

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Geometria: A Busca Pela Episteme Perdida**

RAFAEL TAVARES JULIANI

# GEOMETRIA: A BUSCA PELA EPISTEME PERDIDA

RAFAEL TAVARES JULIANI

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Coppe/IQ/IM, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2010

Juliani, Rafael Tavares.

Geometria: A Busca Pela Episteme Perdida/ Rafael Tavares Juliiani. - Rio de Janeiro: UFRJ/ HCTE, 2010.

x, 94f.: il.; 31 cm.

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

Dissertação (Mestrado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) – Coppe/IQ/IM, Universidade Federal do Rio de Janeiro, HCTE, Rio de Janeiro 2010.

Referências Bibliográficas: f. 85-88.

1. Axiomatização da Geometria 2. Filosofia da Matemática. I. Kubrusly, Ricardo Silva. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Institutos Coppe/IQ/IM, Pós-graduação e Pesquisa em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

III. Geometria: A Busca Pela Episteme Perdida.

**RAFAEL TAVARES JULIANI**

**GEOMETRIA: A BUSCA PELA EPISTEME PERDIDA**

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia pelo programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Coppe/IQ/IM, da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Prof. Dr. Ricardo Kubrusly, Coordenador do Programa.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Ricardo Silva Kubrusly (Orientador) – UFRJ

---

Prof. Dr. Carlos Benevenuto Guisard Koehler – UFRJ

---

Prof. Dr. Carlos Antônio de Moura – UERJ

Rio de Janeiro, 16 de dezembro de 2010.

## **Agradecimentos**

Eu gostaria de agradecer aos professores e aos companheiros do HCTE, que foram fundamentais para a realização dessa dissertação. Em especial, eu gostaria de agradecer a Zulena (HCTE), ao André Senra (HCTE) e ao César Milman pelas conversas que tivemos. Eu também gostaria de agradecer aos meus pais Marcos e Laura, a minha irmã Patricia e ao meu cunhado Januario, as minhas avós Maria e Aldair, ao meu avô Djalma, ao meu tio Jorge e a minha tia Dulce, ao meu tio Gilmar, ao meu sogro Remi e a minha sogra Lidia, ao meu cunhado Josué e a minha concunhada Jackelini e, é claro, a minha esposa Carla Fernanda pela compreensão e ajuda, por me apoiarem nesse mestrado do HCTE, pois todos nós sabemos das dificuldades dessa área no Brasil. E, por último e mais importante, eu agradeço a Deus.

## **Dedicatória**

A minha esposa Carla Fernanda Sander Juliani.

# Resumo

GEOMETRIA: A BUSCA PELA EPISTEME PERDIDA

Rafael Tavares Juliani

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Coppe/IQ/IM, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

A geometria, que antes apresentava enunciados verdadeiros sobre o espaço, passou, agora, a ser tratada apenas como um meio pelo qual organizamos o espaço. Por isso, o objetivo deste trabalho é mostrar essa mudança da episteme para o instrumentalismo. Para tal, é necessário analisar os *Elementos* de Euclides e suas diferentes edições, bem como o surgimento das geometrias não euclidianas e questões sobre a axiomatização. Uma pesquisa sobre este assunto não seria completa se não fosse abordada a problemática das relações entre o espaço e a experiência, ainda que enunciados matemáticos se mostrem imunes à experiência. Por isso, são levantadas questões de Kant e Poincaré. Por último, são comparadas duas axiomatizações da geometria euclidiana, a de Hilbert e a de Tarski, a fim de mostrar que mesmo apresentando uma semelhante concepção de objetos geométricos, não se pode dizer que uma é a correção da outra, dificultando ainda mais a busca da episteme do espaço.

Palavras-chave: Axiomatização da Geometria, Euclides, Hilbert, Tarski, Objetos Matemáticos, Episteme, Espaço, Teorias da Verdade.

Rio de Janeiro

Dezembro de 2010

## ***Abstract***

GEOMETRY: THE SEARCH FOR THE LOST EPISTEME

Rafael Tavares Juliani

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

*Abstract* da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Coppe/IQ/IM, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

The geometry, in ancient times, was the science that presented true statements about space. Now, it is treated only as a mean by which we organized space. Therefore the purpose of this work is to show this changing from episteme to instrumentalism. For such purpose, it is necessary to analyse The Euclid's Elements and its different editions as well as the appearance of non-euclidean geometries and issues about axiomatization. A research about this subject would not be complete if was not discussed the problems about the relations between space and experience, even if the mathematics seem to be immune to experience. Therefore Kant's and Poincaré's issues are discussed. At the end, the Hilbert's and Tarski's axiomatizations are compared in order to show that even with a similar conception about the geometric objects nobody can say that one corrects the other so the search for the episteme of space is even more difficult.

Keywords: Axiomatization of Geometry, Euclid, Hilbert, Tarski, Mathematical Objects, Episteme, Space, Theories of Truth.

Rio de Janeiro

Dezembro de 2010



## Sumário

<b>Introdução.....</b>	<b>7</b>
<b>1 Axiomatização e Demonstração na Matemática Grega.....</b>	<b>9</b>
1.1 Aristóteles e os Primeiros Princípios.....	11
1.1.1 Filosofia Matemática de Aristóteles.....	12
1.1.2 A Axiomatização Aristotélica.....	15
1.2 Os Elementos de Euclides.....	20
1.2.1 Uma Breve História do Texto Euclidiano.....	21
1.2.2 Axiomatização Euclidiana e as Divergências.....	22
<b>2 A Axiomatização do Espaço.....</b>	<b>30</b>
2.1 Algumas Tentativas de Demonstração do Quinto Postulado.....	32
2.2 O Fim do Modelo Único de Geometria.....	40
2.3 Conhecimentos A Priori.....	44
2.4 O Espaço e a Experiência.....	47
2.5 Teoria da Verdade.....	51
2.6 A Concepção Moderna da Axiomatização.....	53
2.7 Os Teoremas da Incompletude de Gödel.....	54
2.8 Mudanças Também na Lógica.....	55
<b>3 A Geometria Euclidiana por Hilbert e Tarski.....</b>	<b>61</b>
3.1 A Axiomatização de Hilbert.....	62
3.1.1 Axiomas de Conexão.....	63
3.1.2 Axiomas de Ordem.....	67
3.1.3 Axioma das Paralelas.....	69
3.1.4 Axiomas de Congruência.....	70
3.1.5 Axioma da Continuidade.....	72
3.1.6 Considerações sobre a Axiomatização de Hilbert.....	73
3.2 A Axiomatização de Tarski.....	74
3.2.1 Considerações sobre a Axiomatização de Tarski.....	80
3.3 Consequências.....	81
<b>Considerações Finais.....</b>	<b>82</b>
<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>85</b>
<b>ANEXO I.....</b>	<b>89</b>
<b>ANEXO II.....</b>	<b>92</b>
<b>ANEXO III.....</b>	<b>99</b>

## Introdução

A matemática é o lugar das certezas. Pelo menos, esse é o pensamento de muitas pessoas, seja na academia ou nas cabeças de pessoas leigas em ciências. De fato, salvo algumas dificuldades levantadas por certos teoremas de metamatemática, uma determinada matemática revela certezas universais, como por exemplo, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a dois ângulos retos. A expressão "uma determinada matemática" está bem colocada pelo fato de existirem sistemas matemáticos em que o exemplo citado a cima não é válido.

A axiomatização surge como a forma mais racional e clara de se organizar um conhecimento e os Elementos de Euclides é o exemplo de uma primeira axiomatização bem sucedida. A axiomatização não era apenas uma forma de organização, tornando possível diferentes formas de organização, mas a organização deveria ser única, pois uma diferente forma de axiomatizar atribuiria significados diferentes para os objetos do estudo em questão. Assim, alguma dessas axiomatizações – na verdade, todas, exceto uma – estariam tratando esses objetos com significados que não são os verdadeiros.

No grego antigo, faz-se distinção entre três termos: doxa, technê e episteme. A “doxa” é a opinião, a aparência, regida pelo "eu acho", não se tem a certeza e o pensamento é relativo, pois depende da opinião de cada um. A “technê” é a técnica, habilidade, o meio de se fazer, é o conhecimento técnico que se tem para fazer algo, mesmo não sabendo o porquê acontece, mas sabendo o como se faz. A “episteme” é o conhecimento verdadeiro e imutável. (Dizionario Greco Antico, 2010)

Durante muitos séculos, pensava-se que se um sistema matemático – mais especificamente, um sistema geométrico – afirmasse que o exemplo do triângulo citado fosse falso, então tal sistema não seria condizente com a realidade. Isso porque se acreditava que o nosso conhecimento sobre as características e as propriedades do

espaço já havia alcançado a episteme. Ou seja, o conhecimento contido nos *Elementos* de Euclides era epistêmico e, conseqüentemente, os objetos geométricos euclidianos também. Embora acreditassem que a geometria já havia alcançado a episteme, sempre existiram discussões sobre a natureza dos enunciados geométricos e até mesmo de como conhecemos os objetos geométricos. O pensamento platônico sobre os objetos da geometria (ou da matemática em geral) são bem diferentes do pensamento aristotélico, por exemplo. Dessas discussões surgiram as geometrias não euclidianas, intensificando mais ainda essas discussões.

A questão de se saber o que são os objetos matemáticos e se existe uma só matemática está em aberto ainda. Como se acreditava que a geometria havia alcançado a episteme e dela surgiram mais questões sobre os seus objetos, este trabalho aborda essa problemática com relação à geometria, dividindo-se em três partes mais a conclusão. Primeiro, serão apresentados e discutidos os aspectos da axiomatização grega e da axiomatização dos *Elementos* de Euclides, ou seja, esta primeira análise é feita no momento em que se estabelece a episteme da geometria. A segunda parte é justamente sobre o momento em que a geometria começa a “perder a episteme”, ou seja, o momento do surgimento das geometrias não euclidianas. Ainda na segunda parte, são levantadas questões sobre uma nova busca para a episteme geométrica, assim, são colocadas questões sobre o espaço e a experiência. A terceira parte apresenta e discute duas axiomatizações diferentes para a geometria de Euclides, ou seja, os objetos geométricos concebidos de forma clássica. Essas axiomatizações são a de Hilbert e de Tarski, mostrando a dificuldade de se estabelecer uma única forma de existência dos objetos geométricos.

# 1 Axiomatização e Demonstração na Matemática Grega

Aristóteles abre seu livro primeiro dos *Analíticos Posteriores* afirmando que qualquer instrução dada por meio de argumento procede de conhecimento anterior. Sua investigação parte de que as duas formas de raciocínio conhecidas como silogismo e indução necessitam de um conhecimento antigo para alcançar um novo.

Uma discussão sobre a argumentação, como essa, (estou usando argumentação como sinônimo de demonstração) surgiu porque a civilização grega chegou a um ponto de não se conformar com uma simples afirmação recebida pelo divino ou pela experiência, mas buscaram encontrar explicações através da razão. Muitos estudiosos tentam encontrar uma causa para essa forma de pensar grega e muitos apontam para a democracia como essa causa. Gostaria de sustentar uma hipótese (OS PENSADORES, 1996, p. 6 a 8), bem difundida também, que poderia ter incentivado não só a esse formato grego, que chamarei de ciência, mas também ao surgimento da democracia.

