRIO. *Em N o contínuo não é bem ordenado.*

COROLÁRIO. *Em N existe uma sucessão contável $\{B_n\}$, em que cada B_n é um conjunto de números reais tal que não existe uma função g tal que $g(n) \in B_n$. Assim o AE contável não é satisfeito.*

DEMONSTRAÇÃO.

É claro que os números reais estão em correspondência 1 a 1 com subconjuntos de ω de modo que C pode ser considerado ou como o conjunto dos números reais ou como $P(\omega)$. Também é bem sabido que para qualquer n existe uma função simples de todos os n -tuplos de números reais 1 a 1 sobre os reais. Seja B_n o conjunto de reais que correspondem a todos os n -tuplos de elementos de V em que nenhum par de elementos do n -tuplo é igual. Se g existe, então obter-se-ia um subconjunto contável de V .

DEFINIÇÃO. *Diremos que P força fracamente A se P força $\sim A$.*

Assim, se P força fracamente A então se P é parte da sucessão completa $\{P_n\}$ A tem que ser verdadeiro em N , uma vez que nenhum $Q \supseteq P$ pode forçar $\sim A$. Obviamente se P força A , P força fracamente A .

LEMA 6.22. *Em N se $x \in N$, $x \subseteq \omega$, há $b_1 = a_{i_1}, \dots, b_m = a_{i_m}$ em número infinito tais que x é construtível a partir de b_1, \dots, b_m .*

DEMONSTRAÇÃO.

Diremos que x é construtível a partir de b_1, \dots, b_m se quando definimos $M_0 = \omega \cup \{b_1, \dots, b_m\}$, $M_\alpha = (\bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta)'$ para algum α , $x \in M_\alpha$.

Seja $x = \bar{c}$ e suponhamos que G_m conserva c fixo. Para todo o P , seja \bar{P} o conjunto de condições em P que envolve a_i com $i \leq m$. A nossa afirmação é que se P força $n \in c$ então P força fracamente $n \in c$.

Não sendo assim para algum $P' \supseteq P$, P' força $\sim n \in c$. Obviamente existe algum $\pi \in G_m$ tal que $\pi(P')$ e P são compatíveis. Então $\pi(P')$ força $\sim n \in c$ e por isso $Q = P \cup \pi(P')$ força $n \in c$ e $\sim n \in c$, o que é impossível. A função h de \bar{P} para o conjunto de todos os n tais que P força fracamente $n \in c$ é exprimível em M . Obviamente x é agora facilmente construído a partir de h e a_1, \dots, a_m uma vez que estes a_i determinam qual é o \bar{P} que ocorre na sucessão completa.

O lema acima pode-se generalizar a qualquer conjunto x que seja um subconjunto de um ordinal. Incluímos aqui apenas para mostrar como os a_i se comportam independentemente. No entanto precisamos de uma forma ligeiramente diferente para uma aplicação.

A cada elemento c do espaço nominal S associaremos um conjunto finito de a_n , o a_n do qual ele depende essencialmente. A definição é óbvia para $c \in S_0$ ou $c \in S_l$. Ao elemento V é associado \emptyset . Ora se $c \in S_\alpha$ e corresponde a uma fórmula que

envolve c_1, \dots, c_n , em que $c_i \cup \{S_\beta / \beta < \alpha\}$ associamos a c o conjunto $\varphi(c)$ que é a união dos subconjuntos finitos $\varphi(c_i)$ de V que são associados aos c_i . Se B é um subconjunto finito de V então consideramos todos os elementos c tais que $\varphi(c) = B$ e chamamos a esta classe $D(B)$. Por indução em α , vê-se que podemos definir sobre $S_\alpha \cap D(B)$ uma boa ordenação natural. Seja $\overline{D}(B)$ os conjuntos correspondentes em N e vemos então que $\overline{D}(B)$ é uma classe que é definível em termos de V com uma boa ordenação definível em termos de V . Isto é verdade porque a construção que usamos para definir N pode ser descrita em N em termos do conjunto V . Ora, N é a união de todos os $\overline{D}(B)$. Se os conjuntos B pudessem ser bem ordenados teríamos uma boa ordenação em N . É óbvio que é este o caso. No entanto a ordenação natural dos números reais induz uma ordenação dos B e somos assim levados a concluir que podemos definir uma ordenação sobre todo o N . Para o fazer precisamos de um lema.

LEMA 6.23. *Para cada x em N existe um B tal que $x \in \overline{D}(B)$ e se $x \in \overline{D}(B')$ então $B \subseteq B'$.*

Vamos fazer um esboço da demonstração. Seja $c_1 \in D(B_1)$, $c_2 \in D(B_2)$. Suponha que P_0 força $c_1 = c_2$. Seja $B = B_1 \cap B_2$. Mostraremos que para algum $c_3 \in D(B)$, P_0 força fracamente $c_1 = c_3$. Para o resto desta demonstração só consideramos um P tal que $P \supseteq P_0$. Seja \overline{P} a parte de P que envolve $B_1 \cap B_2$. Se $c' \in D(B')$ e P força $c' \in c_1$ a mesma demonstração que fizemos no lema anterior mostra que se Q é a união de \overline{P} , P_0 e a parte de P que envolve B' , esse Q força fracamente $c' \in c_1$. Podemos dar uma outra definição, c_3 , do conjunto $\overline{c_1}$. Nomeadamente consiste em todos os $\overline{c'}$ em que $c' \in \cup \{S_\beta / \beta < \alpha\}$ para um α adequado que satisfaçam a condição seguinte: se $c' \in D(B')$,

seja $F(c')$ todas as condições de *forcing* Q que são a união de condições que envolvem apenas $B' \cup B$ e P_0 e tais que Q força fracamente $c' \in c_1$. Então c_3 consiste na união tomada sobre todo B' de $c' \in D(B')$ tal que algum membro de $F(c')$ está contido num elemento da sucessão completa que define N . Pode-se verificar que esta definição põe c_3 em $D(B)$.

Ora para cada x em N , seja B o subconjunto finito mínimo de V tal que $x \in D(B)$. Todos os x que correspondem ao mesmo B têm uma boa ordenação definível. Uma vez que a função de x para B é agora unívoca, a ordenação nos conjuntos B_t induz uma ordem nula definível em N . Daqui resulta o teorema seguinte devido a Lévy e Halpern.

TEOREMA 6.15. *Em N existe uma ordenação definível de todos os conjuntos que têm apenas o conjunto V a ocorrer como uma constante.*

Assim, o fato de todo o conjunto poder ser ordenado não implica que o contínuo possa ser bem ordenado. Usando ideias semelhantes pode-se demonstrar:

TEOREMA 6.16. *Se A é um conjunto de reais em N que pode ser bem ordenado então para algum n todos os elementos de A são construtíveis a partir de a_1, \dots, b_n .*

Da nossa demonstração segue-se que todo o conjunto pode não só ser bem ordenado mas está em correspondência 1 a 1 com um subconjunto de $\alpha \times C$ em que α é um ordinal e C é o contínuo. Um outro resultado acerca da força relativa das várias consequências do AE é devido a Halpern e Lauchli que diz que AE não se segue do teorema segundo o qual qualquer álgebra de Boole contém um ideal primo não trivial.

Seja α_0 um ordinal fixo em M . Seja S_0 o conjunto de todos os pares $\langle n, \alpha \rangle$ em que n é um inteiro e $\alpha < \alpha_0$ tal como os conjuntos óbvios necessário para tornar S_0 transitivo.

Consistirá num único conjunto genérico T e S_α para $\alpha > 1$ são definidos da maneira usual por meio de fórmulas com quantificadores $S_\beta, \beta < \alpha$ sobre os anteriores. Agora, uma condição de *forcing* consiste num número finito de pares da forma $\langle n_i, \alpha_i \rangle$ em que $\alpha_i < \alpha_0$ e $n_i \neq n_j, \alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$. Este P *força* precisamente os conjuntos $\langle n_i, \alpha_i \rangle$ a estar em T . Seja N o modelo resultante. T dará então uma função sobrejetiva 1 a 1 de ω em α_0 . Assim, em N , α_0 torna-se contável. Se utilizarmos este processo com $\alpha_0 = \aleph_1$, poderemos demonstrar que \aleph_1 (em M) se torna contável N e em geral \aleph_{n+1} em M torna-se \aleph_n em N .

Como sempre na nossa construção não se introduzem ordinais novos em N , não há novos conjuntos construtíveis.

