UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
INSTITUTO DE QUÍMICA

Mestrado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia

UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-EPISTEMLÓGICA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

T.F.A.

EMILSON LUIZ MELLO GARCIA

Rio de Janeiro
Março 2010

UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-EPISTEMLÓGICA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

EMILSON LUIZ MELLO GARCIA

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE) do Instituto de Química da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em História das Ciências.

Orientador:
Prof. Ricardo Silva Kubrusly

Rio de Janeiro
Março 2010

ANVERSO DA FOLHA DE ROSTO

GARCIA, EMILSON LUIZ MELLO
UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-EPISTEMLÓGICA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA – T.F.A. / Emilson Luiz Mello Garcia - Rio de Janeiro, UFRJ/Instituto de Química, 2010.

xi, 115 f. : il. ; 31 cm.

Orientador: Prof. Ricardo Silva Kubrusly

Dissertação (mestrado) – UFRJ/Instituto de Química, Programa de Pós-Graduação Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE), 2010.

Referências bibliográficas: f. 99-105

1. Campo dos Complexos. 2. Álgebra. 3. Funções. 4. Raízes – Dissertação. I. Kubrusly, Ricardo Silva. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Química, Programa de Pós-Graduação Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE). III. Título.

UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-EPISTEMLÓGICA DO TEOREMA FUNDAMENTAL

DA ÁLGEBRA

- T.F.A.

EMILSON LUIZ MELLO GARCIA

Orientador:
Prof. Ricardo Silva Kubrusly, D.Sc

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE) do Instituto de Química da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em História das Ciências.

Aprovada em __ de ___________ de 2010 por:

____
Prof. Ricardo Silva Kubrusly, D.Sc (UFRJ)
(Presidente da Banca)

____
Profa. Angela Rocha dos Santos, D.Sc (UFRJ)

____
Prof. Fernando Benedicto Mainier, D.Sc (UFF)

Rio de Janeiro
Março 2010

“ Ai dos que decretam leis injustas, e dos escrivães que escrevem perversidades, para prejudicares os pobres em juízo e para arrebatarem o direito dos aflitos do meu povo; para despojarem as viúvas e para roubarem os órfãos”

(Isaías 10:1-2)

À minha Ana Eugênia (esposa querida) e
à minha Taianã (filha querida),
frutos do amor que vem do alto.

AGRADECIMENTO

Ao Professor ***Ricardo Silva Kubrusly***, meu orientador, por sua paciência quase infinita e seu extremo bom humor, um grande e forte abraço.

SUMÁRIO

RESUMO

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA
T.F.A.

EMILSON LUIZ MELLO GARCIA

Orientador:
Prof. Ricardo Silva Kubrusly

Resumo de dissertação submetida ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE) do Instituto de Química da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em História das Ciências.

Este trabalho descreve a importância histórica científica do T.F.A.. A dissertação mostra que, de fato, este teorema está na interseção de muitas áreas da matemática superior, mas, que ao mesmo tempo, tem suas raízes nas matemáticas mais básicas e elementares encontradas no período paleolítico da humanidade.

Levanta-se, portanto, a história do T.F.A registrada desde os papiros do Oriente Antigo (3000 A.C.) até os contribuições de Isaac Newton (1700 D.C) para o tema, contando, inclusive, com o registro de numerosos artigos publicados nos últimos 100 anos sobre o T.F.A.

Palavras-chave: Campo dos Complexos, Álgebra, Funções, Raízes.

ABSTRACT

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA
T.F.A.

EMILSON LUIZ MELLO GARCIA

Orientador:
Prof. Ricardo Silva Kubrusly

Abstract de dissertação submetida ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE) do Instituto de Química da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em História das Ciências.

This work describes the scientific historical importance of the T.F.A. The dissertation shows that in fact, this theorem is in the intersection of many areas of the outstanding mathematics, but, at the same time, it has its roots in the most basic and elementary mathematics found in the paleolithic period of humanity.

It is shown, therefore, the history of the T.F.A, recorded for t his subject since the papyruses of the Old East (3000 B.C.) until the contributions of Isaac Newton (1700 A.C.). Also counting with the register of numerous articles published in last the 100 years about the T.F.A.

Keywords: Complex Field, Algebra, Functions, Roots.

PRÓLOGO

Nas atividades mais corriqueiras, mais triviais, no seu dia-a-dia, o ser humano, em geral, costuma utilizar os "números contadores" para relacionar o que possui.

Alguém, por exemplo, poderá dizer que possui 50 livros na estante de sua casa, outro poderá dizer que comprou 3 verduras na feira ou talvez que tenha 1 carro em sua garagem.

Enfim, os "números contadores" são os que ajudam aos homens mais comuns e simples a contarem seus pertences ou, quem sabe, as estrelas do céu.

Agora, que tal que se estabeleça chamar de N o conjunto dos "números contadores" indicando-o com o simbolismo N = {1, 2, 3, ...}. Bem, isto até que parece razoável.

A partir daí, na história da humanidade, seguiu-se, quase que concomitantemente, a necessidade de se adicionar uma quantidade à uma outra e igualar a soma a uma terceira. Por exemplo, 4 + 6 = 10. Na matemática, esta expressão é denominada de IGUALDADE. Mas, f = g também é uma igualdade, um tanto mais refinada, mas, mesmo assim, uma igualdade:

— topologicamente, uma figura f que, continuamente, vai sendo transformada noutra figura g.

— funções que tornam os mesmos valores para cada ponto onde são definidas.

— conjuntos que contém exatamente os mesmos elementos.

Mas, enfim, de toda maneira, as propriedades básicas da igualdade não dependem da família particular de objetos que estão sendo igualados. As propriedades básicas da igualdade são:

- a = a (propriedade reflexiva)
- se a = b, então b = a (propriedade simétrica)
- se a = b e se b = c, então a = c (propriedade transitiva).

Uma característica importante da "igualdade" é que para ela não é necessário que haja alguma variável em ambos os lados do sinal de igual (=).

Outra percepção notável da humanidade é a possibilidade de haver duas expressões que serão sempre iguais para qualquer substituição numérica na variável. São as IDENTIDADES: Por exemplo: $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$.

Mas, este trabalho vai deter-se, particularmente, não nas igualdades ou nas identidades, mas, sim, nas EQUAÇÕES. Os “números contadores” têm uma especial importância para as equações. Mas, o que são EQUAÇÕES? Equações são escritas algébricas que visam determinar os valores específicos da variável para os quais duas funções tornam-se iguais: $f(x) = g(x)$.Por exemplo, $x^2 - 9 = 6x$ ou, ainda, $x^2 - 6 = 3$.

Tomem-se, agora, equações mais simples às quais os “números contadores” se encaixem: $x + 6 = 14$, cuja solução é $x = 14 - 6 = 8$, também $x + 3 = 5$, cuja solução é $x = 5 - 3 = 2$. Vê-se que as soluções 14 e 2 fazem parte do conjunto dos “números contadores”. Porém, quando se examina a equação $x + 30 = 10$, nota-se que sua solução $x = 10 - 30 = ?$. E agora ?!! Conclui-se que, portanto, os “números contadores” NÃO SÃO ALGÉBRICAMENTE FECHADOS.

Historicamente, tem-se a necessidade formal para a utilização dos inteiros, indicados por Z:

$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Com isto, fica registrado que qualquer equação $x + a = b$ onde $a, b \in N$ tem solução x em Z, ou, mais fortemente, qualquer equação $x + a = b$ onde $a, b \in Z$ tem solução x em Z.

Porém, os problemas das soluções destas equações não acabam aqui. Por exemplo, quando se examina a equação $13x - 15 = 0$, verifica-se que sua solução é $x = 15/13 = ?$. E o problema reapareceu. Conclui-se que Z NÃO É ALGÉBRICAMENTE FECHADO.

Historicamente, houve, então, a necessidade da utilização formal dos números racionais, indicados por Q. Sendo assim, passou-se a registrar que qualquer equação $ax + b = 0$, onde $a, b \in Z$ tem solução x em Q.

Contudo, Q também NÃO SÃO ALGÉBRICAMENTE FECHADOS, posto que não há número racional que satisfaça a equação $x^2 = 2$, por exemplo.

Por isso, historicamente, há a necessidade da utilização formal dos números reais, indicados por R. No entanto, o conjunto dos reais não dá conta de equações do tipo $x^2 + 2 = 0$.

Historicamente, houve, então, a necessidade da utilização formal dos números complexos, indicados por C. Verificou-se, então, que as equações polinomiais com coeficientes reais, do tipo $x^2 + 2 = 0$, que não podem ser resolvidas no campo dos reais, têm solução no campo dos complexos, contudo, o TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA (T.F.A.) diz mais: ele declara que não apenas as equações com coeficientes reais têm soluções complexas, mas TODA A EQUAÇÃO POLINOMIAL COM COEFICIENTES COMPLEXOS TEM, NO MÍNIMO, UMA SOLUÇÃO COMPLEXA, ou seja, O CAMPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS É ALGÉBRICAMENTE FECHADO.

Esta dissertação conta, então, a saga do T.F.A.: sua história desde a antiguidade longínqua, incluindo as contribuições de muitos importantes matemáticos para a formulação final deste teorema.

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa mostra que, de fato, o T.F.A. é considerado um dos maiores fios condutores da história da matemática, desde o Período Paleolítico Superior (cerca de 30000 a.C.) até o século XXI.

De forma simplificada o que o T.F.A. enuncia é que um polinômio com coeficientes de grau “n”, com “n” maior ou igual a 1 (um), tem, no mínimo, uma raiz complexa.

Ora, isto posto, vê-se que o T.F.A., segundo Fine e Rosenberger (1999, p. 1), tem grande conteúdo da parte da álgebra das funções e dos números. Naturalmente, por consequência, o exame histórico-epistemológico de equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ é de suma importância para a pesquisa. Porém, ao se escrever esta equação, usando estes símbolos, fala-se de uma história das ciências que começa no século XVII; se a restrição a estes símbolos particulares for removida, para que uma simbologia bem menos rígida possa ser usada, volta-se ao terceiro século depois de Cristo; agora, se a solução para a equação mencionada acima usar métodos geométricos, sem o uso de símbolos algébricos de qualquer espécie, chega-se a Escola de Alexandria (300 a.C.), cuja biblioteca chegou a ter 700.000 pergaminhos, e a períodos anteriores; contudo, se a álgebra for classificada através de problemas que hoje são resolvidos pela álgebra mas que no passado eram resolvidos por tentativas e/ou processos exageradamente complicados usando a aritmética, chega-se a 1.800 a.C.

Este trabalho consegue olhar cada vez mais para o passado quando ele examina cada vez mais o futuro. Sabe-se que a partir de, aproximadamente, 1800 d.C., grandes áreas da matemática firmaram-se com seus grandes e profundos desenvolvimentos teóricos. A Análise Complexa, a Álgebra, a Análise Real, a Topologia e a Aritmética, por exemplo, explodiram na compreensão teórica da matemática.

Com tal profundo desenvolvimento teórico, o T.F.A. passou a ser classificado não mais como um teorema da álgebra, mas como um teorema da topologia e, assim, adquiriu a seguinte formulação técnica (que é mantida até hoje):

> "seja 'p' um polinômio não constante, de coeficientes complexos. A cada número complexo 'z' associemos o valor 'p (z)' do polinômio 'p'. Isto define uma função p: C → C, onde C é o conjunto dos números complexos. A afirmação de que 'p' é uma função sobrejetiva é equivalente ao chamado 'Teorema Fundamental de Álgebra' (um teorema, agora da Topologia, segundo o qual todo polinômio complexo não constante possui pelo menos uma raiz complexa)". (Lima (2002, p.13).

Ora, se o T.F.A. equivale a uma função sobrejetiva, uma conveniente restrição a esta função pode transformá-la numa bijetora. E é aí, neste moderno momento do desenvolvimento teórico da matemática que o olhar desta pesquisa continua a caminhar para o passado; precisamente para o Período Paleolítico Superior (30.000 a.C.).

Em 1868 d.C., nos abrigos rochosos de Lês Eyzies, na região de Dordogne, França, durante a construção de uma estrada de ferro foram encontrados ossos humanos e alguns instrumentos. Todos estes vestígios foram datados entre 10000 a.C. e 40000 a.C., e a caverna onde estes fósseis foram encontrados chama-se Cro-Magnon.

Os homens de Cro-Magnon, fabricavam instrumentos e armas com bom acabamento lascado. Construíram agulhas de osso, inclusive, para confecções de roupas de peles de animais. Fabricavam, também, anzóis e arpões. Nas cavernas de Cro-Magnon foram encontrados fogões rústicos onde cozinhavam seus alimentos.

Ora, mas o que interessa ao T.F.A., mais de perto, são os ossos de lobo encontrados com tais homens. Estes ossos contém registros bons demais para serem casuais. São entalhes transversais, cuidadosamente marcados ao longo do osso do lobo, indicando, para Oliveira (1981, p. 1), o aparecimento das primeiras notações numéricas da história da humanidade. Esses entalhes estavam, possivelmente, relacionados com animais abatidos durante a caça. Nota-se, portanto, uma correspondência um-a-um entre os entalhes e os animais abatidos. Mas, esta é, justamente, a característica de uma função bijetora, raiz histórica do T.F.A. Neste instante, os extremos se tocam: Topologia do vigésimo século depois de Cristo e os ossos de lobos dos homens de Cro-Magnon de 30000 a.C., tudo isto costurado pelo T.F.A. .

O T.F.A. vai também costurando as práticas matemáticas da Babilônia (8000 a.C.), comentado em Fine e Rosenberger (1991, p. 3), do Egito (3000 a.C.), da China (2000 a.C.), da Índia (2000 a.C.), da Grécia (800 a.C.), do Mundo Árabe (600 a.C.) e da Europa Medieval (400 d.C.).

Vivendo a vida destes povos, a pesquisa mostra, também, as contribuições pessoais de pensadores da época que ajudaram a impulsionar a T.F.A.

A partir de 1545 d.C. o tempo corre mais rápido para o T.F.A. Nesta época, estupefado, o matemático Gerônimo (ou Gerolano) Cardano, encontra raízes quadradas de números negativos em equações de suas pesquisas. Ele as classificou de “tão sutil quanto inútil” (Vooys, 1960, pp. 162-166).

Em 1572 d.C. o matemático italiano Rafael Bombelli propõe regras de manipulação de raízes do tipo $a + b\sqrt{-1}$, embora o $\sqrt{-1}$ ainda não fizesse sentido.

Em 1629 d.C. o matemático Albert Girard (Tannery, P., 1883, pp 358-360) foi o primeiro a conjecturar o Teorema Fundamental da Álgebra dizendo que há sempre n raízes para equações de grau n, porém Girard nada afirmava sobre a natureza das raízes.

Em 1702 d.C., um dos maiores gênios universais que a humanidade produziu, Gottfried Wilhelm Von Leibniz, deu uma demonstração de que a conjectura de Girard era falsa, onde afirmava que, por exemplo, para qualquer valor dado t, o polinômio $x^4 + t^4$ nunca poderia ser escrito como o produto de dois fatores quadráticos.

Em 1742 d.C., Euler, correspondendo-se com Goldback (Luzin, 1965, pp 129-143) provou que o contra-exemplo de Leibniz era falso.

Em 1746 d.C., o grande matemático francês Jean lê Rond d’Alembert foi o primeiro a fazer uma tentativa realmente precisa de demonstração do T.F.A., pois não admitia a pré-existência das raízes. Contudo, sua prova tinha sérias fraquezas. D’Alembert (Deakin, M.A.B., 18 (1) (1991), pp 5-7) usou um lema, sem prova, que hoje leva o seu nome e que só foi provado em 1851, por Puisseau; porém, Puisseau apóia sua demonstração no próprio Teorema Fundamental da Álgebra. Outro problema é que nos dias de D’Alembert não se compreendia, sequer, o que era um número real (lembrando que Julius Richard Dedeking só nasceu em 1831) e, portanto, D’Alembert não teve o conhecimento necessário para usar um argumento sobre compacidade, necessário para concluir corretamente sua prova. Em outros termos, hoje sabemos que os argumentos na prova de D’Alembert pertencem a Topologia, que ainda estava por se desenvolver mais completamente. Mas, o próprio

D'Alembert, como que, anteviu: “para colocar em bases firmes os fundamentos da análise matemática, é preciso desenvolver a teoria dos limites de forma rigorosamente estruturada”.

Em 1749 d.C., Euler (Bashmakova, 1988, pp. 139-152) conseguiu uma linda prova, inteiramente algébrica, de que todo polinômio real de grau n ≤ 6 tinha exatamente n raízes da forma “a + bi”.

Apoiando-se no fato de que toda equação polinomial de grau impar tem, pelo menos, uma raiz real, Euler tentou dar uma prova do caso geral, popularizando, assim, a versão do T.F.A. para polinômios reais.

Em 1792 d.C., o italiano Joseph Louis Lagrange (Hamburg, 16 (1) (1976/77), pp. 17-36) contesta as demonstrações de Euler, mostrando que as funções racionais usadas por ele poderiam, em princípio, conduzir a formas indeterminadas do tipo 0/0.

Em 1795 d.C., o matemático Pierre Simon Laplace (Whittaker, 33 (1949), pp 1-12) tentou dar uma prova para o T.F.A. usando uma abordagem totalmente diferente das anteriores, onde inseria a noção de “discriminante de um polinômio”. O único problema de sua prova era a suposição da pré-existência das raízes.

Em 1799 d.C., o matemático Carl Friedrich Gauss (Fryant e Sarma, 52 (1-4) 1984, pp. 101-105) recebe o título de Doutor em Filosofia pela Universidade de Helmstedt. O título de sua dissertação foi: “Uma nova demonstração de que todos polinômios de uma variável podem ser fatorados em fatores reais de primeiro e segundo graus”.

Pode-se dizer que Gauss foi o primeiro a denunciar que aceitar a conjectura de Girard, isto é, aceitar a pré-existência das raízes, era inaceitável.

No entanto, a demonstração de Gauss, para os padrões de rigor atuais, tem fraquezas gravíssimas, porém estas fraquezas são de origem topológicas.

Em 1814 d.C, o suíço Jean Robert Argand publica uma prova do T.F.A.: “Essai sur une manière de representer les quantitiés imaginaires dans lês constructions géometriques”. Neste artigo ele interpreta “i” como uma rotação no plano. Mais tarde, num artigo intitulado “Reflexions sur la nouvelle théorie d'analyse”, Argand (Petrova, 1973, pp. 167-172) simplifica a idéia de D'Alembert usando o teorema geral sobre a existência de uma mínimo de uma função contínua.

Em 1981 d.C., como a prova de Argand era somente uma prova de existência e não permitia a construção das raízes, Weierstrass (1859 d.C.) começa, então, a fazer tentativas no sentido de uma prova construtiva, mas apenas em 1940 uma prova construtiva variante de Argand foi dada por Hellmuth Kneser (Wielandt, 11 (1974), p. 120 a – 120 c). Esta prova foi simplificada em 1981 por Martin Kneser (filho de Hellmuth Kneser).

Esta introdução deixa bem claro que o T.F.A. é, de fato, um dos grandes fios condutores da história da matemática, estando na interseção da teoria dos números, da teoria das equações, da álgebra abstrata, da análise complexa e da topologia.

Então, do vasto espectro de temas que compõem a história do T.F.A., este estudo trabalhará na análise da natureza dos erros das principais tentativas de provas dadas ao T.F.A. e na reunião dos principais fatos e nomes envolvidos no desenvolvimento histórico deste teorema.

Antes do término desta introdução, é preciso afirmar a fecundidade do T.F.A. quando se observa a enorme quantidade de artigos publicados com bastante regularidade, mesmo nos últimos anos. Estes artigos estão, mais ou menos, divididos em três categorias:

- aqueles que trabalham o T.F.A. de forma não construtiva, à maneira clássica e "real".
- Aqueles que trabalham o T.F.A. sob algum aspecto, em algum nível, tentando dar-lhe no patamar abordado, um caráter construtivo, ou seja, informando o caminho da construção das raízes do polinômio abordado (embora o enunciado original do T.F.A. não se preocupe com isto: ele é não construtivo).
- Mas há aqueles artigos que mencionam (citam e/ou usam) o T.F.A. para seus próprios fins de pesquisa.

Em segundo lugar, vale a pena mencionar que na década de 90 os professores Fine e Rosenberger ministraram cursos nos Estados Unidos da América e na Alemanha sobre o T.F.A. . O objetivo deles era apresentar uma grande quantidade de matemática (Análise, Álgebra e Topologia) através de um único veículo. Assim, o T.F.A. foi o canal escolhido. Em outros termos, o que os professores mostraram é que o T.F.A. é capaz de condensar grande parte da matemática.

De todos os cursos que eles ministraram surgiu o importante livro "The Fundamental Theorem of Álgebra". Nele, os professores tecem o seguinte comentário:

> “The Fundamental Theorem of Algebra is actually part of a general devolpment in the theory of equations. The ability to solve quadratic equations and in essence the quadratic formula was known to the Babylonians some 3600 years ago”. (Fine & Rosemberger, 1977, P. 3) (1)

Portanto, desde a primeira linha desta introdução até aqui, parece que há argumentos suficientes que justificam o levantamento histórico-técnico epistemológico que se seguirá.

(1) "O Teorema Fundamental da Álgebra é na verdade parte do desenvolvimento geral na teoria das equações. A capacidade de resolver equações e, em essência a fórmula quadrática eram conhecidas pelos babilônios cerca de 3600 anos atrás ". (Fine & Rosemberger, 1977, p. 3)

METODOLOGIA

Esta pesquisa acredita, previamente, que a trajetória temporal evolutiva do T.F.A. não vai, é claro, esgotar-se nesse texto. O trabalho vai, então, obter o máximo de informações da construção desse teorema sob ponto de vista histórico, epistemológico e técnico. Os dados recolhidos trarão elementos que possibilitem estabelecer conexões compreensíveis nesta rede de conhecimentos histórico-técnicos que o T.F.A. proporciona.

A tendência metodológica da pesquisa é do aspecto qualitativo, ou seja, são feitos os levantamentos das concepções de abordagem do T.F.A. por inúmeros matemáticos e de como esse teorema marca sua influência na vida dos povos mais primitivos da humanidade.

O aspecto qualitativo também e ressaltado pelo fato do trabalho explorar, em certa medida, o entendimento da natureza dos processos histórico-científicos que formaram o pensamento dos matemáticos que se interessam pelo T.F.A..

O trabalho qualitativo é rico porque permite muitas interpretações e possibilidades de estudos históricos no tempo (ao longo dos séculos) e no espaço (as influências regionais na vida de muitos povos).

Por tudo isso primeiramente, fez-se um amplo levantamento de fontes relacionadas à história do T.F.A. desde 3000 a.C. até 2009 d.C., destacando-se aquelas ligadas às ações dos povos e cientistas envolvidos diretamente no tema.

Em segundo lugar, partiu-se para uma análise desse conjunto de fontes para que se pudesse perceber a grande importância do T.F.A. junto à história em geral e à história da matemática, inclusive.

Finalmente, o trabalho buscou recuperar a idéia de que e possível, sem prejuízo da reflexão acentuada, procurar por grandes fios condutores da história que permitam, inclusive, que os pontos de conexão por eles ligados suscitem, no futuro, pesquisas profundas.

CAPÍTULO I
AS RAÍZES DO T.F.A. NO ORIENTE ANTIGO

Este capítulo vai do Egito aos Árabes. Trata, portando de alguns dos tempos mais remotos da humanidade no que diz respeito às primeiras noções de idéias práticas da matemática no uso das equações.

Os métodos de datação da ciência atual afirmam que a Terra sofreu quatro grandes modificações climatéricas. Segundo Taton (1959, Tomo, Vol, P. 15), já no final da última glaciação (o glaciário würniano), período este denominado Idade da Rena, surgem três civilizações sucessivas: a Aurinhacense, a Solutrense e a Madalense, e também três raças humanas (Homo Sapiens). São raças de Cro-magnon (1,85m de altura média) distribuída pela Europa Ocidental e pela África do Norte, a raça de Chacelade (pequena estatura e maçãs salientes), conhecida desde a França até a China, e a raça de Grimaldi, com caracteres negróides.

Todos estes homens deixaram grande número de testemunhos artísticos: decoração de objetos mobiliários, pinturas em paredes e gravuras. Tudo isto, desde 30.000 a.C.. Por volta de 8.000 a.C. já podem ser constatadas criações de animais e agricultura bem organizadas.

Na verdade, os homens destas épocas eram mais instruídos do que se costuma imaginar, e os sábios desta época eram conhecidos como “feiticeiros” e, depois, os sacerdotes egípcios, em 3.000 a.C.

Tudo isto não é de se espantar: é que o homem não urbano e não civilizado observa muito. Ele tem tempo para estudar as constelações de estrelas, para observar e estudar os costumes dos animais selvagens e, ainda, faz experiências para ver se os vegetais são comestíveis ou não.

No fundo, os homens pré-históricos não eram tão “pré-históricos” assim. Mas, o fato é que as civilizações urbanas como as do Egito, da Mesopotâmia, da China, da Grécia, da Índia e dos Árabes estão na origem das primeiras observações métricas que o homem já realizou, tanto quanto, na origem das primeiras intuições sobre relação, função bijetora e equações.

EGITO

O estudo do pensamento teórico-matemático dos egípcios tem se mostrado interessantemente controverso. Pesquisadores consagrados posicionam-se em lados opostos quanto ao nível de conhecimento de uma matemática construtiva baseada em provas:

> "The Egyptians of the middle kingdom had methods for calculating areas... but there is no textual evidence of a geometry with constructions and proofs. Furthermore… the mathematical texts were no longer copied after the Hyksos period" (Vander Waerden, 1974, p. 41).(1)

Por outro lado, cada vez mais, os estudos arqueológicos das pirâmides do Egito têm exibido indícios que o nível de habilidade teórica deste povo parece ser maior do que sempre se imaginou:

> "In no other place can one see such evidence of high culture, such splendid examples of technical skill and artistry. Greece, the only rival, reckons hers in millenniums" (Bratton, 1969, p. 25).(2)

Sabe-se que alguns dos textos mais antigos da história da matemática, e que se ligam ao T.F.A., são conhecidos por Papiro de Rhind (1600 a.C.) e Papiro de Moscou (1800 a.C.). Ora, como os papiros são compilações de conhecimentos já bem conhecidos pela população, estima-se que os problemas arrolados nos papiros datem de 3000 anos antes de Cristo. E, além disto, é bem provável, como já foi mencionado, que a grandiosidade de planejamento necessário para construção das monumentais pirâmides escondam conhecimentos não expostos nos papiros, os quais tinham objetivos claramente práticos: o ensino das noções elementares da matemática egípcia.

A seguir, serão exemplificados vários problemas do Oriente Antigo que é

---

(1) "Os egípcios do Reino Médio tinham métodos para calcular as áreas ... mas não há nenhuma evidência textual de uma geometria com construções e provas. Além disso ... os textos matemáticos já não eram copiados após o período dos hicsos "(Vander Waerden, 1974, p. 41).

(2) "Em nenhum outro lugar pode-se ver tal evidência de alta cultura, tais como os exemplos esplêndidos de habilidade técnica e artística. Grécia, é seu único rival em milênios "(Bratton, 1969, p. 25).

envolvendo a ideia de equação. As soluções apresentadas, neste trabalho, de tais exercícios, seguem a formulação da álgebra contemporânea. Mas, isto é para mostrar que as ideias dos antigos homens do oriente estavam na raiz do T.F.A., muito embora aqueles povos não usassem estas notações generalizantes modernas.

Papiro de Moscou

Por volta de 3000 a.C., os hieróglifos já eram um sistema de escrita desenvolvido pelos egípcios registrados em pedra e cerâmica. Menos de mil anos depois, utilizando papiro, este povo desenvolve uma escrita muito mais rápida: a escrita hierática, utilizada até 800 a.C., aproximadamente.

O Papiro de Moscou (1800 a.C.) já foi escrito em hierático.

Em 1893 d.C. o egiptólogo acadêmico russo Vladimir S. Golenishchev compra no Egito o original deste papiro, por isso este documento é conhecido como papiro de Golenishchev. Mais tarde, em 1917 d.C., o Pushkin State Fine Arts Museum Collection, da União Soviética, compra o papiro, ficando assim conhecido como Papiro de Moscou. Infelizmente o papiro está extremamente danificado, sendo impossível interpretar a maioria de seus problemas.

A seguir alguns trechos do papiro que podem ser interpretados como resolução de equações algébricas:

- Método do cálculo do retângulo. Um retângulo de área 12, largura $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ do comprimento.

Solução

$$l = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) c \quad \text{e} \quad l \times c = 12$$

$$l = \frac{3}{4} c \rightarrow \frac{3}{4} c \times c = 12 \rightarrow$$

$$\frac{3}{4} c^2 = 12 \rightarrow c^2 = \frac{48}{3} \rightarrow c^2 = 16$$

Assim, c = 4 e l = 3.

(Este problema acima é mencionado em Gillings, 1982, p. 137)

- Cálculo de um triângulo. Existe um triângulo com área 20 e relação entre altura e base $2 + \frac{1}{2}$

Solução

$A = 20$ e $\frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{2}$

$a = \left(2 + \frac{1}{2}\right) b \rightarrow a = \frac{5}{2} b$. Mas,

$\frac{a \times b}{2} = 20 \rightarrow a \times b = 40$

Donde: $5 \times b \times b = 40 \rightarrow$

$b^2 = 16 \rightarrow b = 4$ e $a = 10$

(O problema logo acima é mencionado em Clagett, 1999, p. 213)

Um outro parecido é:

- Cálculo de um triângulo. Um triângulo com área 20 e de comprimento $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ largura (Clagett, 1999, p. 215)

Obs.: a solução é semelhante ao exercício anterior.

Papiro de Rhind

Este papiro encontra-se atualmente no Museu Britânico (www.britishmuseum.org).

Em 1850 d.C., Alexander Henry Rhind comprou o papiro em Luxor, no Egito.

Houve um escriba egípcio chamado Ahmes que copiou os textos dos problemas do papiro 200 anos após terem sido formulados. A cópia ocorreu em, aproximadamente, 1850 a.C.

Este documento tem 32 cm de largura e 513 cm do comprimento e contém 84 problemas de matemática.

Alguns daqueles que interessam a esta pesquisa estão listados a seguir:

- Equações do 1° grau

a) A quantidade e a sua $\frac{1}{2}$ adicionadas dão 16. Qual é a quantidade? (Fauvell, J. 1998)

Solução:

$x + \frac{1}{2} x = 16$

$\frac{3}{2} x = 16 \rightarrow x = \frac{32}{3}$

b) Se o escrita diz “Qual é a quantidade da qual $\frac{2}{3} + \frac{1}{10}$ fazem 10”, deixem-no ouvir! (Gillings, R., 1982, p. 158).

Solução:

$$\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{10}\right] x = 10 \quad \rightarrow$$

$$\left[\frac{20 + 3}{30}\right] x = 10 \quad \rightarrow$$

$$\frac{23}{30}\, x = 10 \;\rightarrow$$

$$x = 10 \times \frac{30}{13}$$

$$x = \frac{300}{13}$$

c) Fui três vezes à medida de “héquat”, a minha 1/3 foi-me adicionada, e regressei, enchendo a medida de “héquat”. O que é, o que diz isto? (Gillings, R, 1982, p. 160).

Segundo Gillings (p. 128) o “héquat” é uma medida de capacidade usada para medir quantidade de grãos. Na página 210 o autor comenta que o “héquat” é uma unidade de volume ou capacidade representado pelo Amuleto do olho de Horus, encontrado na cidade Amama, no “Middle Egypt”.

O olho de Horus também é conhecido como o olho Wedjat (vazio, na língua egípcia).

Horus é filho de Isis, da quarta geração de deuses egípcios: Osíris (rei) e Isis (rainha).

Osiris, segundo o mito, foi morto pelo seu irmão Seth. Horus, filho de Osíris vinga seu pai numa longa e penosa batalha (travada com o inimigo de seu pai, Seth), perdendo, porém, seu olho esquerdo. Mais adiante, Horus ameaça os outros deuses de entrar em combate contra todo o universo se não fosse nomeado rei, pois somente um faraó poderia restabelecer seu próprio olho. E com o olho de Horus, o agora faraó, ressuscita seu pai Osíris do reino dos mortos (“Netherworld”).

Este artefato, o olho de Horus, simbolizado e cunhado numa espécie de xícara, pode medir a capacidade de um “héquat”, que é o volume daquela xícara. Ainda, vale dizer que os detalhes da história do mito do olho de Horus podem ser encontrados no “site” do Museu Petrie, (www.petrie.ucl.ac.uk), da “University College London”.

Enfim, a “solução” para este exercício c é:

$x/m + 1/3\,(x/m) = x$, onde x é a medida de um “héquat” e m é um número real tal que $0<m<1$. Desta forma, a expressão logo acima é equivalente a que se segue: $(4/3)\,(x/m) = x \rightarrow (4/3m) = 1 \rightarrow 3m = 4 \rightarrow m = \frac{3}{4}$.

Enfim, quando o escriba pergunta “O que é, o que diz isto?”, ele quer apenas que o discípulo responda que as três primeiras idas à medida de “héquat” pemitiram encher 3/4 da xícara que, quando cheia, comporta 1 héquat de volume.

O Papiro de Berlim

Este papiro foi também comprado pelo escocês Alexander Henry Rhind na mesma cidade de Luxor (onde ocorreu a compra do Papiro de Rhind), em 1850 d.C. .

Por volta de 1900 d.C., um estudioso independente de Leipzig, Von Hans Schack-Schackenburg restaura (no que foi possível) e interpreta este manuscrito. Infelizmente, porém, este é um papiro, de fato, bem danificado.

Alguns de seus problemas mencionam a medida "cúbito real", que correspondia à distância do cotovelo à ponta do dedo médio do faraó. O cúbito real tinha em torno de 50 cm. Isto está registrado no Museu do Louvre (www.louvre.fr). Segundo Gillings (1982, p. 161), um dos problemas do Papiro é o que se segue:

"A área de um quadrado de 400 cúbitos quadrados é igual a de dois quadrados menores. 1 + ½ do lado de um dos quadrados é o dobro do lado do outro. Diga quais são os lados dos dois quadrados desconhecidos.