Nas epopéias homéricas, os deuses assumem o formato humano, mas não apenas o externo, eles possuem sentimentos e paixões humanas. Isso faz com que os deuses não sejam imparciais. Por que então confiar neles? Raciocinando dessa forma, ficava difícil sustentar uma forma de governo centralizada numa pessoa pela vontade divina. Também ficava difícil sustentar as causas da natureza com base nos deuses. Se nem com os deuses era possível alcançar a imparcialidade, era preciso “criar” um novo “deus” que não estivesse ligado às paixões e aos sentimentos, era preciso dar lugar a razão.

Quando buscamos, dentro da matemática, pelas causas que levaram os gregos a se prenderem a demonstração racional, encontramos três causas possíveis, todas envolvendo o infinito de forma direta ou indireta. A primeira seria que Tales e Pitágoras, por serem viajantes, teriam encontrado entre diferentes civilizações distintos valores para

a razão entre o perímetro e o diâmetro do círculo, o valor do número pi. Assim seria necessário mais rigor. A segunda seria a descoberta dos números irracionais e a terceira, os paradoxos de Zenão<sup>1</sup>. Isso mostraria que era necessário mais cautela e mais rigor.

Não estou tentando defender uma só visão para a origem da argumentação grega, seja ela externa ou interna à matemática. Acredito que todas essas visões estejam relacionadas e que tenham contribuído para o surgimento da ciência grega. É possível, e é o mais provável, que existam mais de uma causa. Essa ideia de uma História não linear, no sentido de existirem mais de uma causa, é a que eu usarei por toda dissertação, embora a narrativa seja linear.

so all Narrative is, by its nature, of only one dimension; only travels forward toward one, or toward successive points: Narrative is linear, Action is solid. Alas for our "chains," or chainlets, of "causes and effects," which we so assiduously track through certain hand-breadths of years and square miles, when the whole is a broad, deep Immensity, and each atom is "chained" and completed with all! <sup>2</sup>(CARLYLE, 1830 apud STERN, 1973, p.95)

Não temos indício de que esse sistema dedutivo grego de apresentar provas teve raiz em alguma cultura pré-helênica, embora muito tenha sido herdado dos babilônios e dos egípcios. No entanto, há discussões sobre o assunto, mas tal discussão desviaria o foco deste trabalho. Também, no intuito de manter o foco deste trabalho, analisarei o começo da ideia de axiomatização e a axiomatização da geometria, mas de nada discorrerei sobre outras axiomatizações, como a de Arquimedes por exemplo.

- 
- 1 Zenão escreveu uma série de paradoxos, os mais famosos são os paradoxos do movimento e o mais famoso deles é o paradoxo de Aquiles e a tartaruga. Aquiles, o maior corredor da antiguidade aposta corrida com uma tartaruga. Mas como a tartaruga é mais lenta, ela tem a vantagem de largar um pouco a frente. Zenão, então, nos diz que Aquiles nunca alcança a tartaruga, pois antes de alcançá-la, ele precisa alcançar a metade do caminho, mas antes de alcançar a metade do caminho, ele precisa alcançar a metade da metade do caminho e assim sucessivamente. Logo, ele não pode realizar uma tarefa infinita (passar por infinitos pontos) em um tempo finito.
  - 2 Assim toda narrativa é, pela sua natureza, de uma única direção; só viaja em direção de um ou de pontos sucessivos: a Narrativa é linear, a Ação, sólida. Infelizmente para nossas "cadeias" ou pequenas cadeias de "causas e efeitos", que nós tão constantemente seguimos por tanto tempo, quando o todo é amplo, imensidão profunda, e cada átomo é "encadeado" e completado com o todo.

## 1.1 Aristóteles e os Primeiros Princípios

Dentro do *Organum*, conjunto das obras de Aristóteles que versam sobre lógica, pode-se encontrar uma teoria axiomática. Para ser mais específico, essa teoria está descrita nos *Analíticos Posteriores*.

A ideia de que qualquer explicação procede de conhecimento anterior já era compreendida antes de Aristóteles. A partir dessa ideia, havia dois grupos de pensadores com posições diferentes sobre a possibilidade do conhecimento. O primeiro sustentava que o conhecimento não era possível, pois se é sempre necessário um conhecimento anterior, ou se caminharia em direção ao infinito e nunca se chegaria no sustento do conhecimento, ou então se admitiriam premissas primárias que não poderiam ser conhecidas, visto que elas não são demonstráveis, pois uma demonstração implicaria em conhecimentos anteriores. O segundo grupo afirmava que o conhecimento é possível. A partir das primeiras premissas chega-se nas conclusões e, então das conclusões tomadas agora como primeiras premissas, chega-se a novas conclusões que são as primeiras premissas tomadas inicialmente. É um raciocínio circular.

Aristóteles se opõe aos dois grupos. Ele faz uma distinção entre conhecer e demonstrar. As primeiras premissas não seriam conhecidas pela demonstração, mas por serem mais próximas do sensível, o que ele chama de premissa melhor conhecida e anterior a conclusão para o homem. Como uma conclusão está mais longe do sensível não possui a propriedade de ser melhor conhecida e anterior (primeira), ou seja, ela não é dada de imediato pelo sensível, por isso precisava de uma demonstração que partisse de uma premissa melhor conhecida, anterior a ela. Com isso, o estagirita<sup>3</sup> também não pôde aceitar a ideia do uso de um raciocínio circular, pois uma conclusão nunca poderia ser

---

<sup>3</sup> Estagirita é uma pessoa natural de Estagira, uma antiga cidade da Macedônia. O termo, aqui, se refere a Aristóteles.

tomada como uma premissa primeira, visto que ela não atende à exigência de ser a mais próxima do sensível.

A filosofia matemática de Platão sustenta que os objetos matemáticos são distintos dos objetos do mundo sensível. Obviamente, se Aristóteles compartilhasse a mesma opinião, ele não admitiria que premissas matemáticas fossem tidas como primeiros princípios, visto que a matemática só teria premissas distantes do sensível. Dessa forma uma axiomatização da matemática não seria possível segundo Aristóteles.

### **1.1.1 Filosofia Matemática de Aristóteles**

Aristóteles tem muitas obras sobre diversos assuntos, mas não tem nenhum sobre a matemática em específico. Sua filosofia matemática é dispersa em suas obras e busca resolver um problema colocado por Platão. A interpretação sobre a filosofia matemática de Aristóteles é controversa, por isso, não entrarei em detalhes.

Antes de entrar no pensamento aristotélico sobre os objetos matemáticos, iniciamos pelo problema colocado por Platão. No livro VI de *A República* (509d - 511e), ele apresenta uma conversa entre Sócrates e Glauco, na qual Sócrates pergunta se ele percebe as duas entidades: a visível e a inteligível. Glauco diz que sim e, então, Sócrates pede que ele represente as entidades como se fossem divididas, em secções desiguais, por uma linha imaginária e depois fazer uma outra divisão, na mesma proporção, em cada uma das secções. Uma das secções é o mundo das coisas visíveis e a divisão feita nesse mundo é de um lado as sombras e os reflexos dos objetos físicos e de outro, os objetos físicos propriamente dito. A outra secção é o mundo inteligível que, como o mundo sensível, está dividido em duas partes desiguais também. Uma parte seria a das hipóteses, da dialética como diz Glauco. Essa parte seria semelhante a parte dos reflexos e das sombras do mundo sensível. A segunda, é a parte das ideias, que são perfeitas e

imutáveis. Como Glauco não compreende muito bem, Sócrates usa a geometria como exemplo dessa parte das hipóteses, dizendo que os geômetras admitem por hipótese as figuras, três tipos de ângulos e coisas semelhantes. Sócrates atribui a essa busca, raciocínio com bases em hipóteses, a faculdade chamada de *dianoia*, que é diferente da *nous*, a contemplação da ideia.

A passagem anterior pode ser melhor entendida se analisarmos o que Sócrates diz sobre aqueles que praticam a matemática numa passagem mais a frente no livro VII:

“This at least,” said I, “will not be disputed by those who have even a slight acquaintance with geometry, that this science is in direct contradiction with the language employed in it by its adepts.” “How so?” he said. “Their language is most ludicrous, though they cannot help it, for they speak as if they were doing something and as if all their words were directed towards action. For all their talk is of squaring and applying and adding and the like, whereas in fact the real object of the entire study is pure knowledge.” “That is absolutely true,” he said. “And must we not agree on a further point?” “What?” “That it is the knowledge of that which always is, and not of a something which at some time comes into being and passes away.” “That is readily admitted,” he said, “for geometry is the knowledge of the eternally existent.” <sup>4</sup>(PLATÃO, A República – VII, 527a e b)

Sócrates mostra uma incoerência entre a linguagem praticada pelos matemáticos e aquilo o que realmente é a matemática. Mas, o que ela é realmente? Para Sócrates, a matemática (geometria) trata de objetos imutáveis, eternos, por isso, a incoerência em falar, por exemplo, de reta como um objeto físico, pois falamos de “retas” no plural, mas a ideia é uma só.

Segundo Marco Panza (PANZA, 2009, p.31), Sócrates não deixa claro a natureza dos objetos matemáticos, afinal, ele diz que tais objetos são imutáveis e eternos como no mundo inteligível, mas são tratados com uma linguagem de objetos temporais

---

<sup>4</sup> “Isso, pelo menos” digo eu, “não será contestado nem por aqueles que têm um ligeiro conhecimento de geometria, que esta ciência está em direta contradição com a linguagem empregada nela por seus adeptos.” “Como assim?” disse ele. “Sua linguagem é a mais ridícula, embora eles nada possam fazer, pois eles falam como se estivessem fazendo alguma coisa e como todas as suas palavras fossem dirigidas a ação. Pois toda a sua fala é de elevar ao quadrado e de aplicar e de adicionar e coisas parecidas, enquanto que o objeto real de todo o estudo é conhecimento puro.” “Isso é absolutamente verdade” disse ele. “E não devemos concordar num seguinte ponto?” “Qual?” “Que é o conhecimento daquilo que é sempre, e não de uma coisa que, as vezes, vem a ser e depois deixa de ser.” “Isso é prontamente admitido” disse ele, “pois geometria é o conhecimento do que existe eternamente.”



inevitavelmente (though they cannot hep it – anankaios). Para corroborar sua visão, Panza cita a passagem da *Carta Sétima*, na qual Platão fala de um quinto elemento que transcende a prática geométrica, segundo Panza, este quinto elemento é um desejo de unidade entre os outros quatro elementos:

Ciascuna delle cose che sono ha tre elementi attraverso i quali si perviene a conoscerla; quarto è la conoscenza; come quinto si deve porre l'oggetto conoscibile e veramente reale. Questi sono gli elementi: primo è il nome, secondo la definizione, terzo l'immagine, quarto la conoscenza. [...] Cerchio è una cosa che ha un nome, appunto questo nome che abbiamo ora pronunciato. In secondo luogo vi è la sua definizione, formata di nomi e di verbi. [...] Terzo è ciò che si disegna e si cancella, che si traccia con un compasso e che perisce; nulla di tutto questo subisce il cerchio in sé [...] Quarto è la conoscenza, l'intelligenza e l'opinione vera intorno a queste cose [...]. Di queste cose, l'intelligenza è la più vicina alla quinta in genere e somiglianza: le altre ne distano di più<sup>5</sup>. (PLATÃO, Carta Sétima, 342a-d apud PANZA, 2009, p.33)

Observamos que Platão faz uma distinção entre os objetos físicos e matemáticos, mas a natureza desses últimos não está clara. Como alcançamos o conhecimento matemático se ele não é conhecimento da nossa sensibilidade?