Se fizermos $\alpha_0 = \aleph_1$ obteremos o processo de tornar os cardinais contáveis desenvolvido por Lévy e Feferman

TEOREMA 6.17. *Existe um modelo N tal que em N , \aleph_1 é o supremum de um conjunto contável de ordinais contáveis. Também o contínuo é a união de um número contável de conjuntos contáveis.*

Para finalizar, mostraremos agora que HGC implica AE. Uma vez que não supomos AE temos que ter cuidado ao formular os diversos conceitos relacionados com cardinalidade. Para dois conjuntos A e B escreveremos $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ ou $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ se existe uma função 1 a 1 de A sobre ou em B . Escrevemos $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ se $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ e $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$. O Teorema de Cantor-Bernstein não usa AE de modo que sabemos que se $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ e $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$ então $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. Enunciaremos agora a HGC sob a seguinte forma:

Se A é um conjunto infinito, não existe um B tal que $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} < \overline{\overline{2^A}}$.

Para evitar o emprego de expoentes, escreveremos $P_0(A)=A$, $P_n=P(P_{n-1}(A))$ em que $P(X)$ designa o conjunto potência de X . Deixaremos também a notação cardinal $=$ e passaremos a escrever $X=Y$ se $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}$. A HGC é uma afirmação bastante forte acerca da existência de diversas funções uma vez que dando-nos $A \leq B \leq P(A)$ então tem que existir uma função 1 a 1 ou de B sobre A ou de B sobre $P(A)$. Essencialmente isto significa que há tantas funções disponíveis que nos é possível fazer uma boa ordenação de qualquer conjunto. Seja A um conjunto infinito e queremos mostrar agora que A pode ser bem ordenado. A demonstração dada aqui segue a de Sierpinski.

LEMA 6.24. *Existe um conjunto bem ordenado W tal que $W \subseteq P_4$ e não se tem $W \leq A$.*

DEMONSTRAÇÃO.

Consideremos todas as boas ordenações de A ou dos subconjuntos de A . Uma boa ordenação de A é uma coleção de pares ordenados de A , de modo que pertence a $P_5(A)$. Consideremos agora a relação de equivalência que considera duas boas ordenações equivalentes se são isomórficas na ordem. Seja W o conjunto de todas as classes de equivalência induzidas por esta relação (os elementos de W são assim números ordinais). Os elementos de W formam um conjunto bem ordenado sob a definição usual de ordenação de conjuntos bem ordenados. Se $W \leq A$ então isso significaria que W é

isomórfico na ordem a uma das boas ordenações em W e por isso que W é isomórfico na ordem a um segmento inicial próprio de W , o que é impossível.

Aliás poderíamos esperar que W fosse igual a $P(A)$ em cardinalidade, uma vez que se AE fosse verdadeiro, W seria o conjunto de todos os ordinais de cardinalidade igual a A e por isso é o cardinal seguinte, o que pela *HGC* é a cardinalidade de $P(A)$. Para aplicar a *HGC* temos que construir situações em que W ou algum conjunto relacionado com W esteja entre X e $P(X)$ para algum X . Em primeiro lugar supõe-se que $2P_i(A) = P_i(A)$ para $0 \leq i \leq 4$. Então, sabemos que $P_3(A) \leq W + P_3(A) \leq P_4(A) + P_3(A) = P_4(A)$ pela hipótese. Então pela *HGC* ou $W + P_3(A) = P_4(A)$ ou $W + P_3(A) = P_3(A)$. Para tratar do primeiro caso temos que demonstrar um lema simples.

LEMA 6.25. *Se X e Y são conjuntos tais que $X + Y = P(2X)$ então $Y \geq P(X)$*

DEMONSTRAÇÃO.

Aqui $2X$ designa a união de dois exemplares disjuntos de X , digamos X_1 e X_2 . Se f é uma função de $X \cup Y$ sobre $P(X_1 \cup X_2) = P(X_1) \times P(X_2)$, então a imagem de X projetada sobre $P(X_1)$ não é todo o $P(X_1)$ uma vez que $X_1 < P(X_1)$ e assim, se c não está nessa projeção, f tem que ser uma função de um subconjunto de Y sobre $c \times P(X_2)$ o que significa que $Y \geq P(X)$.

Ora se $W + P_3(A) = P_4(A) = P(2P_3(A))$ podemos concluir pelo lema 6.25 que $W \geq P_4(A)$ ou uma vez que $W \leq P_4(A)$, $W = P_4(A)$ e por isso $P_4(A)$ é bem ordenado de modo que uma vez que A está em $P_4(A)$, A é bem ordenado e a demonstração está feita. Se $W + P_3(A) = P_3(A)$ então temos $W \leq P_3(A)$ e podemos repetir o mesmo argumento para mostrar que ou A é bem ordenado ou

$W \leq P_2(A)$. Repetindo-o novamente ficamos reduzidos ao caso em que $W \leq P_1(A)$. Aqui no entanto, excluimos a possibilidade de $W = P_0(A) = A$ pelo lema 6.24 de modo que temos que concluir que $W = P_1(A)$ e que A é bem ordenado.

Resta-nos afastar a restrição $2P_i(A) = P_i(A)$ para $0 \leq i \leq 4$. Se fizermos $B = P(\cup \omega)$ em que A está disjunto de ω verifica-se facilmente que $2P_i(B) = P_i(B)$ para $0 \leq i \leq 4$. Porque $2B = P(A + \omega + 1) = P(A + \omega) = B$, uma vez que $\omega + 1 = \omega$. Do mesmo modo, $B \leq B + 1 \leq 2B$ e assim $B + 1 = B$. Ora $2 \cdot 2^B = 2^{B+1} = 2^B$ e um argumento semelhante mostra que $2P_i(B) = P(B)$ para todo o i . Assim, o argumento aplica-se a B e B pode ser bem ordenado. Uma vez que A pode ser naturalmente incluído em B , A pode ser bem ordenado e o nosso resultado está demonstrado.

TEOREMA 7. *Teorema de Gödel*⁵⁸

DEMONSTRAÇÃO:

Um *sistema* matemático formal é um sistema de símbolos juntamente com regras para o seu emprego. Os símbolos individuais chamam-se termos primitivos. Fórmulas são sucessões finitas destes termos. Definirá-se uma classe de fórmulas que se chamará (a classe das) fórmulas com sentido e uma classe de fórmulas com sentido que se chamará axiomas. O número de axiomas pode ser finito ou infinito. Além disso, especificará-se uma lista de regras, que se chamará regras de inferência; se uma destas regras chamar-se R , então ela define a relação de consequência imediata por R entre um conjunto de fórmulas com sentido M_1, \dots, M_k que se chamam premissas e uma fórmula com sentido N a que se chama conclusão.

⁵⁸ Essa demonstração foi baseada na demonstração feita por Kurt Gödel. Retirada de GÖDEL, Kurt. O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. Lisboa: Editora da Fundação Calouste Gulbenkian, 1979. Página 235 a 339

Exigiremos que as regras de inferência e as definições das fórmulas com sentido e axiomas sejam construtivas; isto é, para cada regra de inferência haverá um processo finito para determinar se uma dada fórmula B é uma consequência imediata (por essa regra) das fórmulas dadas A_1, \dots, A_n e haverá um processo finito para determinar se uma dada fórmula A , A é uma fórmula com sentido ou um axioma. Uma fórmula N chamará-se uma consequência imediata de M_1, \dots, M_n se N é uma consequência imediata de M_1, \dots, M_k , por qualquer das regras de inferência. Uma sucessão finita de fórmulas será uma demonstração (e mais precisamente uma demonstração da última fórmula da sucessão), se cada fórmula da sucessão for ou um axioma ou uma consequência imediata de uma ou mais fórmulas precedentes. Uma fórmula é demonstrável se existe uma demonstração dessa fórmula. Seja o símbolo \sim um dos termos primitivos e suponhamos que exprime negação. Então o sistema formal será completo se para toda a fórmula com sentido A ou $\sim A$ é demonstrável. Demonstraremos mais tarde que (sob condições a indicar) um sistema em que todas as proposições da aritmética podem ser expressas como tendo sentido não é completo.

Faremos agora, considerações que de momento nada têm que ver com um sistema formal.

Letras minúsculas x, y, z, \dots designarão números naturais arbitrários (inteiros não negativos); sucessões finitas de inteiros não negativos serão abreviadas. Como por exemplo: x em vez de x_1, \dots, x_n e y em vez de y_1, \dots, y_n .