Solução:

$x \, . \, x + y \, . \, y = 400$ e $2x = (1 + ½)\, y$ o que implica em: $x^2 + y^2 = 400$ e $4x - 3y = 0$.

O passo seguinte é resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 400 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

Ora, mas é fantástico, porque este problema remonta a 2500 a.C.!!!

É impossível, portanto, deixar de pensar que o Egito Antigo tinha uma concepção da matemática incrivelmente avançada.

Como já dito, foi Schack-Schackenburg quem traduziu tal papiro do hierático para o alemão. Outro problema que este erudito alemão traduziu deste papiro foi o seguinte:

> "A área de um quadrado de 100 cúbitos quadrados é igual à de dois quadrados menores. O lado de um dos quadrados é ½ + ¼ do lado do outro. Informe quais são os lados dos dois quadrados desconhecidos". (Schack-Schackenburg Vol. 38, (1900), pp. 135-140 e Vol. 40 (1902), p. 65 *ƒ*) (Obs.: a solução aqui é semelhante a do anterior).

Talvez, antes que se continue, valha a pena transcrever a tradução do alemão para inglês tanto do enunciado quanto da solução original dos egípcios de então. É uma pesquisa do Sr. Shack, citada em Gillings:

> “Two problems in the Berlin Papyrus, restored and translated by Schack-Schackenburg, appear to deal clearly with the solution of simultaneous equations, one being of the second degree. The papyrus is mutilated, so that the restorations, although quite reasonable and plausible, perhaps still remain open to some slight reinterpretation. In essence, Shack-Schackenburg concludes that the scribe proposed to solve the following two sets of equations, expressed in modern algebraic notation:
>
> $x^2 + y^2 = 100$ (1)
>
> $4x - 3y = 0$
>
> $x^2 + y^2 = 400$ (2)
>
> $4x - 3y = 0$
>
> The translator’s rendering of the first problem (Equations 1) is as follows:
>
> If it is said to thee… the area of a square of 100 (square cubits) is equal to that of two smaller squares. The side of one is 2 4 the side of the other. Let me know the sides o the two unknown squares. Always take a square of side 1. Then the side of the other is 2 4. Multiply this with 2 4. It gives 2 16, the area of the small square. Then together, these two squares have an area of 1 2 16. Take the square root of 1 2 16. It is 1 4. Take the square root of this 100 cubits. It is 10. Divide this 10 by this 1 4. It gives 8, the side of one square”. (Gillings (1982, p. 161) (1)

Gillings (1982) faz uma extensa exposição da decodificação de Schack da linguagem matemática hierática. Estas explicações estão em vários capítulos do livro de Gillings, tais como os capítulos dois, três e quatro.

---

(1) "Dois problemas no Papiro de Berlim, restaurados e traduzidos por Schack-Schackenburg, parecem lidar bem com a solução de equações simultâneas, sendo uma do segundo grau. O papiro está mutilado, de forma que as restaurações, embora bastante razoáveis e plausíveis, talvez ainda permaneçam em aberto a algumas ligeiras reinterpretações. Em essência, Shack-Schackenburg conclui que o escriba propôs resolver os seguintes dois conjuntos de equações, expressas em notação algébrica moderna:

$x^2+y^2=100$(1)

$4x-3y=0$

$x^2+y^2=400$(2)

$4x-3y=0$

A tradição do primeiro problema (Equações 1) é a seguinte: Se é dito a ti ... a área de um quadrado de 100 (côvados quadrados) é igual à de dois quadrados menores. O lado de um é 2 4 em relação ao outro. Deixe-me saber os lados dos dois quadrados desconhecidos. Tome sempre um quadrado de lado 1. Então, ao lado do outro é 2 4. Multiplique isto com 2 4. Dá 2 16, a área do quadrado pequeno. Então juntos dois quadrados têm uma área de 1 2 16. Tome a raiz quadrada de 1 2 16. É 1 4. Tome a raiz quadrada do 100 côvados. É 10. Divida este 10 por 1 4. Dá 8, o lado de um quadrado ".(Gillings 1982, p. 161)

Com isto, é possível transcrever a solução original dos egípcios (2500 a.C.) da seguinte forma:

> “Tome sempre o quadrado de lado 1. Então o lado do outro é 1/2 + 2/4.
> Multiplique-os por 1/2 + 2/4. Dá 1/2 + 1/16. área do quadrado menor. Depois juntos este quadrados têm uma área de 1 + 1/2 + 1/16.
> Tire a raiz quadrada de 100 cúbitos. Que é 10.
> Divida estes 10 por 1 + 1/4. Dá 8, o lado de um quadrado.
> Calcule 1/2 + 1/4 de 8. Dá 6, o lado do outro quadrado”.

O Papiro de Kahun

Sobre este papiro, encontrado nas cidades de Kahun e Gurob, no Egito, registra-se:

> “At Kahun, various mathematical works were discovered; two small papyri were found together, one giving an arithmetical table and the other a calculation regarding the contents of a circular granary. Another was an account of fowl. This was a ‘balance sheet’, of an account, which the values of the birds named in relation to a common factor – the set – duck. Those people who were in charge of animals and birds were apparenthy required to provide a tax return which was either a fixed annual amount or fixed proportion of their produce. If the produce fell in one year, it could be made up in another, and paid at intervals throughout the year. Such lists were drawn up by scribes to provide updated accounts of the tax situation”. (David (1986, p. 122) (1)

Este longo depoimento está aqui registrado apenas para novamente grifar que os papiros são como que “orientações” gerais de conhecimentos já sedimentados e profundos. Os escribas, desta forma, controlavam e orientavam a população como um todo.

O material de Kahun encontra-se disponível no Manchester Museum (www.museum.manchester.ac.uk) da University of Manchester e no Petrie Museum

(1) Em Kahun, vários trabalhos matemáticos foram descobertos, dois pequenos papiros foram encontrados juntos, um dando uma tabela de cálculo aritmético e um outro sobre o conteúdo de um celeiro circular. Outro era uma contabilidade de galinhas. Este foi um «balanço», de uma conta, em que os valores das aves nomeados em relação a um fator comum - o conjunto - pato. Aquelas pessoas que estavam encarregadas dos animais e das aves foram obrigadas a fornecer um retorno de imposto que era ou um montante fixo anual ou parte fixa dos seus produtos. Se a produção caiu em um ano, poderia aumentar no outro, e paga em intervalos ao longo do ano.Essas listas foram elaboradas pelos escribas para prestar contas atualizadas da situação fiscal ". (David 1986, p. 122)

(www.petrie.ucl.ac.uk) da University College London.

O professor Francis Llewellyn Griffith (1862-1934) foi um importante egiptemologista britânico, trabalhando na University of Oxford. Dentre suas inúmeras pesquisas, vale mencionar, para o que interessa a este trabalho, que o professor tem um livro inteiro sobre o papiro de Kahun & Gurob (Griffth, 1898). Para fins desta pesquisa deve-se dizer que o papiro de Kahun é, na verdade, um conjunto de vários fragmentos de diversos papiros encontrados em Kahun, no Egito por Flinders Petrie, em 1889. Mais adiante os fragmentos foram restaurados e traduzidos por F.L.l. Griffith. Os papiros estavam extremamente danificados e, ao que parece, este fragmentos contêm textos com problemas de matemática. Cita-se, agora, um deles:

"Uma área de 40 por 30 deve ser dividida em 10 áreas, cada uma das quais tendo um comprimento que é ½ + ¼ da sua largura". (consulte: www.digitalegypt.ucl.ac.uk)

Solução:

$$10x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] a \times a = 40 \times 30$$

$$10x \ \frac{3}{4} \times a^2 = 1200$$

a = 160

a = √160

a = 4 √10.

MESOPOTÂMIA

A palavra “mesopotâmia” significa “entre os rios” na língua grega. Era uma região localizada ao sul da Ásia, entre os rios Tigre e Eufrates. O atual Iraque faz parte da antiga Mesopotâmia.

Hoyrup (2003, p. 6), comenta que os mesopotâmicos registravam, até onde se sabe, seus conhecimentos matemáticos em tábuas de argila, com um tipo de gravação conhecida por escrita cuneiforme. Os problemas matemáticos destas tábuas (ainda segundo Hoyrup) eram de tipos bem variados envolvendo assuntos como área, volume, comércio, herança, propriedades em figuras planas, etc.

Estas tábuas de argila encontram-se guardadas em museus em várias partes do mundo como nos Estados Unidos da América, França, Inglaterra, Iraque, Turquia, Bélgica e em coleções particulares.

Elas são designadas pelas primeiras letras referentes aos lugares a que pertencem. Por exemplo:

- Tábuas BM: Estão no British Museum (www.britishmuseum.org)
- Tábuas K: Pertencem a Kuyunjik Collection do British Museum (Kuyunjik era uma cidade da Assíria)
- Tábuas MLC: Pertencem a Morgan Library Collection (www.themorgan.org) da Yale University, Estados Unidos.

Dentre os problemas de matemática encontrados relacionar-se-ão alguns daqueles que expressam equações do 1° e 2° graus:

a) Tábuas VAT (Vorderasiatische Abteilung, Tontafeln, Staatliche Museen, Berlin, Alemanha, http://cdli.mapiwg-berlin.mpg.de)

Estas tábuas datam de 1800 a.C. e encontram-se atualmente no Museu de Berlim.

Os problemas destas tábuas envolvem sistemas de duas equações do 1º grau. Um destes problemas está exemplificado em Hoyrup (2002).

Num terreno ceifei 4 “gur” de cereal por cada “bur” de terra. Noutro terreno ceifei 3 “gur” de cada “bur”. A área do primeiro terreno é mais 600 “SAR” do que a área do segundo. Os dois terrenos produziram 1100 “sila”. Qual é a área de cada terreno? Obs.: 1 “bur” = 1800 “SAR” (unidade de medida de área de terra) e

1 “gur” = 300 “sila” (unidade de medida de volume de cereais)

Solução:

Com “bur” é unidade de área, estabeleçamos:

1°) nb (área do primeiro terreno, ou seja, “n” é o número de “bur” do primeiro terreno)

2°) mb (área do segundo terreno, onde “m” é o número de “bur” do segundo terreno).

Então, nb = mb + 600 S (representando “SAR” por “S”). Mas, já que 1 “bur” = 1800 “SAR”, assim, 600 S = 1/3 b. Com isto, tem-se: nb = mb + 1/3 b, que equivale à n = m + 1/3.

Por outro lado, para o terreno de área “nb” a produção foi de “4 ng” e para o terreno de área “mb” a produção foi de “3 mg”. Sendo assim: 4 ng + 3 mg = 1100 si (representando “sila” por “si”).

Com 1 “gur” = 300 “sila”, então, 1100 si = 11/3 g. Assim, tem-se: 4 ng + 3 mg = 11/3 g. Conseqüentemente, 4 n + 3 m = 11/3.

Juntando, agora, as duas equações em “m” e “n”, vem:

n = m + 1/3, e 4n + 3 m = 11/3, donde: m = 1/3 e n = 2/3. Finalmente, o primeiro terreno tem “2/3 b” de área e o segundo terreno tem “1/3 b” de área.

b) Tábuas BM

Estas tábuas encontram-se no Museu Britânico e são, ao que parece, de cerca de 1700 a.C.

Uma das tábuas BM é a BM 13901, datada de, aproximadamente, 1800 a.C.

Segundo o pesquisador Jens Hoyrup, estas tábuas contem problemas que, modernamente, são resolvidos por equações do 2º grau e por sistema de equações de 1º com 2º graus:

> “Let us first look at the text BM 13901. It contains 24 problems, all of which deal with ‘algebraic’ problems about one or more squares (although the biquadratic # 12, as we have seen, is reduced to an ‘algebraic’ problem about a rectangle)… BM 13901, however, it includes two types of linear problems (a multiple of the side being given; and the difference between the areas of two squares being given together with either the sum of the sides or their difference)”. (Hoyrup, 2003, p. 14). (1)

(1) "Vamos primeiro olhar para o texto BM 13901. Ela contém 24 problemas, todos os que lidam com problemas "algébricos" de um ou mais quadrados (embora a biquadrada # 12, como vimos, é reduzida a uma expressão algébrica "problema de um retângulo”) ... BM 13901, no entanto,inclui dois tipos de problemas lineares (um múltiplo do lado que está sendo dado, e a diferença entre as áreas de dois quadrados a ser administrada em conjunto com qualquer soma dos lados ou a sua diferença) ". (Hoyrup, 2003, p. 14).

O exemplo a seguir, está em Hoyrup (2203, pp. 8-9), tanto quanto a solução considerada (interpretada) original por Hoyrup:

Adicionei a área e o lado do meu quadrado, 0,75.

Solução original:

1º) Escreva 1 (prolongue dois lados paralelos do quadrado de uma unidade (o lado do quadrado original). Um retângulo é formado com esta unidade e com o comprimento do lado do quadrado original.

2º) Parta 1 ao meio (o retângulo formado foi repartido ao meio, e "lado 1" foi dividido em 0,5 e 0,5. Agora, têm-se três quadrados de mesma área. Coloque-os lado a lado formando "L").

3º) Complete o "L" com um outro quadrado de mesmas dimensões).

4º) Este último quadrado tem área 0,5 x 0,5 = 0,25, que somado a área dos outros três da 1: 0,25 + 0,75 = 1.

5°) Deste 1 subtraia 0,5. Então, 0,5 é o lado do pequeno original.

A solução algébrica é:

$x^2 + x = 0,75$, donde

$x^2 + x – 0,75 = 0$

A resposta é $x = 0,5$.

Por fim, vale a pena dizer que a Mesopotâmia já existia há mais de 10000 a.C. (Hoyrup, 1994, p. 45), trabalhando na agricultura, construindo celeiros e criando animais no pasto.

Englund (2004, pp 100-149) afirma que os mesopotâmios desenvolveram um sistema simbólico com o uso de pequenos objetos de argila em forma de cone, esferas, discos e cilindros, para registrarem seus bens.

Suas principais cidades (e regiões) foram Susa (a 250 km a oriente do Rio Tigre), as cidades de Ur, Uruk, Nipur, Sipar e Larsa (nelas vivendo os Sumérios), a região central da Mesopotâmia, onde viviam os Acadianos e a Babilônia, que passou a ser a capital da Mesopotâmia em 1700 a.C. Em 1350 a.C., os Assírios passaram a controlar o norte da Mesopotâmia e, em 330 a.C., Alexandre, o Grande, derrota os Persas (que já tinham conquistado a Mesopotâmia em 600 a.C.), trazendo para a região a astronomia. Vale ainda dizer que o rei assírio Assurbanipal (668 a 631 a.C.) construiu uma biblioteca no seu palácio em Nínive (capital da Assíria) contendo mais de 10000 tábuas de argila.

CHINA

Segundo Ronan (1983, Vol. II, p. 12) há provas concretas da existência humana já há 350000 a.C. na China. Os fósseis encontrados são conhecidos como "Homem de Pequim". Ainda, há fósseis humanos da era neolítica ou Idade da Pedra (12000 a.C.)

No entanto uma civilização mais organizada chinesa, com produtos têxteis, cerâmica pintada e economia agrícola, surge por volta de 3000 a.C., contemporânea a civilizações antigas da Índia e do Antigo Império do Egito.

Muitas dinastias se sucederam na China com muitas lutas internas e invasões do exterior. Mas em 220 a.C. o país foi reunificado pelo imperador Shih Huang Ti. Este imperador centralizou o poder dominando toda a China. Começa, então, a construir cidades, palácios, estradas e inicia a construção da "Grande Muralha", para deter as invasões das tribos mongólicas. No entanto, infelizmente, fez parte de seu governo feudal a queima de livros.

Seu governo, porém, não dura muito. Por volta de 200 a.C. assume o poder a dinastia Han (200 a.C. a 220 d.C.). quando o confucionismo foi estabelecido como filosofia de Estado.

Os confucionistas seguiram os ensinamentos do mestre chinês Kung Fu Tzu (Confucius, em latim). Confúcio (em português) nasceu em 552 a.C. e sonhava com um povo que promovesse justiça social e educação universal. Postulava que as posições administrativas e diplomáticas deveriam ser entregues àqueles qualificados por merecimento acadêmico e social (segundo Ronan, Vol. II, p. 18).

Assim, esta dinastia Han resolve transcrever, mesmo que de memória, textos literários e científicos, tanto quanto procurar por manuscritos que tivessem escapados da destruição do governo de Shih Huang Ti. Com isto, até onde se sabe, todos os livros de matemática datam desta altura. Estes textos tratam de assuntos como, por exemplo, aritmética ligada a numerologia, propriedades dos triângulos retângulos, quadrados mágicos (iniciação à análise combinatória), geometria, álgebra e astronomia.

Sobre a matemática chinesa registra-se:

> "Os gregos, como vimos no capítulo 2, tinham aptidão para a geometria. Os chineses, não; em vez disso, tinham uma queda pela álgebra e pelas formas de escrever números. A escrita dos números é mais importante do que pode parecer à primeira vista, pois, na verdade, é o modo de registrar operações matemáticas como a multiplicação e a divisão para não citar tipos mais complexos de operações de matemática superior". (Ronan Vol. II, p. 29)

Durante a dinastia Sung (960 d.C. a 1200 d.C.) ocorreu um grande progresso cultural-científico-tecnológico. Neste período desenvolveram uma prancha de contagem para a álgebra em que podiam resolver equações contendo x^9.

Muito embora os chineses não tivessem, à época, desenvolvido uma teoria geral das equações, eles faziam uso do teorema binomial de Blaise Pascal (1623-1662). Possivelmente o triângulo de Pascal tenha seus rudimentos expressos nas placas de contagem chinesas datadas de 1000 a.C. em que varetas eram utilizadas para registrar números e realizar as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

Séculos antes da dinastia Sung, na dinastia Han (200 a.C.-200 d.C), a China experimentou grande estabilidade política. Nesse período houve grande incentivo à ciência e à tecnologia. A invenção do papel ocorre nessa dinastia.

No período Han, os chineses já eram capazes de resolver sistemas de equações lineares de até mais de três quantidades desconhecidas.

Ronan (Vol. II, p. 34), afirma que no século IV d.C. esta civilização já era capaz de resolver sistemas indeterminados (com mais incógnitas do que equações) e que no século VII d.C. já conheciam algo semelhante ao que hoje se denomina "método das diferenças finitas".

Na dinastia Han foi publicada uma obra chamada "Arte do Cálculo em nove Capítulos". O oitavo capítulo trata de cálculos que, no presente, chamam-se algébricos:

> "8. Do cálculo no tabuleiro: isto é, cálculo algébrico no tabuleiro, onde também eram feitas as operações artiméticas. Trata-se de resolver um sistema de 'n' equações a 'n'

> incógnitas; cada equação ocupava uma coluna vertical no tabuleiro e os coeficientes da mesma incógnita eram dispostos na fileira horizontal”
> (TATON, Tomo I, Vol. 1, pp. 189-190)

Desta forma, as colunas e as linhas do tabuleiro eram preenchidas com varetas. A leitura, então, das colunas e das linhas fornecia o sistema de equações lineares a ser resolvido. Sistemas do tipo, a seguir, eram bastante comuns nestes tabuleiros:

$$x + 2y + 3z = 26$$
$$2x + 3y + z = 34$$
$$3x + 2y + z = 39$$

Naturalmente que os chineses não escreviam com “x”, “y” e “z”, mas esta é a interpretação moderna de tais tabuleiros preenchidos com varetas. A partir desta observação, vale à pena ler o que se segue:

> “A resolução das equações era realizada pela manipulação das varinhas; mas, quando surgiam números negativos no curso das operações, as varinhas coloridas eram substituídas por varinhas negras. Os números negativos (em chinês ‘enganadores’: ‘fu ‘biu’) eram diferenciados dos números positivos (‘corretos’: ‘tcheng tsiang’)”
> (TATON, Tomo I, Vol. 1, p. 190)

GRÉCIA

Em, aproximadamente, 2000 a.C. a península balcânica (ou os Bálcãs), localizada no sudeste da Europa (que hoje compreende países como Albânia, Bulgária, Grécia, Turquia e a ex-Iugoslávia) foi invadida por povos bárbaros, que avançaram até a ilha de Creta, no mar Mediterrâneo. A história da civilização grega tem origem nessas invasões. A partir de 800 a.C. começam a surgir as cidades-Estado tais como Atenas, Esparta e Corinto. Os gregos estiveram presentes nas regiões banhadas pelos mares Egeu, Negro e Mediterrâneo.

Havia muitos contatos comerciais com o Egito que (como já mencionado no começo desse capítulo) tinham, provavelmente, na opinião de alguns pesquisadores, uma compreensão bastante avançada da matemática. É, portanto, bastante instrutivo observar o depoimento de Cajori:

> “Os gregos, sedentos de conhecimento, procuram os sacerdotes egípcios para se instruírem. Tales, Pitágoras, Cenópides, Platão, Demócrito, Eudoxo, todos visitaram a terra das pirâmides. As idéias egípcias eram então transportadas por mar e, ao chegarem ao destino, estimularam o pensamento grego, direcionando-o para novas linhas de pensamento, dando, assim, aos gregos uma base em que pudessem trabalhar. A cultura grega, portanto, não é original”. (Cajori (2007, p. 43)

Por sua forte tendência especulativa os gregos fundaram várias escolas:

a) Escola Jônica

Dessa Escola fizeram parte nomes como Tales (640-546 a.C.), que introduziu na Grécia o estudo da geometria, tendo estudado com sacerdotes egípcios, ciências físicas e matemáticas.

Anaximandro (611 a.C.) e Anaxímenes (570 a.C.) foram dois dos mais brilhantes alunos de Tales.

Anaxágoras (500 – 428 a.C.), um aluno de Anaximenes, foi o último filósofo da escola jônica. Esse filósofo fez tentativas para achar a quadratura do círculo.

b) Escola de Pitágoras

Pitágoras (580-500 a.C.) voltou-se bastante para o estudo do cálculo das áreas, interessando-se, sobremaneira pelos sólidos geométricos.

Filolan e Árquitas (428-347 a.C.) foram os mais proeminentes dentro os últimos pitagóricos. Platão, inclusive, teve acesso aos trabalhos de Filolan e foi grande amigo de Árquitas.

c) Escola Sofista

Os sofistas (“homens-sábios”), fizeram inúmeras tentativas para a resolução da trisecção de um ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo.

d) Escola Platônica

Depois da morte de Sócrates, Platão viajou para Cirene (cidade da atual Líbia) para estudar matemática. Foi também para o Egito como também para a Sicília, onde entrou em contato com os pitagóricos.

Funda a “Academia”, cuja inscrição no pórtico da escola era: “Que não entre aqui, aquele que não souber geometria”.

A escola platônica produziu um grande número de matemáticos:

- Xenócrates (sucessor de Platão).
- Eudoxo.

Na verdade, este matemático passou pouco tempo com Platão, tendo fundado sua própria escola em Cízico (Ásia).

- Teaeteto de Atenas
- Leodamas de Taso
- Neocleides e seu discípulo Neo
- Teudio de Magnésia
- Hermótio de Colofon
- Amíclas de Heráclea
- Cizíceno de Atenas
- Filipo de Mende.

As considerações acima estão aqui para confirmar o quanto os grandes pensadores gregos (e eles foram grandes mesmo) devem aos egípcios. Até porque a história da ciência egípcia foi, por assim dizer, retomada a partir da fabulosa experiência grega:

> "... vimos o nascimento da geometria no Egito, sua transferência para as ilhas jônicas, dali para a Baixa Itália e para Atenas... e agora veremos sua volta à terra de nascença e de lá extrair uma nova vitalidade... Alexandre, o Grande, filho de Filipe, partiu em conquista do mundo... O Egito caiu para Ptolomeu Sóter. Alexandre fundara a cidade portuária de Alexandria, que logo se tornou a 'mais nobre das cidades'. Ptolomeu fez de Alexandria a capital. A história do Egito durante três séculos seguintes é principalmente a história de Alexandria" (Cajori, 2007, p. 61).

Essas considerações estão aqui apenas para reafirmar o considerável entrelaçamento que sempre existiu entre as culturas. Então, se por um lado cada cultura deva ser encarada como uma DIFERENÇA PARTICULAR, por outro lado, o intercâmbio filosófico (cultura, em geral) sempre foi uma marca importante no crescimento da humanidade.

Enfim, o exemplo histórico dessas considerações, ligando a esta pesquisa, ocorre em 1921 d.C. . Nessa data Sir E. Wallis Budge, do Museu Britânico adquiri no Egito um papiro grego (escrito em grego) contendo problemas envolvendo sistemas de equações. Esse documento é atualmente conhecido como "Papiro de Michigan 620", pois encontra-se na Universidade de Michigan (www.lib.umich.edu/pap/).

Karpinskie & Robbins descrevem (e terem comentários) os problemas do papiro:

> "The contents of the papyrus are as follows:
> Columm i
> Four numbers: their sum is 9900; let the second exceed the first by one seventh of the first; let the third exceed the sum of the first two by 300, and let the fourth exceed the sum of the first three by 300; to find the numbers…
> Columm i i
> … Three numbers. The sum of the three is 5300. Let the sum of the first and second be 24 times the third, and let the second be 5 times the first. To find the three numbers…
> In the form of solution of these algebraic problems we have a remarkable approach to modern algebraic symbolism. The problems themselves are strictly algebraic and in conception logical continuations of such a problem as that of the Ahmes

> papyrus, ‘a quantity and its seventh, it makes nineteen’. These problems connect also in idea with the problems found in the Liber Abbaci of Leonard of Pisa (A.D. 1202) and current in Italian arithmetics from his time on for centuries”. (Karpinskie & Robbins, 1929, p. 313). (1)

A solução do primeiro problema mencionado é como se segue:

$$x + (x + \frac{1}{7}x) + (x + x + \frac{1}{7}x + 300) + (x + x + 7\ \frac{1}{7}x + x + x + \frac{1}{7}x + 300 + 300) = 9900.$$

Logo, $8x + \frac{4}{7}x + 900 = 9900.$

Assim, $8x + \frac{4}{7}x + 9000.$

Assim, $56x + 4x = 63000.$

Assim, $60x = 63000.$

Assim, $x = \frac{63000}{60} = 1050$

Com isto, os números são: 1050, 1200, 2550 e 5100, que somam 9900.

O segundo exercício citado é correlato.

Há uma outra série bem interessante de problemas gregos que estão incluídos na “Antologia Grega” ou “Palatina”. São epigramas (breves composições poéticas) que datam desde o século II a.C.

Essa antologia contém 3700 epigramas em 15 livros. Essas composições poéticas foram redescobertas no século XVII pelo filósofo francês Claude Saumaise na Biblioteca Palatina de Heidelberg. O décimo quarto volume contém problemas aritméticos, oráculos e enigmas.

Sobre essa antologia, Karpinski e Robbins (1929, p. 312) ressaltam:

---

(1) "O conteúdo do papiro são as seguintes: Colunai
Quatro números: a sua soma é 9900, vamos considere que o segundo exceda o primeiro por um sétimo do primeiro; terceiros superou a soma dos dois primeiros por 300, e permita o quarto exceder a soma dos três primeiros por 300, para encontrar os números ... Colunaii
... Três números. A soma dos três é 5300. Deixe a soma do primeiro e do segundo ser 24 vezes o terceiro, e deixar o segundo ser 5 vezes o primeiro. Para encontrar os três números ... Sob a forma de solução destes problemas algébricos, temos uma abordagem notável de simbolismo algébrico moderno. Os problemas são estritamente algébricos e em concepção de continuações lógicas de um problema como o do papiro Ahmes, 'a quantidade e seu sétimo, faz dezenove’. Estes problemas estão conectados com os problemas encontrados no Abbaci Liber de Leonardo de Pisa (AD 1202) e com a aritmética italiana de seu tempo durante séculos ". (Karpinskie & Robbins, 1929, p. 313).

"The work of Diophantus of Alexandria appears in the third century of the Christian era with an immense amount of strictly algebraical material, free from any geometrical implications. This material and the algebraic problems of the Greek Anthology are so different from the algebraical material as found in the works of the classical Greek authors that the transition must have involved the activity of many Greek students of mathematics from the time of Archimedes to the time of Diophantus.
The late Professor Francis W. Kelsey acquired in Egypt in 1921 a Greco-Egytian papyrus which is confidently dated as not later than the second century of the Christian era. There are in this papyrus three algebraical problems which in their formulation mark a notable advance over the problems of ancient Egypt of which these problem are the continuation…
… A series of algebraic problems in one unknown, or easily reducible to one unknown, is found in the Greek Anthology. … Several of these problems relate to the distribution of apples and nuts, leading to first degree equations. Thus, the twelfth problem leads to the equation.

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{19} + \frac{x + \frac{x}{20}}{10} + 12 + 120 = x".$$

(Karpinskie & Robbins, 1929, p. 312). (1)

(1) "O trabalho del Diofanto de Alexandria aparece no terceiro século da era cristã, com uma quantidade imensa de material estritamente algébrico, livre de quaisquer implicações geométricas. Este material e os problemas algébricos da Antologia grega são tão diferentes do material algébrico como os encontrados nas obras dos autores clássicos gregos que a transição deve ter envolvido a actividade de muitos estudantes gregos de matemática a partir da data de Arquimedes com o tempo de Diofante.
O falecido Professor Francis W. Kelsey adquiriu no Egito em 1921 um papiro greco-egípcio que é datado com confiança no mais tardar no segundo século da era cristã. Há neste papiro três problemas algébrico que, em sua formulação marca um avanço notável sobre os problemas do antigo Egito dos quais estes problemas são a continuação ...
... Uma série de problemas algébricos em uma variável, ou facilmente redutível a uma variável, é encontrada na Antologia Grega. ... Vários desses problemas estão relacionados com a distribuição de maçãs e nozes, levando às equações de primeiro grau. Assim, o décimo segundo problema leva à equação.

$x/5 + x/4 + x/9 + (x + x/20)/10 + 12 + 120 = x$"

(Karpinaki & Robbins, 1929, p.312)

INDIA

Por volta de 2000 a.C., no vale do rio Indo, havia cidades muito bem planejadas e com economia estruturada. Duas dessas cidades eram Mohenjo-Daro e Harappa, que correspondem ao atual Paquistão. Parece surpreendente, mas a civilização do vale do Indo tinha um conhecimento de engenharia bastante complexo. Segundo TATON, os documentos arqueológicos já mostraram que a civilização do Indo era uma das avançadas da Alta Antiguidade:

> "... surpreendentes trabalhos de urbanismo, sobretudo seus notáveis sistemas de esgotos e piscinas... um estágio avançado de higiene pública". (TATON,1959, Tomo 1, vol. 1, p. 154)

Talvez, todo esse avanço de conhecimento científico possa ser explicado, segundo Ronan (1983, p. 70), pelas constantes invasões indo-européias da Idade do Ferro sofrida pela cultura hindu da Índia.

É, também, importante observar que a literatura indiana era escrita, principalmente, em sânscrito, embora houvesse línguas regionais como o tâmul do sul da Índia, o páli da escola búdica do Ceilão e da Indochina e o ardamagadi dos religiosos jainas, da própria Índia.

Sobre a importância do sânscrito há o seguinte testemunho:

> "Estudada no original, traduzida ou continuada em outras línguas, a literatura científica sânscrita desempenhou, na Ásia Ocidental, papel idêntico ao que teve na Europa e na Ásia Ocidental a literatura grega, que foi traduzida, imitada ou prolongada em latim, siríaco e árabe". (TATON, 1959, Tomo 1, vol. 1, p. 153).

Há um conjunto de textos sagrados conhecidos como VEDA (que significa "SABER") escritos em sãnscrito antigo, semelhante às antigas línguas do Irã, contendo a chamada matemática Védica, instruindo como edificar altares, para sacrifícios, em forma de círculos ou quadrados com área igual a de um retângulo.

Na verdade, um povo, por assim dizer, "parente" dos iranianos, invade e domina, por volta de 1500 a.C., a civilização do Indo. Esses invasores ficaram conhecidos como arianos védicos. Daí, o VEDA.

Por volta de 500 a.C. aquela “matemática sacrificial” entrou em declíneo e os matemáticos indianos já estudavam teoria dos números, permutações e combinações.

Um texto importante, contendo problemas de matemática, é o Manuscrito de Bakhshali. Esse documento foi descoberto por um agricultor numas ruínas perto da aldeia de Bakhshali (Paquistão), em 1981.

Essas escrituras eram feitas em cascas de vidoeiro. O vidoeiro é uma árvore da família das Betuláceas, caracterizado por trancos coberto por uma espécie de cortiça branca (casca do vidoeiro) e originário do Sul da Europa. As suas folhas estão em amentilho (como que em espigas) e as sâmaras (os frutos secos) são disseminadas pelo vento.

Na matemática védica havia um apêndice chamado Vedangas. Entres os Vedangas havia um conhecido por Sulbasutras, escrito por Baudhayana. Sobre os Sulbasutras e o manuscrito de Bakhshali há o seguinte registro:

> “Lãs ecuaciones lineales de primer grado aparecieron em los Sulbasutras (el de Baudhayana), pero uma solución algebraica aparece hasta el documento Bakhshali. Lãs de segundo grado como, por ejemplo, $ax^2 + bx = c$ o $ax^2 = c$, están los Sulbasutras pero aparecem resueltos em el de Bakhshali también. Aqui se ofreció la respuesta $x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$”. (Ruiz, 2003, p. 153).(1)

Sempre houve muita controvérsia sobre a datação do manuscrito de Bakhshali. Porém, mais recentemente (1995), um dos mais importantes pesquisadores da matemática hindu, o japonês Takao Hayashi propôs que o manuscrito original não vai além do século VII depois de Cristo (Teresi, 2008, p. 69).

O manuscrito de Bakhshali encontra-se preservado na biblioteca Bodleian da Universidade de Oxford, Inglaterra.