Aristóteles não compartilhava a mesma visão que Platão. Analisemos, pois, o seguinte trecho da *Metafísica*:

Thus we have sufficiently shown (a) that the objects of mathematics are not more substantial than corporeal objects; (b) that they are not prior in point of existence to sensible things, but only in formula; and (c) that they cannot in any way exist in separation. And since we have seen that they cannot exist in sensible things, it is clear that either they do not exist at all, or they exist only in a certain way, and therefore not absolutely; for "exist" has several senses.<sup>6</sup> (ARISTÓTELES, *Metafísica* – 1077b)

---

5 A cada uma das coisas que são, existem três elementos através dos quais se alcança o conhecimento dela; o conhecimento é o quarto; como quinto se deve pôr o objeto cognoscível e real de fato. Esses são os elementos: primeiro é o nome, segundo a definição, terceiro a imagem, quarto o conhecimento. [...] Círculo é uma coisa que tem um nome, precisamente este que falamos agora. Em segundo lugar, tem a sua definição, formada de substantivos e de verbos. [...] Em terceiro, é isso que se desenha e se apaga, que se traça com um compasso e perece. Nada disso tudo é o círculo em si. [...] Quarto é o conhecimento, a inteligência e a opinião verdadeira em torno a estas coisas [...]. Destas coisas, a inteligência é a mais próxima à quinta em gênero e semelhança: as outras são mais diferentes.

6 Assim, nós temos suficientemente mostrado (a) que os objetos da matemática não são mais substanciais que os objetos corpóreos; (b) que eles não são anteriores, em termos de existência, aos objetos sensíveis, mas somente em fórmula; e (c) que eles não podem, sobre modo algum, existirem de forma separada e uma vez que temos visto que eles não podem existir nas coisas sensíveis. Está claro que ou eles não existem por completo, ou existem somente em um certo sentido; pois "existir" tem muitos sentidos.

Aristóteles parece tomar uma posição nominalista, na qual os objetos matemáticos, se existirem, são apenas um modo de falar ou uma abreviação de objetos concretos. Apesar das controversas interpretações desse e de outros textos aristotélicos (PANZA, 2009, p.36 a 39) sobre o que seriam os objetos matemáticos caso eles existam, o que fica claro é que os objetos da sensibilidade, para Aristóteles, se relacionam com os objetos matemáticos. Essa relação não está clara nessa passagem, mas Aristóteles se refere ocasionalmente à abstração para formação dos objetos matemáticos, assim, a abstração talvez possa ser essa relação para ele. (STANDFORD, 2010)

### 1.1.2 A Axiomatização Aristotélica

Nas secções anteriores, vimos que Aristóteles defendia o uso de primeiros princípios como ponto de partida nas demonstrações, combatendo a regressão infinita e o círculo vicioso. Aristóteles deixou claro dois tipos de conhecimento: um imediato, evidente, que são os primeiros princípios e um outro adquirido através da demonstração, que são os teoremas. Agora, veremos como ele entendia esses primeiros princípios e o processo para se chegar nos teoremas.

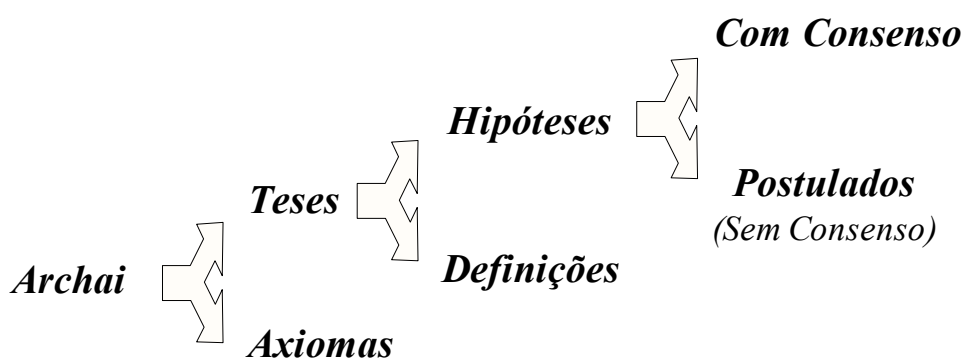
No segundo capítulo dos *Analíticos Posteriores*, Aristóteles faz distinção entre os primeiros princípios (*archai*) e que, segundo Szabó, parece fruto unicamente da cabeça do estagirita, pois não é algo comum nas axiomatizações gregas. (SZABÓ, 1913, p.229)

A primeira distinção é feita entre tese e axioma, sendo a tese uma verdade básica e imediata, não demonstrada por ser um primeiro princípio (*archai*) e Aristóteles ainda acrescenta que o aprendiz pode se manter ignorante quanto a tese<sup>7</sup>, pois isso não influenciaria no seu aprendizado. Um axioma, por sua vez, era o que um estudante devia

---

<sup>7</sup> É curioso Aristóteles dizer que o aprendiz não precisa conhecer a tese, mas o que ele parece querer dizer é que o aprendiz não precisa saber se uma tese é verdadeira ou não, isso talvez fosse tarefa de um estudo mais profundo como de um filósofo, por exemplo, pois que o aprendiz precisa conhecer o enunciado da tese para prosseguir com os seus estudos é evidente.

conhecer, pois, segundo ele, tais verdades (axiomas) existem. Um axioma era entendido como um *archai* comum entre as ciências e que regiam as cadeias demonstrativas (CAVEING, 1990, p. 119). Uma tese ainda podia ser, ou uma hipótese, ou uma definição (*horismo*). Quando uma tese afirmava a existência ou a não existência de algo, ela era chamada de hipótese, mas se não, era uma definição (*horismo*). Caveing acrescenta que uma hipótese era chamada de postulado (*aitema*) se não houvesse consenso quanto a ela (1990, p. 121) e era asserções sobre um assunto em questão: geometria. (HEATH, 1956, p. 123)



**Figura 1:** Divisão Entre Os Primeiros Princípios (Aristóteles).

As palavras “tese” e “hipótese”, como foi visto, não têm os significados como os atuais e, ainda, “axioma” e “postulado” são usados como sinônimos hoje em dia. E ainda mais, parece que Aristóteles procurava deixar mais claro o uso da palavra “hipótese” usada por Platão. Como defende Szabó (1913, p.224) , na seguinte passagem de *A República*, Platão usa “hipótese” como um primeiro princípio, mas seus exemplos, no entanto, são de termos que aparecem como definições nos *Elementos* de Euclides.

For I think you are aware that students of geometry and reckoning and such subjects first postulate the odd and the even and the various figures and three kinds of angles and other things akin to these in each branch of science, regard them as known, and, treating them as absolute assumptions, do not deign to render any further account of them to themselves or others, taking it for granted that they are obvious to everybody. They take their start from these,

and pursuing the inquiry from this point on consistently, conclude with that for the investigation of which they set out. <sup>8</sup>(PLATÃO, A República – VI, 510c e d).

No Grego, o termo que foi traduzido por “postulate” é *ὑποθέμενοι* (*ypothemenoi*) que significa “tomar como hipótese”, mas os exemplos citados: Par, ímpar, os três tipos de ângulos e figura são definições nos *Elementos*, assim “hipótese”, para Platão, teria o sentido de primeiro princípio e de definição. Embora Szabó cite só essa passagem, ele afirma que Próclo também usava “hipótese” com os dois sentidos e dá a entender que esse uso era mais comum em Platão, pois com a passagem acima, poderíamos, ao invés, concluir que os exemplos não eram definições no tempo de Platão.

Outro problema se coloca no uso, ou no entendimento, da palavra “hipótese”. Se tomarmos como base o que entendemos como as teorias do conhecimento clássicas de Platão e Aristóteles, o método hipotético-dedutivo e o arco do saber respectivamente, percebe-se a diferença de significado. O método hipotético-dedutivo de Platão partia de hipóteses, suposições. Não era necessário ser uma verdade, pois sua aceitação dependia da dedução lógica, assim, se tal hipótese acarretasse algo falso, seria falsa e novas hipóteses eram feitas, caso contrário, ela seria uma verdade, uma explicação da natureza. Já o arco do saber aristotélico partia da observação da natureza, fazia-se uma indução, chegando-se a uma verdade universal. Através de deduções lógicas que partiam dessas verdades se chegava a uma explicação da natureza (PINGUELLI, 2005, p. 83 e 84). Como para Aristóteles, a matemática partia dos objetos sensíveis (observação da natureza), esses primeiros princípios chamados de “hipóteses” por ele, não parecem ter um caráter de suposição como em Platão. No entanto, o arco do saber de Aristóteles usa a indução para se chegar às verdades universais e os objetos matemáticos, para ele,

---

<sup>8</sup> Pois eu acho que você está ciente de que os estudantes de geometria e aritmética e semelhantes assuntos, primeiro postulam o ímpar e o par e as várias figuras e três tipos de ângulos e outras coisas semelhantes a essas em cada ramo da ciência, consideram-nos como conhecidos e, tratando-os como pressupostos absolutos, não dignam-se a prestar qualquer conta a mais deles para si ou para outrem, tomando-os como certo de que eles são óbvios para todo mundo. Eles os tomam como o início, e seguindo a investigação a partir desse ponto de forma consistente, concluem com o objeto da investigação da qual eles partiram.

ainda que controverso, era obtido através da abstração. Contudo, lendo os escritos de Aristóteles, não parece que seja diferente o caráter de verdade atribuído por ele para as hipóteses alcançadas pelas diferentes formas: abstração e indução.

E ainda mais uma questão se coloca quanto ao uso de “hipótese”: que tipo de existência, uma hipótese declara? Pois sabemos que para Aristóteles, os objetos matemáticos mantêm uma relação com os objetos sensíveis, eles existem em potência nos objetos da sensibilidade. (CAVEING, 1990, p. 121)

As demonstrações, partindo-se dos primeiros princípios e chegando-se nos teoremas, eram feitas através da dedutibilidade lógica, embora Aristóteles nunca tenha definido o que era uma dedução lógica, ele expõe a sua teoria dos silogismos, que é basicamente a teoria da lógica aristotélica (RAGGIO, 2003, p. 98 e 99). Aristóteles define uma premissa como sendo uma sentença que afirma ou nega uma coisa de outra, podendo ser universal, particular ou indeterminada<sup>9</sup>. As premissas universais são aquelas que usam os quantificadores “todos” ou “para todo” enquanto as particulares usam o vocábulo “algum”, “alguns” ou “existe”. Depois de discorrer sobre as premissas, ele define o que é silogismo se valendo da ideia de discurso, ou seja, um conjunto de premissas, dizendo que um silogismo é um discurso em que certas coisas são declaradas e o que é declarado segue da necessidade das premissas. De uma forma mais simples, um silogismo é um discurso que de duas premissas se produz uma consequência necessária. (ARISTÓTELES, Analíticos Primeiros, I)

Com o tempo, as premissas particulares e universais, tanto afirmativas quanto negativas, receberam uma letra com a finalidade de abreviar e facilitar o estudo. Por exemplo, uma premissa universal afirmativa era representada pela letra “A”, já uma universal negativa, pela letra “E”. As premissas particulares eram representadas pelas

---

<sup>9</sup> Para ilustrar as premissas indeterminadas, Aristóteles usa “Prazer não é bom”.

letras “I” e “O” para as afirmativas e negativas respectivamente<sup>10</sup>. Assim, um silogismo da forma “AAA” era um discurso com as premissas e a conclusão sendo universais afirmativas. Como existem várias formas de silogismos válidos, ficava difícil decorar muitos como uma sequência de vogais, por isso, acrescentaram consoantes entre as vogais com o intuito de formar palavras para uma melhor memorização. A forma “AAA”, citada acima, ficou conhecida como o silogismo “Barbara”, um exemplo para tal silogismo é: todos os homens são mortais (A), todos os gregos são homens (A), então, todos os gregos são mortais (A).