As letras gregas representarão funções de um ou mais números naturais cujos valores são números naturais. Letras maiúsculas R, S, T, \dots designarão classes de, ou relações entre números naturais. $R(x)$ designará que x está na classe R e $S(x_1, \dots, x_n)$ designará a proposição segundo a qual (x_1, \dots, x_n) estão na relação S . As classes podem ser consideradas como de um só termo e as

relações como classes de n-tuplos ordenados. A cada classe ou relação R haverá uma função representativa correspondente φ , tal que

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

se

$$R(x_1, \dots, x_n)$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1$$

se

$$\sim R(x_1, \dots, x_n).$$

Usaremos as notações seguintes como abreviaturas (p,q podem ser substituídas por quaisquer proposições):

$$(x) [A(x)]$$

(para qualquer número natural x , $A(x)$)

$$(Ex)[A(x)]$$

existe um número natural x tal que $A(x)$)

$$\varepsilon x A(x)$$

(o menor número natural x tal que $A(x)$ se $(Ex)[A(x)]$; de outro modo 0,

$\sim p$ (não p)

$p \vee q$ (p ou q)

$p \& q$ (p e q)

$p \rightarrow q$ (p implica q)

$p \equiv q$ (p é equivalente a q).

A função

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

chamará-se composta a respeito de

$$\psi(x_1, \dots, x_m)$$

e

$$\chi_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, \dots, m)$$

se, para todos os números naturais

$$x_1, \dots, x_n$$

se tem

$$(1) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \chi_m(x_1, \dots, x_n))$$
$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

chamará-se recursiva a respeito de

$$\psi(x_1, \dots, x_{n-1})$$

e

$$\chi(x_1, \dots, x_{n+1})$$

se, para todos os números naturais

$$k, x_2, \dots, x_n$$

se tem

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi(0, x_2, \dots, x_n) &= \chi(x_2, \dots, x_n) \\ \varphi(k+1, x_2, \dots, x_n) &= \chi(k, \varphi(k, x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Definiremos a classe das funções recursivas como sendo a totalidade das funções que podem ser geradas por substituição, de acordo com o esquema (1) e recursão de acordo com o esquema (2) a partir da função sucessor $x+1$, das funções constantes

$$f(x_1, \dots, x_n) = c$$

E das funções identidade

$$U_j^n(x_1, \dots, x_n) = x_j \quad 1 \leq j \leq n$$

As funções recursivas têm a propriedade importante de, para cada conjunto dado de valores de argumentos, o valor da

função pode ser calculado por um processo finito. Analogamente, as relações (classes) recursivas são decidíveis, uma vez que, para cada n-tuplo de números naturais dados, pode ser determinado por meio de um processo finito se a relação é ou não satisfeita (se o número pertence ou não a classe) uma vez que a função representativa é calculável.

As funções

$$x+y$$

$$xy$$

$$x^y$$

e

$$x!$$

são obviamente recursivas. Logo,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) + \psi(x_1, \dots, y_n)$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \psi(y_1, \dots, y_n)$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \psi(x_1, \dots, y_n)$$

e

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)!$$

são recursivas se

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

e

$$\psi(y_1, \dots, y_n)$$

o forem.

I.

Se as relações

$$R(x_1, \dots, x_n)$$

e

$$S(y_1, \dots, y_n)$$

são recursivas, então

$$\sim R(x_1, \dots, x_n),$$

$$R(x_1, \dots, x_n) \vee S(y_1, \dots, y_n),$$

$$R(x_1, \dots, x_n) \& S(y_1, \dots, y_n)$$

$$R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow S(y_1, \dots, y_n)$$

$$R(x_1, \dots, x_n) \equiv S(y_1, \dots, y_n)$$

são recursivas.

Por hipótese as funções representativas

$$\rho(x_1, \dots, x_n)$$

e

$$\sigma(y_1, \dots, y_n)$$

de R e S respectivamente são recursivas. Se

$$\alpha(0) = 1$$

$$\alpha(k+1) = 0$$

então $\alpha(x)$ e por isso

$$\alpha(\rho(x_1, \dots, x_n))$$

são recursivas.

Mas uma vez que

$$\alpha(\rho(x_1, \dots, x_n))$$

é 1 ou 0 conforme

$$\rho(x_1, \dots, x_n)$$

é 0 ou 1,

$$\alpha(\rho(x_1, \dots, x_n))$$

é a função representativa de

$$\sim R(x_1, \dots, x_n).$$

Logo

$$\sim R(x_1, \dots, x_n)$$

é recursiva.

Se

$$\beta(0, x) = 0$$

$$\beta(k+1, x) = \alpha(\alpha(x))$$

então

$$\beta(0, x) = \beta(x, 0) = 0$$

$$\beta(x, y) = 1 \text{ quando } x, y > 0.$$

Logo

$$\beta(\rho(x_1, \dots, x_n), \sigma(y_1, \dots, y_n))$$

que é recursiva representa

$$R(x_1, \dots, x_n) \vee S(y_1, \dots, y_n)$$

o que significa que

$$R(x_1, \dots, x_n) \vee S(y_1, \dots, y_n)$$

é recursiva.

Uma vez que

$$R(x_1, \dots, x_n) \& S(y_1, \dots, y_n) \equiv \sim(\sim R(x_1, \dots, x_n) \vee \sim S(y_1, \dots, y_n))$$

segue-se que

$$R(x_1, \dots, x_n) \& S(y_1, \dots, y_n)$$

é recursiva.

Analogamente

$$R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow S(y_1, \dots, y_n)$$

e

$$R(x_1, \dots, x_n) \equiv S(y_1, \dots, y_n)$$

e todas as outras relações definíveis a partir de

$$R(x_1, \dots, x_n)$$

e

$$S(y_1, \dots, y_n)$$

em termos de \sim e de \vee são recursivas.

II.

Se as funções

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

$$\psi(y_1, \dots, y_n)$$

são recursivas, então as relações

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \psi(y_1, \dots, y_n)$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) < \psi(y_1, \dots, y_n),$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leq \psi(y_1, \dots, y_n)$$

são recursivas.

Seja

$$\delta(0) = 0$$

$$\delta(k+1) = k$$

e

$$x - 0 = x$$

$$x - (k+1) = \delta(x - k).$$

Então

$$x - y = x - y \text{ se } x \geq y$$

e

$$x - y = 0 \text{ se } x \leq y.$$

Logo

$$\alpha(y - x)$$

é uma função representativa de $x < y$ e

$$\alpha(\psi(y_1, \dots, y_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n))$$

para

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) < \psi(y_1, \dots, y_n).$$

Assim

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \psi(y_1, \dots, y_n)$$

e

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \leq \psi(y_1, \dots, y_n)$$

analogamente são recursivas, como se pode ver diretamente ou como pode ser inferido a partir do teorema para

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) < \psi(y_1, \dots, y_n)$$

utilizando I.

III.

Se a função

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

e a relação

$$R(x, y_1, \dots, y_n)$$

são recursivas, então as relações S e T em que

$$S(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \equiv (Ex)[x \leq \varphi(x_1, \dots, x_n) \& R(x, y_1, \dots, y_n)]$$

$$T(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \equiv (x)[x \leq \varphi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(x, y_1, \dots, y_n)]$$

e a função ψ em que

$$\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \varepsilon x[x \leq \varphi(x_1, \dots, x_n) \& R(x, y_1, \dots, y_n)]$$

são recursivas.

Seja a função representativa de

$$R(x, y_1, \dots, y_n)$$

a função

$$\rho(x, y_1, \dots, y_n).$$

Seja

$$\pi(0, y_1, \dots, y_n) = \rho(0, y_1, \dots, y_n)$$

e

$$\pi(k+1, y_1, \dots, y_n) = \pi(k, y_1, \dots, y_n) \cdot \rho(k+1, y_1, \dots, y_n).$$

Então

$$\pi(x, y_1, \dots, y_n) = \rho(0, y_1, \dots, y_n) \cdot \rho(1, y_1, \dots, y_n) \dots \rho(x, y_1, \dots, y_n).$$

Logo

$$\pi(x, y_1, \dots, y_n)$$

É ou 0 ou 1 conforme alguns ou nenhum dos

$$\rho(0, y_1, \dots, y_n), \dots, (x, y_1, \dots, y_n)$$

são 0; isto é conforme existem ou não números naturais $n \leq x$ para os quais

$$R(n, y_1, \dots, y_n)$$

é satisfeita.