Houve um escritor na Índia, chamando Aryabhta 1 (476-550 d.C), comentado em Plofker (2007, p. 400) que redigiu um tratado conhecido como Arybhatiya onde fornece regras para equações do 1º e 2º graus, sem, porém, dar exemplos numéricos. Assim é que as regras do livro de Aryabhata 1 foram alvo de

(1) "Equações lineares de primeiro grau aparecem em Sulbasutras (do Baudhayana), mas parece uma solução algébrica para o documento Bakhshali. O segundo nível, por exemplo, $ax^2 + bx = c$ ou $ax^2=c$,
são os que os Sulbasutras parecem resolver, tanto quanto em Bakhshali. Aqui, ele ofereceu a resposta $x = (\sqrt{b^2 - 4ac} - b) / 2a$". (Ruiz 2003, p. 153)

análises de muitos comentadores, dentre eles o indiano Blaskara 1, nascido em 600 d.C.

Sobre esses autores Flood comenta:

> “Aryabhata 1 was one of the most influential mathematicians and astronomers in India through his two works, ‘Aryabhatiya’ and ‘Aryabhatasiddhanta’…
> Chapter 2 of the ‘Aryabhatiya’ is the oldest extant mathematical text in Sanskrit after the ‘Sulbasutras’…
> Problems of proportions were solved by means of the ‘trairasika’ or ‘the (computation) related to three quantities’.
> … the first of the seven examples for the ‘trairasika’ supplied by the commentator, Bhaskara 1, is this: ‘Five ‘palas’ of sandalwood were bought by me for nine ‘rupalas’. Then, how much of sandal-wood can be obtained for only one ‘rupaka’?’ The ‘pala’ and the ‘rupala’ are units of weight and money, respectively.
> The last rule provides a general solution called ‘kuttaka’ or ‘pulverizer’ to an indeterminate system of linear equations of the following type: ‘when a certain unknown integer, N, is divided by a set of integers, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, one by one, the remaninder are $\{r_1, r_2, \ldots, r_r\}$. What is that number, N?’ ”. (Flood, 2003, p. 367). (1)

---

(1) "Aryabhata 1 foi um dos mais influentes matemáticos e astrônomos da Índia através de suas duas obras," Aryabhatiya e Aryabhatasiddhanta ...
Capítulo 2 do "Aryabhatiya 'é o mais antigo texto matemático em sânscrito matemáticos existentes após o ‘Sulbasutras’ ...
Problemas de proporções foram resolvidos por meio da ‘trairasika 'ou a ‘(computação) relacionadas com três quantidades’.
... O primeiro dos sete exemplos para o 'trairasika’ fornecida pelo comentador, Bhaskara 1, é o seguinte:" Cinco ‘palas’ de sândalo foram compradas por mim para nove ‘rupalas’. Então, quanto de madeira de sândalo pode ser obtido para apenas um ‘rupaka'? A ‘pala’ e ‘rupala’ são unidades de peso e dinheiro, respectivamente.
A última regra prevê uma solução geral chamada ‘kuttaka’ ou ‘pulverizador’ para um sistema indeterminado de equações lineares do tipo: ‘quando um número inteiro desconhecido, N, é dividido por um conjunto de números inteiros, (a1, a2, ... , an), um por um, os restos são (R1, R2, ..., Rr). Qual é esse número, N?”. (Flood, 2003, p. 367).

ÁRABES

A história da ciência árabe é, em grande parte, a história da ciência mulçumana. De fato, parte da ciência árabe pode ser vista muitos séculos antes de Maomé. Por volta do século IV de nossa era, as tribos árabes, como os coraixitas, dominavam o comércio de drogas e perfumes. Muito embora esses itens de comércio fossem, em grande parte, limitados a receitas impregnadas de magia, por um lado, e a mera rotinas de uso prático por outro lado, as tribos tinham muito contato com a Índia e com a Pérsia. Desse intenso intercâmbio, os mercadores acabaram por criar, empiricamente, receitas com noções medicinais. Por essas rotas comerciais acabaram-se formando grandes "médicos" árabes. Um deles, talvez o primeiro, foi al-Harit. Ele viajou pelas Índias e pela Pérsia, onde estudou numa famosa escola chamada Jundichapur (século 600 d.C., e Maomé foi contemporâneo de al-Harit).

Já nessa época observava-se o declínio do Império Romano, a encruzilhada de rotas comerciais aumentou. Uma das bases de comércio era Meca, e que também se tornou um centro de peregrinação.

Maomé, filho de uma família de mercadores, teve, então, uma visão do anjo Gabriel, em meio a todo aquele intenso comércio e peregrinação: ele será o profeta do deus único, verdadeiro, Alá. Porém, a elite governante de Meca considerou inaceitáveis os ensinamentos de Maomé e, em 622 d.C., ele deixou a cidade dirigindo-se para Medina. Isto marca o início da era mulçumana. Inicia-se, assim, o "jihad", a guerra santa: Maomé retoma Meca, morre dois depois, e seus seguidores impreendem uma expansão para a Ásia Ocidental e norte da África. Por volta de 750 d.C. os mulçumanos já controlavam um império que se estendia da Espanha ao Indo (segundo Ronan, 1987, vol. III, p. 82).

Esses conquistadores islâmicos acabaram por aceitar que as culturas gregas e persas, por exemplo, fossem amalgamadas às suas concepções político-religiosas.

Com toda essa fusão, a língua provou ser bastante flexível para a expressão de conceitos científicos.

Com respeito às contribuições da ciência árabe para as outras culturas vale à pena ler o registro de Ronan:

> "A região árabe tem sido considerada como um grande depósito destinado a armazenar resultados científicos, que seriam conservados até que fossem requisitados para uso no Ocidente. Mas, naturalmente, trata-se de uma deturpação da verdade. Certamente os árabes herdaram a ciência grega – e também algo da ciência indiana e chinesa –, e, mais tarde, passaram-na para o Ocidente. Mas o papel deles não ficou restrito a essa função. Interpretaram a herança, comentaram-na e adicionaram análises valiosas de seu conteúdo, e, acima de tudo, contribuíram significativamente com suas observações. Na verdade, a Arábia produziu algumas mentes científicas originais; educou-as e encorajou-as a darem suas próprias contribuições". (Ronan, 1987, vol III, p. 83)

O próprio Corão (texto sagrado dos mulçumanos) é testemunha desse fato. Diz o Profeta: "Buscai a ciência desde o berço até a sepultura, nem que seja na China". E ainda: "Aquele que caminha na procura da ciência, Deus caminha com ele na estrada do Paraíso". Embora o termo "ciência", nesse contexto, signifique mais "fé religiosa", o fato é que o Corão estimula os fiéis a encontrar no céu e na terra provas favoráveis à sua fé (segundo Taton, 1959, Tomo I, vol. 3, P. 22).

Ora, por um lado, a língua árabe foi como que "convertida" em língua científica internacional, pelas (territorialmente) amplas conquistas de seu povo e o interesse que tinham pelas culturas grega e indiana e, por outro lado, essa "conversão" se dá pelo fato de que a estrutura gramatical árabe, idioma semítico dos mais puros, favorece a um pensamento analítico, e atomístico. É, portanto, interessante observar o registro de TATON:

> "Um estudo técnico recente acerca da 'involução semântica do conceito' ('tadmin'), explica como as línguas semíticas tendem à formulação resumida e abstrata, 'algebrizam' por contraste com a 'geometrização' ariana... A língua árabe, que favorece esta interiorização do pensamento, estava particularmente apta a exprimir as ciências exatas e a desenvolvê-las naquele sentido que foi historicamente o do progresso das matemáticas: passagem de uma aritmética e uma geometria intuitivas, quase contemplativas, que prefiguram, em Platão, a contemplação das naturezas e das essências inteligíveis, para uma de construções algébricas, onde acabam unificando-se a aritmética e a geometria". (TATON, 1959, Tomo 1, vol. 3, p. 39)

Nos contos das “Mil e uma noites” é mencionado o reinado do califa ar-Rashid, que é um personagem real. Ele, de fato, existiu, governando o império islâmico por volta de 800 d.C. Este rei criou uma importante biblioteca na cidade de Bagdade que, à princípio, continha muitos manuscritos provenientes do império Bizantino (império Romano do Oriente, na idade média, cuja capital era Constantinopla).

O califa al-Manum que sucedeu seu pai, ar-Rasid, fundou a Casa da Sabedoria (Bayt al-Hikma), uma espécie de academia que objetivava a tradução, pelos sábios que se agruparam em Bagdade, de textos gregos e indianos. Esta academia durou cerca de 200 anos e também possuía, um observatório muito bem equipado, e al-khwarizmi foi um dos primeiros matemáticos a trabalhar na casa da sabedoria. Seu nome completo era Abu Abdullah Mohammed bem Musa al-khwarizmi. (780 d.C. – 840 d.C.). Seu trabalho na academia se deu no reinado do califa al-Mamum (810 d.C. – 835 d.C.).

Em 830 d.C., al-Khwarizmi escreve um tratado sobre álgebra. Segundo Rosen (1986, pp. 8-12), este sábio distingue seis tipos de equações do 1º e 2º graus:

a) Os quadrados iguais a raízes: $ax^2 = bx$.
b) Os quadrados iguais a um número: $ax^2 = c$.
c) As raízes são iguais a um número: $ax = c$.
d) Os quadrados e as raízes são iguais a um número: $ax^2 + bx = c$.
e) Os quadrados e os números são iguais a raízes: $ax^2 + c = bx$.
f) As raízes e os números são iguais a quadrados: $bx + c = ax^2$.

Esta forma de trabalhar com as equações visava evitar os números negativos. Os métodos, para tanto, usados pelos sábio eram o da completação (al-jabr) e da redução (al-muqabala):

- Al-jabr: consiste em adicionar termos iguais a ambos os membros da equação para eliminar termos com coeficiente negativo.
- Al-muqabala é, justamente, a operação que se segue ao trabalho de completação, ou seja, o término do processo de eliminação dos termos negativos.

Rosen dá um exemplo baseado em al-khwarizmi:

> " 'half of a square and five roots are equal to twenty-eight dirhems;' * that is to say, what must be the amount of a square, the moiety of which, when added to the equivalent of five of its roots, is equal to twenty-eight dirhems? Your first business must be to complete your square, so that it amounts to one whole square. This you effect by doubling it. Therefore double it, and double also that which is added to it, as well as what is equal to it. Then you have a square and ten roots, equal to fifty-six dirhems. Now halve the roots; the moiety is five. Multiply this by itself; the product is twenty-five. Add this to fifty-six; the sum is eighty-one. Extract the root of this; it is nine. Subtract from this the moiety of the number of roots, which is five; the remainder is four. This is the root of the square which you sought for; the square is sixteen, and half the square eight.
> Proceed in this manner, whenever you meet with squares and roots that are equal to simple numbers: for it will always answer.
>
> * $\frac{x^2}{2} + 5x = 28$
>
> $x^2 + 10x = 56$
>
> $x = \sqrt{\left[\frac{10}{2}\right]^2 + 56} - \frac{10}{2}$
>
> $= \sqrt{25 + 56} - 5$
> $= \sqrt{81} - 5$
> $= 9 – 5 = 4$".
>
> (Rosen, 1986, p. 10) (1)

---

(1) " 'Metade' de um quadrado e cinco raízes são iguais a vinte e oito dirhems; isto é, o que deve ser a quantidade de um quadrado, a fração de que, quando adicionado ao equivalente a cinco de suas raízes, é igual a vinte e oito dirhems? Seu primeiro negócio deve ser para completar o seu quadrado, de modo que equivale a um quadrado inteiro. Este efeito é dobrando-o. Portanto dobre-os, e duplique também o que é adicionado a ele, assim como o que é igual a ele. Então você tem uma raiz quadrada e dez raízes, igual a cinqüenta e seis dirhems. Agora, divida ao meio as raízes, a metade é cinco. Multiplique isto por si mesmo, o produto é de vinte e cinco anos.Adicione isto a cinquenta e seis, a soma é oitenta e um. Extraia a raiz deste, que é nove.Subtrair a partir desta fração do número de raízes, que é cinco, o restante é quatro. Esta é a raiz do quadrado que você procurou, o quadrado é dezesseis, e a metade do quadrado é oito.
Continue dessa maneira, quando você se encontrar com quadrados e raízes, que são iguais aos números simples: para isto ira sempre responder:
$x^2/2 + 5x = 28$
$x^2 + 10x = 56$
$x = \sqrt{(10/2)^2 + 56} – (10/2)$
$= \sqrt{25 + 56} – 5$
$=\sqrt{81}–5=9–5=4$"
(Rosen, 1986, p. 10)

CAPÍTULO II
AS RAÍZES DO T.F.A. NA EUROPA MEDIEVAL

Há uma tradição romana relatando que a cidade de Roma (Itália) foi fundada por volta de 760 a.C. pelos gêmeos Rômulo e Remo. Já em 300 a.C., Roma dominava toda a península Itálica e seguia se expandindo. No século I a.C. esta dominação abarcava mais de 40 países do Egito à Bretanha, numa superfície estimada em 6 milhões de quilômetros quadrados.

De fato, enquanto Eratóstenes, em Alexandria, no século III a.C., media o tamanho da Terra, Roma dominava a Itália e, então, duzentos anos depois os romanos estabeleceram um império que se estendia a centenas de hectares.

Em 290 d.C. o império romano viu-se ameaçado quando se dividiu no Império do Oriente, com base em Bizâncio (cidade grega, centro do Império Bizantino) e no do Ocidente, ainda com base em Roma.

O Império Romano fica, então, cada vez mais sujeito a invasões bárbaras e sucumbe em, aproximadamente 500 d.C. Contudo, a Igreja Católica, bem organizada e expandida, consegue manter seu domínio e muitos dos reis bárbaros acabaram por ser converter ao catolicismo.

Em 25 de dezembro do ano 800 d.C., Carlos Magno é coroado Imperador pelo Papa Leão III e tem início, assim, o Sacro Império Romano. No entanto, por volta de 30 anos antes desta coroação, Carlos Magno já era líder do reino Franco, que hoje corresponde a maior parte da França e à região da Francônia (norte do estado da Baviera, Alemanha).

Justamente, em 780 d.C., Carlos Magno convidou Alcuino de York para reformular o ensino de sua corte. Alcuino escreveu muitos manuais escolares dentre os quais os "Problemas para Estimular os jovens". São 53 problemas de matemática que estimulavam bastante a imaginação.

Para que se tenha uma idéia, em 1994 houve uma Conferência Internacional na Universidade do Cairo, Egito, sobre Análise Matemática e Processamento de Sinais. Na conferência é relatado o trabalho de Alcuino de York na corte de Carlos Magno:

> "Mathematics at the court school of Charlemagne, which flourished. 775-814, was primarily associated with the person of Alcuin of York (c. 735-804). … The Anglo-Saxon Alcuin (c. 735-

> 804) joined the court c. 782, active there to 796, when he became abbot of tours. …
> We finally come to ‘Propositiones ad acuendos juvenes’, the oldest mathematical problem collection in Latin, attributed to Alcuin of York. …Containing 53 problems, it is of exceptional historical importance since 6 of the major types of problems seem to be new, while 4 major types appear for the first time in the west or represent an unusual variant a classical problem. …
> Problems 2, 3, 3, 40, 45 and 48 of the Propositions, daling with a number of persons or objects, are a familiar ‘God greet you’ problems, with problems 36 and 44 being questions involving the age of persons; all eight reduce to a linear equation $nx + p = 100$, where n is the sum of certain rational numbers, and p a natural or zero. The type of problem is already found in the ‘Rhind papyrus’, typical being Problem 24 there: A heap and a seventh equals 19, i.e., $x + \frac{x}{7} = 19$”. (1)

Sobre equações do segundo grau, vale a pena citar o matemático judeu, que viveu na Espanha, Abraham bar Hiyya (1092-1167 d.C.):

> “Little is known of Bar Hiyya’s life, save that he lived most of his live in Barcelona. ... Bar Hiyya’s writing focused on astronomy, astrology, mathematics, philosophy and the Jewish calendar… one of these texts was Bar Hiyya’s own treatise on geometry, which left his greatest imprint upon Latin readers. It was called ‘Hibbur ha-Meshihah ve-ha-Tisboret’ in Hebrew and ‘Liber embadorum’ in Latin, and it contained the first European exposition of algebra, and the first solution of the quadratic equation. Decades later, Leonardo Fibonacci discussed the work at length in ‘Pratica geometrial’. It remained the principal source of Bar Hiyya’s reputation among Latin reader” (Efron, 2006, pp. 84-85). (2)

---

(1) "A Matemática na escola de corte de Carlos Magno, que floresceu. 775-814, foi associada principalmente com a pessoa de Alcuíno de York (c. 735-804). ... O anglo-saxão Alcuino (c. 735-804) se juntou à corte c. 782, atuando lá em 796, quando ele se tornou abade de turnos. ... Finalmente chegamos ao "Propositiones ad acuendos Juvenes", a coleção mais antiga de problemas matemáticos em latim, atribuída a Alcuíno de York. ...Contendo 53 problemas, é de excepcional importância histórica já que 6 dos principais tipos de problemas parecem ser novos, enquanto que 4 tipos principais aparecem pela primeira vez no Oeste ou representam uma variante incomum de um problema clássico. ... Problemas 2, 3, 3, 40, 45 e 48 das Proposições, ligando com um número de pessoas ou objetos, são os conhecidos problemas "Deus te cumprimenta", com problemas de 36 e 44 sendo questões que envolvem a idade das pessoas, todos os oito reduzem-se a uma equação linear $nx + p = 100$, onde n é a soma de certos números racionais, e um natural ou zero. O tipo de problema já se encontra no "papiro Rhind, e um problema típico é o 24: Um monte e um sétimo é igual a 19, ou seja,$x+x/7=19$".

(2) "Pouco se sabe da vida de Bar Hiyya, a ressalva de que ele viveu a maior parte de seu vida em Barcelona. ... Bar Hiyya focou sua escrita astronomia, astrologia, matemática, filosofia e no calendário judaico ... um destes textos foi o próprio tratado de Bar Hiyya em geometria, que deixou sua maior marca nos leitores em latim. Era chamado de "embadorum Hibbur ha-ha-ve Meshihah-Tisboret" em hebraico e ‘Líber em ladorum’ em latim, e que continha a primeira exposição européia de álgebra, e a primeira solução da equação quadrática. Décadas mais tarde, Leonardo Fibonacci discutim longamente o trabalho em 'Pratica geometrial’. O que manteve a principal fonte de prestígio de Bar Hiyya entre os leitores em latim "(Efron, 2006, pp. 84-85).

Leonardo de Pisa (1170-1250 d.C.) é também um importante nome para essa pesquisa. Nasceu em Pisa na Toscânia, um dos grandes centros comerciais de então. Seu pai, era chefe de um entreposto comercial de um porto do Mediterrâneo do norte da África (atual Argélia). Leonardo estudou com professores islâmicos e seus conhecimentos matemáticos estiveram muito ligados ao mundo árabe.

Seu pai, provavelmente, chamava-se Guilielmo Bonnacci, e, com isto, Leonardo por vezes, assinava Leonardo fillius Bonacci (filho de Bonnacio), mas, outras vezes assinava Leonardo Bigolho (viajante) devido ao grande prazer que tinha para viajar e se encontrar com matemáticos islâmicos.

Provavelmente, seu livro mais conhecido seja o “Liber Abaci” (Livro do Ábaco ou do Cálculo), escrito em 1202 d.C., ao retornar à Pisa depois de muitas viagens. Este livro trata de aritmética e álgebra e está dividido em 15 capítulos. Por exemplo, o capítulo 15 tem o seguinte título:

> “De regulis proportionibus geometrie pertinentibus: de questionibus aliebre et amulchabale” (A regra da proporção geométrica e questões de álgebra e almucabala).

Laurence Sigler colocou em inglês todo o “Líber Abaci”, acrescentando muitos comentários e análises importantes. Logo na introdução de seu livro Sigler afirma:

> “ ‘Líber Abaci’ is one of the most importante books on mathematics of the Middle Ages. Its effect was enormous and disseminating the Hindu number system and the methods of álgebra throughout Europe”. (Sigler, 2002, P. 4) (1)

O capítulo 15 de Sigler está assim nomeado:

> “On Pertinent Geometric Rules and Problems of Álgebra and Almuchabala”. (Sigler, 2002, P. 531) (2)

Este capítulo 15 está dividido em 3 partes:

(1) " ‘Líber Abaci ‘ é um dos mais importantes livros na matemática da Idade Média. Seu efeito foi enorme disseminando a divulgação do sistema de numeração hindu e os métodos da álgebra em toda a Europa ". (Sigler, 2002, p. 4)

(2) "Sobre as pertinentes regras geométricas e Problemas de Álgebra e Almuchabala". (Sigler, 2002, p. 531)

a) Proporções de três e quatro quantidades.
b) Soluções de certos problemas geométricos.
c) Aborda álgebra e almuchabala, discutindo também a resolução de equações do segundo grau.

Esse último item (c) é o diz respeito a esse trabalho, mas antes que se dê um exemplo, então, vale a pena dizer que as palavras “álgebra” e “almuchabala” têm origem árabe e significam, respectivamente, “restauração” e “oposição”, ou seja, “opor” termos restaurados (álgebra) para balanceamento da equação.

Bem, o capítulo 15 do livro de Laurence Sigler é, como já foi mencionado, a tradução (com comentário de Sigler) do original de Pisa. Aliás, Leonardo de Pisa (Bigolho ou Bonnacio), a partir do século XIX, ficou mais conhecido como Fibonacci, nome dado pelo editor de seus livros.

Em Sigler consta o seguinte subtítulo do capítulo 15:

> “Here Begins Part Three on the Solution of Certain Problems According to the Method of Álgebra and Almuchabala, Namely Proportion and Restoration”. (Sigler, 2002, P. 550) (1)

Logo a seguir, na mesma página, lê-se:

> “In the composition of álgebra and almuchabala three properties that are in any numbers are considered: they are roots, squares, and simples numbers. Therefore when any number is multiplied by itself the resulting number is a square, and the number multiplied is a root”.(2)

Agora, no mesmo capítulo, consta o seguinte subtítulo:

> “Here Ends the Introduction to Álgebra and Almuchabala. Here Begin the Problems on Algebra and Almuchabala”. (Sigler, 2002, P. 558)(3)

---

(1) "Aqui começa a terceira parte da solução de determinados problemas De acordo com o Método de Álgebra e Almuchabala, a saber,Proporção e Restauração". (Sigler, 2002, p. 550)

(2) "Na composição da álgebra e almuchabala três propriedades que estão em todos os números são consideradas: são as raízes, quadrados e números simples. Portanto, quando um número é multiplicado por si mesmo o número resultante é um quadrado, e o número multiplicado é uma raiz ".
(3)"Aqui termina a Introdução à Álgebra e Almuchabala. Aqui começam os problemas em Álgebra e Almuchabala ". (Sigler, 2002, p. 558)

Extraem-se, agora, dois exemplos:

> “I divided 60 by a number of men, and each had na amount, and I added two more men, and I divided the 60 by all of them, and there resulted for each 1/2 2 denari less than that which resulted first”, (Sigler, 2002, P. 562) (1)
>
> “I separated tem into two parts, and I multiplied one of them by itself, and there resulted thirty-two times the other part”. (Sigler, 2002, P. 565) (2)

Far-se-á, agora, uma rápida menção à Levi Ben Gerson (1288-1344), filósofo, astrônomo, comentador bíblico e matemático, nascido em Provença (sul da França). Levi escreveu vários livros de comentários ao antigo testamento bíblico judaico cristão. Escreveu, também, quatro tratados de matemática:

a) Um comentário sobre Euclides (1320), onde se vê uma tentativa de demonstrar o 5º postulado.
b) “De Sinibus, Chordis et Arcubus” (1342), sobre trigonometria, dedicado ao Papa, traduzido para o latim durante sua vida.
c) “Maaseh Hoslev” (1321), a Arte do Cálculo, uma coleção de 68 teoremas e demonstrações sobre aritmética, álgebra (raízes quadradas e cúbicas) e combinatória.
d) “De Numeris Harmonis” (1343), escrito a pedido do bispo de Meaux e, mais tarde, traduzido para o latim

Selin comenta:

> “Levi Ben Gerson (1288-1344), also known as Gersonides or Leo de Balneolis, his Provençal name, was one of the most original Jewosh thinkers of the Middle Ages, and he wrote on logic, philosophy, biblical exegesis, mathematics, and astronomy. … On mathematics, his Maaseh Hoshev (work of the computer, 1321) deals with arithmetic, summations of series, algebra, and combinatorial analysis”. (Selin, 1997, P. 509) (3)

(1) "Eu dividi 60 por um número de homens, e cada valor tinha uma quantidade, e acrescentei dois homens a mais , e eu dividi os 60 por todos eles, e aí resultou, para cada (½).2 Denari a menos ao que resultou no primeiro" (Sigler, 2002, p. 562)
(2) "Eu dividido dez em duas partes, e multiplico uma delas por si mesma, e aí resultou trinta e duas vezes a outra parte". (Sigler, 2002, p. 565)
(3) "Levi Ben Gerson (1288-1344), também conhecido como Gersônides ou Leo de Balneolis, seu nome provençal, foi um dos pensadores judeus mais originais da Idade Média, e ele escreveu sobre lógica, filosofia, exegese bíblica, matemática e astronomia. ... Em matemática, o seu Maaseh Hoshev (trabalho de computador, 1321) trata de aritmética, somas de séries, álgebra e análise combinatória. (Selin, 1997, p. 509)

Por fim, as raízes do T.F.A. podem ser observadas, por exemplo, no importante tratado de matemática “triparty en la science dês nombre”, de 1484, escrito pelo francês Nicolas Chuquet (1445-1488). A relevância de Chuquet encontra-se no fato de que este tratado foi um dos primeiros escritos em francês e, em segundo lugar, por apresentar notações originais do tipo “R^2 13” que significa $\sqrt{13}$, ou ainda “R^3 15” equivale a $\sqrt{15}$ e, ainda, $\sqrt{20} - \sqrt{5}$ é registrado como R^2 20 mR^2 5.

Este manuscrito recebe o nome de “Triparty” por razões religiosas: é dedicado a São Trinita, e sobre a obra, Marie comenta:

> “M. Aristide Marre a récemment trouvé une copie de son ouvrage, dans un manuscript de la Bibliothèque Nationale, et l’a publié dans lê Bulletin du prince Boncompagni.
> Ce manuscrit se termine parla mention suivante:
> ‘Et ainsi à l’onneur de la glorieuse Trinité se termine ce livre, liquel, pour raison e ces troys parties gênerales, je l’appelle Triparty...’ ”. (Marie 2009, p. 193)(1)

Ainda, Cajori fornece dados importantes:

> “The earliest known process in the Occident of approaching to a root of an affected numerical equation was invented by Nicolas Chuquet, who, in 1484 at Lyons, wrote a work of high rank, entitled ‘Le triparty en la science des nombres’. It was not printed until 1880. If $\frac{a}{c} < x < \frac{b}{d}$, then Chuquet takes the intermediate value $\frac{a+b}{c+d}$ as a closer approximation to the x. He finds a serie of successive intermediate values”. (Cajori 1999, p. 136)(2)

Por fim, é importante notar que Chuquet faz parte da história da naturalização do uso do símbolo do zero, na resolução das equações quadráticas, segundo Kaplan & kaplan:

---

(1) "M. Aristide Marre recentemente encontrou um exemplar de seu livro, um manuscrito da Biblioteca Nacional, e publicada no Boletim do príncipe Boncompagni.
O manuscrito termina com a seguinte menção:
"E assim, em honra da Trindade gloriosa termina este livro, o qual, devido a estas três partes gerais, e o chamo Tri-partido ...". (Marie 2009, p. 193)

(2) "O primeiro processo conhecido no Ocidente de aproximação de uma raiz de uma equação numérica simulada foi inventado por Nicolas Chuquet, que, em 1484 em Lyon, escreveu uma obra de alto escala, intitulada ‘Le tripartido nas ciências dos números’. Ela não foi impressa até 1880. Se a/c <x <b/d, então Chuquet assume o valor intermediário a + b/c +d como uma maior aproximação ao x. Ele encontra uma série de sucessivos valores intermediários ". (Cajori 1999, p. 136)

"Almost another two hundred years passed before zero was treated like an actual quantity: in 1484 a physician in Lyons, Nicolas Chuquet, solving for x in the quadratic $3x^2 + 12 = 12x$, found by his method that $x = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$ and remarked that 'since $4 - 4 = 0$, $\sqrt{0}$ added to or subtracted from 2 leaves 2, which is therefore the number we sought'. But his work, Le triparty in la science des nombres, wasn't published until after his death, so that even more time elapsed before zero's greencard was replaced by a naturalization certificate". (Kaplan & kaplan,1999, p. 108) (1)

(1) "Quase mais duzentos anos se passaram antes que o zero foi tratado como uma quantidade real: em 1484 um médico de Lyon, Nicolas Chuquet, descobre x no quadrática $3x^2 + 12 = 12x$, encontrado por seu método que $x = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$ e comentou que 'desde $4 - 4 = 0$, $\sqrt{0}$ adicionado ou subtraído de 2 deixa 2, que é, portanto, o número buscamos'. Mas a sua obra, os tripartidos em na ciências dos números, não foi publicada até depois de sua morte, de modo que ainda mais tempo decorreu antes que à utilização do zero fosse dada um certificado de naturalização ". (Kaplan & Kaplan, 1999, p. 108)

CAPÍTULO III

Comentários, vida e obra a respeito de alguns matemáticos envolvidos na história do T.F.A. de 1545 d.C. à 1981 d.C.

A importância deste capítulo está no fato de que, a partir de Cardano, começou-se a pensar na possibilidade de que o T.F.A pudesse abarcar mais do que números reais.

Raízes de números negativos começaram, de algum modo, mesmo que com muito desconforto, a serem consideradas.

Cardano foi o primeiro a começar a perceber que era possível manipular esses tipos de números.

Bombelli, por seu turno, produz regras próprias de manipulação "números complexos".

A partir daí, verifica-se o trabalho de Girard, que foi o primeiro a afirmar que equações de graus "n" têm sempre "n" soluções. Agora, por mais paradoxal que parece, foi o grande gênio da matemática Leibniz quem mostrou uma prova que o T.F.A era falso. Euler, no entanto, mostra que esse trabalho de Leibniz não correspondia à realidade. A seguir, embora com muitas falhas, D'Alembert foi o primeiro a fazer uma séria tentativa de demonstração do T.F.A, ou seja, a idéia dos números complexos já estava bem presente em sua demonstração. Lagrange, por seu turno, faz objeções ao trabalho de Euler à respeito das funções racionais, já que o caminho de Euler poderia levar a certas impossibilidades matemáticas.

Laplace, produziu um trabalho bastante diferenciado usando a idéia de discriminante de um polinômio.

Credita-se à Gauss a primeira grande prova do T.F.A por sua crítica ao seus antecessores por terem, simplesmente, assumido a existência de raízes e deduzir daí suas propriedades.

A importância de Argand repousa muito no fato de que propôs que as raízes complexas do T.F.A pudessem ter representações geométricas dinâmicas de rotação.

As representações de Argand possibilitaram a Hellmuth Kneser propor uma prova construtiva do T.F.A.

Gerônimo (ou Gerolano) Cardano (1501-1576 d.C.)

Gerolano era um matemático italiano e produziu a primeira obra latina dedicada somente à Álgebra: “Ars Magna”. Esse tratado fornece método de solução de equações de 3º e do 4º graus.

Alguns anos antes do trabalho de Cardano, houve um matemático italiano chamado Nicolo Tartaglia (1500-1557) que deu uma solução para equações do 3º grau. Nasce, então, uma disputa Tartaglia-Cardano:

> “There was not much real progress on the problem until the work of Scipione del Ferro (1465-1526) and Niccolò Fontana (1500-1557), known as Tartaglia (‘the stammer’). Both discovered how to solve certain cubics, and both kept their solutions secret. …”. (Berlinghoff e Gouvea, 2003, p. 134) (1)

Havia na época um sistema de competição: eruditos desfiavam eruditos em competições públicas a resolverem equações. E todo esse clima estimulava o segredo para a não divulgação das soluções das equações.

Em 1535, Tartaglia gaba-se por poder resolver equações do terceiro grau, mas que não as divulgaria. Scipione del Ferro, que já havia morrido, passou seus segredos ao seu aluno Antonio Maria Fiore. Quando Fiore soube das asserções de Tartaglia, ele o desafiou para uma competição:

> “It turned out that del Ferro knew how to solve equations of the form $x^3 + cx = d$, nd that Tartaglia had discovered how to solve $x^3 + bx^2 = d$. When the time for the contest came, Tartaglia presented Fiore with a range of questions on several different parts of mathematics, but each and every one of Fiores’s questions boiled down to a cubic of the kind be could solve”. (Belinghoff e Gouvea, 2003, p. 134).(2)

Bem, é óbvio que Tartaglia ganhou a competição. Eventualmente, as notícias dessa vitória chegaram até Gerolano Cardano que, insistentemente, tentou

(1) "Não houve muito progresso real sobre o problema até o trabalho de Scipione del Ferro (1465-1526) e Niccolò Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia (" a gagueira). Ambos descobriram como resolver certas cúbicas, e ambos mantiveram suas soluções secretas. ... ".(Berlinghoff e Gouvea, 2003, p. 134)

(2) "Acontece que del Ferro sabia como resolver equações da forma $x^3 + cx = d$, e que Tartaglia tinha descoberto a forma de resolver $x^3 + bx^3 = d$. Quando a hora do debate chegou, Tartaglia ‘Specimen novum Analyses pro apresentou à Sientic infiniti circa Summas et Quadraturas’ (‘ uma série de perguntas sobre várias partes da matemática, mas cada uma das perguntas de Fiore se resumia a uma cúbica do tipo que poderia resolver ". (Belinghoff e Gouvea, 2003, p. 134).

convencer Tartaglia a divulgar suas pesquisas com promessas de que elas seriam mantidas em segredo. Sendo assim, Tartaglia explica aqueles casos de solução que tinha domínio. Nos seis anos seguintes Cardano atacou o problema da equação geral do terceiro grau, resolvendo-o com inteiro sucesso. O assistente de Cardano, Lodovico Ferrari (1522-1565) extendeu essas mesmas idéias para equações do quarto grau, obtendo sucesso.