Da axiomatização aristotélica podemos observar algumas características (RAGGIO, 2003, p. 96 e 100):

- Os enunciados que compõem uma área do conhecimento são divididos em primeiros princípios e teoremas e os conceitos dos enunciados são divididos em fundamentais e derivados;
- Os primeiros princípios devem ser evidentes, e por isso, indemonstráveis. Também devem ser suficientes para que deles se deduza todos os teoremas somente com o uso da lógica;
- Os conceitos fundamentais devem ser imediatamente compreensíveis, e por isso, indefiníveis. Também devem ser suficientes para que deles se deduza todos os conceitos derivados somente com o uso da lógica;
- Os primeiros princípios devem ser enunciados necessários.
- A obrigatoriedade de uma homogeneidade ontológica. Aristóteles não ignora os pensamentos teóricos, que são vazios quanto a uma ontologia, mas os considera como secundários. Ou seja, para ele, os enunciados só

---

10 O uso dessas letras vem das palavras latinas **A**ffirmo e **nEgO** (COPI, 1969, p. 127).

podiam conter as constantes lógicas e constantes com conteúdo ontológico;

- A obrigatoriedade de uma evidência e de uma necessidade. A evidência de verdade de um primeiro princípio provem diretamente da intelecção dos conceitos envolvidos em tal princípio. A evidência é obrigatória porque, para Aristóteles, a relação entre os princípios e os teoremas não é relativa a um sistema, mas sim, absoluta. E Sendo os primeiros princípios necessários, as conclusões, obtidas através da lógica, também serão necessárias, e não hipotéticas;
- O caráter implícito da lógica subjacente;
- A exigência de finitude. Não podemos demonstrar tudo, pois precisamos de já conhecer alguma verdade para demonstrar outra e, também, não podemos fazer uma regressão ao infinito, por isso a necessidade de um número finito de primeiros princípios indemonstráveis.

## 1.2 Os Elementos de Euclides

Os *Elementos* de Euclides, por mais de dois milênios, foi o padrão daquilo que deveria ser ciência, por causa da maestria com que a geometria é axiomatizada. Além disso, é um dos livros mais vendidos e editados no mundo, só perdendo para a Bíblia (BOYER, , p. ). Os *Elementos* está dividido em treze livros. Do primeiro ao quarto é tratada a geometria plana sem o uso das proporções. O quinto livro contém a teoria das proporções, já no sexto, Euclides faz uma aplicação das proporções à geometria plana apresentada anteriormente. Os livros: sétimo, oitavo e nono são sobre o que hoje chamamos de teoria dos números<sup>11</sup>. O décimo livro trata sobre os irracionais, as retas

---

<sup>11</sup> A palavra “número” (arithmos) corresponde aos inteiros positivos maiores e iguais a 2, pois os gregos chamavam o “1” de “a unidade”, e não número e também não tinham um conceito de número negativo. Além disso, por mais que consideremos o “zero” como natural, os gregos não tinham um conceito de “zero”.

incomensuráveis. No livro décimo primeiro, Euclides apresenta uma generalização para a terceira dimensão da geometria plana estudada nos livros um e seis e as propriedades dos sólidos elementares. O livro décimo segundo estuda o círculo, a pirâmide, o cone e a esfera. O décimo terceiro, e último livro, trata dos poliedros regulares inscritos na esfera (CAVEING, 1990, p. 18 e 19).

Antes de uma análise da axiomatização feita por Euclides em seus *Elementos*, eu apresentarei alguns aspectos, bem resumidos, referentes à história do texto euclidiano.

### 1.2.1 Uma Breve História do Texto Euclidiano

O que sabemos do texto dos Elementos de Euclides vem de tradições diretas e indiretas. Os manuscritos e papiros contendo partes e o texto completo fazem parte do que chamei de tradição direta, já as citações e as traduções correspondem as tradições indiretas. Os dois manuscritos completos mais antigos são o da Biblioteca do Vaticano (Vaticanus gr. 190 – **P**<sup>12</sup>) – o mais antigo – e o da Biblioteca Bodleiana (D'Orville 301 - **B**), Oxford. Os dois são do nono século da nossa era, ou seja, são de mais de mil anos após o original, considerando que houve um original escrito de fato por Euclides (séculos três e quatro antes de Cristo). Existem fragmentos de papiros mais antigos, sendo o mais próximo de Euclides os fragmentos do século primeiro *anno domini*. (VITRAC, 2006, p. 4 a 6).

Seja por erros de copistas, acréscimos de estudiosos ou, até mesmo, mudanças por questões filosóficas, a verdade é que existem divergências entre os elementos das tradições diretas e também entre os das tradições indiretas. Entre os dois manuscritos completos mais antigos existe uma primazia, hoje em dia, em favor do manuscrito do Vaticano (**P**), pois os demais manuscritos são de uma edição de Teon de Alexandria, o

---

12 A designação “**P**” para o manuscrito da biblioteca do Vaticano é em homenagem a Peyrard, o qual descobriu que tal manuscrito não era uma cópia da edição de Teon.



qual viveu nos séculos quatro e cinco da nossa era. Teon, em seu comentário sobre o *Almagesto* de Ptolomeu, escreve que ele mesmo demonstrou a proposição, que se encontra em sua edição dos *Elementos*, sobre a qual os setores de círculos iguais estão para os ângulos em que eles se encontram, que é a proposição 33 do livro VI. Tal proposição não se encontra no manuscrito **P**, nem mesmo qualquer inscrição semelhante a “edição de Teon”, por isso, acredita-se que o manuscrito *Vaticanus* seja uma cópia de um manuscrito desconhecido diferente e anterior à edição de Teon. (HEATH, 1932)

A edição latina de Commandino dos *Elementos* (1572) foi baseada em manuscritos Teoninos (HEATH, 1932) e nela se encontram 35 definições, 3 postulados e 12 axiomas (COMMANDINO, 1855), já na edição de Heiberg, que tomou por base o manuscrito **P**, tem 23 definições, 5 postulados e 9 axiomas, mas em sua tradução latina ele só considera 5 axiomas (HEIBERG, 1896).

## 1.2.2 Axiomatização Euclidiana e as Divergências

Euclides divide os *Elementos* em dois grandes grupos como fez Aristóteles: primeiros princípios e proposições (teoremas). No entanto, sua divisão dos primeiros princípios não é idêntica àquela de Aristóteles. Os *archai* de Euclides são divididos em definições, postulados e noções comuns. Normalmente, identifica-se o termo “axioma” como um correspondente de “noções comuns”<sup>13</sup>, pois Próclo diz que Aristóteles e os geômetras consideravam como a mesma coisa (HEATH, 1956, p. 120 e 121). Assim, continuando a correspondência com o restante dos termos aristotélicos, ficam sobrando as “hipóteses com consenso”, que, segundo Caveing, Aristóteles admite que podem ser usadas de forma tácita e, de fato, Euclides parece ter usado desta forma, pois em

---

13 Apesar da crítica quanto a palavra “noções” (*ennoiai*) como sendo uma palavra com sentido vago em Platão e Aristóteles (HEATH, 1956, p. 221), este último usou como sinônimo de “axioma” os termos “coisas comuns” (*ta koina*) e “opiniões comuns” (*koinai doxai*), assim, Euclides pode ter preferido usar “noção” a “opinião” ou “Coisa” (HEATH, 1956, p. 120)

nenhuma parte, ele diz sobre a existência da “unidade aritmética” e da “grandeza geométrica”, existências nunca questionadas na matemática grega (CAVEING, 1990, p.121). Vemos assim que Caveing não considera a axiomatização euclidiana como uma realização a parte da teoria aristotélica. Mas Szabó afirma que a correspondência entre “postulados” no sentido de Euclides e “postulados” (hipóteses), no de Aristóteles, não é idêntica (SZABÓ, 1913, p. 230). Antes de entrar na questão de Szabó, analisemos os significados que foram atribuídos ao vocábulo “postulado” (*aitema - aitemata*).

O sentido de “postulado” dado por Aristóteles já foi visto a cima, seria uma hipótese (afirma a existência de algo) sem consenso e referente à geometria. Próclo entendia os postulados como algo que nos conduzisse à ação, ao uso de instrumentos para construção de objetos geométricos (HEATH, 1956, p. 123). A palavra “postulado” se origina na dialética e significa “pedir”. Durante o debate, um dos participantes pedia que algo fosse aceito para poder prosseguir (SZABÓ, 1913, p. 269 e 270). Agora vejamos a redação dos postulados<sup>14</sup>:

1. É pedido que se leve uma linha reta de qualquer (todo)<sup>15</sup> ponto para qualquer (todo) ponto.

A redação desse postulado não parece trazer problemas para as concepções a cima, pois é um enunciado de geometria e nos conduz à ação. Além disso, muitos consideram como uma garantia de existência da reta (SZABÓ, 1913, p. 272). Outra coisa que podemos notar, é que não se postula a unicidade de um segmento de reta entre dois pontos, mas é admitido na proposição 4 do primeiro livro, o que originou a noção comum 9 que aparece no manuscrito do Vaticano, pois sua redação é: “E duas retas não formam

---

14 Tradução minha a partir da tradução de Vitrac da edição de Heiberg. (VITRAC, 1990, p. 167 a 178)

15 As traduções moderna utilizam “todo” ao invés de “qualquer” e, de fato, é literalmente “todo” (HEATH, 1956, p. 195). Mas eu prefiro “qualquer” por ser mais comum à linguagem atual da matemática e, por isso, mais claro.

uma área”; isso é exatamente o que aparece na proposição 4. Heath, no entanto, afirma que a unicidade da reta surge da junção desse postulado com a definição de reta (1956, p. 195 e 196), assim, seria supérfluo postular a unicidade, contudo, o próprio Heath admite que o melhor seria postular a unicidade.

2. E que se prolongue continuamente em linha reta uma linha reta limitada.

Esse postulado também se enquadra bem nas concepções do sentido da palavra “postulado”. Em questão de afirmar uma existência, é aquela da não finitude da reta.

3. E que se descreva um círculo a partir de qualquer (todo)<sup>16</sup> centro por meio de qualquer (todo) intervalo.

Esse terceiro postulado garante a existência do círculo e também se encaixa bem nas demais concepções. Nos dois seguintes postulados, é que encontraremos alguma dificuldade.