Logo,

$$\pi(\varphi(x_1, \dots, x_n), y_1, \dots, y_n)$$

que é recursiva representa

$$(Ex)[x \leq \varphi(x_1, \dots, x_n) \& R(x, y_1, \dots, y_n)]$$

é uma relação recursiva. Segue-se deste resultado e de I que

$$(x)[x \leq \varphi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(x, y_1, \dots, y_n)]$$

é recursiva uma vez que

$$(x)[x \leq \varphi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(x, y_1, \dots, y_n)]$$

é equivalente a

$$\sim[(Ex)[x \leq \varphi(x_1, \dots, x_n) \& \sim R(x, y_1, \dots, y_n)]]].$$

Seja

$$\mu(0, y_1, \dots, y_n) = 0$$

e

$$\begin{aligned} \mu(k+1, y_1, \dots, y_n) &= (k+1)[\pi(k, y_1, \dots, y_n) - \pi(k+1, y_1, \dots, y_n)] + \mu(k, y_1, \dots, y_n) \\ &[\alpha(\pi(k, y_1, \dots, y_n) - \pi(k+1, y_1, \dots, y_n))]. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$1 \geq \pi(k, y_1, \dots, y_n) \geq \pi(k+1, y_1, \dots, y_n) \geq 0$$

$$\mu(k+1, y_1, \dots, y_n) = k+1$$

se

$$\pi(k, y_1, \dots, y_n) = 1$$

e

$$\pi(k+1, y_1, \dots, y_n) = 0$$

e de outro modo

$$\mu(k+1, y_1, \dots, y_n) = \mu(k, y_1, \dots, y_n) \cdot \pi(k, y_1, \dots, y_n) = 1$$

e

$$\pi(k+1, y_1, \dots, y_n) = 0$$

são ambas satisfeitas só quando

$$\sim R(1, y_1, \dots, y_n), \dots, \sim R(k, y_1, \dots, y_n)$$

e

$$R(k+1, y_1, \dots, y_n);$$

isto é, quando $k+1$ é o menor valor x' de x tal que

$$R(x, y_1, \dots, y_n).$$

Assim se existe x' e este é maior do que 1

$$\mu(0, y_1, \dots, y_n) = \dots = (x'-1, y_1, \dots, y_n) = 0$$

e

$$\mu(x, y_1, \dots, y_n) = x'$$

para todo $x \geq x'$. Se $x' = 0$ ou x' não existe, todos os

$$\mu(x, y_1, \dots, y_n)$$

são 0.

Logo

$$\mu(\varphi(x_1, \dots, x_n), y_1, \dots, y_n)$$

é o menor $x \leq \varphi(x_1, \dots, x_n)$ tal que

$$R(x, y_1, \dots, y_n)$$

se este número existir e é de outro modo 0, isto é,

$$\mu(\varphi(x_1, \dots, x_n), y_1, \dots, y_n) = \varepsilon x [x \leq \varphi(x_1, \dots, x_n) \& R(x, y_1, \dots, y_n)].$$

Descreveremos agora um sistema formal que servirá como exemplo nas considerações que se seguem. Enquanto que um sistema formal consiste apenas em símbolos e em regras mecânicas para os relacionar, o significado que atribuímos aos símbolos é sempre um princípio que nos guia ao estabelecermos o sistema.

Para evitar os paradoxos utilizaremos a teoria dos tipos. Assim excluiremos o emprego de variáveis que tomem valores sobre o conjunto de todos os objectos e utilizaremos diferentes espécies de variáveis para domínios diferentes. Em particular, p, q, r, \dots serão variáveis para proposições. Teremos então variáveis de tipos sucessivos do seguinte modo:

x, y, z, \dots para números naturais

f, g, h, \dots para funções (de uma variável) cujo domínio e cujos valores são números naturais

F, G, H, \dots para funções (de uma variável) cujo domínio e valor são funções f, g, h, \dots

etc.

Obtêm-se sistemas formais diferentes conforme o número destas variáveis que é utilizado. Restringiremos aos primeiros dois tipos, isto é, usaremos variáveis de três espécies

p, q, r, \dots

x, y, z, \dots

f, g, h, \dots

Suporemos que um número infinito denumerável de cada uma destas variáveis está incluído entre os nossos termos primitivos

(como se pode garantir, por exemplo, com o emprego de letras com índices numéricos).

Os termos primitivos, além das variáveis, serão:

0 (o número 0)

N ($N(x)$ designa o sucessor de x)

\sim ,

\vee ,

$\&$,

\rightarrow ,

Π ($\Pi xF(x)$ significa $F(x)$ é verdadeira para todos os números naturais x e pode ser considerado como produto lógico de $F(x)$ sobre todos os x),

Σ ($\Sigma xF(x)$ significa que existe pelo menos um número natural x tal que $F(x)$ é verdadeira e pode ser considerada como a soma lógica de $F(x)$ sobre todos os x),

\in ,

= (igual a),

(\cdot) ($f(x)$ é o valor de f para o argumento x e interpreta-se como sendo os símbolos para a operação de aplicação de uma função a um argumento. Os parêntesis também podem ser usados como sinais de inclusão.

Em seguida, a classe das fórmulas com sentido tem que ser definida. Para o fazer descreveremos duas classes de fórmulas que têm sentido: fórmulas que designam números e fórmulas que designam proposições. As primeiras compreendem os símbolos numéricos ou expressões que representam números como $(0, N(0), \dots)$ juntamente com expressões funcionais ou expressões que se tornam expressões numéricas quando as expressões numéricas são substituídas de uma maneira adequada pelas

variáveis que ocorrem nelas. A segunda compreende proposições, como por exemplo:

$$\prod x[\sim(0=N(x))]$$

juntamente com funções preposicionais ou expressões que se tornam proposições quando as variáveis que ocorrem nelas são substituídas de uma maneira adequada por expressões numéricas como por exemplo:

$$\sum x[y=N(x)]$$

As definições exatas são dadas utilizando indução completa:

1. 0 e x, y, z, \dots (variáveis para números) são expressões de I^a
2. Se A e B são expressões da I^a espécie, então $A=B$ é uma expressão da II^a espécie.

3. Se A exp. I, então $N(A)$ exp. I

4. Se A exp. I e f é uma variável para uma função então $f(A)$ exp. I

5. Se A e B exp. II, então

$$\sim(A)$$

$$(A) \vee (B)$$

$$(A) \& (B)$$

$$(A) \rightarrow (B)$$

e

$$(A) \equiv (B)$$

6. Se A exp. II e x é uma variável numérica, então

$$\prod x(A)$$

e

$$\sum x(A)$$

exp. II e

$$\in x(A)$$

exp. I.

7. Se A exp II e f uma variável funcional, então

$$\prod f(A)$$

$$\sum f(A)$$

exp. II

8. Se A exp. II e p uma variável proposicional então

$$\prod p(A)$$

$$\sum p(A)$$

$$\prod p(A)$$

$$\sum p(A)$$

9. A classe das expressões da I.^a (II.^a) espécie será a menor classe que satisfaça 1-8.

Uma fórmula é uma fórmula com sentido se é ou uma expressão da I.^a espécie ou uma expressão da II.^a espécie.

As ocorrências de variáveis numa expressão com sentido podem ser classificadas em livres e ligadas da maneira seguinte:

A cada ocorrência de Π numa expressão com sentido A corresponde uma parte única de A , que começa com a ocorrência de Π e tem a forma

$$\prod t(B)$$

em que t é uma variável e B tem sentido. Esta parte de A chamará-se o âmbito da ocorrência dada de Π em A . Analogamente definimos o âmbito de uma ocorrência de Σ ou \in em A . Uma dada ocorrência da variável t em A será ligada ou livre conforme esteja ou não no âmbito de um Π , Σ ou \in seguido de t .

Nas definições, dadas acima, de expressões funcionais e funções proposicionais, as substituições que se têm em vista são substituições para as ocorrências livres de variáveis, (y é livre e x é ligada em

$$\in x[y=N(x)]$$

e

$$\Sigma x[y=N(x)]$$

Empregaremos

$$\text{Subst}[A_G^t]$$

para designar a expressão obtida de A substituindo cada ocorrência de t em A , como variável livre, por G .

Podemos empregar $F(t)$ para representar a fórmula com sentido em que t ocorre como variável livre e $F(A)$ para representar

$$\text{Subst}[F(t)_A^t]$$

Se A é uma fórmula com sentido e f uma variável funcional, então as ocorrências de f em A como um símbolo livre são como o primeiro símbolo das partes de A da forma

$$F(U)$$

Pode-se fazer uma lista dessas partes sob a forma

$$f(U_1), \dots, f(U_n)$$

em tal ordem que se U_j contém $f(U_i)$ então $i < j$.