A essa altura, é claro, Cardano percebeu que tinha uma fabulosa pesquisa em mãos e resolveu publicá-la. Mas como fazer isto se ele tinha prometido a Tartaglia não fazê-lo? Mas, Cardano encontra uma brecha para suas pretensões quando descobriu que del ferro também tinha achado a solução de Tartaglia, só que bem antes. Toda essa pesquisa foi então publicada, já que Cardano não tinha feito nenhuma promessa a del Ferro:

O livro de Cardano foi chamado de “Ars Magna” (A Grande Arte), que é justamente a Algebra.

Tartaglia jamais perdoou Cardano pelo resto de sua vida. Mas essa história não acaba aqui.

Rafael (1526-1572)

Mais adiante, Cardano percebe que seu método de resolução de equações do tipo $x^3 = px + q$ parecia não ter nenhum sentido para certos exemplo, redundando em raízes de números negativos. Por exemplo, $x^3 = 15x + 4$, no método de Cardano tem-se:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Ora, mas por inspeção verifica-se que 4 é uma raiz.

Cardano pede ajuda a Tartaglia, recebendo uma irônica resposta. Ele disse que Cardano não tinha entendido como resolver esses casos; mas também não disse como resolvê-los.

É aí que entra Rafael Bombelli. Ele mostra, geometricamente, que $x^3 = px + q$ tem sempre uma solução positiva independentemente dos sinais de p e q. Por outro lado, ele mostrou que, de fato, para muitos valores de p e q as soluções conduziam para raízes de números negativos. Mas, o brilhantismo está no fato de que mesmo não entendendo bem o significado de números do tipo $\sqrt{-1}$ ele, ainda assim, propôs regras de manipulação de números do tipo a + b $\sqrt{-1}$.

Em 1572 Rafael Bombelli publica seu livro “Álgebra” onde ele justifica suas regras de manipulação de raízes e dá início, sem ter consciência, para o estudo dos números complexos. O livro “Matemática, uma breve história. Vol II”, faz parte de uma série de livros de Paulo Roberto Martins Contador, que tem por característica ser extremamente didático em suas exposições. Ele conta bem essa história de Bombelli:

> “O livro de Álgebra de Bombelli é considerado o melhor tratado de algebra italiana da Renascença, além de trazer uma importante inovação no que diz respeito à notação simbólica: usava R.q. para raiz quadrada, R.c. para raiz cúbica... o (parenteses), ..., p (plus) para adição e m (minus) para subtração. ... semicírculo para denotar expoente. ... Ao estudar o trabalho de Cardano, verificou que, para as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, ..., os números reais não seriam suficientes para sua resolução. ...., pois o resultado levaria a números que nem são positivos (più) nem negativos (meno), isto é, um número não real ou um número ‘imaginário’. Por exemplo, a expressão 3 + 2i ficaria 3 p di m 2 e 3 – 2i ficaria 3m di m 2 . ... (bi) (ci) = – bc ficaria più di meno é igual a meno, e (bi) (– ci) = bc ficaria più di meno vezes meno di meno é igual a più ... À respeito dessa proposição, o próprio Bombelli comentou:
>
> ‘Era um pensamento louco, segundo o julgamento de muitos, e por muito tempo eu também fui da mesma opinião. Tudo parecia apoiar-se mais num sofisma do que na verdade. Entretanto procurei por muito tempo, até que realmente provei ser esse o caso’ ”. (Contador, 2008, pp. 51-54)

Albert Girard (1595 – 1632)

Esse matemático flamengo/francês trabalhou com álgebra, trigonometria e aritmética. Em 1626 d.C. publicou um tratado em trigonometria contendo o primeiro uso das abreviações de seno (sin), cosseno (cos) e tangente (tan). Ficou também muito conhecido por ser o primeiro a formular a definição indutiva da sequência de Fibonacci.

Em 1629, publica “L’invention en algèbre” onde afirma que um polinômio de grau n tem sempre n soluções. Admitiu, inclusive, que essas soluções poderiam vir de um campo maior de números.

É importante dizer que François Viète (1540 – 1603), um matemático francês amador, realiza estudos, por volta de 1591 d.C., sobre métodos de resolução de equações do segundo, terceiro e quarto graus.

A essa altura, os comentários de Derbyshire são importantes:

> “Viète’s treatment of equations was in some ways less ‘modern’ than Bombelli’s. He was, as I have said, averse to negative numbers, which he did not admit as solutions. His attitude to complex numbers was even more retrograde… In one respect, though, Viète was a pioneer in the study of equations… twelve years after Viete’s death, his Scottish friend Alexander Anderson published two of his on the theory of equations. In the second paper, titled ‘De equationem emendatione’ (On the Perfecting of Equation), Viète opened up the line of inquiry that led to the study of the symmetries of an equation’s solutions, and therefrom to Galois theory, the theory of groups, and all of modem algebra… A French mathematician of the following generation, Albert Girard, generalized them to an equation of any degree in his book ‘New Discoveries in Algebra’, published in 1629, 14 years after Anderson’s publication of Viète’s paper”. (Derbyshire 2006, pp. 89-90) (1)

Gottfried Wilhem von Leibniz (1646-1716)

A obra de Leibniz tem importantes contribuições para as histórias da filosofia e da matemática. Também tem grande contribuição para a construção das modernas arquiteturas dos computadores, pelo seu trabalho com sistemas binários.

Leibniz, portanto, era um cientista de grande erudição. No entanto, ele comete um erro importante no que diz respeito ao desenvolvimento do T.F.A.:

---

(1) "O tratamento de Viète das equações foi, de certa forma menos ‘moderno’ do que o de Bombelli. Ele era, como eu disse, avesso a números negativos, os quais ele não admitia como soluções. Sua atitude para com números complexos ainda mais retrógrada ... Em um aspecto, no entanto, Viète foi um pioneiro no estudo de equações ... doze anos após a morte de Viète, seu amigo escocês Alexander Anderson publicou dois de seus trabalhos sobre a teoria das equações. No segundo artigo, intitulado "De emendatione equationem" (No aperfeiçoamento da equação), Viète abriu a linha de investigação que conduziu ao estudo das simetrias de soluções de equação, e daí a

teoria de Galois, a teoria dos grupos, e todas da álgebra moderna ... Um matemático francês da geração seguinte, Albert Girard, generalizou-a para equação de qualquer grau, em seu livro "New Discoveries em Álgebra", publicado em 1629, 14 anos após a publicação de Anderson da pesquisa Viète ". (Derbyshire 2006, pp. 89-90)

> "The integration of rational fractions is the main theme of a 1702 paper by Leibniz in the Aata Eruditorum of Leipzig: 'Specimen novum Analyseos pro Scientia infiniti circa Summas et Quadraturas' ('New specimen of the Analysis for the Science of the infinite about Sums and Quadratures'). In this paper, Leibniz points out the usefulness of the decomposition of rational fractions into sums of partial fractions to reduce the integration of rational fractions to the integration of $\frac{dx}{x}$ and $\frac{dx}{x^2+1}$ he is thus led to investigate the factorization of real polynomials, coming close to the 'fundamental theorem of algebra' according to which every real polynomial of positive degree is a product of factors of degree 1 or 2…
> Leibniz then proposes the following counterexample since $x^4 + a^4 = (x^2 + a^2 \sqrt{-1})(x^2 - a^2 \sqrt{-1})$, it follows that $x^4 + a^4 =$
>
> $$(x + a\sqrt{\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{\sqrt{-1}})(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}})$$
>
> Failing to that $\sqrt{\sqrt{-1}} = \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ and $\sqrt{-\sqrt{-1}} = \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$
>
> He draws the erroneous conclusion that no non-trivial combination of the four factor above yields a real divisor of $x^4 + a^4$ …
> Leibniz's argument was definitely refuted by Roger Cotes (1682-1716), who thoroughly investigated the factorization of the binomials $a^n \pm x^n$". (Tignol, 2001, pp. 74-75).(1)

Leonhard Euler (1707 – 1783)

Euler foi um matemático suíço com enormes e amplas contribuições para a matemática e a física. Nos anais da história da Real Academia de Ciências, registrada em 1786, nas páginas 37 e 38 (www.eulersociety.org) consta uma carta do Marquês de Condorcet sobre a brilhantes contribuições de Euler à ciência:

(1) "A integração das frações racionais é o tema principal de um trabaho de 1702 de Leibniz no AATA Eruditorum de Leipzig: 'Nova espécime de análise para a ciência do infinito sobre somas e quadraturas). Neste trabalho, Leibniz aponta para utilidade da decomposição de frações racionais em somas de frações parciais para reduzir a integração de frações racionais para a integração de e, portanto, ele é levado a investigar a fatoração de polinômios reais, aproximando-se do teorema fundamental da álgebra, segundo o qual cada polinômio real de grau positivo é um produto de fatores de grau 1 ou 2 ...
Leibniz, em seguida, propõe o seguinte contra-exemplo desde que $x^4 + a^4 = (x^2 + a^2)(x^2 - a^2)$, segue-seque$x^4+a^4 = (x + a\sqrt{\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{\sqrt{-1}})(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}})$, $\sqrt{-\sqrt{-1}} = \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{\sqrt{-1}} = \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

Ele chegou à conclusão errônea de que nenhuma combinação não-trivial do quando fator quatro acima produz um divisor real de $x^4 + a^4 =$ ... argumento de Leibniz foi definitivamente refutado por Roger Cotes (1682-1716), que investigou exaustivamente a fatoração dos binômios uma xn ". (Tygnol, 2001, pp. 74-75).

> "Leonhard Euler, Director of the Mathematics Class at the Academy of Petersburg, and prior to that of Berlin, of the Royal Society of London, the Academies of Turin, Lisbon and Basel, Foreign member to all scientific academies, was born in Basel on 15 april 1707 to Paul Euler and Marguerite Brucker…. One will not be able to deny the very revolutionary aspect of Euler's transformation of algebraic analysis into a shinning, universal method applicable in all its aspects and easy to use.
> After having provided the steps to the roots of algebraic equations, and their general solvability, numerous new theories and some ingenious and insightful views, Mr. Euler's research was directed to calculation of transcendental quantities". (1)

Em 24 de outubro de 1983 comemorou-se, com um grande simpósio, o ducentésimo septuagésimo quinto aniversário do nascimento de Euler e, concomitantemente, os duzentos anos de sua morte.

Esta grande celebração foi ralizada na "Moscow House of Scientists" cuja palavra de abertura foi dada pelo presidente da "Academy of Sciences of the URSS", o acadêmico A.P. Aleksandrov.

Nesse discurso, o orador menciona as cartas de Euler a Nicolas (II) Bernoulli e a Goldbach, onde ele argumenta que, de fato, o contraexemplo de Leibniz era falso. O livro documento desse encontro chamou-se "Euler and Modern Science", cujos editores foram Bogolywbov, Mikhailov e Yushkevich.

Para essa dissertação, chama a atenção o artigo do Professor I. G. Bashmakova (pp. 137-152) em que ele expõe as contribuições de Euler para o T.F.A. Nesse texto, Bashmakova faz um pequeno resumo da história recente (à época) do T.F.A., enunciando-o, tal se encontrava no volume 2 da obra de Euler entitulada "Complete introduction to algebra to 'indeterminate analysis' ".

Enfim, Euler, segundo Bashmakova, começa enunciando o T.F.A. pela equação $f_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}\, x + a_n = 0$, onde n é um grau positivo qualquer, e $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais. A seguir é dito que tal equação tem, pelo menos, uma raiz real ou complexa.

---

(1) "Leonhard Euler, diretor da turma de matemática na Academia de São Petersburgo, e antes disso de Berlim, da Sociedade Real de Londres, as Academias de Turim, Lisboa e Basel, membro estrangeiro de todas as academias científicas, nasceu em Basileia, em 15 de abril de 1707 de Paul Euler e de Marguerite Brucker .... Uma pessoa não será capaz de negar o aspecto revolucionário de transformação de Euler da análise algébrica em um brilhante e universal, o método universal aplicável

em todos os seus aspectos e fácil de usar.
Depois de ter fornecido os passos para as raízes das equações algébricas, e sua solvabilidade geral, várias novas teorias e algumas vistas comoengenhosas e perspicazês, a investigação do Sr. Euler foi direcionada para o cálculo das quantidades transcendentais ".

O articulista observa que anos mais tarde uma nova formulação do T.F.A. começa a ser mais frequente: qualquer polinômio da forma $f_n(x)$ com coeficientes reais pode ser decomposto como produto de fatores de primeiro ou segundo graus, também com coeficientes reais.

Bashmakova ainda comenta (pp. 138-139):

> “This theorem was first formulated in the 17th century by A. Girard (1629) and then in more rigorous form by R. Descartes (1637), but the first attempts at proving it date from the 18th century. … Quadratic equations, it is now known, had been solved as early as four thousand years ago in ancient Babylon, and equations of degree three and four in Italy in the 16th century. The solution by radicals of equations of degree five, the next case in line, defied all attempts made during the 17th and 18th centuries”. (Bashmakova, in Bogolywbov et al, 1983, pp. 138-139) (1)

O artigo vai comentar, também, equações nas formas, por exemplo, $y^2 = P_3(x)$, $y^2 = P_4(x)$ ou $y^3 = P_3(x)$, onde $P_n(x)$ indica um polinômio de grau n com coeficientes racionais.

Euler também procurou conectar as formas acima com as equações particulares. $X^2 - ay^2 = 1$ e $x^2 - ay^2 = b$, onde a e b inteiros, sendo que a não é quadrado perfeito, e com o último teorema de Fermat: $x^n + y^n = z^n$, considerando que $n > 2$ a equação não tem soluções inteiras.

Com todas essas conexões e dados, Euler apresentou sua prova do T.F.A. para a Academia de Ciências de Berlim em 1749 d.C. A publicação se deu em 1751 numa dissertação chamada “Investigations of imaginary roots of equations”.

Euler procurou por uma prova estritamente algébrica, mais já na época do congresso já se sabia ser impossível. No entanto, parece que se desconfiava de tal fato.

Sabe-se, por exemplo, que uma função $f(x)$ é dita simétrica com relação ao eixo dos y se $f(-x) = f(x)$. E se a função for racional ela terá a forma P(x)/Q(x), onde P(x) e

(1) "Esse teorema foi primeiro formulada no século 17 por A. Girard (1629) e, em seguida, de forma mais rigorosa por R. Descartes (1637), mas as primeiras tentativas de provar datam do século 18. ... Equações quadráticas, agora conhecidas, tinham sido resolvidas bem no raiar de há quatro mil anos

na antiga Babilônia, e equações de grau três e quatro na Itália, no século 16. A solução por radicais de equações de grau cinco, o próximo caso na pesquisa, desafiou todas as tentativas feitas durante os séculos 17 e 18 ". (Bashmakova, em Bogolywbov et al, 1983, pp. 138-139)

Q(x) são polinômios em x. Acontece que uma função pode ser racional e simétrica. Ora, Euler usou resultados das funções racionais simétricos, sem prová-los para concluir que o T.F.A. pode ser extendido para os complexos.

Os raciocínios de Euler foram completados mais tarde.

Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783)

D'Alembert foi um pensador francês com estudos realizados nas áreas de matemática, física e filosofia. Uns dos importantes trabalho de d'Alembert foram as pesquisas sobre a equação da onda.

A participação de d'Alembert na história do T.F.A. deve-se ao fato de que foi sua a primeira "prova" desse teorema em 1746, um pouco antes do que Euler apresentou na Academia de Ciências de Berlim.

Na "prova" de d'Alembert foram usados trabalhos de Isaac Newton publicados em 1671 em que ele usava séries infinitas para construir funções em que procurava extrair raízes. Por exemplo, na notação atual, temos:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} \int_0^x = \quad (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots)\, dt = \; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots \log(1+x)$$

resultado publicado pelo matemático N. Mercator (1668) e já estudado por matemáticos indianos, e Newton (1671) colocava $y = x - x^2/2 + x^3/3 - \ldots$ e a resolvia para X. Em seguida colocava $x = a + by + cy^2 + \ldots$ e substituía na expressão y(x) acima, encontrando $x = y + (1/2)y^2 + (1/6)y^3 + (1/24)y^4 + (1/120)y^5 + \ldots$ de onde conclui-se que $a = (1/1!)$, $b = (1/2!)$, $c = (1/3!)$, ...

Vale dizer que os detalhes mais técnicos dessas computações podem ser examinados em Stillivell (2004, p. 157):

John Stillivell traz uma obsevação, da conclusão de Newton:

> "Now after the roots have been extracted to a suitable period, they may sometimes be extended at pleasure by observing the analogy of the series". (Stillivell, 2004, p. 157) (1)

Mas, na verdade, foi De Moivre (1698) quem deu a fórmula de inversão de séries

(1) "Agora, depois que as raízes foram extraídas de um período adequado, podem às vezes ser extendidas à vontade, observando-se a analogia com as series". (Stillivell, 2004, p. 157)

que justifica tais conclusões. Contudo, a teoria sobre inversões de séries foi rigorosamente dada por Puiseaux (1850).

A chave da contribuição de d'Alembert para o T.F.A. foi uma proposição hoje conhecida como Lema de d'Alembert:

Se p(z) é uma função polinomial não-constante e $p(z_0) \neq 0$, então qualquer vizinhança de z_0 contém um ponto z_1 tal que $|p(z_1)|<|p(z_0)|$.

Ora, o lema proposto por d'Alembert (1746), nos termos por ele mesmo colocados, tinha argumentos desnecessariamente complicados, já que dependia da teoria de Puiseaux (1850). Deve-se dizer, no entanto, que Argand (1806), um doa "descobridores" da representação geométrica dos números complexos, ofereceu uma "prova geométrica" do lema de d"Alembert.

Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813)

Ao contrário do que poderia parecer, Lagrange não nasceu na França, mas em Turin, Sardinia-Piedmont (Itália). Seu nome original é Giuseppe Luigi Lagrangia.

Lagrangedestacou-se em áreas como análise matemática, teoria dos números e mecanicas analítica e celestial. Um dos seus grandes trabalhos foi "Analytical Mechanics", publicado em 1788.

Laubenbacher e Pengelley (2008, pp. 233) expõem com clareza a Teoria de Equações de Lagrange e suas ligações com o T.F.A.

Já aos 18 anos, Lagrange impressionava Euler e d'Alembert com seus trabalhos no cálculo das variações e suas aplicações na mecãnica. D'Alembert rapidamente adotou Lagrange como seu protegido e providenciou para que ele ocupasse, em 1766, a cadeira de Euler na Academia de Ciências em Berlim quando Euler foi para a Academia de Ciências de St. Petersburg.

Em 1781, Lagrange envia uma carta a d"Alembert mostrando sua preocupação quanto ao futuro das pesquisas em matemáticas nos dez anos seguintes, já que a física e a química vinham ganhando em destaque. O seu receio era de tal ordem que Lagrange chega a escrever que a matemática corria o sério risco de ter a mesma importância que o ensino da língua árabe passou a ter nas universidades de então.

Acontece que após a morte de d'Alembert e Euler, Lagrange se tornou um dos mais influentes cientistas matemáticos da Europa.

Em 1766 ele já era professor na Academia de Berlim e em 1787 foi para a Academia de Ciências em Paris, onde permaneceu até sua morte.

Já na Academia de Berlim ele realizou um grande trabalho em problemas algébricos.

Em teoria das equações o trabalho de Lagrange se dividiu em duas categorias:

a) solução algébrica de equações polinomiais
b) técnicas para soluções numéricas de equações particulares

Lagrange pesquisou, principalmente, métodos para resolver equações de terceiro e quarto graus com o objetivo de generalização de tais princípios para equações de graus mais altos.

Esse trabalho está registrado como "Rèflexions sur la Rèsolution Algèbrique des Equations", publicado na "Nouveaux Mèmoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres" de Berlim em 1770/71, da página 206 até à 356.

De forma geral, ele fornece as soluções de equações do tipo $x^3 + mx^2 + nx + p=0$. Analisa a substituição $x = y + z$ na equação acima e conclui por $z = \frac{-n}{3y}$.

Também trabalha as possibilidades da fatoração de equação de graus mais altos, embora com certo pessimismo.

Laubenbacher e Pengelley (2008) registram as palavras do próprio Lagrange:

> "The problem of the solution of equations of degree higher than four is one of those that one has not yet been able to overcome, although nobody has proven its impossibility either. Up to now I only know of two methods which could have any hope for success. Those are the one by Mr Tschirnaus, published in the 'Actes de Leibsic' in 1683, and the other being the one proposed almost simultaneously by MMrs. Euler and Bezout, the former in the 'Nouveaux Commentaires de Petersbourg', vol. IX, and the latter in the Mèmoires de l'Acadèmie des Sciences de Paris' for the year 1765. …
> The art of solving equations consists of discovering functions of the roots, which have the properties which we stated. But is it

> always possible to find such functions for equations of any degree, that is, for the desired number of roots? That is certainly very difficult to judge in general". (Laubenbacher e Pengelley, 2008, p. 245-246) (1)

De fato, é uma nota pessimista, mas a pesquisa d Lagrange abriu um imenso caminho para o T.F.A..

Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827)

Laplace foi um matemático francês, também com importantíssimas contribuições na antronomia e na física. Na verdade ele ficou muito conhecido por seus trabalhos sobre a estabilidade do sistema solar. Por exemplo, em 1773 ele apresenta, na Academia Francesa de Ciências, seu trabalho sobre a estabilidade dos movimentos planetários e em 1784, o terceiro volume de sua obra "Mèchanique céleste" foi impressa (determina a atração de uma partícula por um corpo esferoidal).

Em 1820, ele publica sua "Théorie Analytique des Probabilités". Nos capítulos 6, 7 e 10 ele discute a "distribuição normal" e no capítulo 8 ele discute o que hoje se conhece como Teorema de Bayes.

Kolmogorov et al faz um pequeno histórico do T.F.A. nos séculos 18 e 19:

> "The first proof of the fundamental theorem was given in 1746 by d'Alembert. While 18th- century scientists saw no flaws in the proof, they felt that it smacked of analysis. … We now know that, while it is possible to reduce the use of continuity to a minimum, we cannot produce a proof that eschews the use of such properties altogether. The first 'maximally algebraic' proof of the fundamental theorem is due to Leonhard Euler". (Kolmogorov et al, 2001, pp 41-55) (2)

---

(1) O problema da solução de equações de grau superior a quatro é um daqueles que não se tem sido capaz de superar, embora ninguém tenha comprovado sua impossibilidade também. Até agora eu só sei de dois métodos que podem ter alguma esperança de sucesso. Essas são as do senhor Tschirnaus, publicada no "Actes de Leibsic" em 1683, e sendo a outra proposta quase simultaneamente pelos senhores. Euler e Bezout, os primeiros no "Nouveaux Commentaires de Petersbourg".vol IX, e o último no Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, no ano 1765. ... A arte de resolver equações consiste em descobrir as funções das raízes, que têm as propriedades que dissemos. Mas é sempre possível encontrar tais funções para equações de qualquer grau, ou seja, para o número desejado de raízes? Isso é certamente muito difícil julgar em geral ". (Laubenbacher Pengelley e, 2008, p. 245-246)

(2) "A primeira prova do teorema fundamental foi dado em 1746 por d'Alembert. Enquanto os cientistas do século 18 não viram falhas na prova, eles sentiram que cheirava a análise. ... Agora sabemos que, embora seja possível reduzir a utilização de continuidade a um mínimo, nós não podemos produzir uma prova de que evita o uso de tais propriedades completamente. A primeira

«máximo algébrica" prova do teorema fundamental é devido a Leonhard Euler.(Kolmogorov et al, 2001, pp 41-55)

Em 1751 Euler publica suas investigações sobre equações de raízes imaginárias que contém uma prova do T.F.A. . Logo adiante, Lagrange utiliza os métodos de investigação de equações de Euler, e os desenvolve, em seus trabalhos.

As modernas "provas algébricas" do teorema fundamental podem ser divididas em três partes:

a) O estudo das equações algébricas de grau impar com coeficientes reais. Essas equações têm sempre uma raiz real.
b) A possibilidade de se escrever $f(x)$ como produto de fatores lineares.
c) Quando se encontra a raiz da equação $f(x) = 0$ de grau $m = 2^k r$ (r ímpar), estuda-se a possibilidade de ser achada a raiz da equação $f(x) = 0$ de grau $2^{k-1} r_1$ (r_1 ímpar).

As três partes acimas encontram-se nas provas de Euler. Ele assume que cada polinômio com coeficientes reais pode ser escrito como um produto $f_m(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$, em que, para Euler, $a_1, a_2, \dots, a_m$, eram meros símbolos ou quantidades imaginárias.

Lagrange ao publicar "Sur la forme des racines imaginaires des équations" ("Nouveaux Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles – Lettres de Berlin – 1774) mostra que os a_i são números reais ou complexos.

Ainda segundo Kolmogorov et al. :

> "In his mathematical lectures at the Ecole Normale in 1795 ('Leçons de Mathématiques données à l'Ecole Normale en 1795') Laplace, relying on the existence of the decomposition of $f_m(x)$, described a radical simplification of Euler's reduction procedure". (Kolmogorov et al., 2001, p. 42) (1)

A prova de lagrange referia-se a determinadas funções, enquanto que Euler e Lapace confiavam na existência das raízes para todos os casos. Assim, as segundas partes de suas provas não tinham o rigor necessário:

(1) "Em suas conferencias de matemática aulas na École Normale, em 1795 (" Leçons de Mathématiques données à l'Ecole Normale en 1795) Laplace, contam com a existência da

decomposição de fm (x), descreveu uma simplificação radical do processo de redução de Euler ". (Kolmogorov et al., 2001, p. 42)

> “We see that neither Euler nor Lagrange mode an attempt to rigorize the second part of the proof. They regarded it as obvious”. (Kolmogorov et al., 2001, p. 43). (1)

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Os interesses científicos de Gauss foram muito vastos. Ele deu contribuições importantes em teoria dos números, álgebra, análise matemática, teoria de movimentos planetários, geodésia e eletrodinâmica. É importante também assinalar que Gauss realizou profundas contribuições para as futuras investigações das funções abelianas e elípticas, tanto quanto das integrações de funções complexas.

Em 1807 ele assumiu a direção do observatório de Gottingen (Alemanha), trabalhando neste posto até a sua morte. Foi nomeado membro correspondente em 1801 e membro estrangeiro em 1824 da Academia de Ciências de Petersburg (União Soviética). Enfim, as suas contribuições para a matemática são brilhantes e, por isso, ele foi chamado o “Princípe dos Matemáticos”.

Em 1998, George M. Rassias editou um livro em homenagem à Gauss. Foram publicados 22 artigos ressaltando sua obra científica. O próprio Rassias, no começo do livro fez um sumário da obra de Gauss. Destaque-se o seguinte trecho:

> “In 1798 he transferred to the University of Helmstadt and there obtained his Ph.D. in 1799 under the supervision of Johann Friedrich Pfaff (1765-1825). In his dissertation he gave the first rigorous proof of the now known as the fundamental theorem of Algebra which states that every algebraic equation with real coefficients has at least one root and hence has n roots.
> D’Alembert had tried to prove it in 1746. Two more proofs were given by Gauss and a fourth one in which he returned to his first proof”. (Rassias, 1998, p.4) (2)

(1) "Nós vemos que nem o modo de Euler ou de Lagrange atentavam para o rigor de segunda parte da prova. Eles a consideraram como "óbvia". (Kolmogorov et al., 2001, p. 43).

(2) "Em 1798 ele se transferiu para a Universidade de Helmstadt e lá obteve seu Ph.D. em 1799, sob a supervisão de Johann Friedrich Pfaff (1765-1825). Em sua dissertação, deu a primeira prova rigorosa do que hoje se conhece como o teorema fundamental da álgebra que afirma que toda equação algébrica com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz e, portanto, tem n raízes.

D'Alembert havia tentado provar isso em 1746. Mais duas provas foram dadas por Gauss e uma quarta em que ele voltou para sua primeira prova ". (Rassias, 1998, p.4)

A primeira prova do T.F.A. dada por Gauss foi publicada em Helmstadt em 1799 sob o título "Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secondi gradus resolvi posse" e que possa encontrada em Werke, vol. 3 (1876), pp. 3-30.

A segunda prova ("Demonstratio nova altera theorematis...") apareceu em 1816 em "Commentationes Societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, vol. 3, (Class. Math.) pp. 107-134 e pp. 135-142.

A terceira prova ("Theorematis de resolubilitate... demonstratio tertia") está em Werke, vol. 3, (1876), pp. 33-56, 59-64.

A quarta prova foi publicada em 1850:

> " 'Beitrage zur Theorie der algebraichen Gleichunben' (erste Abtheilung), Abbandlungen der Konilgiden Gesellsbsft der Wissenscbaften zu Gottingen, vol. 4, (math klasse) pp. 3-15; Werke, vol. 3 (1876), pp. 73-85". (1)

Smith (1984, pp. 292-293) traz o testemunho de Gauss quanto aos objetivos da primeira. Na verdade, Gauss teceu os seguintes comentários na introdução da quarta prova:

> "The first proof… had a double purpose, first to show that all the proofs previously attempted of this most important theorem of the theory of algebraic equations are unsatisfactory and illusory, and secondly to give a newly constructed rigorous proof". (Smith 1984, p. 294) (2)

Ainda segundo Smith (1984, p. 293), as três primeiras provas (mas não a quarta) só trabalha com polinômios de coeficientes reais, mas é que Gauss tenta mostrar que o caso em que os coeficientes são complexos pode ser reduzido parao caso de coeficientes reais.

Ainda, a primeira prova é parte baseada em considerações geométricas, a segunda é inteiramente algébrica, mas é considerada a mais ingenua de todas as quatro. Na verdade, a terceira prova assume o que é para ser provado, ou seja, que um função

(1) "'Beitrage zur Theorie der algebraichen Gleichunben (erste Abtheilung), der Abbandlungen Konilgiden Gesellsbsft der Wissenscbaften zu Göttingen, vol. 4, klasse math () pp. 3-15; Werke, vol. 3 (1876), pp. 73-85.

(2) "A primeira prova ... tinha uma dupla finalidade, primeiro para mostrar que todas as provas anteriores deste teorema de maior importância da teoria das equações algébricas são insatisfatórias e ilusórias, e segundo para dar uma nova prova rigorosa". (Smith 1984, p. 294)

pode ser reduzida em fatores lineares. Ou seja, Gauss assume de antemão a existência das raízes: ele se detém na "forma" e não na existência das raízes.

Jean Robert Argand (1768-1822)

Argand foi um matemático amador e ganhava dinheiro como contador e guarda-livros em Paris. Era de nacionalidade suíça.

Na base de dados da "Royal Danish Academy of Sciences" (www.royalacademy.dk) verifica-se que foi Caspar Wessel (1787) quem primeiro deu uma interpretação geométrica para os números complexos, mas tal fato não obteve muita divulgação entre os matemáticos. Foi o matemático dinamarquês Sophus Christian Juel (1855-1935) quem redescobriu o trabalho de Wessel, republicado em 1895 pelo matemático norueguês Marius Sophus Lie (1842-1899).

Os caminhos para a proposição de uma interpretação geométrica para os números complexos são intricados. O "site" supracitado tenta esclarecer essa história. Mas, ao final, por questão de tradição, Argand tornou-se o "dono" da idéia.

Se, então, por um lado, Jean Robert tem sido conhecido pelos chamados diagramas de Argand, por outro lado, esse matemático amador teve, de fato, importante participação na história do T.F.A..

Rana afirma:

> "Argand in 1814 published a proof of the fundamental theorem of algebra, assuming the minimum of a continuous function". (Rana 1998, p. 320) (1)

Mas, em 1806, Argand já tinha publicado sua prova do T.F.A., só que agora, em 1814, seu texto contém avanços técnicos:

> "Argand held forth twice on this subject in the 'Annales de Gergonne', re-establishing his priority and reproducing with certain improvements a brief and elegant proof of the fundamental theorem of algebra proposed by him in an 1806 paper". (Kolmogorov & Yushkevich, 1996, p. 122). (2)

(1) "Argand em 1814 publicou uma demonstração do teorema fundamental da álgebra, supondo que o mínimo de uma função contínua". (Rana 1998, p. 320)

(2) "Argand discursa duas vezes sobre este assunto no" Annales de Gergonne ", re-estabelecendo a sua prioridade e reproduzindo com algumas melhorias uma curta e elegante prova do teorema fundamental da álgebra que propôs em 1806 num artigo". (Kolmogorov & Yushkevich, 1996, p. 122).

O mérito de Argand está no fato de que foi o primeiro a estabelecer o T.F.A. para o caso em que os coeficientes eram números complexos.

Hellmuth Kneser (1898-1973)

Kneser foi um brilhante e eclético matemático. Seu doutorado foi em “Mecânica Quantica”, orientado por David Hilbert (1862-1943).

Além da teoria quântica, Kneser trabalhou muito com topologia, incluindo trabalhos com teorias de grupo, geometria não-Euclidiana e geometria diferencial. Também trabalha com a teoria dos jogos e aplicações da matemática à economia.

Em 1939, Hellmuth Kneser publica um artigo intitulado “Laplace, Gauss und der Fundamentalsatz der Algebra” no “Deutche Mathematik 4, 318-322”. Nesse artigo ele lida com polinômios reais de grau impar, com fatores lineares de polinômios não constantes, com funções simétricas e com a fatoração de polinômios complexos do segundo grau.

Herman Geuvers, Freek Wiedlijk e Jan Zwanenburg (in Callaghan et. Al., 2002, pp. 96-111) expõem, com muitos detalhes técnicos, as idéias de Hellmuth Kneser e de Manfred Kneser (seu filho) sobre o T.F.A..

Na verdade, a prova de Argand era de “existência”, ou seja Argand provava que as raízes dos polinômios, de fato, existiam. Os Kneser trabalharam no sentido “construtivo”, ou seja, como construir tais raízes, em outros termos, os caminhos por onde elas surgem.