Szabó defende que esses três postulados já deviam ser conhecidos antes da época de Euclides (SZABÓ, 1913, p. 273 a 276). Para isso, são analisadas duas passagens de Próclo, na qual Oenopídes recebe o crédito por resolver dois problemas de geometria. Tais problemas são: traçar uma linha perpendicular a uma reta infinita dada a partir de um ponto dado fora da reta dada; e em uma linha reta dada e em um ponto nela, construir um ângulo reto igual a um ângulo reto dado. Esses dois problemas são as proposições 12 e 23 respectivamente, presentes no primeiro livro dos *Elementos*. O último problema é creditado a Oenopídes por Eudemo, segundo nos conta Próclo. Szabó alega que são problemas simples demais para a época de Oenopídes, assim, não seria digno de nota destacada, afinal, a geometria de Hipócrates de Quios era altamente

---

<sup>16</sup> Veja a nota 8.

desenvolvida e Oenopídes não era muito mais velho que Hipócrates. Dessa forma, Szabó propõe que interpretemos de uma forma diferente, assumindo, como possíveis, três hipóteses de Heath: Talvez Oenopídes tenha sido o primeiro a resolver o problema só com o uso de régua e compasso; ou ele tenha sido o primeiro a ter dado uma construção teórica ao invés de prática; ou ainda, que ele tenha feito algumas melhorias na teoria. A hipótese de uma construção teórica ou uma melhoria na teoria é bem plausível, visto que construções práticas eram conhecidas de longas datas. Para resolver esses problemas de forma teórica são necessários os três primeiros postulados, logo, eles já eram conhecidos antes de Euclides.

#### 4. E que todos os ângulos retos sejam iguais entre eles.

O quarto postulado parece não estar de acordo com a ideia de ação, embora geralmente ele seja interpretado como a garantia de igualdade da ação de igualar dois ângulos adjacentes (BARKER, 1969, p. 31). No entanto, a compreensão sobre esse postulado é difícil, visto que ele não aparece de forma direta nas demonstrações de livro algum. Beppo Levi chega a propor uma outra explicação para o postulado<sup>17</sup>, mas reconhece ausência de comprovação no texto de Euclides (LEVI, 2008, p.106). Próclo não considera como um postulado, pois não nos leva à ação (HEATH, 1956, p. 200). Essa falta de ação é que deve ter feito esse postulado aparecer entre os axiomas nas edições baseadas nos manuscritos teoninos.

#### 5. E que, se uma reta cair sobre duas linhas retas fizer os ângulos interiores e do mesmo lado inferior a dois retos, as duas retas, indefinidamente prolongadas, se encontram no lado onde os ângulos são menores do que dois retos.

---

<sup>17</sup> Ele considera que o quarto postulado possa ter sido incluído para ser usado nas transposições de figuras.

O quinto postulado é conhecido por “postulado das paralelas” e é muito famoso, dele falaremos mais no próximo capítulo. Por agora, é suficiente notar que ele também é diferente dos três primeiros e nos manuscritos teoninos ele é classificado como um axioma. Alguns dizem que ele afirma a existência de pontos de intercessão (SZABÓ, 1913, p. 272).

Após verificarmos os sentidos atribuídos a palavra “postulado” e os postulados de Euclides, podemos entender porque Szabó aceita uma correspondência entre os postulados de Euclides e os de Aristóteles (hipóteses), mas diz que estão longe de serem idênticos. Entender o real sentido de “postulado” no sentido de Euclides parece bem difícil, ainda mais pela natureza diversa dos enunciados. Se considerarmos os 5 como postulado, a ideia que se aplica melhor é que eles são enunciados de geometria. De fato, a existência exigida por Aristóteles não parece ser desse tipo construtivo de Euclides. Aristóteles diz que a existência da unidade na aritmética e do ponto e da linha na geometria é assumida pelos matemáticos e que, a partir disso, eles provam a existência do número par e ímpar, no entanto, Euclides define número par e ímpar, mas não prova sua existência em lugar algum. (SZABÓ, 1913, p. 230)

No manuscrito **P** aparecem 9 axiomas, enquanto nos teoninos 12, mas desses 12, 2 são os postulados de número 4 e 5 que não parecem entre a lista de postulados dos teoninos, assim são 10 no total e irei listar abaixo<sup>18</sup>:

1. As coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. Se em coisas iguais se juntarem outras iguais, o todo será igual.
3. E, se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais.  
(esse axioma é usado como exemplo por Aristóteles em diversas passagens dos seus escritos)

---

<sup>18</sup> Adaptação minha para português brasileiro da tradução portuguesa da versão latina de Commandino de um manuscrito teonino. (COMMANDINO, 1855)

4. E, se a coisas desiguais se ajuntarem outras iguais, os todos serão desiguais.
5. E, se de coisas desiguais se tirarem coisas iguais, os restos serão desiguais. (esse axioma não está presente no manuscrito do Vaticano, só os outros 9)
6. As quantidades, das quais cada uma por si faz o dobro de outra quantidade, são iguais.
7. E aquelas, que são metades de uma mesma quantidade, são também iguais.
8. Duas quantidades, que se ajustam perfeitamente uma com outra, são iguais.
9. O todo é maior do que qualquer das suas partes.
10. Duas linhas rectas não compreendem espaço.

Os axiomas 1, 2, 3, 8 e 9 são os aceitos, hoje em dia, como sendo de Euclides e os demais, interpolações no texto. Esses 5 axiomas são afirmados e defendidos por Próclo (HEATH, 1956, p. 223).

Os dois axiomas sobre desigualdade, os de número 4 e 5, devem ter sido uma adaptação de um comentário de Pappus, adicionado após o axioma 7. Próclo e Simplicio apresentam uma prova para eles (HEATH, 1956, p. 224).

Os axiomas 6 e 7 são considerados supérfluos por serem derivados do segundo, embora precise de um pouco mais de argumento, visto que a demonstração do sétimo é por redução ao absurdo e o absurdo seria que uma das metades é maior que a outra, no entanto, tanto o segundo quanto o sexto não falam de desigualdades (HEATH, 1956, p. 224).

O axioma 10 é o nono do manuscrito **P** e que provavelmente foi inserido para garantir a unicidade da reta entre dois pontos como foi dito a cima quando analisávamos o primeiro postulado. No entanto, essa redação é bem estranha, mas o que eles queriam afirma é que duas retas postas uma em cima da outra coincidem, ou seja, não possui um espaço entre elas.

O meu intuito era apresentar as idéias axiomáticas que surgiram na antiga Grécia e mostrar que não houve um consenso desde o começo. Por isso, eu não quis mostrar as diferenças nos manuscritos dos *Elementos* que não fossem referentes aos postulados ou aos axiomas<sup>19</sup>. Acréscimos ou falta de teoremas e palavras não é o meu ponto. As pessoas leem nos livros sobre os elementos, por exemplo, que ele tem 5 postulados e 5 axiomas, e não imaginam que, não só o texto, mas até essa divisão é fruto de filólogos. Embora, muito de nós estejamos convencidos de que foi assim que Euclides fez, nós não temos como saber ao certo. Ou seja, as diversas axiomatizações da geometria que temos hoje não chega a ser algo exclusivo do nosso tempo. Não existe um “Euclides” conservado por mais de 2 mil anos, mas vários “Euclides” que transformamos em um.

Aristóteles ilustra os seus textos, diversas vezes, com exemplos matemáticos. O estagirita nos mostra que a axiomatização da matemática já era bem desenvolvida no seu tempo, pois ele cita, por exemplo, que a existência e os significados de unidade, ponto e linha são assumidos pelos matemáticos, mas de seus atributos (Par, ímpar, quadrado, cubo, incomensurabilidade) só são assumidos os significados, a existência deles precisa ser provada através dos axiomas e de conclusões anteriores (ARISTÓTELES, Analíticos Posteriores, I - 10). De fato, sabe-se que houve outros elementos de geometria antes de Euclides, como o de Hipócrates de Quios, por exemplo (BOYER, , ). Além disso, vimos que Oenopídes já tinha conhecimento dos três primeiros postulados euclidianos, resolvendo problemas geométricos de forma abstrata. Sendo assim, podemos perceber

---

<sup>19</sup> Para uma lista completa das definições dos manuscritos teoninos e do Vaticano, consulte o anexo I.

que a abordagem lógico-dedutiva dos *Elementos* de Euclides não era nova. Por que então a obra euclidiana se tornou tão popular e louvada? Alguns dizem que ele deve ter acrescentado mais proposições, feito melhorias e deixado de forma mais organizada. Tudo isso pode ser verdade, mas, talvez, o fator principal possa ser outro.

Os pioneiros, seja em qualquer área, precisam dar mais explicações do que os que virão em seguida, assim, os primeiros autores de elementos deviam carregar seus textos com explicações do método, dos termos, etc. Euclides não oferece qualquer explicação ou aborda qualquer tipo de filosofia explicitamente no seu texto. Nós observamos que nunca existiu um consenso quanto aos significados dos termos e nem uma filosofia clara sobre o que seriam os objetos matemáticos desde os tempos pré-euclidiano, logo, ele não deve ter omitido porque era claro para todos, sua omissão, porém, fosse talvez, para não se comprometer muito e abranger pessoas de diferentes correntes filosóficas. E, de fato, os *Elementos* era arrumado da forma que cada um achava que devia ser. Outra vantagem seria a maior facilidade em usar o livro como consulta, pois seria muito mais fácil encontrar uma proposição ou postulado em um texto enxugado do que em um com muito texto de explicações.

Essa teoria seria mais plausível ainda, se a observação de Tannery (matemático e historiador da matemática) sobre as incoerências de terminologia dos *Elementos* fosse correta como defendeu Szabó (SZABÓ, 1913, p. 231 e 232). Pois, se houvesse tal incoerência, seria uma evidência muito forte de que Euclides só teria reunido os enunciados de matemáticos anteriores sem se dar o trabalho de adequá-los de acordo com o conjunto da obra, o que, na verdade, seria uma edição de Euclides, e não os *Elementos* de Euclides. E, talvez, ele tivesse tirado as explicações sobre o método e os termos para fazer dele um manual de consulta de enunciados matemáticos. No entanto, a observação de Tannery é mesmo errada. Ele alega que alguns termos definidos na lista



de definições não são os mesmos que aparecem nas proposições e nas demonstrações, como por exemplo, o termo “trilateral” (*tripleuron*) que aparece na definição 19 do livro I, mas nas proposições e nas demonstrações aparece o termo “triângulo” (*trigonon*). É uma observação muito estranha, pois logo na definição 20, Euclides define os tipos de triângulo como um subconjunto das figuras triláteras, ou seja, nenhuma incoerência. Heath diz que Euclides usou uma definição primeiro baseada no número de lado e só a partir delas definiu com respeito ao número de ângulo para acabar com uma ambiguidade em relação à palavra “quadrado” (*tetragonon*), que era usada para qualquer figura de quatro lados. Assim, Euclides fala primeiro de figuras triláteras, quadriláteras (*tetrapleuron*), e depois define quadrado (*tetragonon*) como um quadrilátero que possui quatro lados iguais e quatro ângulos retos (HEATH, 1956, p. 187 e 188).