Seja $G(x)$ uma fórmula com sentido em que x ocorre como variável livre.

Seja

$$A', f(U'_2), \dots, f(U'_n)$$

obtida de

$$A, f(U_2), \dots, f(U_n)$$

substituindo

$$f(U_1)$$

por

$$G(U_1)$$

então seja

$$A'', f(U''_3), \dots, f(U''_n)$$

obtida de

$$A', f(U'_3), \dots, f(U'_n)$$

substituindo

$$f(U'_2)$$

por

$$G(U'_2)$$

etc.

Representaremos por

$$A\left[\frac{f}{G(x, x)}\right]$$

a expressão

$$A^{(n)}t.$$

Uma expressão A em que as diferentes variáveis livres

$$(t_1, \dots, t_n)$$

ocorrem significa o mesmo que

$$\Pi t_1(\dots(\Pi t_n(A))\dots).$$

Os axiomas serão as seguintes fórmulas:

A. Axiomas que se referem às noções do cálculo proposicional

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)).$
2. $((\sim p) \rightarrow p) \rightarrow p.$
3. $p \rightarrow ((\sim p) \rightarrow q).$
4. $p \& q. \equiv. \sim [(\sim p) \vee (\sim q)].$
5. $p \vee q. \equiv. (\sim p) \rightarrow q.$
6. $p \equiv q. \equiv. (p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p).$
7. $p \equiv q. \rightarrow. p \rightarrow q.$
8. $p \equiv q. \rightarrow. \rightarrow p$

Para formular a teoria a que se refere este grupo de axiomas seria necessário investigar a teoria do cálculo proposicional.

B. A noção a que se referem a noção de identidade

1. $x=x$
2. $x=y. \rightarrow .f(x)=f(y).$
3. $(x=y)\&(y=z). \rightarrow .z=x.$

C. Axiomas que correspondem a alguns dos axiomas de Peano para os números naturais

1. $\sim(0=N(x)).$
2. $N(x)=N(y). \rightarrow .x=y.$

Para completar a definição do sistema formal que estamos a considerar resta fazer uma lista das regras de procedimento.

Cada uma destas regras deve ser interpretada como uma afirmação acerca das condições segundo as quais uma fórmula N é uma consequência imediata por essa regra da(s) fórmula(s) com sentido $M(M_1, M_2)$.

1. Se $(A) \rightarrow (B)$ e A , então B .

2. Suponhamos que A é uma fórmula com sentido, que t é uma variável e que t não ocorre em A

a. Se $(A) \rightarrow (B)$ então $(A) \rightarrow (\prod t(B))$

b. Se $(A) \rightarrow (\prod t(B))$ então $(A) \rightarrow (B)$

3. Suponhamos que A é uma fórmula com sentido, que t é uma variável e t não ocorre em B

a. Se $(A) \rightarrow (B)$ então $(A) \rightarrow (\sum t(B))$

b. Se $(A) \rightarrow (\sum t(B))$ então $(A) \rightarrow (B)$

4a. Suponhamos que x é uma variável numérica, que A contém x como variável livre, que G é uma expressão do primeiro género e que nenhuma variável livre de G é ligada em F ,

Se A , então $\text{Subst} [A_G^x]$

4b. Suponhamos que f é uma variável funcional, que A contém f como variável livre, que x é uma variável numérica, que $G(x)$ é uma expressão da I.^a espécie em que x ocorre como uma variável livre e que nenhuma variável livre de $G(x)$ {ou A é ligada ou em $G(x)$ ou em A e que além disso, $G(x)$ ou A não têm variáveis ligadas em comum.

Se A , então $\text{Subst} [A_{G(x),x}^f]$

4c. Suponhamos que p é uma variável preposicional, que contém p como uma variável livre, que P é uma expressão da II.^a espécie e que nenhuma variável livre de P é ligada em A .

Se A , então $\text{Subst} [A_p^p]$

4d. Suponhamos que x é uma variável numérica e que $F(x)$ tem sentido e contém x como variável livre {e que nenhuma variável livre de F ocorre como variável ligada em F }.

Se $(A) \rightarrow (F(x))$, então $(A) \rightarrow (F(\in x(F(x))))$.

5. Suponhamos que x é uma variável numérica e que $F(x)$ uma fórmula com sentido em que x ocorre como variável livre. Se $F(D)$ e $(F(x)) \rightarrow (F(N(x)))$, então $F(x)$.

6. Suponhamos que s e t são variáveis da mesma espécie, que s não ocorre em A . Seja A' o resultado de substituir s por t em A . Suponhamos que A tem sentido e seja B' a expressão obtida a partir de B substituindo uma dada ocorrência de A em B por A' .

Se B , então B' .

Um processo usado na demonstração matemática não está representado neste sistema, nomeadamente a definição e introdução de novos símbolos. Contudo, este processo não é essencial mas apenas uma questão de abreviaturas.

Para as considerações que se seguem o significado dos símbolos é irrelevante e é até desejável que ele seja esquecido. As noções que se relacionam com o sistema considerado do ponto de vista puramente formal podem designar-se por *metamatemáticas*.

Os termos primitivos (e portanto as fórmulas e as demonstrações) são contáveis e portanto uma representação do sistema por meio dos inteiros positivos pode ser construída da maneira que se segue.

Faremos corresponder os números 1-13 aos símbolos do seguinte modo:

0	1
N	2
=	3
~	4
√	5
&	6
→	7
≡	8
Π	9
Σ	10
∈	11
(12
)	13

Os inteiros >13 e $\equiv 0 \pmod{3}$ corresponderão a variáveis proposicionais, os inteiros >13 , $\equiv 1 \pmod{3}$ a variáveis numéricas e os inteiros >13 , $\equiv 2 \pmod{3}$ a variáveis funcionais.

Assim, estabelece-se uma correspondência 1 a 1 entre os termos primitivos e os inteiros positivos.

Faremos corresponder inteiros a sucessões finitas de inteiros positivos por meio do esquema seguinte:

k_1, \dots, k_n corresponde a

$$2^{k_1} . 3^{k_2} . 5^{k_3} \dots p_n^{k_n}$$

Uma fórmula é uma sucessão finita de termos primitivos e uma demonstração é uma sucessão finita de fórmulas. A cada fórmula faremos corresponder o inteiro que corresponde à sucessão de inteiros que corresponde aos seus símbolos; e a cada demonstração faremos corresponder o inteiro que corresponde à sucessão de inteiros que correspondem às fórmulas que a constituem. Então determinamos assim uma correspondência 1 a 1 entre as fórmulas (demonstrações) e um subconjunto do conjunto dos inteiros positivos.

Podemos, agora, definir diversas classes e relações metamatemáticas de inteiros incluindo uma que corresponde a cada classe e relação de fórmulas, x será um número f (número B) se existe uma fórmula (demonstração) a que x corresponda. A relação

$$x, y \cup z$$

entre números significará que x, y, z são números f e que a fórmula que z representa é uma conseqüência imediata das fórmulas representadas por x e y .

$$xB y$$

significará que x é um número B e que y é um número f e que a demonstração que x representa é uma demonstração da fórmula representada por y . Há também funções metamatemáticas de inteiros como as seguintes :

Neg (x) = o número que representa $\sim(X)$ se x representa fórmula X' , e 0 se x não é um número- f .

Sb $\left[\begin{matrix} y \\ xz \end{matrix} \right]$ = o número que representa o Subst $\left[F_G^t \right]$ de substituir as ocorrências livres de t em F por G se x e z representam as fórmulas F, G , respectivamente, e y a variável t ; de outro modo é igual a 0.

Estas relações e funções que definimos indiretamente pelo emprego da correspondência entre fórmulas e números são construtivas. Por isso, não é de surpreender que sejam recursivas. Mostraremos para as mais importantes definindo-as diretamente a partir de relações e funções que se sabe previamente que são recursivas. Utilizaremos os métodos que permitem gerar funções e relações recursivas a partir de funções relações recursivas.

1.

$$x/y \equiv (Ez)[z \leq x \& x = yz]$$

x/y significa x é divisível por y . (yz é recursivo. Logo, $x = yz$ é recursiva. Segue-se que x/y é recursiva).