Assim, Geauvers et al., supracitados, afirmam:

> “The proof that we’re presenting here was invented by Manfred Kneser (inspired by a proof of his father, Hellmuth Kneser), and is a constructive version of a simple proof that derives a contradiction from the assumption that the (non. Constant) polynomial f is minimal at z_0 with $|f\ (z_0)| \neq 0$”. (Geauvers et al., 2002 pp. 96-97) (1)

(1) "A prova que estamos apresentando aqui foi inventada por Manfred Kneser (inspirada por uma prova de seu pai, Hellmuth Kneser), e é uma versão construtiva de uma prova simples que deriva de uma contradição a partir do pressuposto de que o (não constante) polinômio f é mínimo com z0 com |f (z0)| ≠ 0". (Geauvers et al. 2002, pp. 96-97)

CAPÍTULO IV
O T.F.A. E AS VARIÁVEIS COMPLEXAS

Neste Capítulo ver-se-á que a importância de Cauchy para o T.F.A reside no seu interresse por funções analíticas. As funções analíticas são aquelas representáveis por séries de potências. Mas, sob certas condições as funções complexas são analíticas, daí as contribuições de Cauchy às variáveis complexas. Por outro lado, as funções analíticas são uma extensão das funções algébricas. As funções analíticas são infinitamente diferenciáveis. Os polinômios são exemplos de funções analíticas.

Á seguir apresenta-se Liouville. Ele pesquisa análise complexa onde desenvolve noção de função complexa inteira e limitada, concluindo que ela é constante. Este resultado permite demonstrar o T.F.A de forma simples. Vale dizer que as funções inteiras são infinitamente diferenciáveis e definidas no conjunto dos números complexos. Os polinômios são funções inteiras, daí a importância de Liouville para o T.F.A.

Finalmente, Rouché, trabalhando no campo dos complexos, também faz pesquisas com funções inteiras. Ele toma duas destas funções percorrendo um certo caminho campo dos complexos e analisa a igualdade do número de zeros que elas possuem, por exemplo. Os professores Fine e Rosenberger mostram que o Teorema de Rouché pode ser aplicado para obter uma certa prova do Teorema Fundamental de Álgebra.

Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857)

Cauchy foi um matemático francês que logo jovem mostrou habilidades fora do comum com a matemática. Laplace e Lagrange eram amigos da família de Cauchy e logo recomendaram aos pais que Cauchy tivesse uma educação especial em matemática. Para tanto, foi recomendado que Augustin-Louis se preparasse na “École Centrale du Planthéon” em estudos de línguas clássicas, pois um estudo sério de matemática teria de ser precedido por essa preparação.

Em 1815 ele se interessa pelo estudo das funções simétricas, publicando, a seguir, um Artigo no jornal da Escola Politécnica, tendo também publicado um trabalho sobre integrais definidas, o qual se tornou a base a teoria das funções complexas.

Em 1815 foi nomeado professor de análise matemática na Escola politécnica e, em 1816, foi premiado pela Academia de Ciências da França, por seu trabalho sobre ondas.

Em 1817, lecionando no "Collège de France", realiza importantes pesquisas sobre convergência de séries infinitas e prossegue seus estudos sobre as integrais.

Quanto ao T.F.A., há o testemunho importante de Jahnke:

> "The notion of analytic function underlying Euler's 'introduction' dominated 18th-century analysis until a new understanding began to gain acceptance with the work of Cauchy". (Jahnke 2003, p. 123) (1)

Esclarecendo, as funções analíticas são as funções representáveis por séries de potências. O conceito de convergência de sucessões e séries só foi rigorosamente estabelecido em 1821 por Cauchy no seu "Cours d'Analyse Algébrique de École Polytechinique", onde aparece de forma clara a definição de função dos nossos dias, como correspondência unívoca entre pontos de dois conjuntos sem referencia a expressões que a definam, (segundo as notas de aula do Professor Catedrático Luis T. Magalhães do Instituto Superior Técnico (IST) de Lisboa (www.math.ist.utl.pt/~lmagl/)).

Por exemplo, ao propor uma solução para uma determinada equação diferencial parcial de segunda ordem, d'Alembert, em 1747, registra $y = g(ct + x) + f(ct - x)$, onde g e f são funções arbitrárias. Essa equação descreve o comportamento da vibração de uma corda esticada entre dois pontos. Sob certas condições de contorno iniciais a função $y(x, t)$ torna-se $y = g(ct + x) - g(ct - x)$, onde g é uma função analítica como $a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots$

De fato, todo esse trabalho de Cauchy com funções algébricas, complexas e analíticas acabaram por implementar o conhecimento sobre o T.F.A. .

Umberto Bottazzini (in Jalmke, 2003, pp. 213-214) declara:

(1) A noção de função analítica subjacente a introdução de Euler dominar a análise do século 18 até que um novo entendimento começou a ganhar aceitação com o trabalho de Cauchy ". (Jahnke 2003, p. 123):

> “In particular, complex numbers were involved in their long ‘querelle’ about the logarithms of negative numbers and in the proof of the fundamental theorem of algebra as well…
> In spite of the importance of d’Alembert’s and Euler’s results…, complex analysis emerged as a proper domain of modern mathematics only during the 19th century in particular as a result of the work of Augustin Louis Cauchy, Bernhard Riemann and Karl Weierstrass”. (Bottazzini, U., in Jalmke, 2003, pp. 213-214)(1)

Josepj Liouville (1809-1882)

Liouville foi um matemático francês. Por volta de 1825, estudou na “École Polytechnique” com o professor André Marie Ampère (1775-1836) (que fez importantes contribuições para as teorias da Eletricidade e do Magnetismo) e com Professor Dominique François Jean Arago (1786-1853) (que fez importantes contribuições para a teoria corpuscular da luz).

Com o tempo os interesses tornaram-se amplos na física-matemática, na astronomia e na matemática pura. Ele definiu operadores diferenciais de ordem arbitrária que poderiam ser um número inteiro, racional, irracional ou um número complexo.

Em 1832 ele invstiga os critérios que levam as integrais de funções algébricas serem algébricas.

Por volta de 1844 começa a fazer pesquisas com os números transcendentes (são números que não são raízes de uma equação polinomial com coeficientes racionais como o π). Nessas pesquisas ele objetiva provar que o número neperiano é transcendente, mas não obteve sucesso. Porém, em 1844 ele prova a existência dos números transcedentes construindo uma classe infinta de frações continuadamente expandidas. Por exemplo, o número 0,1100010... é um número Liouvilliano. Note que os “uns” estão na posição n! e os “zeros” nas outras posições.

Fine e Rosenberger mostram a importância de Liouville para uma prova do T.F.A. para polinômios complexos:

(1) "Em particular, os números complexos foram envolvidos na sua longa 'querela' sobre os logaritmos de números negativos e na prova do teorema fundamental da álgebra, também ... Apesar da importância dos resultados de d'Alembert e Euler ..., análise complexa emergiu como um domínio próprio da matemática moderna somente durante o século 19 em particular, como resultado do trabalho de Augustin Louis Cauchy, Bernhard Riemann e karl Weierstrass” Karl Bernhard .(Bottazzini, U., em Jalmke, 2003, pp. 213-214)

> "Liouville's Theorem and the Fundamental Theorem of Algebra… Based on Cauchy's estimate ive can now prove Liouville's theorem from which we easily obtain our second proof of the Fundamental Theorem of Algebra.
> Theorem 5.4.1
> (Liouville's Theorem) Suppose f (z) is intire and $|f$ (z)$|$ is bounded for all values of z $\in \subset$. Then f (z) is a constant…
> Suppose p (z) is a complex polynomial. ... Combining these facts with Liouville's theorem gives us a proof of the Fundamental Theorem of Algebra Theorem 5.4.2
> Fundamental Theorem of Algebra) Let p (z) be a complex polynomial of degree $\geq$ 1. Then p(z) has at least one complex root". (Fine e Rosenberger, 1997, p. 70) (1)

De fato, os argumentos de Liouville facilitam sobremaneira a prova do T.F.A. no campo dos complexos:

> "The fundamental theorem of algebra guarantees that every complex polynomial factors into linear terms, unique except for their order. Many readers know theorem, but if we recount some complex variable theory from Chpter 1, an argument of Liouville proves it fairly easily". (Allen & Mills, 2004, p. 628). (2)

Eugene Rouchè (1832-1910)

Rouchè nasceu na França e, à princípio, não parece ser um matemático muito conhecido.

No começo de sua carreira ele publicou muitos artigos e livros sobre geometria e cálculo. Por exemplo:

— Em 1862, ele publica no "Journal of the École Polytechnique" um artigo entitulado "Mémoire sur la serie de Lagrange".

---

(1) "Teorema de Liouville e o Teorema Fundamental da Álgebra ... Baseado na estimativa de Cauchy estimativa pode agora provar o teorema de Liouville do qual facilmente obtemos nossa segunda prova do teorema fundamental da álgebra. Teorema 5.4.1 (Teorema de Liouville) Suponha f (z) é inteiro e | f (z) | é limitada para todos os valores de z є c. Então f (z) é uma constante ... Suponha que p (z) é um polinômio complexo. ... Combinando estes fatos com o teorema de Liouville da-nos uma prova do Teorema Fundamental da Álgebra Teorema 5.4.2 Teorema Fundamental da Álgebra) Seja P (z) é um polinômio de grau complexo ≥ 1. Então, p (z) tem pelo menos uma raiz complexa ". (Fine e Rosenberger, 1997, p. 70)

(2) "O teorema fundamental da álgebra garante a colocação de todos os fatores polinomiais em termos lineares, não importando a ordem. Muitos leitores conhecem o teorema, mas se voltarmos a uma certa parte da teoria de variáveis complexas do capitulo 1, um argumento de Liouville prova-o facilmente ".(Allen & Mills, 2004, p. 628).

— Em 1889, ele publica o livro “Éléments de Statique Graphique”.

— Em 1900, publica o livro “Analyse infinitésimale à l’usage des ingènieurs”

No entanto, esse matemático é, hoje em dia, mais conhecido pelo “Teorema de Rouché”, publicado no “Journal of École Polytechnique” número 39 de 1862. Segundo Hauser Jr., esse teorema é útil para se resolver problemas de variáveis complexas do tipo:

> “Mostre que todos os zeros do polinômio p (z) = $z^5 - 2z + 36, 1$ estão entre os círculos |z| = 2 e |z| = 2,1”. (Hauser Jr., 1972, p. 221),

Ou seja, bem a grosso modo, o que o Teorema de Rouché prevê é a “circunvizinhança” das raízes de uma equação via teoria das variáveis complexas.

Agora, apenas mais alguns testemunhos:

> “Rouche’s Theorem also provides a direct and simple proof of the following result. Theorem 4 The Fundamental Theorem of Algebra…”. (Fisher, 1999, p. 179).(1)

> “We shall give a couple of application of Rouche’s theorem. The first is to give an alternate proof of Theorem 8.2.6, the fundamental theorem of álgebra...”. (Hille, 1959, p. 254).(2)

---

(1) "Teorema de Rouche também fornece uma prova simples e direta do resultado que se segue.Teorema 4 O Teorema Fundamental da Álgebra ... ". (Fisher, 1999, p. 179).
(2) "Vamos dar um par de aplicação do teorema de Rouche. O primeiro é dar uma prova alternativa do Teorema 8.2.6, o teorema fundamental da álgebra ...". (Hille, 1959, p. 254).

CAPÍTULO V
O T.F.A. E A ÁLGEBRA "MODERNA"

Lidando com Álgebra "Moderna" e o T.F.A., um grande nome que logo aparece é Galois. Ele criou a Teoria dos Grupos conectando-a com condições necessárias e suficientes para que um polinômio pudesse ser resolvido por suas raízes. Galois também ajudou a demonstrar que equações de grau superior a 4 não podem ser resolvidas por radicais e combinações de coeficientes. Por seu turno, Sylow investiga os grupos de permutação, os quais provaram ser muito úteis para as soluções de equações algébricas. Por fim, Artin, Emil Artin contribui, sobremaneira, para a teoria dos grupos. A teoria dos grupos, em álgebra abstrata, estuda as estruturas algébricas conhecidas como grupos, e uma das raízes históricas da teoria dos grupos é a teoria das equações algébricas, implicando no T.F.A.

Evaristo Galois (1811 – 1832)

Galois foi um matemático francês. Na sua adolescência ele era tido como um aluno inteligente, que fazia bons progressos (Chegou a ganhar vários prêmios no "Lycée of Louis-le-Grand") mas era um tanto desorganizado e muito fechado, segundo alguns professores. O fato é que cada vez mais Galois se preocupava com seus interesses na matemática do que com os deveres da escola.

Galois lia muito os trabalhos de Legendre e Lagrange. Em 1829, publica seu primeiro artigo em frações de expansão continuada (dos números Liouvillianos) na Academia de Ciências de Paris, tendo Cauchy como examinador de seu trabalho.

Em 1830, Galois, seguindo os conselhos de Cauchy, apresentou um novo artigo entitulado "on the condition that na equation be soluble by radicals" para a Academia de Ciências de Paris, cujo secretário (que recebia os trabalhos) era Jean Bapetiste Joseph Fourier (1768-1830). Fourier morre dois meses depois do trabalho de Galois ter chegado as suas mãos para encaminhamento de publicação. O texto de Galois para na burocracia e não chegou a ser publicado na época.

Nesse trabalho perdido, Galois já tinha notado que seu texto coincidia com algumas pesquisas de Niels Henrik Abel (1802-1829), sobre integrais abelianas:

por exemplo, a integral de $\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ (onde R é um polinômio de grau maior do que 4) é abeliana, também chamada integral hiperelíptica.

Por isso mesmo Galois interessa-se pelos trabalhos de Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), que fez importantes contribuições para a teoria das funções elípticas. Tais funções são analíticas de C em C com período duplo. Isto quer dizer que para dois valores do número complexo w, as funções f (z) e f (w + z) são as mesmas. E as funções abelianas ou hiperelípticas são uma generalização de uma função elíptica.

Galois sempre esteve muito ligado a disputas políticas contra o Rei Louis-Phillipe, sendo preso algumas vezes.

Depois de publicar seus últimos textos em vida na “Gazette des Écoles” (1831), tenta organizar uma classe de matemática em álgebra superior, não obtendo muito sucesso.

Em 1832 ele se apaixona por Stephanie-Felice du Motel. Três meses após conhecer Stephanie ele morre num duelo. Conta-se que na noite anterior ao duelo ele esteve preocupado em terminar uma certa demonstração em teoria dos grupos.

O trabalho de Galois é hoje conhecido como Teoria de Galois. Essa teoria é o estudo de certos grupos matemáticos que podem ser associados com equações polinomiais, Fine & Rosenberger confirmam:

> “In the last chapter we gave an algebraic proof of the Fundamental Theorem of Álgebra... In this chapter we give a proof suggested by the last proof but involving the more general ideas of Galois Theory is that branch of mathematics that deals with the interplay of the algebraic theory of equations and finite group theory…
> This theory was introduced by Evariste Galois about 1830 in his study of the insolvability by radicals of quintic (degree 5) polynomials”. (Fine & Rosenberger, 1997, pp. 104-105) (1)

Edwards (1984), faz importantes observações que ligam o T.F.A. à Teoria

(1) "No último capítulo, demos uma prova algébrica do Teorema Fundamental da Álgebra ... Neste capítulo, vamos dar uma prova sugerida pela última prova, mas envolvendo as idéias mais gerais da teoria de Galois que é o ramo da matemática que lida com a interação da teoria das equações algébricas e teoria dos grupos finitos ...
Esta teoria foi introduzida por Evariste Galois por volta de 1830 em seu estudo da insolubilidade por radicais de polinômios de grau 5 ". (Fine & Rosenberger, 1997, pp. 104-105)

de Galois. Primeiro, ele começa relembrando que o T.F.A. prova a existência de campos determinados para f (x) = 0 com coeficientes racionais ou, ainda, complexos. Segundo, afirma que considerando os coeficientes de f (x) = 0 complexos, então haverá, pelo menos, uma raiz complexa para equação polinomial em questão. Terceiro, lembra o esforço de Gauss para escrever f (x) = 0 como um produto de fatores lineares. Assim, o campo dos complexos é apropriado para a atuação de tais polinômios.

Nesse instante, Edwards ainda comenta

> "There are two major reasons why this theorem is not a suitable foundation for Galois theory (and therefore not a suitable 'fundamental theorem' of algebra". (Edwards, 1984, p.68) (1)

Bem, o que se quer dizer é que, primeiro, a teoria de Galois só é aplicada a equações que não tem coeficientes complexos. De fato, o primeiro objetivo da teoria de Galois foi provar que a equação geral do quinto grau $x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 = Dx + E = 0$, cujos coeficientes são variáveis, não pode ser resolvida com o uso de radicais, como a equação do segundo grau.

Segundo, o T.F.A. não é um teorema da algebra, simplesmente. De forma plena, a prova do T.F.A. envolve números complexos, os cortes de Dideking, considerações topologicas, limites e muitas outras idéias transcendentais mais do que algébricas.

Não obstante os objetivos iniciais de Galois, sua teoria avançou no sentido em que se construísse um grupo de galois tal que esse problema pudesse ser sanado. Edwards comenta:

> "In brief, the theory associates to a given equation f (x) = 0, over a given field k, a finite group called its 'Galois group', and shows that the equation can be solved by radicals if and only if its Galois group is solvable". (Edwards, 1984, p. 65) (2)

Ludwig Sylow (1832-1918)

(1) "Há duas razões principais para esse teorema não seja um fundamento adequado para a teoria de Galois (e, portanto, não um teorema fundamental adequado" da álgebra ". (Edwards, 1984, p.68)

(2) "Em resumo, a teoria associa a uma equação dada f (x) = 0, ao longo de um determinado campo k, um grupo finito chamado de seu" grupo de Galois, e mostra que a equação pode ser resolvida por radicais se e somente se seu grupo Galois é solucionável". (Edwards, 1984, p. 65)

Sylow foi um matemático norueguês. Seus primeiros interesses foram em pesquisas que envolviam funções elípticas. Interessa-se também pelos estudos em que a solução de equações algébricas se façam por radicais (em tempo, vale dizer que a palavra “radical” está sendo, nesse trabalho, usada como a raiz enésima de um número. Por isso, para os fins dessa pesquisa, “resolver uma equação polinomial por radicais” significa achar uma fórmula para suas raízes em termos dos coeficientes de maneira que a fórmula envolva somente operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes).

Por volta de 1865, Sylow provou um teorema de Cauchy onde afirmava que um grupo de determinada ordem era divisível por um número primo “p”, então ele tem um subgrupo de ordem “p”. Mais tarde ele generalizou o resultado para potências de p. Na verdade, esse último resultado mostrou ser um dos maiores resultados da álgebra e quase todo trabalho em grupo finitos usa o Teorema de Sylow.

Na verdade, Sylow inaugura um grande aprofundamento nas relações existentes entre a teoria de grupos e as resoluções de equações polinomiais de grau n. Por exemplo, antes, Galois mostrou que à qualquer equação polinomial de grau n, numa variável, pode-se associar um grupo, estudando-se a natureza do campo dos coeficientes e das soluções. É mais: verifica-se que se o grau da equação é menor do que 5, a equação do grupo de Galois terá sempre a estrutura apropriada (as soluções da equação poderão sempre ser expressas usando somente adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes).

Porém, se o grau da equação é maior ou igual a 5 talvez a estrutura descrita acima seja possível ou não. Tudo vai depender dos coeficientes dos termos de grau menores do que o de mais alto grau. Mas, no fundo, qual era a pergunta que Galois estava tentando responder?

Resposta: Quando é possível achar fórmulas algébricas para soluções de equações polinomiais?

De fato, a teoria de grupo de Galoi responde a tal questão específica e, quando muitos pensavam que os avanços das relações entre teoria de grupo com as soluções de equações polinomiais estavam no fim, surge, então, Ludwig Sylow.

Reforçando os interesses de Sylow, é preciso que se registre que ele era compatriota de Niels Henrik Abel (1802-1829), mostrando grande interesse pelas pesquisas de soluções de equações empreendidas por Abel. Mais tarde toma contato com as investigações de Galois que investigava os grupos de permutação. Na verdade a teoria de grupo de então referia-se apenas ao grupos de permutação cuja única aplicação frutífera era no campo da pesquisa de soluções de equações algébricas.

Ora, Sylow extende essas idéias para grupo de acordo com sua ordem. Assim pela ordem do grupo pode-se determinar que propriedades ele tem, inclusive para resolução de equações. Por exemplo, o teorema de Sylow é usado para resolver equações com conteúdos bem mais amplos e variados:

— Encontre todas as soluções inteiras para a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

Solução:

A equação pode ser reescrita como $z = \frac{xy}{x + y}$

Pelo teorema de Sylow, que: $x = k . a . (a + b)$
$y = k . a . (a + b)$
$z = k . a . b$, onde k, a e b são inteiros não-nulos arbitrários, com $a + b \neq 0$. Pode-se, então, variar os valores de k e, concomitantemente colocar a e b função de c por exemplo. Desta forma, obtemos todos os pares de inteiros x, y tais que (x + y)\xy. (para mais detalhes técnicos e outros exemplos, consultar: www.maths.glaac.uk/ãjb)

Por fim, vale a pena ver o testemunho de Shire:

> “A family of problems dating back for centuries, concerning the solution of polynomial equations, has been wrapped up once and for all. Good! Now let’s press forward with the new, promising areas of mathematics: function theory, non-Euclidean geometry, quaternious…
> The first really significant turn toward the future was taken by a mathematician who came, as Abel had, from Norway. This was Ludwig Sylow…”. (Shire, 2006, p. 217)(1)

Emil Artin (1898 – 1962)

(1) "Uma família de problemas que remontam há séculos, sobre a solução de equações polinomiais, foi quebrada de uma vez por todas. Bom! Agora, vamos avançar com o novo, as áreas promissoras da matemática: teoria das funções, geometria não-euclidiana, quaternious ...
O primeiro turno realmente significativo para o futuro foi tomada por um matemático que veio, como Abel, da Noruega. Este foi Ludwig Sylow ... ". (Shire, 2006, p. 217)

Artin foi um matemático austríaco. Em geral, é costume dizer que um bom matemático manifesta sua preferência por essa linguagem desde criança. Bem, esse não é caso de Artin. Seus primeiros interesses pela matemática só surgiram após os 16 anos de idade. Antes, na escola, ele sempre teve uma particular atração pela química.

Artin começa cursando a Universidade de Viena, mas, por causa da guerra, é chamado para o serviço militar. Vai, então, complementar seus estudos, a partir de 1919, na Universidade de Leipzig. Em 1921 ele termina seu doutorado.

Na tese ele trabalha levando o campo de números quadráticos ($a + b\sqrt{n}$, com a, b, n sendo números racionais e n sem raiz quadrada racional) para o campo dos números primos usados em funções racionais.

Em 1922, foi nomeado professor assistente na Universidade de Hamburg, em 1925, nomeado “extraordinary professor” e, em 1926, nomeado “ordinary professor”. Uma carreira meteórica, de pesquisas científicas, portanto. E sempre subindo. Artin fez brilhantes pesquisas na teoria dos anéis com profundas implicações para a teoria dos números, teoria de grupo e topologia.

Artin foi um matemático extremamente produtivo e brilhante. Ele morreu de ataque de coração em 20 de dezembro de 1962, com 64 anos. Foi um grande choque para todos que o conheceram e que conheceram seu trabalho, principalmente porque, pelo menos aparentemente, ele gozava de grande vitalidade.

Sua vida está muito bem registrada num belo artigo comovente de Richard Brawer (amigo pessoal de Artin):

> “I saw Artin for the last time in November 1958 in Hamburg. He spoke with satisfaction of his life and work in the United States. In Princeton, John Tate and Serge Lang had been his students… His love of music was perhaps as deep as his love of mathematics. There seemed to be a great deal of the mathematician in Artin, the musician, and a great deal of the artist in Artin, the mathematician. … The symbiosis of the scientist and the artist in Artin was unique”. (Brawer, 73, 1967, pp. 28-29). (1)

---

(1) "Eu vi Artin pela última vez em novembro de 1958, em Hamburgo. Ele falou com satisfação da sua vida e de seu trabalho nos Estados Unidos. Em Princeton, John Tate e Serge Lang tinham sido seus alunos ... O seu amor pela música foi, talvez, tão profundo quanto o seu amor à matemática. Parecia haver uma grande quantidade do matemático em Artin, o músico, e um grande artista em Artin, o matemático. ... A simbiose do cientista e do artista em Artin era única ". (Brauwer, 73, 1967, pp. 28-29).

Ainda quando estudante, Artin interessa-se muito pelo campo dos números algébricos (são números raízes de equações polinomiais de coeficientes inteiros). Essa teoria liga-se aos grupos matemáticos abeliano e Galois.

A pesquisa dos números foi (e tem sido) importante porque ela trabalha, pelo menos, duas grandes questões:

- A fatorização de um número, que depende muito do anel (conjunto onde se definem duas operações, por exemplo adição e multiplicação, com certas propriedades específicas) ao qual ele pertence, e, como consequência, obter a generalização da unicidade da fatoração dos inteiros.
- A Teoria da Equações Diofantinas ($x^n + y^n = z^n$, cujas soluções são inteiras, e que é pitagórica para n = 2) é como que origem para os números algébricos. O estudo aqui recai em polinômios da forma f (x, y) = $Ax^2 + Bxy + Cy^2$, em formas quadráticas do tipo f (x, y) = $x^2 - Dy^2$ e na fatorização de expressões do tipo x^p –

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \prod_{p} (1 - p^{-k})^{-1}$$

y^p, onde p é um número primo impar Artin desenvolve profundamente as fatorizações das funções "L" ("L-functions"). Euler trabalhou com estas funções, mas hoje em dia são chamadas de funções zeta de Riemann: é a série ($1/n^k$), para n variando de 1 ao infinito, e k é inteiro. A fatorização de série sobre um produto de primos é chamada de o produtório de Euler:
(consulte www.mathe.ohio-state edu)

Enfim, esse trabalho sobre fatorizações de funções é importante para um melhor aprofundamento das equações polinomiais que o T.F.A.envolve. Bem, deve-se dizer, na verdade, que as funções L estão primordialmente ligadas à teoria dos números e às equações funcionais. Porém, é possível aumentar o domínio das equações funcionais, e, como exemplo, tem-se a função zeta de Riemann. A idéia é que se faça uma extensão analítica (funções analíticas). Ora, uma função analítica é uma função que pode ser localmente expandida em série de Taylor e elas formam uma família mais ampla que a das funções polinomiais. Fecha-se, aí, o circuito sobre a T.F.A.

O T.F.A. interessa-se pelos polinômios. Pode-se dividir um polinômio por outro e obter-se o que se chama de função racional. É claro que não se pode dizer que uma função racional é polinômio. Mas o estudo das funções racionais pode trazer mais luz ao conhecimento dos polinômios. Ora, ocorre que Artin, de forma brilhante, resolveu um dos porblemas de Hilbert (o nº 17), que versa, justamente, sobre funções racionais:

> “… but we will now first discuss the other principal results obtained by Artin during the years 1921-1931. One of this most outstanding achievements was his solution of Hilbert’s Problem XVII which had withstood all previous attempts. The question which had arisen in Hilbert’s investigations on the foundations of geometry was this: Given a rational function F = F (x_1, x_2, …, x_n) of n variables with rational coefficients such that F does not take negative values for real values of the variables. Can F be written as a sum of squares of rational functions with rational coefficients?... Artin answered this in the affirmative obtaining at the same time generalizations and refinements. His method was as remarkable as the result. It was perhaps the first triumph of what is sometimes called ‘abstract’ algebra. The basis was formed by the theory of formally real fields developed by Artin and Schreier”. (Brawer, 73, 1967, p. 34).(1)

De fato, o trabalho de Emil Artin não pode ser esquecido para o T.F.A.:

> “We cannot truly say that we have a theory of the algebraic equations in one unknown with rational coefficients. However, in spite of all the difficulties, amazing progress has been made in Artin’s work”. (Brawer, 73, 1967, p. 31). (2)

(1) "... Mas agora vamos discutir primeiro os outros resultados pricipais obtidos por Artin durante os anos 1921-1931. Uma das realizações mais marcantes foi a solução do problema de Hilbert XVII, que tinha resistido a todas as tentativas anteriores. As questões que surgiram nas investigações de Hilbert sobre os fundamentos da geometria foi a seguinte: Dada uma função F racional F = (x_1, x_2, ..., x_n) de n variáveis com coeficientes racionais, tais que F não tem valores negativos para valores reais das variáveis. F pode ser escrito como uma soma de quadrados de funções racionais com coeficientes racionais? ... Artin respondeu a essa afirmativa obtendo ao mesmo tempo generalizações e refinamentos. Seu método foi tão notável quanto o resultado. Foi talvez o primeiro triunfo do que é às vezes chamado de álgebra "abstrata". A base foi formada pela teoria dos formalmente campos reais desenvolvidos por Artin e Schreier ". (Brawer, 73, 1967, p. 34).

(2) "Nós não podemos realmente dizer que temos uma teoria das equações algébricas em uma incógnita com coeficientes racionais. No entanto, apesar de todas as dificuldades, o progresso espantoso foi feito no trabalho de Artin ". (Brawer, 73, 1967, p. 31).

CAPÍTULO VI
O T.F.A. E A ANÁLISE MATEMÁTICA

Aqui, começou-se se com as contribuições de Bolzano. Suas contribuições foram de grande importância para a teoria das funções. Trabalha no teorema binomial como conseqüência do teorema polinomial, e dá uma prova puramente analítica do que entre dois valores quaisquer de sinais opostos há sempre uma raiz real da equação.

Weierstrass, por seu turno, mostra que qualquer função contínua num intervalo dos reais é limitada e que tem um máximo e um mínimo.

Ainda, o terceiro personagem deste capítulo é Riemann. Ele mostrou grande interesse pela teoria geral das funções. Ele influenciou tremendamente a análise. A esfera de Riemann, vê-se, tem um grande papel para o T.F.A., dando lhe nova dimensão.

Bernhard Bolzano (1781 – 1848)

Bolzano nasceu em Praga, do antigo reino da Boemia (século IX). Mais tarde, a Boemia caiu sob influencia da Casa dos Habsburgo (castelo do falcão), no século XVII, passando a fazer parte da Áustria-Hungria. A partir da primeira guerra mundial a Checoslováquia fica sob a influência soviética. As tropas do Paco de Varsóvia invadem a Checoslováquia em 1968, sufocando qualquer tentativa de liberalização do regime. Mas em 1989, a Checoslováquia recupera sua liberdade, e o país separou-se nos países República Checa e Eslováquia. Bolzano nasceu na República Checa.

Bolzano tinha um particular interesse pela filosofia da matemática. Ele cursou a “Philosophy Faculty of the Charles University of Prague” em 1796, estudando filosofia, física e matemática. Foi muito influenciado pelas leituras que fez de Abraham Gotthelf Kastner (1719-1800).Kastner foi um matemático alemão que, inclusive, deu aulas para Gauss e escrevia muito sobre filosofia da matemática. Kastner se dizia especialmente encantado pelas partes “puras” e especulativas da matemática.

De uma forma geral, os interesses de Bolzano na matemática envolviam conhecimentos ligados aos números, à geometria e às funções.

Até, aproximadamente, 1800 d.C. o conceito de função não estava posto em bases precisas. A idéia das “séries” já era conhecida, mas os estudos sobre convergência e divergência das séries ainda não estavam muito bem estabelecidos. Por isso mesmo as noções de derivada e integral não tinham sido definidas de maneira apropriada. A lógica da análise matemática estava um tanto quanto “contra a parede”.

Começa, então, a haver uma tentativa de colocar a análise em bases aritméticas. Todo esse movimento coincidiu com o surgimento da geometria não-Euclidiana, havendo tentativas de estabelecer a análise na geometria não-Euclidiana. No entanto, a opção, à época acabou por se tentar achar na análise conceitos aritméticos.

Em meio a toda essa controvérsia, a discussão, no final do século XVIII, era sobre que tipo de expressão analítica em função deveria ser estabelecida:

> "The eighteenth century mathematicians had on the whole believed that a function must have the same analytic expression throughout. During the latter part of the century, largely as a consequence of the controversy over the vibrating-string problem, Euler and lagrange allouwed functions that have different expressions in differente domains and used the word continuous where the same expression held and discontinous at points where the expression changed form (through in the modern sense the entire function could be continuous)". (Kline, vol.3, 1990, p. 949). (1)

De toda forma, a dúvida ainda persistia de, por exemplo, quais funções poderiam ser expressas por séries trigonométricas.

De toda forma, aos poucos, o sentimento era que as propriedades das funções algébricas não poderiam ser levadas a colírio todo o tipo de função. E as perguntas a serem respondidas eram:

- O que é uma função?
- O que é continuidade?
- O que diferenciabilidade?, etc.

(1) "Os matemáticos do século XVIII tiveram em geral, a crença de que uma função deve ter a mesma expressão analítica em todos os contextos. Durante a última parte do século, em grande parte como consequência da polêmica sobre o Problema de vibração-corda, Euler e Lagrange admitiam funções que tinham diferentes expressões em diferentes domínios e usou a palavra contínua, onde a mesma expressão mantem-se e descontínua nos pontos onde a expressão mudou de forma (no sentido moderno toda a função poderia ser contínua) ". (Kline, vol.3, 1990, p. 949).

Cauchy, em 1821, tenta definir o que é variável e o que é função e afirma que uma série infinita é apenas uma forma de representar uma função, sendo que as expressões analíticas poderiam ser dispensadas dessa representação.

Enquanto isso Fourier trabalha com a possibilidade de representar qualquer função por meio de séries de cosseno e seno.

Em 1829, Dirichlet apresenta uma função de x que tem um valor c para todos os racionais valores de x, e um valor d para todos os valores irracionais de x.