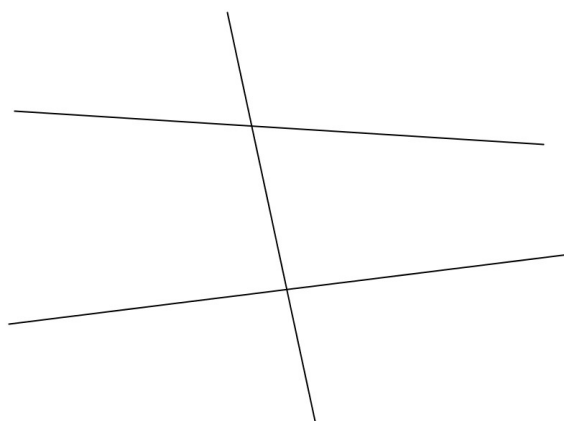
As divergências dos *Elementos* eram na verdade uma forma de tentar melhorar as bases daquilo que já era a verdade última alcançada, a episteme. Não se questionava a verdade de um teorema, mas a forma que podia-se organizar as verdades básicas para a demonstração dos teoremas. Nem mesmo as questões sobre o quinto postulado, as quais serão mostradas no capítulo seguinte, eram questões duvidando da geometria como a verdade última alcançada, eram, mais uma vez, questões sobre a organização dessas verdades.

## **2 A Axiomatização do Espaço**

Nos séculos XIX e XX, surgiram novos sistemas na matemática e na lógica, ao contrário de outros ramos do saber, como por exemplo, na física, que antes disso o aristotelismo cedia lugar à física newtoniana. No capítulo anterior, vimos que não havia

um consenso sobre a axiomatização da geometria, a questão, porém, mais discutida foi de saber se o quinto postulado era de fato um postulado ou, ao invés disso, um teorema.

E que, se uma reta cair sobre duas linhas retas fizer os ângulos interiores e do mesmo lado inferior a dois retos, as duas retas, indefinidamente prolongadas, se encontram no lado onde os ângulos são menores do que dois retos. (Quinto postulado) <sup>20</sup>



**Figura 2:** Visualização do quinto postulado.

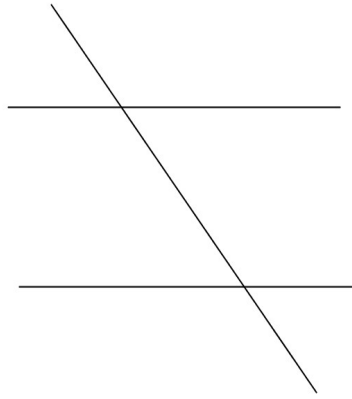
A redação do quinto postulado não é simples como as dos demais. Ele parece ser um teorema e, como se não bastasse, na proposição 28 (teorema) do livro I, Euclides faz uma demonstração para o caso dos ângulos internos e do mesmo lado serem iguais a dois retos. Dessa forma, muitos geômetras habilidosos tentaram colocar o quinto postulado no rol dos teoremas.

Se uma reta que cai sobre duas outras retas faz o ângulo exterior igual ao ângulo interior do mesmo lado e não adjacentes, ou os ângulos interiores e do mesmo lado iguais a dois retos, as duas retas serão paralelas uma a outra. (proposição 28, livro I) <sup>21</sup>

---

<sup>20</sup> Tradução minha a partir da tradução de Vitrac da edição de Heiberg. (VITRAC, 1990, p. 175).

<sup>21</sup> Veja a nota 14.



**Figura 3:** Proposição 28 do livro I - *Elementos* de Euclides.

A partir do debate sobre o status do quinto postulado, surgiram as geometrias não euclidianas. Com tais geometrias, se colocam algumas questões sobre o que é verdade. Para Kant, a geometria euclidiana era a forma espacial que o nosso espírito apreendia as sensações (apud BARKER, 1969, p. 46). As geometrias não euclidianas são posteriores a Kant. Será que a geometria euclidiana seria a única forma usada pelo espírito? Muitos questionamentos surgiram sobre a validade das novas geometrias: elas são verdadeiras? Pode existir mais de uma geometria verdadeira? Se sim, como devemos entender a verdade? No decorrer desse capítulo, busco analisar essas questões. Como o debate a respeito do quinto postulado teve um papel importante nesse assunto, primeiro mostrarei algumas tentativas de demonstração do mesmo para, então, apresentar as discussões sobre as geometrias.

## **2.1 Algumas Tentativas de Demonstração do Quinto Postulado**

Proclo (séc. V d. C.) defende que o quinto postulado era na verdade um teorema cheio de complicações e, ainda acrescenta, que Ptolomeu o havia demonstrado, usando definições e outros teoremas. Proclo também afirma que o inverso do postulado havia

sido demonstrado pelo próprio Euclides. Cabe ressaltar que a veracidade do quinto postulado não é questionada, e sim a natureza do enunciado. Proclo alerta que existem outros tipos de linha que nunca se encontram, apesar da soma dos ângulos ser menor que dois retos, essas são as retas assíntotas. Vejamos como procedem as “demonstrações” de Ptolomeu e Proclo. (apud HEATH, 1956, p. 202 a 208)

A tentativa de demonstração de Ptolomeu<sup>22</sup> é por redução ao absurdo e é falha, pois ele usa implicitamente que de qualquer ponto, só se pode traçar uma reta paralela a uma reta dada, ou seja, ele usa um equivalente do quinto postulado. Essa formulação equivalente é a que se usa nos dias de hoje nas escolas<sup>23</sup>. Ela foi formulada por John Playfair no século XVIII (BARKER, 1969, p. 48). Ptolomeu tenta deduzir o quinto postulado de sua demonstração da proposição 29 do livro I dos *Elementos*.

Uma linha reta que cai sobre retas paralelas faz ângulos alternos iguais entre eles, e também o ângulo exterior ao ângulo interior e oposto, e os ângulos interiores e do mesmo lado iguais a dois retos. (Proposição 29, Livro I)<sup>24</sup>

Mas para demonstrar que a soma dos ângulos internos e do mesmo lado é igual a dois retos, Euclides utiliza o quinto postulado, logo, Ptolomeu precisaria de uma nova demonstração, e ele faz, mas em sua demonstração ele utiliza, implicitamente, o axioma de Playfair.

A demonstração de Proclo<sup>25</sup> parte de um axioma de Aristóteles, usado para sustentar a finitude do universo: “se de um ponto duas linhas retas formando um ângulo forem produzidas indefinidamente, a distância entre elas será maior que qualquer magnitude finita” (apud HEATH, 1956, p. 207). Ou seja, sua demonstração não parte só dos postulados, axiomas e proposições de Euclides que não usam o quinto postulado. Além disso, tal axioma não é mais simples que o postulado euclidiano, os dois remetem

---

22 Veja a demonstração no anexo II – A.

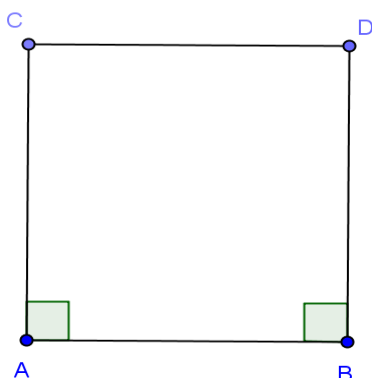
23 Veja a demonstração da equivalência entre o axioma de Playfair e o quinto postulado no anexo III.

24 Veja a nota 14.

25 Veja a demonstração no anexo II – B.

ao infinito. O axioma aristotélico não se sustenta com hipóteses elípticas, desempenhando assim, o mesmo papel que o quinto postulado, portanto, eles são equivalentes. Proclo também assume em seu raciocínio que retas paralelas são equidistantes, o que não é garantido pelos quatro primeiros postulados.

O procedimento<sup>26</sup> do persa Nasir Edin (Século XIII d. C.) (apud HEATH, 1956, p. 208 a 210) foi provar o quinto postulado, mostrando a existência de um retângulo (figura 4). A partir disso, mostrou que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos e, enfim, faz a demonstração do quinto postulado. Este procedimento é bem engenhoso, pois não parece difícil mostrar uma coisa tão “óbvia” quanto a existência de um retângulo. O procedimento é tão sedutor que Saccheri (séculos XVII e XVIII) e Lambert (séc. XVIII) tentaram dar continuidade a essa idéia. Saccheri chegou a comentar o trabalho de Nasir Edin, mostrando que a idéia usada por Edin, com a finalidade de demonstrar a existência do retângulo, necessitava de prova.



**Figura 4:** Quadrilátero de Nasir Edin e Saccheri.

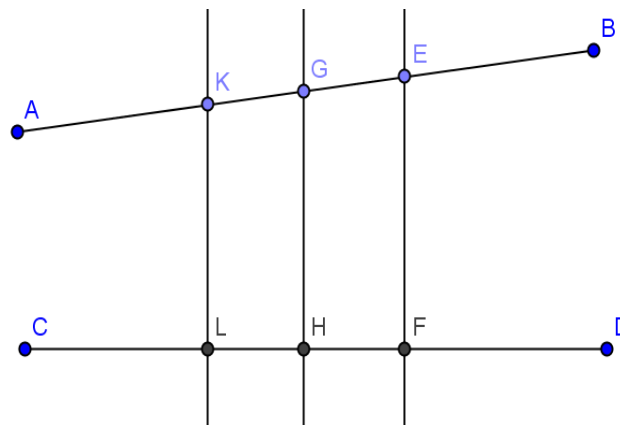
Edin traçou duas perpendiculares de mesmo tamanho AC e BD em relação a AB (figura 4). E por absurdo, ele considerou os ângulos do topo como sendo obtusos ou

---

26 Veja a demonstração no anexo II – C.

como sendo agudos, mas segundo um lema dele mesmo, isso seria um absurdo, pois as perpendiculares não seriam do mesmo tamanho. O lema seria:

Se AB, CD são duas linhas retas tais que sucessivas perpendiculares como EF, GH, KL, a partir de pontos de AB até CD, sempre fazem com AB ângulos desiguais, que são sempre agudos no lado em direção a B e sempre obtuso no lado em direção a A, então as linhas AB e CD, mesmo que não se cortem, se aproximam continuamente na direção dos ângulos agudos e divergem continuamente na direção dos ângulos obtusos e as perpendiculares diminuem em direção a B, D e aumentam em direção a A, C. (apud HEATH, 1956, p. 208)



**Figura 5:** O lema de Edin.

Além de tal lema ser apresentado sem demonstração, como aponta Saccheri (apud HEATH, 1956, p. 209), nada nos diz que os ângulos de topo são iguais, mais ainda, as perpendiculares poderiam ser do mesmo tamanho e os ângulos serem agudos ou obtusos, como demonstra Saccheri em sua proposição 4 (SACCHERI, 1733, p. 27)<sup>27</sup>.

John Wallis (séc. XVII), em sua tentativa, usou um axioma sobre semelhança de triângulos: “dado um triângulo, é possível construir um outro que lhe é semelhante, com lados arbitrariamente grandes”. Embora seja uma forma diferente de seus antecessores, pois não usa o conceito de equidistância, tal axioma é equivalente ao quinto postulado. (apud HEATH, 1956, p. 210 a 211)

<sup>27</sup> ... os ângulos na junção CD serão retos, ou obtusos, ou agudos conforme a reta CD seja igual, ou menor, ou maior que a reta oposta AB. (figura 4)

O monge italiano Girolamo Saccheri, no século XVIII, fez uma tentativa de demonstração do quinto postulado diferente dos seus antecessores<sup>28</sup>. Essa tentativa se encontra no livro dele intitulado EVCLIDES AB OMNI NAEVO VINDICATVS (Euclides Livre de qualquer erro). Seu método foi por via indireta, por redução ao absurdo, o que não foi novidade, pois como vimos a cima, Ptolomeu e Edin também recorreram ao método citado. Assim, como se queria mostrar que o quinto postulado era dependente dos demais postulados, ou seja, que ele era um teorema do sistema, bastava supor que ele era independente e tirar um absurdo disso.