2.

$$Primo(x) \equiv x > 1 \& \sim(Ez)[z \leq x \& \sim(z=1) \& \sim(z=x) \& x/z]$$

x é um número primo.

3.

$$Pr(0) = 0$$

$$Pr(n+1) = \varepsilon y [y \leq \{Pr(n)\}! + 1 \& Primo(y) \& y > Pr(n)]$$

$Pr(n)$ é o número primo de ordem n (por ordem de grandeza).

$$4. \quad nGlx = \varepsilon y [y \leq x \& x / \{Pr(n)\}^y \& \sim (x / Pr(n))^{y+1}]$$

$nGlx$ é o membro de ordem n da sucessão dos inteiros positivos que x representa.

$$5. \quad L(x) = \varepsilon y [y \leq x \& (y+1)Glx = 0]$$

$L(x)$ é o número de membros da sucessão representada por x (se x representa uma sucessão de inteiros positivos).

6.

$$x * y = \varepsilon z \{z \leq [Pr(L(x) + L(y))]^{x+y} \& (n) [n \leq L(x) \rightarrow nGlx = nGlx] \& (n) [0 < n \leq L(y) \rightarrow (n + L(x))Glx = nGly]\}$$

* representa a operação de juntar uma sucessão finita a outra. Isto é, se

$$x = 2^{k_1} \dots p_r^{k_r}$$

e

$$y = 2^{l_1} \dots p_s^{l_s}$$

então

$$x * y = 2^{k_1} \dots p_r^{k_r} p_{r+1}^{l_1} \dots p_{r+s}^{l_s}$$

Repare-se que o número da sucessão que consiste apenas no único número x é 2^x

$$7. \quad k(x) = 2^{12} * x * 2^{13}$$

$$8. \quad Neg(x) = 2^4 * k(x)$$

Se x representa a fórmula A , $Neg(x)$ representa $\sim A$.

$$9. \quad Imp(x, y) = k(x) * 2^7 * k(y).$$

Se x e y representam as fórmulas A e B respectivamente, então $Imp(x, y)$ representa $(A) \rightarrow (B)$.

$$10. \quad uGenx = 2^9 * 2^u * k(x).$$

Se u representa a variável t e x a fórmula A , então $uGenx$ representa $\prod t(A)$.

Analogamente para $\sum t(A)$ e $\varepsilon x(A)$

$$11. \quad x \equiv y \pmod{n} \equiv (Ez)[z \leq x + y \& (x = y + zn \vee y = x + zn)]$$

$x \equiv y \pmod{n}$ tem o significado habitual.

Se x representa a fórmula A , $k(x)$ representa A (porque a sucessão de números que corresponde aos símbolos de (A) é

$$12, k_1, \dots, k_n, 13$$

em que

$$k_1, \dots, k_n$$

é a sucessão dos números que corresponde aos símbolos de A).

$t > 13$ exprime t representa uma variável. Analogamente, usando 11 podem-se definir classes recursivas $Var_p(t)$,

$Var_x(t)$, $Var_v(t)$, para exprimir t representa uma variável proposicional, t representa uma variável numérica, t representa uma variável funcional, respectivamente.

Também se podem definir classes recursivas $M_I(x)$, $M_{II}(x)$, $M(x)$ para exprimir x representa uma exp. I, x representa uma exp. II, x representa uma fórmula com sentido, respectivamente, relações recursivas que correspondem às relações t ocorre em A como uma variável livre (ligada) e funções recursivas que correspondam às operações de substituição usadas nas regras de inferência.

$$12 \quad x,yU_1z \equiv x = Imp(y,z) \& M(x) \& M(y)$$

z representa uma fórmula que é uma consequência imediata pela Regra 1 das fórmulas representadas por x,y

$$13 \quad xU_2z \equiv (Et, v, w)[t, v, w \leq z \& M(v) \& M(w) \& x = Imp(v, w) \& z = Imp(v, tGenw) \& t > 13 \& \sim(Ek)[k \leq L(v) \& kGIv = t]]$$

z representa uma fórmula que é uma consequência imediata pela Regra 2 das fórmulas representadas por x

$$14 \quad x,yU_z = x,y,U_1z \vee x U_2z \vee \dots \vee xU_6z$$

z representa uma fórmula que é uma consequência imediata da(s) fórmulas representada(s) por $x(x,y)$

Cada um dos axiomas é representado por um número. Sejam

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{13}$$

os números que correspondem aos axiomas.

$$15 \quad Ax(x)x = \alpha_1 \vee x = \alpha_2 \vee \dots \vee x = \alpha_{13}$$

x representa um axioma.

$$16 \quad B(x) \equiv (n) 0 < n \leq L(x) \rightarrow \{Ax(nG1x) \vee (Ep, q)[0 < p, q < n \& pG1x, qG1xU_nG1x]\} \& L(x) > 0$$

x representa uma demonstração.

$$17 \quad xBy \equiv B(x) \& L(x)G1x=y$$

Abreviaremos certas expressões formais de acordo com a seguinte convenção: z_0 em vez de 0, z_1 em vez de $N(0)$, z_2 em vez de $N(N(0))$, etc. Então os z representam os números naturais na lógica formal. Além disso se

$$\varphi(x_1, x_2, \dots)$$

é uma função de inteiros positivos, diremos que a expressão funcional formal

$$G(u_1, u_2, \dots)$$

representa

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

se

$$G(z_m, z_n, \dots) = z \varphi(m, n, \dots)$$

é formalmente demonstrável para cada conjunto de números naturais

$$m, n, \dots$$

por outras palavras, se

$$G(z_m, z_n, \dots) = z_k$$

é demonstrável formalmente sempre que

$$\varphi(m, n, \dots) = k$$

é satisfeita.

Se o valor de

$$\varphi(x_1, x_2, \dots)$$

é independente de uma variável x_p , então

$$G(u_1, u_2, \dots)$$

não tem que conter a variável correspondente u_p .

Analogamente se

$$R(x_1, x_2, \dots)$$

é uma classe ou relação de números naturais, diremos que a expressão funcional

$$H(u_1, u_2, \dots)$$

representa

$$R(x_1, x_2, \dots)$$

se podemos demonstrar formalmente

$$H(z_m, z_n, \dots)$$

sempre que

$$R(m, n, \dots)$$

é satisfeita e

$$\sim H(z_m, z_n, \dots)$$

sempre que

$$R(m, n, \dots)$$

não é satisfeita.

Esboçaremos agora a demonstração de que toda a função recursiva (classe, relação) é representada por uma fórmula do nosso sistema formal.

A função recursiva $x+1$ é representada por $N(w)$, porque

$$N(z_n) = z_{n+1}$$

pode ser demonstrado formalmente para cada número natural n .

A demonstração é imediata uma vez que pelas nossas abreviaturas $z_{n+1} = N(z_n)$.

A função constante

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$$

é representada por z_c e a função identidade

$$U_j^n = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j.$$

é representada por u_j

Se

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

é composta a respeito de

$$\phi(x_1, \dots, x_m)$$

e

$$\chi_i(x_1, \dots, x_m) \quad (i=1, \dots, m)$$

e se

$$G(w_1, \dots, w_n)$$

representa

$$\phi(x_1, \dots, x_m)$$

e

$$H_i(w_1, \dots, w_n)$$

representa

$$\chi_i(x_1, \dots, x_n)$$

então

$$G(H_1(w_1, \dots, w_n), \dots, H_m(w_1, \dots, w_n))$$

representa

$$\varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Se

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

é recursiva a respeito de

$$\phi(x_1, \dots, x_{n-1})$$

e

$$\chi(x_1, \dots, x_{n+1})$$

e se

$$G(w_1, \dots, w_{n-1})$$

representa

$$\phi(x_1, \dots, x_{n-1})$$

e

$$H(w_1, \dots, w_{n+1})$$

representa

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

Esta fórmula

$$K(w_1, \dots, w_n)$$

intuitivamente tem o significado desejado. Para cada conjunto de números naturais

$$w_1, \dots, w_n$$

existe uma e só uma função f que satisfaz as condições

$$f(0)G(w_2, \dots, w_n)$$

e, portanto,

$$K(w_1, \dots, w_n)$$

significa o valor que a função f que satisfaz as condições acima toma para o argumento w_1 . Este valor é obviamente

$$\varphi(w_1, \dots, w_n)$$

A demonstração de que

$$K(w_1, \dots, w_n)$$

representa na verdade

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

se G representa ϕ e H representa χ é demasiado longa para ser dada aqui

Se

É uma classe recursiva (ou relação) existe uma função recursiva

$$\varphi(x, y, \dots)$$

tal que

$$\varphi(x, y, \dots) = 0$$

se

$$R(x, y, \dots)$$

e

$$\varphi(x, y, \dots) = 1$$

se

$$\sim R(x, y, \dots)$$

Então existe um

$$G(u, v, \dots)$$

que representa

$$\varphi(x, y, \dots).$$

$$G(u, v, \dots) = 0$$

representa

$$R(x, y, \dots).$$

Porque se

$$R(m, n, \dots)$$

então

$$G(z_m, z_n, \dots) = z_0 = 0$$

é formalmente demonstrável; e se

$$\sim R(m, n, \dots)$$

então

$$G(z_m, z_n, \dots) = z_1$$

e portanto

$$\sim [G(z_m, z_n, \dots) = 0]$$

é formalmente demonstrável.