Porém, alguns anos antes de toda esta discurssao sobre o conceito da função, Bolzano já trabalhava nas idéias do T.F.A., no que ajudaria a aprimorar a analise matemática:

> "The proper distinction between continuity and discontinuity gradually emerged. The careful study of the properties of functions was initiated by Bernhard Bolzano (1781-1848), apriest, philosopher, and mathematician of Bohemia. Bolzano was led to this work by trying to give a purely arithmetical proof of the fundamental theorem of algebra in place of Gauss's first proof (1799) which used geometric ideas. Bolzano had the correct concepts for the establishment of the calculus (except for a theory of real numbers), but his work went unnoticed for half a century. He denied the existence of infinitely small numbers (infinitesimals) and infinitely large numbers, both of which had been used by the eighteenth-century writers. In a book of 1817 whose long title starts with 'Rein analytischer Beweis' Bolzano gave the proper definition of continuity, namely, f (x) is continuous in an interval if at any x in the interval the difference f (x + w) - f (x) can be made as small as one wishes by taking w sufficiently small. He proves that polynomials are continuous.
> Cauchy, too, tackled the notions of limit and continuity. As with Bolzano the limit concept was based on purely arithmetical considerations". (Kline, vol. 3, 1990, pp. 950-951).(1)

(1) "A distinção adequada entre continuidade e descontinuidade emergiu gradualmente. O estudo cuidadoso das propriedades das funções foi iniciado por Bernhard Bolzano (1781-1848), um sacerdote, filósofo e matemático da Boêmia. Bolzano foi levado a este trabalho, tentando dar uma prova puramente aritmética do teorema fundamental da álgebra no lugar de primeira prova de Gauss (1799), que usou as idéias geométricas. Bolzano tinha os conceitos corretos para a criação do cálculo (exceto para uma teoria dos números reais), mas seu trabalho passou despercebido por meio século. Ele negou a existência de um número infinitamente pequeno (infinitesimais) e os números infinitamente grandes, os quais tinham sido utilizados pelos escritores do século XVIII. Num livro de 1817 cujo título longo começa com 'Bolzano analytischer Rein Beweis' deu a definição adequada de continuidade , ou seja, f (x) é contínua em um intervalo se, em qualquer x do intervalo a diferença f (x + w) - f (x) pode ser feita tão pequena quanto se deseja, tomando w suficientemente pequeno. Ele demonstra que polinômios são contínuos.
Cauchy, também, aborda as noções de limite e continuidade. Tal como acontece com Bolzano o conceito de limite foi baseado em considerações puramente aritméticas. "(Kline, vol. 3, 1990, pp. 950-951).

Ainda, nessa publicação de 1817, Bolzano procurou provar que se f (x) é negativa para x = a e positiva para x = b, então f (x) tem um zero entre a e b (o que é importante para o T.F.A.). Contudo sua formulação era um tanto obscura. Ele pensou numa sequência de funções F_n (x) e introduziu o teorema que se n fosse grande o suficiente, a diferença $F_{n+r} - F_n$ seria menor do que qualquer quantidade dada, não importando quão grande fosse r.

Sendo assim, a sequência aproximar-se-ia de uma certa quantidade x (fixa), tão perto quanto se quisesse. Na verdade, a falta de clareza no trabalho de Bolzano repousava muito sobre essa tal quantidade x, mas isso é compreensível já que a precisão em Bolzano dependia de conhecimentos mais profundos sobre o sistema de números reais (particularmente os irracionais), ainda não totalmente disponível à época. De toda forma, essa foi uma grande idéia e hoje é conhecida como condição de Cauchy para convergência de uma sequência.

No meio do trabalho, Bolzano tenta mostrar a existência de, no mínimo, um limite superior para um conjunto limitado de números reais. Essa foi uma das idéias que impulsionou Cauchy a elaborar provas sobre a existência de raízes em polinômios, muito embora Cauchy tenha se válido de uma intuição (não provou, portanto, de que há um mínimo de uma função contínua sobre um intervalo fechado).

E, ainda, Bolzano (1817) foi o primeiro a definir a derivada de f (x) como a quantidade f' (x) cuja razão [f (x + Δx) - f (x)]/Δx aproxima-se para infinitamente perto de valores positivos ou negativos quando Δx tende para zero. E, Bolzano adverte:

> "Bolzano emphasized that f' (x) was not a quotient of zeros or a ratio of evanescent quantities but a number which the ratio above approached" (Kline, vol. 3, 1990, p. 954). (1)

Ora, sabe-se perfeitamente que a derivada é um instrumento extremamente valioso para o cálculo de raízes de polinômios, e, é evidente, que o T.F.A. tem muito a agradecer à Bolzano.

Karl Weierstrass (1815 – 1897)

(1) “Bolzano enfatizou que f’(x) mão era um quociente de zeros ou uma razão de quantidades evanescentes, mas um numero do qual a razão acima aproxima-se”. (Kline, vol.3,1990,p.954)

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass foi um matemático alemão. Seus pais planejaram sua vida de modo que pudesse cursar a Universidade de Bonn para empreender estudos sobre economia e finanças. Weierstrass entrou para Bonn em 1834, mas em 1838, no oitavo semestre, ele abandona o curso já que a matemática sempre foi sua grande paixão.

Durante mesmo o tempo de faculdade de economia, Karl, por conta própria, leu os trabalhos de Mecânica Celeste de Laplace e as pesquisas de Jacobi sobre funções elípticas. E para Karl Theodor foi muito importante ler os textos de Christoph Gudermann (1789-1852).

Bem, Gudermann foi um matemático alemão que trabalhava com geometria esférica e funções especiais (funções Beta, funções Gama, funções Hipergeométricas, etc). Mas o Professor Christoph tinha um especial talento para lecionar e muita didática para escrever. Em 1833 e 1844 ele publica duas monografias sobre as pesquisas de:

- Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço com enormes contribuições para a geometria analítica, trigonometria, cálculo e teoria dos números.
- John Landen (1719-1790), matemático amador inglês com contribuições para a mecânica, séries e funções elípticas.
- Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês com contribuições para as integrais elípticas.
- Niels Henrik Abel (1802-1829), matemático norueguês com contribuições para o estudo das equações gerais do quinto grau.
- Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), matemático alemão com contribuições para a teoria das funções elípticas e para as equações diferenciais de primeira ordem.

Então, assim que deixou a faculdade economia e finanças, Weierstrass matricula-se na Academia onde Gudermann lecionava, em Munster, assistindo as aulas sobre funções elípticas, ao longo de 1939.

Com toda essa influência, Weierstrass vai se envolver, pelo resto de sua vida com temas ligados à funções.

Em 1909, o matemático Henri Poincaré escreveu três ensaios para o discurso que proferiu quando da sua admissão à Academia Francesa, ao substituir o poeta e filósofo Sully Prudhomme, premio Nobel de literatura de 1901, que então falecera. Os outros dois escritos eram sobre Karl Weierstrass e Lord Kelvin.

Jorge Sotomayor (bolsista de Produtividade em Pesquisa do CNPQ, 2004-2006), traduziu os ensaios de Poincaré Sotomayor fez muitos comentários e incluiu centenas de notas de rodapé ao texto de Poincaré.

O original de H. Poincaré chamou-se “Savants et Écrivains”.

Poincaré (in Sotomayor, 2007), chama atenção para a palestra proferida por Weierstrass, em 1857, quando do seu ingresso para a Academia de Ciências de Berlim:

> "Devo agora explicar em poucas palavras qual foi, até agora, a marcha de meus estudos e em que direção me empenharei em prossegui-los...
> Em determinado momento, sob a direção de meu mestre Gudermann, conheci pela primeira vez as funções elípticas; este ramo novo da Análise Matemática exerceu uma atração poderosa sobre meu intelecto, tendo uma influencia decisiva no desenvolvimento do meu pensamento...
> Esta disciplina, fundada por Euler, cultivada com ardor e sucesso por Legendre, se desenvolveu inicialmente numa direção única. Mas ela veio depois de dez anos a ser inteiramente alterada pela introdução das funções duplamente periódicas descobertas por Abel e Jacobi. Essas funções Transcendentes dotaram a Análise de entidades novas, cujas propriedades notáveis encontraram também aplicações na geometria e na mecânica, assim mostrando que eram o fruto normal de um desenvolvimento natural da ciência...
> Mas Abel, habituado a colocar-se no ponto de vista mais elevado, havia achado um teorema que se estende a todas as funções transcendentes resultantes da integração das diferenciais algébricas e que, em certa forma, é para estas o que o teorema de Euler é para as funções elípticas. Falecido na flor da idade, Abel não pode prosseguir sua grande descoberta, mas Jacobi havia feito uma segunda descoberta não menos importante: ele havia provado a existência de funções periódicas de vários argumentos, cujas propriedades fundamentais baseiam-se no teorema de Abel, fazendo desta forma conhecer o verdadeiro significado deste teorema...
> A representação efetiva destas entidades, das quais a Análise não tinha ainda nenhum exemplo, incluindo o estudo detalhado de suas propriedades, tornara-se então um dos problemas fundamentais da matemática; e, desde que compreendi o seu significado e importância, resolvi abordá-lo...
> Teria sido uma verdadeira loucura se tivesse pensado na solução de tal problema sem haver-me exercitado antes em problemas menos difíceis...” (Sotomayor, 2007, pp. 67-68)

Com isto, vê-se que o relato de Weierstrass, mencionado por Poincaré, apresenta claramente um programa de pesquisas que visava o aprofundamento teórico das funções abelianas. Resumidamente, o planejamento de Weierstrass era o seguinte:

1) Erguer a teoria geral da funções abelianas sobre o estudo aprofundado da teoria geral da funções, primeiramente das de uma variável para, em seguida, a de duas.
2) Aperfeiçoar a teoria das funções elípticas, já que as funções abelianas são uma extensão daquelas.
3) Finalmente: atacar as funções abelianas.

Para tentar tornar claro o programa de estudos de Weierstrass, vale dizer que:

- As funções abelianas são uma generalização das funções elípticas, e também são chamadas de funções hiperelípticas.
- Por sua vez, as funções elípticas são funções periódicas duplas, com períodos 2a e 2b, tal que f (z + 2a) = f (z + 2b) = f (z).
- Mas, enquanto as funções elípticas têm períodos 2a e 2b, as funções periódicas duplas, simplesmente, tem dois períodos (a e b), tal que a/b não é real.
- As funções abelianas são, propriamente, funções inversas da integral abeliana. A integral abeliana, também chamada de integral hiperelípticas, é da forma $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$, onde R (t) é um polinômio de grau maior do que quatro.
- Qualquer função abeliana pode ser expressa como uma razão de polinômios homogêneos da função teta de Riemann. Esta função de Riemann é uma função complexa de várias variáveis que ocorre na construção de soluções quase – periódicas de várias equações na física – matemática. Por exemplo, é o que acontece no chamado Sistema de Duffing.

A equação de Duffing é um modelo de um sistema dinâmico clássico com comportamento caótico. Este é um sistema importante porque apresenta comportamento periódico, quase periódico e caótico. Este sistema pode ser assim formulado:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -cx_2 + kx_1(1 - x_1^2) + A\cos(wt)$$

Segundo Alexandre Augusto Kitzberger Rodrigues e o Professor. Dr. Mauro Hugo Mathias, da FEG (Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá), UNESP, a equação de Duffing representa o movimento de uma viga engastada entre dois imãs de mesma polaridade. (Consulte: www.feg.unesp.br/entidades/rePET/02.pef)

Ao longo do tempo podem-se perceber várias funções periódicas no equipamento descrito acima. Assim, é possível definir uma solução quase-periódica como sendo a soma das funções periódicas.Bem, a ligação entre Poincaré e Weierstrass é grande porque Henri Poincaré procurava detectar soluções periódicas olhando na seção transversal e, ele mesmo, foi o idealizador do “mapa de Poincaré”, que é uma ferramenta importante da teoria do caos.

Os mapas de Poincaré são usados, para diferenciar, por exemplo, o comportamento de sistemas periódicos, quase-periódicos ou caótico. O trabalho de Weierstrass tem muito a ver com as soluções quase-periódicas.

Toda essa pesquisa de Weierstrass foi importante para o T.F.A. porque implica que as bases para o estabelecimento das propriedades das funções contínuas já teriam que ter sido postas:

> "Complex numbers were introduced in the 1500s to solve cubic equations in one variable. They were reintroduced in the 1700s to facilitate integration by partial fractions. Mathematicians gradually developed proficiency in working with complex numbers, and their confidence increased when Carl Friedrich Gauss gave four proofs of the Fundamental Theorem of Algebra in the first decade of the 1800s. Jean d’Alembert had given an incomplete proof of the Fundamental Theorem in 1746. The main gap in his proof was filled in 1806 when Jean Argand proved a result generally called ‘d’ Alembert’s Lemma’. In fact, no truly complete proof of the Fundamental Theorem could be given until the 1870s, when Georg Cantor and Richard Dedeking developed the real numbers formally and Karl Weierstrass derived the basic properties of continuous functions”. (Bix, 2006, p. 130) (1)

---

(1) "Os números complexos foram introduzidas em 1500 para resolver equações cúbicas de uma variável. Eles foram reintroduzidos em 1700 para facilitar a integração por frações parciais. Matemáticos desenvolveram gradualmente proficiência em trabalhar com números complexos, e sua confiança aumentou quando Carl Friedrich Gauss deu quatro provas do Teorema Fundamental da Álgebra, na primeira década de 1800. Jean d'Alembert havia dado uma prova incompleta do Teorema Fundamental em 1746. A principal lacuna em sua prova foi preenchida em 1806 quando Jean Argand provou um resultado geralmente chamado “Lema de d 'Alembert". Na verdade, nenhuma prova verdadeiramente completa do Teorema Fundamental poderia ser dada até a década de 1870, quando Georg Cantor e Richard Dedeking desenvolveram os números reais formalmente e Karl Weierstrass derivou as propriedades básicas das funções contínuas." (Bix, 2006 , p. 130)

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Riemann nasceu em Breselenz, Hanover. Hanover é a capital e a maior cidade do estado da Baixa Saxônia, na Alemanha.

Todo o aprendizado formal/escolar que Riemann recebeu, até os 10 anos de idade, veio de seu próprio pai, o ministro Luterano Friedrich Bernhard Riemann. Nos três anos seguintes seu pai o matriculou numa escola local.

Em 1840, foi estudar no Liceu de Hanover, para, em seguida, 1843, ir estudar no Ginásio Johanneum, em Luneburg. Luneburg é a capital do distrito de Luneburg, no estado da Baixa Saxônia.

Riemann foi um bom aluno, mas não brilhante. Seus maiores interesses na escola sempre foram o estudo da teologia, da língua hebraica e da matemática.

No entanto, deve-se dizer, que na matemática demonstrava particular brilhantismo; por exemplo: há um livro de "teoria dos números" de Adrien Marie Legendre (1752-1833), cuja primeira edição se deu em 1798 e cuja segunda edição ocorreu em 1808, que, à época, tinha 900 páginas que foi lido e estudado por Riemann em seis dias. É que o diretor do Ginásio, onde Bernhard Riemann estudava, permitiu que ele tivesse acesso a todos os textos de matemática da biblioteca , e Riemann, então, em certa ocasião interessou-se pelo texto de Legendre.

O livro de Legendre foi recentemente reeditado (julho-2009) pela "Cambridge University Press", e chama-se "Essai sur la Théorie dês Nombres (Cambridge Library Colletion-Mathematics)".

Como curiosidade, vale à pena mencionar, que na segunda edição de seu livro, em 1808, no apêndice, Legendre fornece o "método dos mínimos quadrados" para ajustar uma curva com dados disponíveis que visavam a determinação da órbita de cometas. Ora, acontece que Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), publicou sua versão do "método dos mínimos quadrados" em 1809, reinvindicando para si a prioridade do método. Legendre, então, ficou profundamente aborrecido e machucado com o ocorrido, e lutou por muitos anos para ter sua prioridade reconhecida. Além do mais, Gauss já tinha feito muitas críticas às formas de demonstração das provas matemáticas da primeira edição da "teoria dos números" de Legendre.

Com tudo isto, Gauss com, aproximadamente, 25 anos e Legendre com, aproximadamente, 50 anos, tornaram-se rivais.

Em 1846, Riemann vai para a Universidade de Gottingen para estudar teologia, já que esta era a vontade de seu pai. No entanto, Riemann convence seu pai a permitir-lhe estudar matemática, o que foi concedido. Começa, então, a ter cursos com Gauss, mas os cursos eram elementares para Riemann.

Em 1847, Riemann vai para a Universidade de Berlim para estudar sob as orientações de:

- Jacob Steiner (1796-1863), que fazia pesquisas sobre geometria projetiva. A geometria projetiva é um ramo da geometria que estuda as propriedades e as invariantes de figuras geométricas a partir da projeção de um ponto. Por exemplo, uma circunferência pode ser projetada numa elipse ou numa hipérbole para que estas curvas possam ser observadas como equivalentes na geometria projetiva.
- Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), que fazia pesquisas sobre números primos, e com progressões aritméticas e polinômios, tudo ligado à números primos.
- Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852), que fazia pesquisas sobre formas cúbicas e quadráticas. Por exemplo, "$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$" é uma expressão geral de uma forma quadrática com termos de segunda ordem, em duas variáveis. Fez, também, muitas pesquisas para generalizar os resultados de Gauss para a "reciprocidade quadrática".

As "Leis da reciprocidade quadrática" fornecem as condições para que se um número primo p é um resíduo quadrático módulo um primo q, então, estuda-se, se q é ou não um resíduo quadrático módulo p. Para ficar mais claro, pensa-se em resíduo quadrático quando um inteiro m é um resíduo quadrático módulo n, a saber, se $m = r^2$ módulo n para algum r. E o termo "módulo" significa que se os inteiros m e n são módulo p, então p divide exatamente "m –n".

- Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), que fazia pesquisas sobre a teoria das funções elípticas e sobre equações diferenciais parciais de primeira ordem. Estudava, também, os resíduos quadráticos e biquadráticos. Esclarecendo, um número m é um resíduo biquadrático módulo n se $m = r^4$ módulo n, para algum r, ou seja, n divide exatamente $m – r^4$ para algum r.

De todos estes professores, Dirichlet foi a quem mais Riemann esteve ligado. É que Dirichlet gostava de abordar a matemática de forma mais abstrata, lógica e com um mínimo de cálculo possível:

> "Riemann also attended Dirichlet's lectures. Jacobi gave Riemann the latter's principal matter; but Riemann did not adobt Jacobi's methods. For him Jacobi was too much the algorithmist. On the other hand, Riemann was bound to Dirichlet by the strong inner of a like mode of thought. Dirichlet loved to make things clear to himself in an intuitive substrate; along with this he would give acute, logical analyses of foundational questions and would avoid long computations as much as possible. His manner suited Riemann, who adopted it and worked according to Dirichlet's methods". (Klein, 1979, pp. 234-235). (1)

Foi, aí, em Berlim, que Riemann elaborou a sua teoria geral de variáveis complexas, que foi a base para alguns de seus mais importantes trabalhos:

> "The works which now mainly occupy me are
>
> 1. In a way similar to that which has already been so sucessfully used for algebraic functions, exponential or circular functions, elliptic and abelian functions, to introduce the imaginary into the theory of other transcendental functions. In my inaugural dissertation I have provided the most necessary general preliminary work (cf. Art. 20 of this dissertation).
> 2. In connection with this there are new methods of integrating partial diferential equations, which I have already applied physical subjects.
> 3. My main work concerns a new conception of the known laws of nature… on the reciprocal actions between heat, light, magnetism, and electricity to investigate their connections with each other". (Klein, 1979, p. 233) (2)

---

(1) "Riemann também assistiu as conferencias de Dirichlet. Jacobi deu à Riemann a ultima principal questão, mas Riemann não adotou os métodos de Jacobi. Para ele, Jacobi era demasiado o algoritimista. Por outro lado, Riemann foi obrigado a sujeita-se à Dirichlet pelo seu forte e íntimo modo de pensamento. Dirichlet amava fazer as coisas claras para si mesmo em um substrato intuitivo, junto com isso, ele daria análises agudas e lógicas de questões fundamentais e evitaria computações longas, tanto quanto possível. Sua maneira adequou-se à Riemann, que a adotou e trabalhou de acôrdo com os métodos de Dirichlet ". (Klein, 1979, pp. 234-235).

(2) "Os trabalhos que estão agora, principalmente ,ocupando-me são:
1. De um modo semelhante ao que tem sido já utilizado com muito sucesso para funções algébricas, exponenciais ou circulares, funções elípticas e abelianas, para introduzir o imaginário na teoria de outras funções transcendentais. Em minha dissertação inaugural eu forneci o trabalho preliminar geral mais necessários (cf. art. 20 desta dissertação).
2. Em conexão com isto, há novas formas de integrar equações diferenciais parciais, que eu já apliquei à assuntos físicos.
3. Meu principal trabalho diz respeito à uma concepção das leis conhecidas da natureza ... na ação recíproca entre o calor, luz, magnetismo e eletricidade para investigar suas ligações uns com os outros ". (Klein, 1979, p. 233)

Observe-se que Riemann (reveja o ponto 3) sempre deu mais importância às análises filosóficas da natureza do que à teoria das funções complexas f (x + iy) em si mesma.

Em 1849, Riemann retorna à Gottingen e, orientado por Gauss, apresenta sua tese de doutorado em 1851: “Foundation of a General Complex Variable”.

A tese de Riemann lida com a teoria das variáveis complexas e, em particular, com que hoje se conhece como “superfícies de Riemann” (pode-se imaginar uma superfície de Riemann pensando-se em várias coberturas, colocadas umas sobre as outras, com uma distância infinitesimal entre elas, ligadas por um ponto de ramificação; algo parecido com uma superfície helicoidal).

Também, estudando com Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), um físico que trabalhava com eletrodinâmica, e com Johann Benedict Listing (1808-1882) que, sob a influencia de Gauss, escreveu alguns dos primeiros textos de topologia (versando sobre superfícies do segundo e terceiro graus), tudo isto em Gottingen, Riemann aperfeiçoa a sua teoria das funções complexas.

Ora, já que a formulação final do TFA ocorre no campo dos complexos e a esfera de Riemann é uma extensão deste plano, é natural que haja uma profunda ligação entre Riemann e o TFA:

> 16. The fundamental theorem of álgebra. It is well known that on the extended complex w-plane, that is, on the Riemann sphere, a rational function f (w) of degree p takes on each complex value, counting multiplicities and including ∞ exactly p times. … it follows that the fundamental theorem of algebra, in the present context, can be considered as applying to all points in space, not merely to the points of the complex plane on which the map of the Riemann sphere by the polynomial function lies”. (Beckenbach, 1987, p. 62) (1)

A esfera de Riemann é colocada sobre o plano complexo, projetando-se sobre ele, através de várias de suas porções. Então, uma função no plano complexo, como a do TFA, pode ser vista por uma “outra dimensão”, que é a dimensão da esfera.

(1) 16. O teorema fundamental da álgebra. É sabido que, no plano complexo w estendido, ou seja, na esfera de Riemann, uma função racional f (w) de grau p assume cada valor complexo, contando multiplicidades, inclusive f exatamente p vezes. ... Segue-se que o teorema fundamental da álgebra, no presente contexto, pode ser considerado como aplicável a todos os pontos no espaço, não apenas para os pontos do plano complexo em que o mapa da esfera de Riemann repousa através de uma função polinomial". (Beckenbach, 1987, p. 62)

A esfera de Riemann, associada a funções complexas, como as dos TFA, desempenha um papel interessante na mecânica quântica. Pode-se imaginar um observador situado num ponto particular x no espaço-tempo envolvido pela esfera de Riemann: a esfera de visão do observador. A esfera, então, pode ser pensada como o espaço de raios de luz passando por x. E por que? É que a esfera de Riemann é uma "estrutura conforme", ou seja, ela preserva, como uma função do TFA, as estruturas que passam por ela de um ponto para outro ponto.

CAPÍTULO VII
O T.F.A. E A TOPOLOGIA.

Além de Galois, Abel também prova a impossibilidade de resolver algebricamente a esquação geral do quinto grau. De fatos, as estruturas algebrianas implementaram a pesquisa da resolução algébrica de esquações, via topologia. Justamente, Abel utiliza a noção topológica dos grupos de permutação para provar que a equação geral de quinto grau não pode ser resolvida por extração de raízes. Brouwer, por seu turno, afrouxa a condição de que o promeiro coeficiente de um polinômio tinha que ser 1, e colocar os primeiros coeficientes tão pequenos que não podem ser mostrados como sendo diferentes de zero. A partir daí, Brouwer tem as ferramentas necessárias para o desenvolvimento de análise e da topologia de um conjunto de pontos.

Niels Henrik Abel (1802 – 1829)

Abel nasceu em Frindoe, Noruega. Nesta época a Noruega era parte da Dinamarca. E, naquele momento, a Europa estava preocupada com as guerras Napoleônicas. A Dinamarca tentou se manter neutra na guerra, mas os ingleses temendo que Napoleão usasse a armada dinamarquesa para seus propósitos, os ingleses invadiram a Dinamarca e capturaram sua armada um outubro de 1807. Abel nasceu em agosto de 1802. Neste exato momento ele tinha 5 anos de idade, e seu país estava encurralado entre a Grã-Betanha e as forças napoleônicas.

A economia norueguesa foi largamente atingida. A Noruega exportava madeira para a Grã-Bretanha e importava grãos da Dinamark. Com a economia catastroficamente paralisada, o povo norueguês passou a viver num estado de extrema pobreza.

Ainda quando Abel tinha 13 anos de idade a grave crise econômica norueguesa não tinha terminado.

Ainda aos 13 anos, Abel foi estudar na “Cathedral School” em Christiania (atual Oslo). Esta era uma escola pobre em todos os sentidos. Mas em 1817, quando Abel já tinha 15 anos, um excelente professor de matemática chamado Bernt Holmboe (1795-1850) chega para lecionar na Cathedral School. Ele logo incentiva a Abel estudar matemática, já que Abel tinha mostrado, na própria escola, grande talento para física e matemática. Aos 16 anos de idade, Abel já estava lendo textos universitários de Lagrange e Laplace.

Abel nasceu em 5 de agosto de 1802. Há poucos anos atrás a Universidade de Oslo comemorou, organizando uma Conferência Internacional, o ano do bicentenário de Abel: “Abel Bicentennial Conference”. A conferencia ocorreu em junho de 2002, nos dias de 3 à 8. Na verdade, o ano de 2002 foi proclamado, na Noruega, o ano de Abel (“Abel year 2002”). O governo, as comunidades locais, as universidades e a imprensa envolveram-se intensamente nessa comemoração.

O Primeiro Ministro da Noruega, em 2001, propôs, e o parlamento norueguês aprovou, a criação do Premio Abel, que à semelhança do Prêmio Nobel, foi estabelecido para a premiação de outros cientistas.

A conferência foi apoiada pela “International Mathematical Union (IMU): “www.mathunion.org” e pela “European Mathematica Society (EMS): www.euro-math-soc.eu”.

Houve conferências de matemáticos da Bélgica, da Universidade de Esbcolmo (Suécia), da Universidade de Palermo (Itália), da Alemanha, de Berkeley, de Los Angeles (UCLA), de Princeton, de Cambridge, da “Université Pierre et Marie Curie”, da Universidade de Genova, de Harvard, de Roma, da Universidade Estadual de Ohio, da “Université Louis Pasteur”, de Tel Aviv, de Massachuseths, de Oslo e da Rússia.

Em 17 de maio de 2003, a Springer-Verlag, publicou o livro da conferência: “The Legacy of Niels Henrik Abel”.

Embora este capítulo trate da Topologia e o TFA, alguns trechos de algum articulistas/conferencistas terão destaque no que diz respeito ao compto geral desse trabalho:

- Christian Houzel, da Universidade de Paris, escreve sobre “The work of Niels Henrik Abel”.

Ele faz uma coletânea, (comentários técnicos), dos trabalhos de Abel. Por exemplo, no tópico 3 de seu artigo, nas páginas 49-65, do livro da conferencia, Houzel examina as contribuições de Abel para as equações algébricas (vitais para o TFA):

> “We know that in 1821 Abel thought he had found a method to solve the general quintic equation by radicals; when he discovered his error and proved that such a solution was impossible, he wrote a booklet in French with a demonstration, ‘memoire sur les equations algébriques, ou l’on démontre l’impossibilité de la resolution de l’équation générale du cinquième degree (Christiania, 1824; Euvres, t. I, p. 28-33).(1)

- Steven L. Kleiman, do departamento de matemática do MIT, nas páginas de 395 até 440, escreveu sobre “What is Abel’s Theorem Anyway?”.

Os teoremas de Abel estão, em geral, “repletos” de topologia ou levam a noções topológicas. Por exemplo, pode-se começar a pensar nos grupos abelianos que são grupos onde vale a propriedade comutativa. Estes grupos podem ser considerados como objetos algébricos. A fim de encadear o pensamento, relembra-se o que é uma curva algébrica num campo qualquer k. Bem, uma curva desse tipo é uma equação f (x, y) = 0, em que f (x, y) é um polinômio em x e y com coeficientes em K. As curvas algébricas existem nos mais variados graus. Por exemplo:

- Curvas quadráticas escritas da forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0$.

  Definindo-se as quantidades:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & f \\ d & f & g \end{vmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

e I = a + c, tem-se que a elipse real $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ocorre para $\Delta \neq 0$, $J > 0$ e $\Delta/I < 0$. A hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, ocorre para $\Delta \neq 0$ e $J < 0$. As parábolas dos tipos $y^2 = 4ax$ ou $x^2 = 4ay$, ocorrem para $\Delta \neq 0$ e $J = 0$.

- Curvas cúbicas da forma $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J = 0$, onde A, B, ..., são elementos de um corpo K.

Citam-se a cissoide de Diocles (240 a.C – 180 a.C.; matemático grego), que tem a equação $x^3 – (2^a - x) y^2 = 0$, a conchoide de Sluze (René François Walter de Sluze, 1622-1685 d.C.) dada pela expressão (x – a – 1) x2 + (x – 1) y2 = 0, a Folha de Descartes, 1596-1650 d.C.) dada pela expressão $x^3 + y^3 – 3axy = 0$ e a

(1) "Nós sabemos que, em 1821, Abel pensou que tinha encontrado um método para resolver a equação geral do quinto grau por radicais, quando ele descobriu o seu erro e provou que essa solução era impossível, ele escreveu uma brochura em francês com uma demonstração," mémoire sur les equações algébriques, or l'on démontre l'impossibilité de la resolução générale de l'equação grau du cinquième (Christiania, 1824; Euvres, t. I, p. 28-33).

Curva da Cruz de Maltese (cruz usada por guerreiros cristãos do século 14) dada pela expressão xy $(x^2 - y^2) = x^2 + y^2$.

- Curvas Quárticas: podem ser escritas na forma $Ax^4 + By^4 + Cx^3y + Dx^2y^2 + Exy^3 + Fx^3 + Gy^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Jx^2 + Ky^2 + Lxy + Mx + Ny + 0 = 0$.

Uma curiosa curva do quarto grau é a “Ampersand Curve”, ou seja, a curva “E Ainda”. Esta curva não é exatamente igual, mas ela lembra muito o sinal “&”. Este tipo de curva intercepta a si mesma em alguns pontos. Os pontos de auto-interseção são chamados de “cruznó” ou “cruznodo”, do inglês “crunode”:

> “Crunode (noun): from Latin ‘crux’ (cross), of unknown prior origin, and ‘nodus’ (a knot), from the Indo-European root ‘ned-‘ (tobind, to tié). A crunode is a place on a curve through which two branches pass with distinct tangents” (Shwartzman, 1993, p. 62). (1)

Uma curva “E ainda” pode ter a seguinte equação:

$(y^2 - x^2)(x - 1)(2x - 3) = 4(x^2 + y^2 = 2x)^2$. Os seus cruznodos são (1, – 1), (0, 0) e (1, 1).

- Curva Quintica: Um curioso exemplo é a curva “Catastrofe da Borboleta”. É um evento cujos contornos assemelham-se a uma borboleta. Esta “borboleta” movimenta-se num único eixo de ação (eixo “x”) e com quatro fatores de controle (u, v, w, t). Em outros termos, a catastrofe ocorre numa única dimensão com quatro codimensões. Ela tem a forma: $F(x, u, v, w, t) = x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$.
- Curvas Sextica (sexto grau).

O símbolo do infinito tem um cruznó. Considere o eixo transversal deste símbolo. Coloque agora dois símbolos do infinito (um bem maior do que o outro) com seus cruznós coincidentes e com seus eixos transversais perpendiculares entre si. Esta é a Ciclóide de Ceba (Giovanni Ceva, 1648-1734). É uma equação do sexto grau cuja forma cartesiana é $(x^2 + y^2)^3 = (3x^2 - y^2)^2$.

- Curva Octica (oitavo grau).

Um bom exemplo é a Cura Pera. Ela tem forma de pera e é regulada por uma amplitude r:

(1) Crunode (substantivo): a partir de ‘crux’ Latina" (cruz), de origem, antes desconhecida, e "nódulo" (nó), a partir da raiz indo-européia 'Ned' (‘tobin’: amarrar). A crunode é um lugar em uma curva através da qual dois ramos passam com tangentes distintas "(Shwartzman, 1993, p. 62).

$r^2 = (x^2 + y^2)(1 + 2x + 5x^2 + 6x^3 + 6x^4 + 4x^5 + x^6 - 3y^2 - 2xy^2 + 8x^2y^2 + 8x^3y^2 + 3x^4y^2 + 2y^4 + 4xy^4 + 3x^2y^4$.

- Curva Duodécica (décimo segundo grau).

A Ranunculoide.

São cinco arcos consecutivos (continuamente desenhados) sobre a linha de uma circunferência.

Suas equações paramétricas são: x = a [6 cos t – cós 6 t]; y = a [6 sen t – sen 6 t].

O comprimento do arco vale s = 48ª e sua área é $A = 42\pi a^2$.

Em tempo, a ranunculóide lembra uma flor ranuncula do tipo botão-de-ouro.

Após estes exemplos de curvas algébricas, deve-se dizer que a generalização para “n” dimensões destas curvas tem-se as Variedades Algébricas. Uma Variedade Algébrica V em n-dimensões reais ou complexas é definida com um conjunto de pontos que satisfazem a um sistema de equações polinomiais f_i (x_1, ..., x_n) = 0, para i = 1, 2, ...

Na verdade, uma variedade é um conjunto de zeros comuns de um conjunto de polinômios. E, é, na vedade, o T.F.A. que garante que tais polinômios tenham sempre zeros.

Abel estudou as Variedades Algébricas, hoje conhecidas como Variedades Abelianas.

As Variedades Abelianas são grupos algébricos. Os grupos algébricos operam através de polinômios, por isso o T.F.A. é vital para Abel.

Um exemplo de Variedade Abeliana de dimensão 1 é uma curva elíptica.