Saccheri escreve que vai abordar três erros de que Euclides é acusado: o primeiro diz respeito ao quinto postulado; o segundo sobre a sexta definição do livro relativo às proporções; e o terceiro sobre a quinta definição do livro seis, com respeito a combinação de razões. Segundo ele, a fama de Euclides é injustamente atacada. Aqui só será tratado o relativo às paralelas. A frase HOC AVTEM ABSVRDVM EST (mas isso é um absurdo) é frequente no seu texto, pois ele usa a redução ao absurdo várias vezes.

Saccheri usou nas suas demonstrações os quatro primeiros postulados e as vinte e oito primeiras proposições de Euclides. Então traçou um segmento AB e levantou duas perpendiculares iguais: AC e BD. Ele provou que os ângulos do topo ACD e BDC são iguais (Proposição 1)<sup>29</sup>, o que Edin não fez, restando, assim, três hipóteses: os ângulos do topo são retos, obtusos, ou agudos. A hipótese do ângulo reto poderia ser descartada, já que o quinto postulado foi considerado falso. O que difere o método de Saccheri dos demais é que ele tentou tirar as consequências de cada hipótese diferente da hipótese do ângulo reto, obtendo assim, os primeiros resultados de uma geometria não euclideana. Sua proposição 9, por exemplo, nos diz que a soma dos ângulos internos de um triângulo varia de acordo com a hipótese tomada. A soma é igual a dois retos na hipótese do

---

28 Veja uma parte do extenso trabalho de Saccheri no anexo II – d.

29 Se duas retas iguais AC, BD fazem com a reta AB ângulos iguais nas mesmas partes: digo que os ângulos na junção CD serão ambas iguais.

ângulo reto, maior que dois retos na hipótese do ângulo obtuso e menor que dois retos na do ângulo agudo.

Validando a hipótese do ângulo obtuso, Saccheri prova que vale o quinto postulado euclidiano (proposição 14), chegando a um absurdo, pois, sendo assim, essa hipótese seria auto destrutiva (SACCHERI, 1733, p. 59 a 61). E ainda para não deixar dúvidas, ele recorre a uma das suas demonstrações de que considerando a hipótese do ângulo obtuso, em um triângulo retângulo a soma dos dois ângulos não retos é maior que dois retos, o que contraria a proposição 17 de Euclides. Esses resultados são obtidos quando consideramos que a reta pode ser infinita (apud HEATH, 1956, p. 212), pois, tanto a proposição 17 quanto a 18 de Euclides – usada por Saccheri em suas proposições 12 e 13 para concluir sobre a hipótese do ângulo obtuso – dependem da proposição 16 de Euclides que por sua vez só é válida com a hipótese de que um segmento de reta possa ser estendido indefinidamente, ou seja, que a reta possa ser infinita.

Na hipótese do ângulo agudo, Saccheri diz ser um longo embate e o seu desejo de encontrar um absurdo o atrapalha. Ele acreditou achar um absurdo pelos resultados estranhos que obteve, como por exemplo: a soma dos ângulos internos de um triângulo ser sempre menor que dois retos (proposição 9); mas nada contrariava as suposições iniciais, sendo assim, era uma demonstração por absurdo falaciosa.

Esses resultados que Saccheri obteve eram de uma nova geometria, mas ele não percebeu o quão importante eram essas “maluquices” que encontrou e julgou um absurdo. Sua atitude é perfeitamente compreendida, dado a estranheza dos resultados e a convicção de uma geometria única.

Joahann Heinrich Lambert (séc. XVIII) foi estimulado a escrever a sua *Teoria das Paralelas* – publicada postumamente por G. Bernoulli e C. F. Hendenburg – pela dissertação de Klügel<sup>30</sup> de 1763, a qual analisava umas trinta demonstrações do quinto

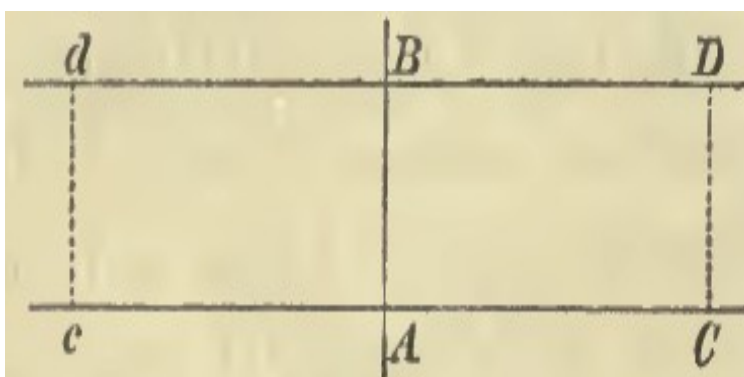
---

30 O título da dissertação é *Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*.



postulado. Essa dissertação talvez seja o primeiro trabalho a duvidar da demonstrabilidade do postulado euclidiano e, além disso, observa que a convicção que nós temos da verdade do postulado não é fruto de uma série de demonstrações rigorosas, mas sim de observações experimentais (apud HEATH, 1956, p. 212). Klügel, obviamente, deve ter chegado à conclusão de que verdades matemáticas pudessem vir de observações experimentais através das análises das demonstrações do quinto postulado e, talvez nesse mesmo espírito, estivessem os pensadores da época. Podemos notar que a dissertação de Klügel foi escrita quase vinte anos antes da *Crítica da Razão Pura*, famosa obra na qual o filósofo alemão, Immanuel Kant, relaciona a matemática com sensibilidade através do conceito de sintético *a priori*.

A tentativa de Lambert (apud HEATH, 1956, p. 212 a 213) também foi a partir de um quadrilátero, como Edin e Saccheri. A diferença foi que Lambert partiu de um quadrilátero com três ângulos retos: DBA, BAC e ACD.



**Figura 6:** Quadrilátero de três ângulos retos usado por Lambert. (LAMBERT, 1766, p. 180)

O ângulo BDC poderia ser reto – geometria euclidiana – obtuso ou agudo. Nas hipóteses do ângulo obtuso e agudo, Lambert conseguiu resultados melhores que o de Saccheri, enunciando, por exemplo, que: a área de um triângulo plano é proporcional a diferença entre dois ângulos retos e a soma dos ângulos do triângulo; em um triângulo

ABC, a área é igual a  $K(A+B+C-180)$  na hipótese do ângulo obtuso e é igual a  $K[180-(A+B+C)]$  na hipótese do ângulo agudo, onde  $K$  é uma constante positiva. Lambert identifica a hipótese do ângulo obtuso com a superfície esférica, o que é notável. Ele fala de triângulos esféricos ao invés de triângulos planos.

Adrien-Marie Legendre (séculos XVIII e XIX) foi outro personagem a se destacar na história das tentativas de demonstração do quinto postulado. Legendre morreu convicto que tinha provado o postulado euclidiano. Ele fez muitas tentativas de demonstração, usando diferentes pressupostos como, por exemplo, dados três pontos não colineares, existe um círculo que passa pelos três pontos; ou por um ponto dado dentro de um ângulo de dois terços de um ângulo reto, sempre podemos traçar uma reta que encontre os dois lados do ângulo. Legendre chegou a alguns resultados já obtidos por Saccheri, embora tenha sido de forma independente. Estes resultados foram sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, pois se a soma de um triângulo fosse menor que dois retos, a soma de qualquer outro também seria. Legendre, assim como Saccheri, deixou bem claro a relação entre a soma dos ângulos de um triângulo e as paralelas. (apud HEATH, 1956, p. 213 a 219)

Dessas tentativas, vimos alguns enunciados equivalentes ao quinto postulado euclidiano como, por exemplo (apud HEATH, 1956, p. 220):

1. Por um ponto dado, somente uma paralela pode ser traçada a uma reta dada. (Playfair)
2. Se uma reta corta uma das paralelas, irá cortar a outra também. (Proclo)
3. Existem linhas retas equidistantes, por todos os pontos, umas das outras (Geminus e Posidonius). Paralelas permanecem, por toda a sua extensão, a uma distância finita uma das outras. (Proclo)

4. Existe um triângulo em que a soma dos ângulos internos é igual a dois ângulos retos. (Legendre)
5. Dado qualquer figura, existe uma figura semelhante a ela do tamanho que se queira (Wallis, Carnot, Laplace). Saccheri assinalou que basta apenas que existam dois triângulos desiguais com dois ângulos iguais.
6. Por um ponto dado dentro de um ângulo de dois terços de um ângulo reto, sempre podemos traçar uma reta que encontre os dois lados do ângulo. (Legendre)
7. Dados três pontos não colineares, existe um círculo que passa pelos três pontos. (Legendre, W. Bolyai)
8. Se em um quadrilátero três ângulos são retos, o quarto ângulo também é. (Clairaut)

## **2.2 O Fim do Modelo Único de Geometria**

A partir dessas tentativas fracassadas de demonstração do quinto postulado, os matemáticos começaram a perceber que o postulado é, de fato, independente. Como Lambert constatou, a soma dos ângulos e a área de um triângulo dependem do quinto postulado, ou seja, de acordo com a versão que escolhermos – ele próprio ou uma de suas negações – obtemos geometrias diferentes. Se não há contradições no uso de uma de suas negações com os demais postulados, então ele é independente. Gauss talvez tenha sido o primeiro matemático a perceber a independência do postulado euclidiano, chegando até a chamar a hipótese do ângulo agudo de “geometria não euclidiana”, no entanto, Gauss não publicou seus trabalhos. O primeiro a publicar foi o russo Lobachevski e mais tarde o húngaro Bolyai. Todos dois publicaram, independentemente, sobre um

mesmo tipo de geometria, a hiperbólica, que é como ficou conhecida a hipótese do ângulo agudo. (BARKER, 1969, p. 51)

As pessoas mais conservadoras não aceitavam que poderia existir outras geometrias. Para eles, se era admitido uma afirmação falsa sobre o espaço, a algum momento iria aparecer uma contradição, pois uma negação do quinto postulado não parece evidente com as intuições que temos do espaço. Como imaginar uma reta com mais de uma paralela em um mesmo plano, passando por um ponto fora dessa reta? No entanto, as ditas geometrias não euclidianas mostraram-se consistentes com relação à geometria euclidiana, isto é, se não for possível encontrar contradições na geometria de Euclides, então também não será nas demais. Isso foi obtido reduzindo as geometrias não euclidianas a modelos euclidianos. A soma dos ângulos internos de um triângulo, por exemplo, poderia ser maior que dois ângulos retos se considerarmos uma superfície esférica, assim como Lambert já havia indicado.