Porque certas relações metamatemáticas e certas proposições acerca do nosso sistema formal podem ser expressas por meio de relações recursivas e proposições acerca delas, estas relações e estas proposições podem ser expressas no sistema formal. Assim, partes da teoria cujo objeto é o nosso sistema formal podem ser expressas no mesmo sistema formal.

Já dissemos que

$$xB_y$$

é uma relação recursiva; e podemos demonstrar também que

$$\gamma(x,y)$$

é recursiva, em que

$$\gamma(x,y)$$

é o número da fórmula que resulta quando substituímos todas as ocorrências livres de w por z_y na fórmula cujo número é x

$$Sb[x_{z(y)}^a]$$

Logo existe uma fórmula $B(u,v)$ que representa

$$xB_y$$

e uma fórmula $S(u,v)$ que representa

$$\gamma(x,y).$$

Seja $U(w)$ a fórmula

$$\prod v[\sim B(v, S(w, w))]$$

e seja p o número de $U(w)$.

Ora $U(z_p)$ é a fórmula que resulta quando substituímos todas as ocorrências livres de w por z_p na fórmula cujo número é p e portanto tem o número

$$\gamma(p, p)$$

Logo se

$$U(z_p)$$

é demonstrável, existe um k tal que

$$kB \gamma(p, p).$$

Mas uma vez que

$$S(u, v)$$

representa

$$\gamma(x, y)$$

e

$$B(u, v)$$

representa

$$xB y$$

segue-se que

$$B(z_k, S(z_p, z_p))$$

é demonstrável.

Do mesmo modo é uma propriedade do nosso sistema que se

$$\prod v F(v)$$

é demonstrável então

$$F(z_1)$$

é demonstrável para todo o 1; conseqüentemente se

$$U(z_p)$$

é demonstrável, então

$$\sim B(z_k, S(z_p, z_p))$$

bem como

$$B(z_k, S(z_p, z_p))$$

são demonstráveis se o sistema contém uma contradição.

Deste modo concluímos que

$$U(z_p)$$

não pode ser demonstrado a menos que o sistema contenha uma contradição.

Em seguida perguntamos:

$$\sim U(z_p)$$

pode ser demonstrado se o sistema não for contraditório. Se o sistema não é contraditório

$$U(z_p)$$

não pode ser demonstrado como já vimos.

Mas

$$U(z_p)$$

é a fórmula cujo número é

$$\gamma(p, p)$$

de modo que para todo o k ,

$$\sim_k B \gamma(p, p).$$

Logo,

$$\sim B(z_k, S(z_p, z_p))$$

é demonstrável para todo o k .

Se além disso

$$\sim U(z_p)$$

isto é,

$$\sim \prod v [\sim B(v, S(z_p, z_p))]$$

é demonstrável, então temos que se pode demonstrar uma fórmula que afirma que

$$\sim B(z_k, S(z_p, z_p))$$

não é verdadeira para todo k e isto juntamente com o fato de

$$\sim B(z_k, S(z_p, z_p))$$

ser demonstrável para todo k torna o sistema intuitivamente contraditório.

Em outras palavras, consideraremos que o sistema é contraditório só se houver um A tal que A e $\sim A$ são ambos demonstráveis mas também se houver um F tal que todas as fórmulas

$$\sim \prod v F(v)$$

e

$$F(z_0), F(z_1), \dots$$

$$\sim U(z_p)$$

é demonstrável, o sistema é contraditório neste sentido mais fraco.

Assim, nem

$$U(z_p)$$

nem

$$\sim U(z_p)$$

são demonstráveis a menos que o sistema seja contraditório. Se o nosso sistema é livre de contradição no sentido forte (isto é, se A e $\sim A$ não são ambos demonstráveis para nenhum A) então

$$U(z_p)$$

não é demonstrável.

Mas

$$(x,y,z)[\sim\{xB y \& zBNegy\}]$$

é uma proposição do nosso sistema que afirma que o sistema está livre de contradições no sentido forte. Assim mostrmos que

$$(x,y,z)[\sim\{xB y \& zBNegy\} \rightarrow (x)\sim xB(p,p)]$$

Os argumentos relativamente simples desta demonstração podem ser imitados em lógica formal para produzirem uma demonstração formal de

$$Contrad \rightarrow \pi v[\sim B(v, S(z_p, z_p))]$$

em que *Contrad* é uma fórmula do sistema que exprime a proposição

$$(x,y,z)[\sim\{xB y \& zBNegy\}]$$

Então se *Contrad* também pudesse ser formalmente demonstrado, poderíamos usar a Regra 1 para inferir

$$\Pi v[\sim B(v, S(z_p, z_p))]$$

caso em que, como vimos, o sistema seria contraditório.

Assim *Contrad* não pode ser demonstrado no próprio sistema a menos que o sistema contenha uma contradição.

Condições que um sistema formal tem que satisfazer a fim de que os argumentos precedentes se possam aplicar

Consideremos agora qualquer sistema formal que satisfaça as seguintes cinco condições:

(1) Supondo que os símbolos e as fórmulas estão numerados de uma maneira semelhante à que foi usada para o sistema particular considerado acima, então a classe dos axiomas e a relação de consequência imediata serão recursivas.

Esta condição é precisa e na prática basta para substituir a exigência imprecisa segundo a qual a classe dos axiomas e a relação de consequência imediata têm que ser construtivas.

(2) Haverá uma certa sucessão de fórmulas com sentido z_n (que representam os números naturais n) tal que a relação entre n e o número que representa z_n é recursiva.

(3) Haverá um símbolo \sim (negação) e dois símbolos v e w (variáveis) tais que para cada relação recursiva de duas variáveis corresponderá uma fórmula

$$R(v, w)$$

do sistema tal que

$$R(z_p, z_q)$$

é demonstrável se a relação é satisfeita entre p e q e

$$\sim R(z_p, z_q)$$

é demonstrável se a relação não é satisfeita entre p e q ; ou em vez de um único símbolo \sim , pode haver uma fórmula $F(x)$ que não contenha nem v nem w tal que as relações anteriores são satisfeitas quando

$$\sim(A)$$

Representa a fórmula

$$F(A).$$

As fórmulas

$$R(v, w)$$

que representam as relações recursivas e suas negações

$$\sim R(v, w)$$

serão chamadas funções proposicionais recursivas de duas variáveis e;

$$R(v, z_n)$$

e

$$\sim R(v, z_n)$$

funções proposicionais recursivas de uma variável.

(4) Haverá um símbolo Π tal que

$$\Pi v F(v)$$

é demonstrável para uma função proposicional recursiva

$$F(v)$$

de uma variável, então

$$F(z_k)$$

será demonstrável para todo k ; ou em vez de um único símbolo Π pode haver uma fórmula

$$G(x)$$

que não contenha w tal que as considerações anteriores são satisfeitas quando

$$\prod vF(v)$$

representa

$$G(F(v)).$$

(5) O sistema será livre de contradições nos dois seguintes sentidos:

a) Se

$$R(v, w)$$

é uma função proposicional recursiva de duas variáveis então

$$R(z_p, z_q)$$

e

$$\sim R(z_p, z_q)$$

não são ambas demonstráveis.

b) Se

$$F(v)$$

é uma função proposicional recursiva de uma variável então as fórmulas

$$\sim \prod v f(v)$$

e

$$F(z_0), F(z_1), F(z_2) \dots$$

não serão demonstráveis.