A curva elíptica é uma curva cúbica cujas soluções estão confinadas a uma região do espaço que é topologicamente equivalente a um “torus”.

Num livro de diversões matemáticas, Gardner (1871, pp. 15-17) propõe várias construções de toros para a sala de aula. O toro mais conhecido, o de gênero 1 (o que tem apenas um buraco) pode ser facilmente imaginado quando, a partir de uma folha de papel, retangular, cola-se os lados opostos da folha sem retorcê-los.

Os polinômios estudados por Abel também podem ser usados para estimar o número de envoltórios (as cercanias de um buraco) que podem estar presentes num determinado toro. Tais polinômios podem dar a direção dos anéis (os envoltórios) que vão se formando e que ligados uns aos outros, incrustados no toro, envolvem-o.

Por exemplo, os anéis de toro (4,2), ou também chamado anel toro – (4,2), significam que há 4 anéis interligados varrendo duas vezes o toro.

Lutzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966)

Brouwer era holandês, nascido em Overchie, subúrbio de Rotterdam, em 27 de fevereiro de 1881. Morreu em 2 de dezembro de 1966 em Blaricum (Holanda).

Até os quatorze anos estudou em Hoorn, cidade dos arredores de Zuiderzee, ao norte de Amesterdam. Em Hoorn ele foi considerado um aluno brilhante tendo, na própria Hoorn, terminado seu ensino médio.

No entanto, em Hoorn não era oferecido o estudo de grego ou latim, línguas que ele precisaria dominar para prestar exames para a Universidade de Amsterdam. Então dos quatorze aos dezesseis anos esforça-se, em casa mesmo, para aprender grego e latim. Em 1987, aos dezesseis anos, entra para a Universidade de Amsterdam.

Em Amsterdam havia um professor chamado Diederik Johannes Korteweg. Korteweg já tinha orientado Gustav de Vries na pesquisa da prova matemática sobre a existência das “ondas solitárias”. Já em 1834, o engenheiro escocês John Scott Russell observou, no “Union Canal” na Escócia, uma onda solitária de água que percorria longas distâncias sem perda de energia e formato. É uma onda única, sem frentes de ondas, nem ondas que a sucedem. Ela é capaz de mover barcos e continuar adiante com mesmo formato e energia. Muitos matemáticos da época, tal como George Gabriel Stokes (1819-1903), não estavam convencidos que tais ondas pudessem existir. Mas Korteweg é hoje lembrado pela equação Korteweg – de Vries para as ondas solitárias. Esta equação se tornou vital para soluções de importantes equações diferenciais.

Muito bem, quando Brouwer começou seus estudos na Universidade de Amsterdam, Korteweg logo percebeu que ele era um aluno brilhante. Em 1904, sob o incentivo de Korteweg, Brouwer publica pela “Royal Academy of Science”, em Amesterdam, um original resultado sobre o movimento contínuo no espaço de quatro dimensões. O artigo publicado levou o seguinte título: “On a decomposition of a continuous motion about a fixed point O of S4 into two continuous motions about O of S3’s (KNAW, Proceedings, 6, 1903-1904, Amsterdam, 1904, pp. 779-783)”.

Quanto a este último artigo mencionado, o leitor poder lê-lo nos registros da “Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences” em: “www.digitallibrary.nlproceedings”.

O Professor Dirk van Dalen do departamento de filosofia, da “Utrecht University”, Holanda, publicou em 1999, um artigo sobre a vida de Brouwer, no livro organizado por Ivan Mackenzie James (“History of Topology”, capítulo 35). Neste texto, o Professor Dalen (p. 953) mostra que o trabalho de Brouwer, na prática, foi grandemente conduzido para o lado geométrico e, em particular, para a topologia.

Dalen relata que em 10 de dezembro de 1909, Brouwer dá sua conferência inaugural na Universidade de Amsterdam sob o título “The nature of geometry”. Nesse estudo ele dá o panorama da geometria de então, incluindo o seu uso na teoria da relatividade. Ao final da palestra, Brouwer dá a sua definição de geometria, a que Dalen chamou de “strikingly liberal”:

> “Geometry occupies itself with the properties of spaces of one or more dimensions. In particular it occupies the point sets, transformations and groups of transformations, which are possible in those spaces”. (Dalen, 1999, p. 953)) (1)

Na base, Brouwer estava tentando encontrar funções bijetoras (ou injetoras) que fizessem a ligação “um-a-um” entre espaços de dimensões distintas, usando, inclusive, a noção de grupo.

Como já dito inúmeras vezes, neste trabalho, o T.F.A. está na base destas idéias, ou seja, o conceito de que é possível obter imagens de conjuntos de pontos por funções sobrejetivas.

Quase ao final da palestra, Brouwer propõe alguns problemas que estavam em aberto, tal como:

> “… one has no certainty that the 3-dimensional Cartesian space is split into two domains by a closed Jordan surface i.e. the one-one continuous image of a sphere”. (2)

Então, Browwer estava preocupado com tais funções que poderiam construir o espaço de três dimensões desta forma. A título de informação, há um

---

(1) "Geometria ocupa-se o auto com as propriedades dos espaços de uma ou mais dimensões. Em particular, ocupa-se com conjuntos de pontos, transformações e os grupos de transformações, os quais são possíveis nesses espaços ". (Dalen, 1999, p. 953)

(2) "... Não se tem certeza de que o espaço 3-dimensional cartesiano é dividido em dois domínios por uma superfície fechada Jordan ou seja, a imagem contínua um-a-um de uma esfera".

importante artigo publicado em 1993 pela “Information Processing Society of Japan”, que levou o título de “Discrete Jordan Surface”, e que pode ser acessado em “http://nels.nii.ac.jp/els...”. Foi escrito pelos professores Yukiko Kenmochi, Atsushi Imiya e Akira Ichikawa, do “Dept. of Information and Computer Sciences, Chiba University”, onde eles esclarecem, no próprio “abstract”, a noção de “Superfície de Jordan”:

> “Boundaries of objects in three-dimensional Euclidean space are Jordan surfaces, which separate the space into two parts, the interior and the exterior of sets, and have no multiple points” (1)

Tal como as superfícies de Jordan, as superfícies de Riemann (que é uma espécie de plano complexo deformado, como se fossem remendos do plano complexo) também pode aparecer como um toro ou uma. Mas o que se quer dizer é que estas superfícies topológicas, em suas construções, dependem, no fundamental, ou seja, lá na base, de funções algébricas. Este estudo é o que se chama de “Teoria geométrica das funções”.

Aliás, no livro “Invitation to Combinatória Topology”, dos professores Maurice Fréchet, Ky Fran e Howard Shitley Eves, no capítulo 3, tópico 28, consta:

> “28. APPLICATION TO THE GEOMETRIC THEORY OF FUNCTIONS
>
> For those acquainted with Riemann surfaces and algebraic functions, we now mention na important application of the above topological classification of closed surfaces. The Riemann surface of an analytic function plays a fundamental role in the geometric theory of function. The study of the topological properties of a Riemann surface brings to light the deepest properties of the corresponding function. It is known that the closed Riemann surfaces correspond to algebraic functions.. It follows, then, that the only topological types of Riemann surfaces of algebraic functions are the sphere, the torus, and in general, the generalized torus with p holes (p = 1, 2, 3, …)”. (Fréchet et al., 2003, p. 69) (2)

(1) "Os limites dos objetos no espaço tridimensional euclidiano são superfícies de Jordan, que dividem o espaço em duas partes, o interior e o exterior de conjuntos, e não tem pontos múltiplos."

(2) "28. Aplicação à teoria geométrica de funções
Para aqueles familiarizados com superfícies de Riemann e funções algébricas, agora mencionamos uma importante aplicação da classificação topológica acima de superfícies fechadas. A superfície de Riemann de uma função analítica desempenha um papel fundamental na teoria geométrica da função. O estudo das propriedades topológicas de uma superfície de Riemann traz à luz as mais profundas propriedades da função correspondente. É sabido que as superfícies de Riemann fechadas correspondem às funções algébricas. Segue-se, então, que os únicos tipos topológicos de superfícies de Riemann de funções algébricas são a esfera, o toro, e, em geral, o toro generalizado com p furos (p = 1, 2, 3, ...) ". (Al Fréchet al., 2003, p. 69)

O trabalho é particularmente importante porque diz respeito à uma matemática construtiva e intucionista:

> “L.EJ. Brouwer, intiuitionism’s founder, … Intuitionism began in Browwer’s doctoral dissertation (1907). Browwer a Dutch mathematician of extraordinary scope, vision, and imagination, was a major architect of twentierh-century mathematics... Browwer’s work interests philosophers because his mathematics rests upon a unique epistemology, a special ontology, and an underlying picture of intuitie mathematical consciousness” (Shapiro, 2005, 318-19).” (1)

O que Browwer quer dizer é que a matemática clássica executa uma construção intuitiva muito estreita que deixa espaços vazios não preenchidos por seus esforços de linguagem formal e lógica. É por isso, que nesse contexto, Brouwer tinha severas críticas ao programa de formalismos de Hilbert.

A matemática atual, ao contrário do que Brouwer gostaria, tem obtido desenvolvimento por vias não-construtivas, utilizando-se de rotinas carregadas de formalismo.

Browwer não está propondo que se elimine o formalismo, mas que haja profundas preocupações em exibir a construção dos resultados. Note, por exemplo, o texto do Professor Dirk van Dalen, testemunhando a ligação Browwer-T.F.A:

> “The fundamental theorem of algebra is an old family heirloom of mathematics…
> The fundamental theorem of algebra is one of the most famous ‘existence theorems’. It states that there is a number $\propto$ such that $\propto^n + a_{n-1} \propto^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$
> The usual proofs one finds in the textbook, proceed by contradiction; hence from a intuitionistic point of view the only show that it is impossible that there is no such $\propto$. Therefore it was a matter of some urgency to give an effective procedure for constructing a root of the equation. This was accomplished

(1) "L.EJ. Brouwer, fundador do intucionismo ... Intucionismo começou na tese de doutorado de Brouwer (1907). Brouwer um matemático holandês de escopo extraordinário, visão e imaginação, foi um grande arquiteto da matemática do século vinte ... O trabalho de Brouwer interessa aos filósofos porque sua matemática repousa sobre uma única epistemologia,uma ontologia especial, e uma imagem subjacente da consciência matemática intuitiva "(Shapiro, 2005, 318-19)."

> in 1924 by Browwer and De Loor and in the same year, independently, by Herman Weyl” (Dalen, 2005, p. 388). (1)

É curioso que o Professor Dallen use a “heirloom” para o T.F.A.. No entanto, não se trata apenas de uma mera curiosidade, e este trabalho tenta mostrar que, de fato, o T.F.A. é um bem matemático, uma grande herança vinda de gerações e gerações passadas, mais precisamente, da pré-história, ou seja, um verdadeiro “heirloom”.

Por fim, é o intuicionismo de Brouwer que chama a atenção para o fato de que os coeficientes a_n precisariam ser melhor exibidos, e o T.F.A. toma formato da ordem a seguir: $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ tem solução se no mínimo um dos coeficientes $a_n , \dots , a_1$ não é zero (uma caracterização semelhante é aquela que afirma que a equação pode ser fatorada em fatores lineares, ou seja, uma caracterização construtiva, portanto).

(1) "O teorema fundamental da álgebra é uma antiga herança de família da matemática ...
O teorema fundamental da álgebra é um dos mais famosos ‘teoremas de existência. Afirma que existe um número tal que $\alpha_n + a_{n-1} \alpha_{n+} + \dots + a_0 = 0$
As provas usuais se encontram num livro-texto, procederam por contradição, portanto, de um ponto de vista intuicionista mostrarm apenas que é impossível que não haja tal α . Por isso era um assunto de certa urgência dar um procedimento eficaz para a construção de uma raiz da equação. Isto foi realizado em 1924 por Brouwer e De Loor e no mesmo ano, de forma independente, por Herman Weyl (Dalen, 2005, p. 388).

CAPÍTULO VIII
O T.F.A. E O CÁLCULO NUMÉRICO

O T.F.A. com Horner, ganha, sobremaneira, em praticidade de resolução. A necessidade de obter o valor de um polinômio P(x) em um ponto x=a, aparece frequentemente em vários problemas de muitas áreas da ciência. Então, por exemplo, se for necessário trabalhar-se com um polinômio de grau 5, por exemplo, o Método de Horner é de grande utilidade para o T.F.A.

Quanto ao método Newton-Raphson, que estima as raízes de uma função, utiliza-se do conceito de derivada num determinado ponto. Este método é prático e importante, por que o processo é repetitivo e rápido, deixando logo claro se o processo está se encaminhando ou não à raízes do polinômio.

William George Horner (1786 – 1837 d.C.)

O pai de William Horner, que também se chamava William Horner, era um irlandês, morando na Irlanda e pregador do evangelho bíblico cristão. Por volta de 1770 d.C., a convite de John Wesley, um dos fundadores da Igreja Metodista, William Horner (o pai) mudou-se para a Inglaterra para assumir o posto de ministro da Sociedade Metodista.

Horner (o filho) vai nascer, portanto, na Inglaterra, em Bristol. Na sua adolescência, ele foi educado na "Kingswood School Bristol", onde, aos quatorze anos tornou-se professor assistente e, aos dezoito, diretor da escola. Mais tarde, ele fundou sua própria escola, na cidade de Bath, no município de Somerset, no sudoeste da Inglaterra. Quando da sua morte, seu filho, também chamado William, passou a dirigir a escola.

Muito bem, o Horner de quem este trabalho está tratando ficou, na verdade, conhecido apenas pelo seu método numérico de resolução de equações algébricas, o Método de Horner.

Na história da matemática há controvérsias se, de fato, era o criador de seu próprio método. Por exemplo, o professor A.T. Fuller publicou na "History Math" um artigo sobre a controvérsia Horner-Holdred. Theophilus Holdred era um relojoeiro londrino, com talentos para a matemática numérica. Fuller sustenta que Horner não publicou seu método em 1819, como alguns consideram, mas, sim, em 1830. Por outro lado, Holdred (o relojoeiro, já trabalhava no "Método de Horner" em 1820. Então, Fuller, "com elegância" (se é que isto é possível) acusa Horner de um certo plágio:

> "At first sight, Honer's plagiarism seems liker direct theft. However, he was apparently of an eccentric and obsessive nature… Such a man could easily first persuade himself that a rival method was not greatly different from his own, and then, by degrees, come to believe that he himself had invented it" (Fuller, 26 (1) (1999), 29-51). (1)

Recentemente, a editora Cosino reeditou um livro de Augustus De Morgan (1806-1871) onde relata que o Método de Horner era superior aos outros, mas de toda maneira tinha raízes antigas na China:

> "Thinking this is a good opportunity to illustrate the superiority of the method of W.G. Horner, not yet known in France, and not much known in England, …
> The method was original as far as Horner concerned, but it is practically identical with the one used by the Chinese algebraist Ch' in Chiu-shang, in his Su-Shu Chiu-chang of 1247. But even Ch'in Chiu-shang can hardly be called the discoverer of the method since it is merely the extension of a process for root extracting that appeared in the Chiu-chang Suan-shu of the second century B.C." (De Morgan, 2007, vol. 2, pp. 66-67) (2)

Portanto, De Morgan não considerava que Horner tenha se apropriado (consciente ou inconscientemente) do trabalho de alguém, mas, sim, a forma como Horner atacou o problema da resolução numérica de equações algébricas tinha características originais, na visão De Morgan.

À princípio, o Método de Horner não tem como objetivo principal calcular as raízes de um polinômio, mas, sim, avaliar o polinômio. A técnica consiste em ao

(1) "À primeira vista, o plágio Honer Liker pareceu com se fosse um roubo. No entanto, ele era aparentemente de umanatureza excêntrica e obsessiva ... Um homem como este poderia facilmente primeiro convencer-se que um método rival não foi muito diferente do seu, e depois, gradualmente, passar a acreditar que ele próprio o inventou "(Fuller , 26 (1) (1999),e 29-51).

(2) "Pensar isso é uma boa oportunidade para ilustrar a superioridade do método de WG Horner, ainda não conhecido na França, e não muito conhecido na Inglaterra, ...
O método foi original na medida em que Horner o concebeu, mas é praticamente idêntico ao utilizado pelos chineses algebrista Ch 'em Chiu shang, em seu Su-Shu Chang Chiude 1247.Mas mesmo Ch'in Chiu-shang dificilmente pode ser chamado o descobridor do método, uma vez que é apenas a extensão de um processo de extração de raiz que apareceu no Chiu-Chang Suan-shu do século II aC "(De Morgan, 2007 , vol. 2, pp. 66-67)

reescrever o polinômio em “multiplicações encaixantes” a fim de otimizar o tempo da avaliação com cálculos menos complexos. Por exemplo o polinômio $P_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = a_0$ pode reescrito com uma “multiplicação encaixante” da forma:

$P_5(x) = ((((a_5x + a_4)\ x + a_2)\ x + a_1)\ x + a_0$

Exemplo: Considere o polinômio $P\ (x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$. Avalia-se, agora P (3), no Método de Horner.

Solução:

$P_5(x) = = - 40 + 4x + 8x^2 + 8x^3 - 6x^4 + x^5$.

$Q_5(x) = = - 40 + x\ (4 + x\ (8 + x\ (8 +(- 6 + x)\ \ x)))$.

$Q_5(3) = 17 = P_5(3)$

É claro que com uma avaliação tão rápida como esta fica mais simples procurar pelas raízes do polinômio, ou seja, para quais x_0, $P\ (x_0)$ estão cada vez mais próximos de zero. E o T.F.A. garantirá a existência de tais raízes.

Um dos livros mais didáticos sobre o assunto é o do Professor Isaac Todhunter de 1861 d.C., e, na época, o professor era “Fellow and Principal Mathematical Lecturer of St John’s College, Cambridge”.

O livro do professor, publicado pela Cambridge chamou-se “An Elmentary treatise on the theory of Equations, with a collection of examples”.

O professor comenta:

> “In order to exhibit a comprehensive view of the subject, the present treatise includes investigations which are not found in all the preceding elementary treatises, and also some investigations which are not found in any of them. Among these may be mentioned..., Horner’s method, ...” (Todhunter, 1861, p. 4) (1)

Portanto, o Método de Horner tem grande importância para a matemática devido a sua facilidade para encontrar as raízes dos polinômios algébricos:

> “The main principle inolved in Horner’s method is the sucessive diminution of the roots of the given equation by known quantities…

(1) "A fim de apresentar uma visão abrangente do tema, o tratado atual inclui investigações que não são encontradas em todos os tratados anteriores elementares, e também algumas investigações que não são encontradas em nenhum deles. Entre estes podem ser citados ..., o método de Horner, ... "(Todhunter, 1861, p. 4)

> The great advantage of the method is, that the sucessive transformations are exhibited in a compact arithmetical form, and the root obtained by one continuous process correct to any number of places of decimals required” (Burnside, 2009, p. 209) (1)

Métodos como o de Horner foram (e são) importantes para a matemática já que não havia fórmulas exatas com o uso de radicais para equações polinomiais algébricas além do 4º grau, daí a observação do professor Israel Kleiner:

> “Does every polynomial equation have a root, and, if so, what kind of root is it? … The Fundamental Theorem of Algebra (FTA) answered both: every polynomial equation, with real or complex coefficients, has a complex root…
> In the absence of exact formulas for the roots, various methods were developed for finding approximate” (Kleiner, 2007, pp. 10-11) (2)

Isaac Newton (1643 – 1727 d.C.) e Joseph Raphson (1648–1715 d.C).

Isaac Newton nasceu em Woolsthorpe, Linconlnshire, Inglaterra. Seu pai, também chamado Isaac Newton, morreu três meses depois de Newton nascer. O pai de Newton era um homem rico porém sem educação formal e não sabia assinar seu próprio nome.

Newton não teve uma infância feliz. Quando tinha dois anos de idade sua mãe casou-se, novamente, com Barnabas Smith, mas ele acabou sendo criado por sua avó que o tratava como órfão, já que seu padrasto e sua mãe pareciam tê-lo esquecido.

Em 1653 morre seu padastro e Newton resolve morar em Grantham, uma cidade localizada a 8km de sua cidade natal. A escola onde foi matriculado, chamava-se “Free Grammar School”. Lá, Newton foi considerado um aluno preguiçoso e desatento. Considerando os relatórios da escola sobre Newton, sua mãe, Hannah Ayscough, tirou-o dos seus estudos e o trouxe, como filho mais velho

(1) "O principal princípio envolvido no método de Horner é a diminuição sucessiva das raízes da equação dada por quantidades conhecidas ... A grande vantagem do método é que as transformações sucessivas são exibidas em uma forma compacta aritmética, e a raiz obtida através de um processo contínuo correto para qualquer número de casas decimais requeridas" (Burnside, 2009, p. 209)

(2) "Será que toda equação polinômial tem uma raiz e, em caso afirmativo, qual o tipo de raiz é esta? ... O Teorema Fundamental da Álgebra (FTA) responde que: toda equação polinomial com coeficientes reais ou complexos, tem uma raiz complexa ...
Na ausência de fórmulas exatas para raízes, vários métodos foram desenvolvidos para encontrar aproximações "(Kleiner, 2007, pp. 10-11)

que era, para administrar seus negócios e seus bens. Newton, no entanto logo demonstrou não ter qualquer talento ou interesse na administração dos bens familiares.

Em 1660, seu tio, William Ayscough, convence a mãe de Newton a deixá-lo voltar para a mesma escola em Grantham para terminar o curso. Após o curso, Newton hospedou-se na casa do próprio diretor da escola, que teria convencido a mãe Newton a deixá-lo se preparar para a universidade sob sua orientação.

Em 1661, Newton entra para o Trinity College Cambridge.

Curiosa e estranhamente, parece que Newton entrou para Cambridge com o “subsizar”, embora sua mãe estivesse viva e rica:

> “Newton entered Trinity as a subsizar, a poor student who earned his keep by perfoming menial tasks for the fellows, … he was their servant, carrying their bread and beer from the buttery and emptying their chamber pots” (Westfall, 1999, pp. 21-23) (1)

Aliás, antes que se prossiga, vale à pena dizer que o Professor Richard S. Westfall, da “Indiana University”, tem escrito uma das melhores Biografias de Newton.

Retomando, sabe-se que, em Cambridge, Newton leu muito a filosofia de Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.), até porque o programa de Cambridge exigia isso. Porém, Newton teve uma particular interesse em René Descartes (1596-1650), Pierri Gassendi (1592-1655), um astrônomo francês (que, por sinal, foi o primeiro a observar uma passagem de Vênus), Thomas Hobbes (1588-1679), um matemático amador que escreveu sobre ótica e geometria, e, principalmente, sobre Robert Boyle (1627-1691), que fazia pesquisas na área de química baseados na teoria mecanicista da matéria. Também interessou-se muito pelas obras de Galileo Galilei (1564-1642) de Johannes Kepler (1571-1630).

A partir de 1646, aproximadamente, Newton começa a ter um grande interesse por matemática. Segundo Niccolò Guicciardini tem grande interesse por álgebra:

> “As far as we know, of the ancient corpus he studied only Euclid’s Elements in Barrow’s algebraized edition. He learned algebraic

(1) "Newton entrou para o Trinity como “subsizar”, um estudante pobre que ganhava seu sustento por realizar tarefas domésticas para os companheiros, ... ele era o seu servo, carregando o seu pão e cerveja da despensa e do esvaziando suas panelas do quarto" (Westfall, 1999, pp. 21-23)

> notation from Oughtred's 'Clavis Mathematical' in the third 1652 edition, and from Viète's 'Opera Mathematica' (1646)… The annotations to Oughtred and Viéte show how interested Newton was in this promising method of discovery" (Guicciardini, 2009, p. 4) (1)

Newton, por exemplo, usa uma técnica de resolução de equações algébricas, do ponto de vista numérico, para desenvolver o que chamou de "Método dos Fluxos e dos Fluentes". O termo "fluxos" refere-se ao cálculo diferencial e o termo "fluentes" ao cálculo integral.

O Método dos Fluxos fornece uma técnica rápida para encontrar aproximações sucessivas dos "zeros" (raízes) de uma função real. Se a função for razoavelmente bem comportadas chamemo-la de f (x). Arbitra-se x_0 como uma primeira tentativa do "zero" da função. A aproximação seguinte será em x_1 tal que:

$$x_1 = x_0 - \frac{f\,(x_0)}{f'\,(x_0)}$$

O processo é repetido até a uma precisão suficientemente necessária. De forma geral tem-se:

$$X_{n+1} = x_n - \frac{f\,(x_n)}{f'\,(x_n)}$$

Este método, ao longo do tempo ficou conhecido como "Método de Newton-Raphson"

Joseph Raphson foi um matemático inglês que ficou mais conhecido por causa do Método de Newton – Raphson.

Os pesquisadores David J. Thomas e Judith M. Smith publicaram, em 1990, um artigo sobre a vida e os trabalhos de Joseph Raphson. Mas, na verdade, os estudiosos-eruditos são unânimes em afirmar que muito pouco se sabe sobre a vida de Raphson. Note-se o que afirmam Thomas e Smith, na introdução:

> "Three hundred years ago, in 1690, a mathematical book was publised in London that ensured its author a certain degree of immortality: his name will now always be associated with that of Isaac Newton. The book, being the first account of the so-called

(1) "Tanto quanto sabemos, de obras clássicas antigas, ele estudou apenas Elementos de Euclides na edição algebraizada de Barrow. Ele aprendeu a notação algébrica na ' Chave de Matemática' na terceira edição de 1652 e na "Opera Mathematica" de Viète (1646) ... As anotações de Oughtred e Viète mostrar como Newton estava interessado neste promissor método de descoberta "(Guicciardini, 2009, p. 4)

> Newton-Raphson method in the fully developed form which survives to the presente day, was entitled 'Analysis Aequationum UNIVERSALIS, SEU Ad AEQUATIONES ALGEBRAICAS Resolvenda. METHODUS Generalis, et Expedita, Ex nova Infinitarum serierum Doctrina, DEDUCTA AC DEMONSTRATA"....
> Very little is known about the life of Joseph Raphson; on the few statements made about him in the literature, even fewer can now be verified from original sources. The details that follows can still be found in surviving contemporary documents, but unfortunately we have to start rather late in his life, with his election to the Royal Society.
> Mr. Joseph Raphson was proposed for Fellowship of the Royal Society ah the meeting of Wednesday, 27 November 1689, by the renowned Edmong Halley. The Society's Journal Book reads: 'DrStanley, Mr Ralfson, and Mr. Moult were proposed candidates at this meeting, and approved…" (Thomas & Smith, 1990, p. 151). (1)

De toda forma, embora não se tenha certeza do local de sua morte, parece que Raphson nasceu em Middlesex, na Inglaterra. Ele frequentou o "Jesus College Cambridge" e foi graduado, em 1692, com um M. A. ("Master of Arts").

O trabalho de Raphson para a aproximação de raízes de uma equação foi publicado em 1690. Newton tinha desenvolvido uma fórmula similar em seu "Method of Fluxions", escrito em 1671; mas seu trabalho só foi publicado em 1736, aproximadamente 50 anos depois da publicação do trabalho de Raphson.

Na verdade, a versão de Raphson é mais simples que a de Newton, mas, de toda maneira, o método ficou conhecido o Método Newton-Raphson.

Vale à pena mencionar que livro original de Newton, "The Method of Fluxions and Infinite Series; With its Application to the Geometry of Curve-LInes", de 1936, foi, agora, em 2010, reimpresso pela Henry Woodfall, e está sendo vendido pela John Nourse. Mas, a edição de 1736 foi feita por John Colson.

---

(1) "Trezentos anos atrás, em 1690, um livro de matemática foi publicado em Londres, que garantiu o seu autor um certo grau de imortalidade: o seu nome passará a ser sempre associado com o de Isaac Newton. O livro, sendo o primeiro relato do assim chamado método de Newton-Raphson na forma plenamente desenvolvida, que sobrevive até os dias atuais, foi intitulado "Análise Aequationum UNIVERSAL, SEU Ad AEQUATIONES ALGEBRAICAS Resolvenda. Methodus Generalis, et Expedita, Ex nova serierum Infinitarum Doctrina, AC deducta demonstrata ".... Muito pouco se sabe sobre a vida de Joseph Raphson; sobre as poucas declarações feitas sobre ele na literatura, menos ainda agora pode ser verificado a partir de fontes originais. alguns detalhes ainda podem ser encontrados em documentos contemporâneos sobreviventes, mas infelizmente temos que começar muito tarde em sua vida, com sua eleição para a Royal Society. Mr. Joseph Raphson foi indicado para a Sociedade do ah Royal Society na reunião de quarta-feira, 27 de novembro de 1689, pelo renomado Edmong Halley. No livro do Jornal da Sociedade livro lê-se: "DrStanley, em Sr. Ralfson, eo Sr. Moult foram propostos os candidatos nesta reunião, e aprovado ..." (Thomas & Smith, 1990, p. 151).

A seguir, cita-se um pequeno trecho do método numérico de Newton para resolução de equações algébricas, da edição de 1736:

> “Let this Equation $y^3 – 2y – 5 = 0$ be proposed to be resolved, and let 2 be a Number (any how found) which differs from the true Root less than by a tenth part of itself. Then I make $2 + p = y$, and substitute $2 + p$ for y in the given Equation, by which is produced a new Equation $p^3 + 6 p^2 + 10 p – 1 = 0$, whose Root is to be sought for, that it may be added to the Quote. Thus rejecting $p^3 + 6 p^2$ because of its smallness, the remaining Equation $10 p – 1 = 0$, or p = 0, 1, will aproach very near to the truth. Therefore I write this in the Quote, and suppose $0,1 + q = p$, and substitute this fictitious Value of p as before, which produces.
> $q^3 + 6,3 q^2 + 11,32 q + 0,061 = 0$. In fine $11,32 q + 0,061 = 0$ is near the truth, or q = – 0,0054 nearly…” (Newton, 1736, p. 6) (1)

Por fim, o Professor Pollock deixa bem claro a ligação entre o T.F.A. e o Método Newton-Raphson:

> “The fundamental theorem of algebra asserts that every polynomial which is defined over the complex plane has at least one root in that domain. From this, it can be inferred that any polynomial of degree $p > 1$ is equal to the product of p linear factors with complex coefficiens…
> A common procedure for finding a real-valued solution or root of the polynomial equation $\propto = 0$ is the Newton-Raphson procedure which depends upon approximating the curve $y = \propto (x)$ by its tangent at a point near the root”. (Pollock, 1999, p. 99) (2)

(1) "Considere esta equação $y^3 - 2y - 5 = 0$ seja proposta para ser resolvida, e deixe 2 ser um número (de alguma forma encontrado) que difere da verdadeira raiz verdadeira menos que décima parte de si mesmo. Então eu faço $p + 2 = y$, e substituir por 2 + p y na equação dada, pela qual é produzida uma nova equação p^3 $p^2 + 6 + 10 p - 1 = 0$, cuja raiz está sendo procurada, que pode ser adicionadas orçamento. Assim, rejeitando p^3 p^2 + 6 devido à sua pequenez, o que resta da restantes equação $10 p - 1 = 0$ ou p = 0, 1, vai ficar muito perto da verdade. Por isso eu escrevo isso como número citado, e suponho 0,1 q = p e substituo este valor fictício de p como antes, o que produz: $q^3 + 6,3 q^2 + 11,32q + 0061 = 0$. E $11,32 q + 0061 = 0$ esta perto da verdade, ou q = - 0,0054 aproximadamente ... "(Newton, 1736, p. 6)

(2) "O teorema fundamental da Álgebra afirma que qualquer polinômio que é definido no plano complexo tem pelo menos uma raiz neste domínio. A partir daí, pode-se inferir que qualquer polinômio de grau p> 1 é igual ao produto de p fatores lineares com coeficientes complexo ... Um procedimento comum para encontrar um valor de solução real ou raiz da equação polinomial □ = 0 é o procedimento de Newton-Raphson, que depende da aproximação da curva y = □ (x) pela sua tangente em um ponto perto da raiz ". (Pollock, 1999, p. 99)

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Após tão longo período de desenvolvimento histórico fica claro que o T.F.A é um dos mais fundamentais resultados na matemática. É preciso que se note que aqui, neste trabalho, estão registrados mais de 500 anos de história. Talvez seja possível dizer que não haja muitos temas que possam alinhavar tantas áreas do conhecimento científico quanto o T.F.A. faz e, ainda, ser parte da história dos povos mais antigos e simples da humanidade.

Com isto, de fato, o T.F.A. se mostrou ser um precioso fio condutor que perpassa pelos trabalhos, inclusive, daqueles que foram os maiores matemáticos da história.

Por causa do T.F.A. a matemática experimentou grande desenvolvimento teórico. Os conceitos matemáticos tiveram que ser aprimorados para que se pudesse estabelecer todas as intricadas relações internas em extensas áreas do conhecimento: Topologia, Álgebra, Teoria dos números, etc...

As conseqüências deste trabalho poderão ser, portanto, encontradas na Cosmologia, nas idéias de como os teoremas são formados ao longo do tempo, nas análises dos erros cometidos por importantes cientistas, nas formas de comunicação entre os povos, no desenvolvimento das civilizações, nas histórias do desenvolvimento dos conceitos formais na ciência, nas “raízes perdidas” das idéias da ciência e nas novas tecnologias.

De fato, por exemplo, há pouco mais de duzentos anos atrás um jovem e promissor matemático, na Universidade de Helmstedt, apresentou sua tese de doutorado que propunha uma prova para T.F.A. O nome desde jovem estudante era Carl Friedrich Gausss. Ora, a forma como Gauss apresentou sua pesquisa, ao longo de sua vida, sobre o T.F.A., influenciou muito o desenvolvimento da geometria diferencial, da álgebra linear e da análise de erros (Cálculo numérico).

Com estes estudos, Gauss também trouxe um novo nível de rigor para a matemática.

Por exemplo, o número “e” (número neperiano) tem uma enorme aplicação prática na biologia. Funções exponenciais de base “e” são usadas para avaliar crescimento populacional de bactérias. Ora, como o T.F.A. pode avaliar raízes de polinômios não constantes, é possível construir algoritmos que calculam 150 casas do número “e” em tempo recorde: e isto é útil para o rigor de certas previsões biológicas a curto tempo, como mostram os trabalhos do professor L. Cruz-Filipe da Universidade de Radboud, Nijmegen, Netherlands(Holanda).