Ora usando a contradição (1),

$$xB y$$

$$\gamma(x, y)$$

(definidas como anteriormente) e

$$kB \gamma (1, 1)$$

são recursivas. Então por (3) existe

$$R(v, w)$$

tal que

$$R(z_k, z_l)$$

é demonstrável se

$$kB \gamma (1, 1)$$

e

$$\sim R(z_k, z_l)$$

é demonstrável se

$$\sim kB \gamma (1, 1).$$

Se repararmos que

$$R(v, w)$$

desempenha no nosso sistema especial o mesmo papel que é desempenhado por

$$B(v, S(w, w))$$

podemos demonstrar que se p é o número de

$$\prod v \sim R(v, w)$$

então (5a) implica que

$$\prod v \sim R(v, z_p)$$

não é demonstrável e (5b) em conjunção com (5a) implica que

$$\prod v \sim R(v, z_p)$$

não é demonstrável.

Analogamente, como já o fizemos,

$$(x, y, z)[\sim\{xB y \& zBNegy\}] \rightarrow (x) \sim xB \gamma(p, p)$$

pode ser estabelecido. Não enumeramos as outras condições segundo as quais é possível converter a demonstração intuitiva numa demonstração formal de

$$Contrad \rightarrow \prod v \sim R(v, z_p)$$

No entanto, são condições satisfeitas por todos os sistemas que consideramos e que contêm uma certa parte da aritmética vulgar e por isso, estes sistemas não podem conter uma demonstração da sua própria consistência.

TEOREMA 8. *Existem números transcendentos, não algébricos*

DEMONSTRAÇÃO.

Este teorema é um corolário imediato do teorema 3. Pois, sabemos que os algébricos Reais são enumeráveis (teorema 2.2) e que os Reais são não enumerável (teorema 4). Logo, devem existir números Reais que não sejam algébricos. Estes são os números transcendentos, cuja existência fica assim demonstrada.

TEOREMA 9. *Paradoxo de Banach-Tarski*

DEMONSTRAÇÃO.

O Paradoxo de Hausdorff diz que S^2 é SO_3 paradoxal para alguns conjuntos contáveis D . Combinando esse resultado ao teorema que diz que: Se D é um subconjunto contável de S^2 , então S^2 e $S^2 \setminus D$ são SO_3 -equidecompostos. E a proposição:

Suponha que G atua em X e E , E' é G -decomposto em conjuntos de X . Se E é G -decomposto então E' também é.

Assim, com os três resultados acima enunciados teremos, que S^2 é SO_3 paradoxal. O resultado é válido para esferas de qualquer raio.

Para a demonstração é suficiente considerar bolas centradas em 0 , desde que G_3 contenha todas translações.

Podemos considerar a bola unitária B , entretanto a mesma prova funciona para bolas de qualquer tamanho.

A decomposição de S^2 vale para $B \setminus \{0\}$ se usamos a correspondência radial: $P \rightarrow \{\alpha P: 0 < \alpha \leq 1\}$. Então é suficiente mostrar que B é G_3 -equidecomposto com $B \setminus \{0\}$.

Seja $p = (0, 0, \frac{1}{2})$ e seja ρ a rotação de ordem infinita

Então o conjunto $D = \{\rho^n(0): n \geq 0\}$ pode ser usado para absorver 0 : $P(D) = D \setminus \{0\}$, então $B \sim B \setminus \{0\}$

Assim, a correspondência radial de S^2 com $R^3 \setminus \{0\}$ é usada para obter a decomposição paradoxal de usando rotações.

Assim como para a bola, $R^3 \setminus \{0\} \sim G_3 R^3$, R^3 é paradoxal via isomeria.

Referências:

ACKERMAN, Wilhelm; HILBERT, David. **Principles of Mathematical Logic**. AMS Chelsea Publishing, 1991.

BACHELARD, Gaston. **O Novo Espírito Científico**. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1968.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BUNCH, Bryan. **Mathematical Fallacies and Paradoxes**. New York: Dover Publication, INC, 1982.

CONSUEGRA, Francisco Rodrigues. **Kurt Gödel: Ensayos Inéditos**. Barcelona: Mondadori, 1994.

COURANT, Richard; JONH, Fritz. **Introduction to Calculus and Analysis I**. New York: Springer, 1982.

CURRY, Haskell B. **Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics**. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1951.

DAWSON, Jonh W.; FEFERMAN, Solomon; HEIJENOORT, Jean Van; KLEENE, Stephen C.; MOORE, Gregory H.; SOLOVAY, M. **Kurt Gödel Collected Works: Publications 1929-1936 Volume I**. New York: Oxford University Press, 1986.

_____. **Kurt Gödel Collected Works: Publications 1929-1936** Volume I. New York: Oxford University Press, 1986.

_____. **Kurt Gödel Collected Works: Unpublished Essays and Lectures** Volume III. New York: Oxford University Press, 1995.

DAWSON, Jonh; THOMAS, Dorothy. Kurt Gödel Society. Viena: **Photos**. Disponível em <http://kgs.logic.at>. Acesso em 16 dez. 2006.

DUBBEY, J.M. **Development of Modern Mathematics**. New York: Crane, Russak e Company, INC, 1975.

EDMONDS, David; EIDINOW, John. **O Atiçador de Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Difel, 2001.

EDWARDS, JR, C. H. **The Historical Development of the Calculus**. New York: Springer Verlag, 1979.

EVES, Howards. **Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics**. New York: Dover Publication, INC.

DALL'AGNOL, Darlei. **Ética e Linguagem: Uma introdução ao Tractatus de Wittgenstein**. Florianópolis: Editora da UFSC, 1995.

GÖDEL, Kurt. **O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo**. Lisboa: Editora da Fundação Calouste Gulbenkian, 1979.

_____. **On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems**. New York: Dover Publication, INC, 1962.

HILBERT, David. **Sur les Problèmes Futurs des Mathématiques**: Les 23 problèmes. Éditions Jacques Gabay, 1990.

HEIJENOORT, Van. **From Frege to Gödel**: A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931. New York: San Jose New York Lincoln Shanghai, 2000.

HOFSTADTER, Douglas R. **Gödel, Escher, Bach**: An Eternal Golden Braid, 20th anniversary edition. New York, 1979.

JECH, Thomas J.. **The axiom of choice**. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1973.

KANT, Immanuel. *Crítica da Razão Pura*. São Paulo: Martin Claret, 2002.

KASNER, Edward; NEWMAN, James. **Matemática e Imaginação**: O fabuloso mundo da matemática ao alcance de todos. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.

KNEALE, W., KNEALE, M. **O Desenvolvimento da Lógica**. Lisboa: 2^a edição, 1980.

KUBRUSLY, Ricardo S. Uma viagem informal ao teorema de Gödel. Rio de Janeiro: **O Tamanho do Infinito**. Disponível em <http://www.ufrj.im.dmm.br/risk>. Acesso em 20 jan. 2003.

MARTINEZ, Javier de Lorenzo. A Ciência do Infinito. **Scientific American Brasil 15**: São Paulo, Página 6 – 13, 2006.

MOSCHOVAKIS, Yiannis N. **Notes on Set Theory**. Springer, 1994.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R. **Prova de Gödel**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

NIVEN, Ivan. **Números Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

PENROSE, Roger. **The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Mind and the Laws of Physics**. New York: Oxford University Press, 1989.

POINCARÉ, Henri. **O Valor da Ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 1995.

QUINE, W. V. **Filosofia da Lógica**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1972.

RUBIN, Jean E. **Mathematical Logic Applications and Theory**. Flórida: Purdiw University, 1990.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à Filosofia Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1981.

_____. **Meu Desenvolvimento Filosófico**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1980.

_____. **Significado e Verdade**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

_____. **The Principles of Mathematics Volume I**. Cambridge: Cambridge University Press, 1903

RUSSEL, Bertrand; WHITEHEAD, Alfred North. **Principia Mathematica Volume I**, 2ª edição. Londres: Cambridge University Press, 1935.

_____. **Principia Mathematica Volume II**, 2ª edição. Londres: Cambridge University Press, 1927.

_____. **Principia Mathematica Volume III**, 2ª edição. Londres: Cambridge University Press, 1927.

SAYERS, Sean. **Reality and Reason: Dialectic and the Theory of Knowledge**. New York: Basil Blackwell, 1985.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Editora Record, 1999.

YOURGRAU, Palle. **A World Without Time: The forgotten Legacy of Gödel and Einstein**. New York: Basic Books, 2005.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tractatus Logico-Philosophicus**. São Paulo: Edusp, 1993.

WANG, Hao. **Reflections on Kurt Gödel**. Hong Kong: The Mit Press, 1988.