A cada ano, no outono, o departamento de matemática da Universidade do estado da Pensilvânia promove o MASS (Mathematics Advanced Study Semesters). O programa combina iniciação de pesquisa com aprendizagem avançada entre alunos e pesquisadores. O programa privilegia as áreas de Álgebra, Análise e Geometria. Há pouco tempo, em 2007, num Colóquio, no MASS, o Professor Khavinson, da Universidade do Sul da Flórida, em Tampa, Estados Unidos, apresentou o seguinte trabalho: “From the Fundamental Theorem of Álgebra to Astrophysics: A ‘ harmonius’ Journey”. Trata-se de estimar o número de imagens de uma estrela, se sua luz é desviada por **n** massas coplanares. Albert Einstein investigou o caso do desvio de luz em uma massa. Também, a palestra vesou sobre o número de imagens que se consegue observar de uma estrela numa galáxia elíptica. Acontece que, segundo o professor, uma extensão do T.F.A. são os polinômios harmônicos, os quais são usados para tais cálculos. Vale dizer que os polinômios harmônicos podem ser utilizados em situações de propagação (de onda, de calor, de luz, etc) em que o tempo pode ser considerado como um escoamento de forma extremamente lenta.

Portante, parece que a ciência, em geral, tem demonstrado que o futuro do T.F.A. pode não ter limites.

Realmente, o T.F.A. está no entrelaçamento de grande parte da ciência em geral.

Em 1993, na Universidade de Johns Hopkins,em colaboração com a Biblioteca Milton S. Eisenhorver, da Johns Hpkins, surgiu o projeto MUSE.

Esta Universidade dos Estados Unidos da América (Baltimore, Maryland), através deste projeto, tem publicado estudos nas áreas de literatura, ciências políticas, economia, história, medicina, história das ciências e artes.

A partir daí, então, surgiu, pelo MUSE, uma revista, na área de cienciada arte, chamada Leonardo. Em junho de 2005, o Professor Bahman Kalantari, publicou no volume 38, número 03, da Leonardo, o seguinte artigo: “Polynomiography: from the Fundamental Theorem ol Álgebra to Art.”

Bem, a polinomiografia é uma ponte entre o T.F.A. e a arte. Ela fornece ferramentas parra que artistas criem imagens 2D e 3D. São visualizações computacionais da interação de equações polinomiais. As imagens são geradas a partir das soluções das equações em que cada solução recebe coloraços diferentes (ou à critério do artista).

Ora, sendo assim, verificam-se que esta abordagem artístico-matemática pode ser utilizada na visualização de número complexos, fractais, interação de funções, sistemas dinâmicos e artes visuais.

Também, a polinomiografia pode ser usada no sentido inverso: a partir de um quadro é possível descobrir quais as melhores equações que poderiam modela-los. Com isto, por exemplo, a criptografia e a descoberta de códigos numéricos em geral, podem ser trabalhadas pela polinomiografia, cuja base é o T.F.A.

Portanto, parece que a ciência em geral tem demostrado que o futuro do T.F.A. pode não ter limites.

Realmente o T.F.A. está no entrelaçamento de grande parte da ciência em geral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, Ronald L. & Mills, Duncan W. Signal analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure. Wiley – IEE Press. 2004

Bashmajova, I.G. Leonhand Euler's Contributions to álgebra (russian). Developement of the ideas of Leonhand Euler and modern Science. Nauka (Moscow) 1988

Bekenback, E.F. An Introduction to the Theory of Neuromorfic Minimal Surfaces. 1987

Berlinghoff, Willian P. & Gouvêa, Fernando Q. Math Through the Ages. A Gentle History for Teachers and Others. Oxton House Publishers. 2003

Bix, Roberto. Conics and Cubics: a concrete introduction to albraic curves. Springer. 2nd edition. 2006

Bogolybov, N.N. & Mikhailov, G.K & Yushikevich, A.P. Editors. Euler and Modern Science. The MAA Tercentenary Euler Celebration Publisher. 2007

Bratton, Fred Gladstone. A history of Egyptian Archeology. New York: Thomas Y. Crowell Company. 1969

Brauer, R. Emil Artin. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967). 27-43

Burnside, William Snow. The Theory of Equations with an Introduction to the theory of Binary Algebraic Forms. Bibliobazzar. 2009

Butzer, P.L. in Mathematical Analysis, Warelets, anda Signal Processing. An International Conferente on Mathematical Analysis and Signal Processing. Cario University, Egypt. Ismail.

Cajori, Florian. A History of Mathematics. AMS Chelsea Publishing. Providence, Rhocle Island. 1999

Cajori, Florian. Uma História da Matemática. Ciência Moderna. 2007

Callaghan, Paul & Luo, Zhaohui & Mckinna, James & Pollack, Robert. Types for proofs and programs: International Workshop, Types 2000, Durhan, UK, December 8-12, 2000; Selected Papers. Springer. 2002

Clagett, Marshall. Ancient Egyptian Science, A Source Book. Volume Three: Acient Egyptian Mathematics (memoirs of the American Phylophical Society). Diane Publishing. 1999

Contador, Paulo Roberto Martins. Matemática uma breve história. Vol II. 3ª edição. Editora Livraria da Física. 2008

Dalen, Dirk Van. Mystic, geometer, and intuitionist : the life of L.E. K. Brover. Volume 1: The Dawning Revolution. Oxford. University Press. 2005

Daviv, Ann Rosalie. The pyramid Builders of Ancient Egypt. A Modern Ivestication of Pharaohs Workforce. Routledge & Kegan Paul plc. 1986

De Morgan, Angustus. Bridget of Paradoxes. Vol II. Cosino. New York 2007

Deakin, M.A.B D'alembert's serendipitous error. Austral. Math. Soc. Gaz. 18 (1) (1991)

Derbyshire, John. Unknown Quantity (Areal and imaginary history of algebra) . Joseh Henry Press. 2006

Edwards, Harold M. Galois Theory. Springer. 1984

Efron, Noah J. Judaism and Science: A historical Introduction (Greenwood Guides to Science and Religion). Greenwood Publishing Group. 2006

Englund, R.K. The state of deciplement of Proto-Elamite, in S. Houston, ed., The First Writing: Script Invention as History and Process Cambridge University Press. 2004

Fauvell, John & Gray, Jeremy. The history of Mathematic-A reader. The macmillian Pree Ltd. 1992

Fine, Benjamim & Rosemberger, Gerhard. The Fundamental Theorem of Álgebra. Springer. New York. 1977

Fisher, Stephen D. Complex variables: Second Edition. Dover Publication. 1999

Flood, Cavin. The Blackwell Companion to Hinduism. Cavin Flood Editor. Wiley – Blackwell Publishing. 2003

Fréchet, Maurice & Fan, Ky. Invitation to combinatorial topology. Dover Publication. 2003

Fryant, & Sarma, V.L.N. Gauss' first proof of the fundamental theorem of algebra. Math Student 52 (1-4) 1984

Fuller, A.T. Horner versus Holdred: an episode in the history of root computation History Match. 26 (1) (1999), 28-51

Gardner, M. Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Diversions from Scientific Americn. New York> Scribner's 1971.

Griffith, F.L.L. Hieratic Papyri from Kahum & Gurob. 1898

Gillings, Richard J. Mathematics in the time of the pharaohs. Dover Publications, Inc., New York. 1982

Guicciardini, Niccolo: Isaac Newton an Mathematical Certainty and Method. Massachusetts Institute of Technology. 2009

Hamburg, R.R The theory of quations in the 18th century: the word of Joseph Lagrange. Arch, History Exact Sci. 16 (1) (1976/1977).

Hauser Jr, Artthur A. Variáveis Complexas com aplicação a física. Livros Técnicos e Científicos. 1972

Hille, Einar. Analytic function theory, volume 1. American Mathematical Society; 2nd edition. 1959

Hoyrup, J. Bronze Age formal science? : With additional remarks on the historiography of distant mathematics. Proceedings for the conference "Foundations of the Formal Sciences IV, The History of the Concept of the Formal Sciences", Bonn, February. London: College Publications. 2003

Hoyrup, J. Lengths, widths, surfaces: a portrait of Old Babylonian algebra and its Kin. Berlim. Springer. 2002

Jahnke, Hans Niels (Editor). A history of Analysis (History of Mathematics V.24). American Mathematical Society. 2005

James, Ion Mackenzie History of Topology. Elsevier Science. 1999

Kaplan, Robert & Kasplan, Ellen. The nothing that is: A Natural History of Zero. Oxford University Pressa, U.S.A. 1999

Karpinski, Louis C. & Robbins, Frank E. Michigan Papyrus 620. the Introduction of Algebraic Equations in Greece. Science (Washington). 27 September 1929 . Vol 70 no 1813, pp 311-314

Klein, Felix. Development of Mathematics in the 19th Century. Math Sci Press. Brookline, Massachusetts. 1979

Kleiner, Israel. A history of abstract algebra. Birkhäuser Boston. 2007

Kline, Morris. Mathematical thought from ancient to modern times, volume 3. Oxford University Press. 1990

Kolmogorov, Andrei Nikolaevich & Yushkevich, André P (Editors) Grant, H. (Translaltor) & Sheinin, O.B (Translator) Mathematics of the 19th Century: Vol I: Mathematical Logic – Algebra – Number Theory – Probability Theory. Birkhauser 2nd edition. 2001

Kolmogorov, Andrei Nikolaevich & Yushkevich, André P (Editors) Grant, H. (Translaltor) & Sheinin, O.B (Translator) Mathematics of the 19th Century: Vol II: Geometry, analytic Function Theory. Birkhauser Basel. 1996

Laubenbacker, Reinhard & Pengelly, David. Mathematical Expeditions: Chrinicles by the Explores. (Undergratuate Texts in Mathematics). Springer. Corrected Edition. 2008

Lima, E.L. Curso de Análise Vol. 1. RJ: Projeto Euclides, IMPA. 2002

Luzin, N.N. Introduction to L. Euler’s letters to Z. Goldback. Russian. Istor.- Mat. Isslead. 16. 1965

Marie, Maximilien. Historie dês Sciences Mathématics et Physiques. Bibliolife. 2009

Nashed, Zayed and Ghaleb Editors. American Mathematical Society. Pp 1;20-22. 1994

Newton, Isaac. The Method of Fluxions and Infinite Series; With its Application to the Geometry of Curve-Lines. John Colson. 1736

Oliveira, A.K.G. Curso de Cosmologia. RJ: Observatório Nacional. 2008

Parker, Richard Anthony. A Mathematical exercise: P. Dem. Heidelberg 663. The Journal of Egypitian Archaelogy 61. 1976

Parker, Richard Anthony. Some dematic Mathematical Papyri. Centaurus, 15 (1) 1969

Petrova S.S From the history of the analytic the proofs off the fundamental theorem of álgebra (russian), in History and em Thodology of the natural sciences. No XIX: Mathematic, mechanics (Moscow, 1973)

Plofter, Kim. Mathematics in India, In Victor Katz, ed., The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a Sourcebook. Princeton: Princeton University Press. 2007

Pollock, D.S.G. A Handbook of time-series analysis, signal processing and dynamic. Academic Press. 1999

Rassias, George M. The Mathematical of C.F. Gauss: a collection of papers in memory of C.F. Gauss. World Scientific Publishing. Singapore. 1998

Robson, Eleonor (2003). Table and tabular formatting in Summer Babylonia and Assyria. 2500 BCESOCE in M. Campbell-Kelly, M. Croarken, R. Flood & E. Robson (Ed). The history of Mathematical tables from summer to srpread-sheets. Oxford University. Press Oxford. 2003

Roma, Inder K. From Numbers to Analysis World Scientific Publising. 1998

Ronan, Colin A. História Ilustrada da Ciência Vols II-III. Universidade de Cambridge. Círculo do Livro. São Paulo. Jorge Zahar Editor. 1987

Rosen, F. The Algebra of Mohammed ben Musa. Georg Olms Verlag. 1986

Ruiz, Angel. Historia y Filosofía de las Matemática. EUNED (Editorial Universidad Estatal a Distancia) Costa Rica. 2003

Schackenburg, H. Schackder Berliner Papurys 6619, Zeitschriftfür Agyptische.

Selin, Helaine (Author/Editor) Encyclopedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures. 2 Volume. Set 1997

Shapiro, Stewart. The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic. Oxford University Press, U.S.A. 2005

Shire, John Derby.Unknown Quatity: A Real and Imaginary History of Algebra. Joseph Henry Press. 2006

Sigler, L.E. Fibonacci's Liber Abaci. Leonardo Pisano's Book of Calculation. Springer. 2002

Smith, David Eugene. A Source book in mathematics. Dover Publication. 1984

Smith, David Eugene. History of mathematic. Vol. 2. Courier Dover Publicantions Edition: 2, illustraded. 1958

Sotomayor, Jorge. Um Poeta, um matemático, e um Físico: Três Ensaios Biográficos por Henri Poincaré. Eduup. 2007

Sprache, Vol 38 (1900) pp 135-140 and Vol 40 (192), p. 65

Stilluvell, John. Mathematics and his history, Springer, 2nd edition. 2004

Tannery, P. Albbert Girard di Saint-Mihiel Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 7. 1883

Taton, René (Direção). História Geral das Ciências. A Ciência Antiga e Medieval. Tomo I, Vols 1 e 3. Difusão Européia do Livro. São Paulo. 1959

Teresi, Dick. Descobertas perdidas. As raízes antigas da ciência moderna, dos babilônios aos mais. Editora Companhia das Letras. São Paulo. 2008

Thomas, David J. & Smith, Judith M. Joseph Raphson, F.R.S. Notes and Record of the Royal Society of London, Vol 44, no 2 (Jul., 1990), pp 151-167.

Tignol, Jean-Pierre. Galoi’s theory of algebraic equations. Word Scientific Publishing Company. 2001

Todhunter, Isaacc. An Elementary Treatise on the Theory of Equations, with a collection of examples Macmillan and Co. Cambridge. 1861

Van der Waeden, B.L. Geometry and Algebra in Anciente Civilizations. Springer Verlag. 1983

Van der Waerden, Bartel L. Science Awakeming II. Noordhoff Internatiocal publishing Leyton, the Netherlands: Noordoff Internacional Publishing. 1974

Vooys, C.J Imaginary numbers in Cardano (Dutch). Euclides (Croningen) 35 (1959/1960)

Westfall, R.S. The Life of Isaac Newton. Cambridge. 1999

Whittaker, E.T Works of Laplace Mathematical Gazette 33 (1949)

Wielandt, H. Hellmuth Kneser in memorian (German). Arquationes Mathematical 11 (1974)

APÊNDICE I

Registros de artigos publicados nos últimos 100 anos (até 2009 d.C.), envolvendo direta ou indiretamente o T.F.A.

Registro dos artigos do T.F.A. (1903 à 2009):

1. Yet Another Calculus Proof of the Fundamental Theorem of Algebra -Ralph Kopperman - The American Mathematical Monthly, December 2009, Vol. 116, Number 10, pp. 909.

2. Lagrange multipliers and the Fundamental Theorem of Algebra - Theo de Jong - The American Mathematical Monthly, November 2009, Vol. 116, Number 9, pp. 828-830.

3. A Simple Complex Analysis and an Advanced Calculus Proof of the Fundamental Theorem of Algebra - Anton R. Schep - The American Mathematical Monthly, January 2009, Vol. 116, Number 1, pp. 67-68.

4. The fundamental theorem of Algebra deduced from elementary Calculus - José Carlos Santos - The Mathematical Gazette, 2007, Vol. 91, Number 521, pp. 302-303.

5. Yet Another Application of the Gauss-Bonnet Theorem for the Sphere - (In this short note we prove the Fundamental Theorem of Algebra) - J. M. Almira and A. Romero - Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 14 (2007), pp. 341–342.

6. From the Cauchy-Riemann Equations to the Fundamental Theorem of Algebra - Alan C. Lazer - Mathematics Magazine, Vol. 79, No. 3, June 2006, pp. 210-213.

7. On the Fundamental Theorem of Algebra - T. E. Korner - The American Mathematical Monthly, April 2006, Vol. 113, Number 4, pp. 347-348, Jstor.

8. A Nonstandard Proof of the Fundamental Theorem of Algebra - George Leibman - The American Mathematical Monthly, October 2005, Vol. 112, Number 8, pp. 705-712, Jstor.

9. Another Proof of the Fundamental theorem of Algebra - Jose Carlos de Sousa Oliveira Santos - The American Mathematical Monthly, January 2005, Vol. 112, Number 1, pp. 76-78, Jstor.

10. Green's theorem and the fundamental theorem of algebra - Loya, Paul - Amer. Math. Monthly 110 (2003), no. 10, 944--946, Jstor.

11. Another topological proof of the fundamental theorem of algebra - Almira, J. M.; Jiménez, M.; Del Toro, N. - Elem. Math. 57 (2002), no. 1, 32--37, MathSciNet.

12. On the Fundamental Theorem of Algebra - Mays J. - Lithuanian Mathematical Journal, October 2002, vol. 42, no. 4, pp. 364-372(9), Ingenta.

13. Polynomial interpolation and a multivariate analog of the fundamental theorem of algebra. - Hakopian, H. A.; Tonoyan, M. G. - East J. Approx. 8 (2002), no. 3, 355--379, MathSciNet.

14. A graphical approach to understanding the fundamental theorem of algebra - Sudhir Kumar Goel, Denise T. Reid. - Mathematics Teacher Dec 2001 v94 i9 p749(1), Expanded Academic.

15. Une démonstration élémentaire du théorème fondamental d'algèbre. (French) [An elementary proof of the fundamental theorem of algebra] - Nakaoka, Akira - Mem. Fac. Engrg. Design Kyoto Inst. Tech. Ser. Sci. Tech. 50 (2001), 9--12 (2002), MathSciNet.

16. Fundamental theorem of albegra - yet another proof - Anindya Sen - The American Mathematical Monthly Nov 2000 v107 i9 p842(2), Expanded Academic.

17. On a kind of function equations and the fundamental theorem of algebra - Won Sok Yoo - Bull. Korean Math. Soc. 37 (2000), no. 4, 669--674, MathSciNet.

18. A forgotten paper on the fundamental theorem of algebra - Frank Smithies - Notes and Records Roy. Soc. London 54 (2000), no. 3, 333--341, MathSciNet.

19. The fundamental theorem of algebra: a constructive development without choice - Fred Richman - Pacific J. Math. 196 (2000), no. 1, 213--230, MathSciNet.

20. An elementary proof of the fundamental theorem of algebra - Martin Kochol - Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. 30 (1999), no. 4, 614--615, MathSciNet.

21. A simple proof of the fundamental theorem of algebra - John Byl - Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. 30 (1999), no. 4, 602--603, MathSciNet.

22. The Fundamental Theorem of Algebra - Michael D. Hirschhorn - College Math Journal: Volume 29, Number 4, (1998), Pages: 276-277.

23. Errata to: "On the fundamental theorem of algebra" [Colloq. Math. 73 (1997), no. 2, 193--194; MR 97m:30003]. - Diego Vaggione - Colloq. Math. 77 (1998), no. 2, 321, MathSciNet.

24. Another Proof of the Fundamental Theorem of Algebra (in Notes) - Daniel J. Velleman - Mathematics Magazine, Vol. 70, No. 3. (Jun., 1997), pp. 216-217, Jstor.

25. A Proof That Polynomials Have Roots - Uwe F. Mayer - College Math Journal: Volume 28, Number 1, (1997), Pages: 58.

26. On the fundamental theorem of algebra - Diego Vaggione - Colloq. Math. 73 (1997), no. 2, 193--194, MathSciNet.

27. An explicit proof of the fundamental theorem of algebra in the elementary theory of real numbers - Judit Robu - Modern applied analysis (Ilieni, 1997). Pure Math. Appl. 9 (1998), no. 1-2, 171--179, MathSciNet.

28. A theorem equivalent to Picard's Little theorem and a derivation of the fundamental theorem of algebra - Paula Kemp; Alexander Abian - Far East J. Math. Sci. 5 (1997), no. 4, 623--626, MathSciNet.

29. The fundamental theorem of algebra - Benjamin Fine; Gerhard Rosenberger - Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1997. xii+208 pp. ISBN: 0-387-94657-8, MathSciNet.

30. Why Polynomials Have Roots - Javier Gomez-Calderon; David M. Wells - The College Mathematics Journal, Vol. 27, No. 2. (Mar., 1996), pp. 90-94, Jstor.

31. Supersymmetry, vacuum statistics, and the fundamental theorem of algebra - Donald Spector - Comm. Math. Phys. 177 (1996), no. 1, 13--25, MathSciNet.

32. A probabilistic proof of the fundamental theorem of algebra and a generalization (Chinese) - Shun Long Luo - Math. Appl. 8 (1995), no. 4, 487--489, MathSciNet.

33. Vom Fundamentalsatz der Algebra zum Satz von Gelfand-Mazur," (German) [From the fundamental theorem of algebra to the theorem of Gelfand-Mazur] - Reinhold Vom Remmert - Math. Semesterber. 40 (1993), no. 1, 63--71, MathSciNet.

34. The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss - Josep Carrera - Publ. Mat. 36 (1992), no. 2B, 879--911 (1993), MathSciNet.

35. Euler and the Fundamental Theorem of Algebra - William Dunham - The College Mathematics Journal, Vol. 22, No. 4. (Sep., 1991), pp. 282-293, Jstor.

36. Plane Curves, Polar Coordinates and Winding Numbers - John A. Baker - Mathematics Magazine, Vol. 64, No. 2. (Apr., 1991), pp. 75-91, Jstor.

37. Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul intégral," (French) [On the history of the fundamental theorem of algebra: the theory of equations and integral calculus] - Christian Gilain - Arch. Hist. Exact Sci. 42 (1991), no. 2, 91--136, MathSciNet.

38. Gauss' first proof of the fundamental theorem of algebra - A. Fryant; V. L. N. Sarma - Math. Student 52 (1984), no. 1-4, 101--105 (1990), MathSciNet.

39. A theorem equivalent to the fundamental theorem of algebra - Alexander Abian; James A. Wilson - Nieuw Arch. Wisk. (4) 8 (1990), no. 1, 47--48, MathSciNet.

40. Finding Rational Roots of Polynomials (in Classroom Capsules) - Don Redmond - The College Mathematics Journal, Vol. 20, No. 2. (Mar., 1989), pp. 139-141, Jstor.

41. Graphing the Complex Zeros of Polynomials Using Modulus Surfaces - Cliff Long; Thomas Hern - The College Mathematics Journal, Vol. 20, No. 2. (Mar., 1989), pp. 98-105, Jstor.

42. Shorter Notes: On Gauss's First Proof of the Fundamental Theorem of Algebra - S. M. Gersten; John R. Stallings - Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 103, No. 1. (May, 1988), pp. 331-332, Jstor.

43. Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra als Anwendung des Spernerschen Lemmas," (German) [Proof of the fundamental theorem of algebra as application of Sperner's lemma] - Hermann Hering - Math. Semesterber. 34 (1987), no. 1, 65--70, MathSciNet.

44. A new proof of the fundamental theorem of algebra - A. Abian - Caribbean J. Math. 5 (1986), no. 1, 9--12, MathSciNet.

45. On the impossibility of a fixed point proof of the fundamental theorem of algebra - Alexandru Aleman - Seminar on mathematical analysis (Cluj-Napoca, 1985), 157--161, Preprint, 85-7, Univ. "Babecs-Bolyai", Cluj-Napoca, 1985, MathSciNet.

46. On fundamental theorem of algebra - S. Ghosh - Bull. Calcutta Math. Soc. 76 (1984), no. 6, 349--350, MathSciNet.

47. Zum Fundamentalsatz der Algebra (German) [On the fundamental theorem of algebra] - Hermann Hering - Elem. Math. 39 (1984), no. 2, 38--42, MathSciNet.

48. A Brouwer type coincidence theorem and the fundamental theorem of algebra - M. M. Dodson - Canad. Math. Bull. 27 (1984), no. 4, 478--480, MathSciNet.

49. Roots of Polynomials and Loci - Ali R. Amir-Moez - The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 14, No. 4. (Sep., 1983), pp. 313-317, Jstor.

50. A multivariable form of the fundamental theorem of algebra. - Salzberg, Pablo M. - Canad. Math. Bull. 26 (1983), no. 3, 271--272, MathSciNet.

51. Zum Fundamentalsatz der Algebra (German) [On the fundamental theorem of algebra] - Hans-Joachim Kowalsky - Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 35 (1983), 111--120, MathSciNet.

52. An Advanced Calculus Proof of the Fundamental Theorem of Algebra (in Classroom Notes) - Frank Forelli - American Mathematical Monthly, Vol. 88, No. 5. (May, 1981), pp. 347-348, Jstor.

53. Proof of the Fundamental Theorem of Algebra - J. L. Brenner; R. C. Lyndon - American Mathematical Monthly, Vol. 88, No. 4. (Apr., 1981), pp. 253-256, Jstor.

54. The fundamental theorem of algebra and complexity theory - Steve Smale - Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 4 (1981), no. 1, 1--36, MathSciNet.

55. Herausragende Einzelleistungen im Zusammenhang mit der Kreisteilungsgleichung, dem Fundamentalsatz der Algebra und der Reihenkonvergenz. (German) [Notable individual accomplishments in connection with the cyclotomic equation, the fundamental theorem of algebra, and series convergence] - Schneider, Ivo - Carl Friedrich Gauß (1777--1855), pp. 37--63, Wissenschaftsgeschichte, Minerva, Munich, 1981, MathSciNet.

56. Counterexamples from the Algebra of Polynomials over a Nonfield (in Mathematical) - Janet B. Pomeranz - The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 8, No. 1. (Jan., 1977), pp. 11-14, Jstor.

57. A proof of the fundamental theorem of algebra (Spanish) - José Manuel Bayod - Gac. Mat. (Madrid) (1) 29 (1977), no. 5-6, 107--110, MathSciNet.

58. Gauss and the fundamental theorem of algebra (Dutch) - R. C. F. Kooistra - Nieuw Tijdschr. Wisk. 64 (1976/77), no. 4, 173--175, MathSciNet.

59. The Fundamental Theorem of Algebra (in Classroom Notes) - Frode Terkelsen - American Mathematical Monthly, Vol. 83, No. 8. (Oct., 1976), p. 647, Jstor.

60. A new proof of the fundamental theorem of algebra Pivoting and extensions. - H. W. Kuhn - Math. Programming Stud. No. 1 (1974), 148--158, MathSciNet.

61. From the history of the analytic proofs of the fundamental theorem of algebra," (Russian) - S. S. Petrova - History and methodology of the natural sciences, No. XIV: Mathematics, mechanics (Russian), pp. 167--172. Izdat. Moskov. Univ., Moscow, 1973, MathSciNet.

62. A Note on the Geometry of Zeros of Polynomials - C. A. Long - Mathematics Magazine, Vol. 44, No. 3. (May, 1971), pp. 157-159, Jstor.

63. Open Mappings and the Fundamental Theorem of Algebra - R. L. Thompson - Mathematics Magazine, Vol. 43, No. 1. (Jan., 1970), pp. 39-40, Jstor.

64. The first proof of the fundamental theorem of algebra," (Bulgarian) - Svetlana S. Petrova - Fiz.-Mat. Spis. Bcdprime lgar. Akad. Nauk. 13(46) (1970), 205--210, MathSciNet.

65. The Fundamental Theorem of Algebra - Paul J. Campbell - Pi Mu Epsilon J., (1967), V. 4, No. 6, pp. 243-247.

66. An Easy Proof of the Fundamental Theorem of Algebra (in Classroom Notes) - Charles Fefferman - American Mathematical Monthly, Vol. 74, No. 7. (Aug. - Sep., 1967), pp. 854-855, Jstor.

67. Proof of the Fundamental Theorem of Algebra (in Classroom Notes) - S. Wolfenstein - American Mathematical Monthly, Vol. 74, No. 7. (Aug. - Sep., 1967), pp. 853-854, Jstor.

68. On the Fundamental Theorem of Algebra - Hans Zassenhaus - American Mathematical Monthly, Vol. 74, No. 5. (May, 1967), pp. 485-497, Jstor.

69. A constructive form of the second Gauss proof of the fundamental theorem of algebra - R. L. Goodstein - 1969 Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra (Proc. Sympos., Zürich-Rüschlikon, 1967) pp. 69--76 Wiley-Interscience, New York, MathSciNet.

70. Constructive aspects of the fundamental theorem of algebra - Bruno Dejon; Peter Henrici, Editors - Proceedings of a Symposium Conducted at the IBM Research Laboratory, Zürich-Rüschlikon, June 5-7, 1967. Wiley-Interscience A

Division of John Wiley & Sons, Ltd., London-New York-Sydney 1969 vii+337 pp., MathSciNet.

71. The fundamental theorem of algebra in recursive analysis. - Specker, E. - 1969 Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra (Proc. Sympos., Zürich-Rüschlikon, 1967) pp. 321--329 Wiley-Interscience, New York, MathSciNet.

72. The fundamental theorem of algebra for polyanalytic polynomials (Russian) - M. B. Balk - Litovsk. Mat. Sb. 8 1968 401--404, MathSciNet.

73. A proof of the "Fundamental theorem of algebra" by means of Galois theory and 2-Sylow groups - L. Horowitz - Nieuw Arch. Wisk. (3) 14 1966 95--96, MathSciNet.

74. What! Another Note Just on the Fundamental Theorem of Algebra? (in Classroom Notes) - R. M. Redheffer - American Mathematical Monthly, Vol. 71, No. 2. (Feb., 1964), pp. 180-185, Jstor.

75. Yet Another Proof of the Fundamental Theorem of Algebra (in Mathematical Notes) - R. P. Boas, Jr. - American Mathematical Monthly, Vol. 71, No. 2. (Feb., 1964), p. 180, Jstor.

76. The Fundamental Theorem of Algebra (in Classroom Notes) - J. E. Eaton - American Mathematical Monthly, Vol. 67, No. 6. (Jun. - Jul., 1960), pp. 578-579, Jstor.

77. Generalizations of the Fundamental Theorem of Algebra - M. Reichbach - Bull. Res. Council Israel Sect. F 7F 1958 155--164 (1958), MathSciNet.

78. The Fundamental Theorem of Algebra (in Mathematical Notes) - Raymond Redheffer - American Mathematical Monthly, Vol. 64, No. 8. (Oct., 1957), pp. 582-585, Jstor.

79. A new proof of the fundamental theorem of algebra (Chinese) - Heng-san Kao - Advancement in Math. 3 1957 608--611, MathSciNet.

80. On the fundamental theorem of algebra - T. Estermann - J. London Math. Soc. 31 (1956), 238--240, MathSciNet.

81. The Fundamental Theorem of Algebra (in Mathematical Notes) - S. Stein - American Mathematical Monthly, Vol. 61, No. 2. (Feb., 1954), p. 109, Jstor.

82. On the fundamental theorem of algebra - Kanesiroo Iseki - J. Math. Soc. Japan 6, (1954). 129--130, MathSciNet.

83. A Matric Proof of the Fundamental Theorem of Algebra for Real Quaternions (in Mathematical Notes) - Mark Leum; M. F. Smiley - American Mathematical Monthly, Vol. 60, No. 2. (Feb., 1953), pp. 99-100, Jstor.

84. Group Invariant Integration and the Fundamental Theorem of Algebra - Herbert Scarf - Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 38, No. 5. (May 15, 1952), pp. 439-440, Jstor.

85. A Correction A Topological Proof of the Fundamental Theorem of Algebra (in Mathematical Notes) - B. H. Arnold; Ivan Niven - American Mathematical Monthly, Vol. 58, No. 2. (Feb., 1951), p. 104, Jstor.

86. Extension of a Topological Proof of the Fundamental Theorem of Algebra (in Mathematical Notes) - Ivan Niven - American Mathematical Monthly, Vol. 57, No. 4. (Apr., 1950), pp. 246-248, Jstor.

87. A Topological Proof of the Fundamental Theorem of Algebra (in Mathematical Notes) - B. H. Arnold - American Mathematical Monthly, Vol. 56, No. 7. (Aug. - Sep., 1949), pp. 465-466, Jstor.

88. On the fundamental theorem of algebra III. - J. G. van der Corput - Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 49, (1946) 985--994 = Indagationes Math. 8, 605--614 (1946), MathSciNet.

89. On the fundamental theorem of algebra I, II. - J. G. van der Corput - Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 49, (1946) 722--732, 878--886 =Indagationes Math. 8, 430--440, 549--557 (1946), MathSciNet.

90. One More Proof of the Fundamental Theorem of Algebra (in Mathematical Notes) - N. C. Ankeny - American Mathematical Monthly, Vol. 54, No. 8. (Oct., 1947), p. 464, Jstor.

91. An Elementary Constructive Proof of the Fundamental Theorem of Algebra - P. C. Rosenbloom - American Mathematical Monthly, Vol. 52, No. 10. (Dec., 1945), pp. 562-570, Jstor.

92. The "fundamental theorem of algebra" for quaternions" - Samuel Eilenberg; Ivan Niven - Bull. Amer. Math. Soc. 50, (1944). 246--248, MathSciNet.

93. Exercise on the fundamental theorem of algebra (Norwegian) - Carl Størmer - Norsk Mat. Tidsskr. 24, (1942). 33--42, MathSciNet.

94. A comment on the essay "The fundamental theorem of algebra and intuitionism" - D. van Dalen - Math. Z. 46 (1940), 287--302, MathSciNet.

95. A Proof of the Fundamental Theorem of Algebra (in Questions, Discussions, and Notes) - R. P. Boas, Jr. - American Mathematical Monthly, Vol. 42, No. 8. (Oct., 1935), pp. 501-502, Jstor.

96. On the Fundamental Theorem of Algebra - W. Paul Webber - Mathematics News Letter, Vol. 7, No. 5. (Feb., 1933), pp. 9-13, Jstor.

97. On Certain Proofs of the Fundamental Theorem of Algebra - Robert E. Moritz - American Mathematical Monthly, Vol. 10, No. 6/7. (Jun. - Jul., 1903), pp. 159-161, Jstor.