Henri Poincaré (1854 – 1912) chegou a apresentar um mundo onde seria possível uma geometria hiperbólica:

Supposons, par exemple, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes: La température n'y est pas uniforme; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé. Je précis davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon de la sphère limite; soit r la distance du point considéré au centre de cette sphère. La température absolue sera proportionnelle à  $R^2 - r^2$ . Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue. Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu. Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable. Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera de la sphère limite. Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants. Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils ne peuvent jamais atteindre la sphère limite. Si, pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables, pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides déformés par ces différences de température dont je viens de parler. [...] Je ferai encore une autre hypothèse; je supposerai que la lumière traverse des milieux diversement réfringents et de telle sorte

que l'indice de réfraction soit inversement proportionnel à  $R^2 - r^2$ . Il est aisé de voir que dans ces conditions, les rayons lumineux ne seraient pas rectilignes, mais circulaires. [...] Supposons en effet qu'un objet se déplace, en se déformant, non comme un solide invariable, mais comme un solide éprouvant des dilatations inégales exactement conformes à la loi de température que j'ai supposée plus haut. Qu'on me permette pour abrégé le langage, d'appeler un pareil mouvement déplacement non-euclidien. Si un être sentant se trouve dans le voisinage, ses impressions seront modifiées par le déplacement de l'objet, mais il pourra les rétablir en se mouvant lui-même d'une manière convenable. Il suffit que finalement l'ensemble de l'objet et de l'être sentant, considéré comme formant un seul corps, ait éprouvé un de ces déplacements particuliers que je viens d'appeler non-euclidiens. Cela est possible si l'on suppose que les membres de ces êtres se dilatent d'après la même loi que les autres corps du monde qu'ils habitent. [...] S'ils fondent une géométrie, ce ne sera pas comme la nôtre, l'étude des mouvements de nos solides invariables; ce sera celle des changements de position qu'ils auront ainsi distingués, et qui ne sont autres que les « déplacements non-euclidiens », ce sera la géométrie non-euclidienne. (POINCARÉ, 1992, p. 87 a 91)<sup>31</sup>

Um pensador kantiano afirmaria que esse mundo não existe, embora não seja inimaginável, por isso tal argumento não justificaria a geometria hiperbólica. Afinal,

---

31 Suponhamos, por exemplo, um mundo encerrado numa grande esfera e submetido às seguintes leis: a temperatura não é uniforme; ela é máxima no centro e diminui na medida em que dele nos afastamos e chega a zero absoluto quando atingimos a esfera em que esse mundo está contido. Apresento maiores precisões sobre a lei segundo a qual varia essa temperatura. Seja R o raio da esfera limite; seja r a distância do ponto considerado ao centro dessa esfera. A temperatura absoluta será proporcional a  $R^2 - r^2$ . Suporei, ainda, que, dentro desse mundo, todos os corpos tenham o mesmo coeficiente de dilatação, de tal maneira que o comprimento de uma régua qualquer seja proporcional à sua temperatura absoluta. Suporei, enfim, que um objeto transportado de um ponto a outro, cuja temperatura é diferente, estabeleça, imediatamente, equilíbrio calorífico com seu novo meio. Nada, nessas hipóteses, é contraditório ou inimaginável. Um objeto móvel se tornará, então, cada vez menor quanto mais se aproxima da esfera limite. Observemos primeiramente que se esse mundo é limitado do ponto de vista de nossa geometria habitual, ele parecerá infinito a seus habitantes. Quando esses, com efeito, quiserem se aproximar da esfera limite, eles se tornarão cada vez mais frios e menores. Seus passos também diminuirão cada vez mais de tal modo que não conseguirão nunca atingir a esfera limite. Se, para nós, a geometria é apenas o estudo das leis segundo as quais se movem os sólidos invariáveis, para esses seres imaginários, será o estudo das leis segundo as quais se movem os sólidos deformados por essas diferenças de temperatura que acabo de falar. [...] Farei ainda uma outra hipótese; suporei que a luz atravessa diferentes meios refringentes e de tal modo que o índice de refração seja inversamente proporcional a  $R^2 - r^2$ . É fácil de ver que, nessas condições, os raios de luz não seriam retilíneos, mas circulares. [...] Suponhamos, com efeito, que um objeto, ao se deslocar, se deforme, não como um sólido invariável, mas como um sólido que sofra dilatações desiguais exatamente conformes à lei de temperatura exposta mais acima. Que me permita, para abreviar a linguagem, de chamar esse movimento de deslocamento não euclidiano. Se um ser sensitivo se encontra na vizinhança, suas impressões serão modificadas pelo deslocamento do objeto, mas, movendo-se adequadamente, poderá restabelecê-las. Para isso, tudo o que é requerido é que o conjunto formado pelo objeto e pelo ser sensitivo, considerado como um único corpo, tenha, finalmente, experimentado um desses deslocamentos particulares que chamei não euclidianos. Isso é possível se supomos que tanto a dilatação dos membros desses seres quanto a dos outros corpos do mundo que habitam seguem a mesma lei. [...] Se esses seres estabelecem uma geometria, essa não será como a nossa, o estudo dos movimentos de nossos sólidos invariáveis; essa será aquela das mudanças de posição que eles terão assim distinguido e que não passam dos “deslocamentos não euclidianos”: será a geometria não euclidiana. (tradução minha)

Poincaré teria criado esse mundo com base em conceitos sem intuição (entendimento puro), os quais, segundo Kant, são cegos.

Assim, Platão, abandonando o mundo sensível que encerra a inteligência em limites tão estreitos, lançou-se nas asas das idéias pelo espaço vazio do entendimento puro, sem advertir que com os seus esforços nada adiantava, faltando-lhe ponto de apoio onde manter-se e segurar-se para aplicar forças na esfera própria da inteligência. (KANT, 2009, p.6)

A palavra “intuição” tem diversos significados, não só no uso popular, mas também no meio científico. É preciso, assim, que se especifique o sentido mais próximo da idéia de Kant. Newton da Costa apresenta cinco significados distintos para esse vocábulo:

- 1) conhecimento intelectual evidente, obtido de modo imediato, e, por conseguinte, oposto ao conhecimento discursivo, ao qual comumente serve de ponto de partida;
- 2) conhecimento direto, propiciado pela contemplação, pela visão direta, de um objeto presente em nosso pensamento (fato da sensibilidade, objeto intelectual, relação entre conceitos, ...); com este significado, relevante em Kant, a intuição não é forçosamente conhecimento imediato, podendo desdobrar-se em diversas fases;
- 3) modalidade cognitiva cuja raiz não está no pensamento stricto sensu, mas no sentimento (a intuição emotiva de Dilthey, pela qual apreendemos o sentido profundo da vida e da história; a intuição bergsoniana, espécie de simpatia espiritual que nos revela o que as coisas são em si mesmas, como que nelas penetrando; a intuição místico-religiosa) ou na vontade (a intuição volitiva de Maine de Biran: Volo, ergo sum);
- 4) inspiração – sorte de adivinhação de resultados referentes a entes de qualquer natureza e às suas relações;
- 5) a faculdade do espírito correspondente a determinado tipo de conhecimento intuitivo.(DA COSTA, 2008, p. 65 e 66)

A intuição em Kant tem o sentido apresentado no segundo item, que está ligada à contemplação, à visão, sendo assim, como diz Schopenhauer, algo como uma sensação do órgão sensorial (SCHOPENHAUER, 1980, p. 104). Mas a sensibilidade, desde tempos mais antigos, é conhecida como portadora de erros, por exemplo, ao caminhar pelas ruas em um dia de lua, temos a impressão de que a lua está se deslocando muito depressa. Outro exemplo seria a ilusão de que um cabo de vassoura está quebrado ao mergulharmos parte dele na água. Sendo assim, cabe a pergunta: a geometria euclidiana

é a intuição correta que nós temos do espaço? O que Kant nos diz a respeito do espaço? Isso será explicado na próxima secção.

Se o modelo de Poincaré para geometria hiperbólica é de um mundo imaginário, o mesmo não acontece para o caso do ângulo obtuso (geometria elíptica ou esférica), afinal, o planeta em que vivemos é curvo e, por isso, é fácil aplicarmos tal geometria, a qual, de fato, foi aplicada por Einstein em sua teoria da relatividade. Nessa teoria, dois raios de luz quaisquer, em um mesmo plano, se cruzam quando devidamente prolongados, ou seja, nunca são paralelos, assim como as retas na geometria elíptica (apud BARKER, 1969, p. 70). Qual geometria, então, seria a do universo? Para tentarmos responder essa pergunta, precisamos observar que ela está relacionada com o problema de Platão, o qual foi apresentado no primeiro capítulo sobre a questão dos objetos matemáticos, e que, por sua vez, está relacionado com a questão de se saber se existem conhecimentos *a priori*, ou seja, se existem conceitos que não provêm da experiência.

### **2.3 Conhecimentos *A Priori***

Podemos dividir os pensadores da filosofia do conhecimento científico em duas grandes correntes de pensamento: racionalismo e empirismo. As raízes do racionalismo nos remetem a Platão, pois este atribuía maior importância – ou única importância – à razão na elaboração das teorias. Já a base do empirismo pode ser encontrada na filosofia Aristotélica por causa do papel que Aristóteles atribuía à observação na elaboração de teorias. Nessa discussão, os racionalistas defendem que a experiência, por estar relacionada à sensibilidade, nos induz ao erro. Assim, deveriam existir alguns conceitos – ou todos – que não provêm da experiência, ou seja, conceitos conhecidos antes de qualquer experiência, *a priori*. Os empiristas, no entanto, defendem uma maior

importância para as experiências. Locke foi mais longe, para ele, nada é inato, nenhum conceito é anterior às experiências. Já Kant faz uma síntese das duas correntes. (PINGUELLI, 2005, p. 203 a 263)

Na Crítica da Razão Pura, Kant pretende resolver o problema levantado pelo escocês David Hume, este era cético quanto ao uso da causalidade nas ciências. Hume diz haver dois tipos de relações, as que se dão entre idéias, como na geometria e aritmética, por exemplo, e as que se dão entre as matérias de fato. Esta última relação seria diferente da primeira porque entre as matérias de fato, o contrário de uma relação não implica necessariamente uma contradição. Por exemplo, “o sol irá nascer amanhã”, supor que ele não vai nascer não é absurdo algum, embora essa afirmação negativa não esteja apoiada na experiência. Seguindo seu raciocínio dessa forma, Hume vai dizer que a relação entre causa e efeito pertence meramente à experiência e, por isso, não é uma relação lógica. Para ele, é uma crença que temos baseada na suposição de que o passado irá repetir no futuro. Ele reconhece o valor pragmático do princípio de causalidade, apenas colocou em dúvida a sua fundamentação com base na razão. (PINGUELLI, 2005, p. 260 a 263 e 268)

Para resolver o problema de Hume, Kant vai introduzir em sua teoria o conceito de coisa em si incognoscível, que ele chama de númeno, dizendo que só temos acesso aos fenômenos. Assim, ele diz que a causalidade é uma relação feita entre as representações dos objetos reais, que são formadas pela combinação de impressões dos sentidos com componentes próprios da mente. Ele chamou isso de revolução copernicana da mente (PINGUELLI, 2005, p. 273). Para se tornar mais fácil e mais estruturada sua teoria, ele, logo na introdução da Crítica da Razão Pura, faz a distinção entre os juízos analíticos e sintéticos e entre *a priori* e empírico. Essa denominação já havia sido feita por Leibniz e também usada por Locke, mas a grande diferença de Kant é a junção de



sintéticos com *a priori*, o que na concepção anterior era contraditória (PINGUELLI, 2005, p. 271 e 271). E como exemplo dessa junção, ele fornecerá a matemática.

Conhecimento *a priori*, como já foi dito, é aquele que se tem antes de qualquer experiência e o empírico, o que se obtém a partir da experiência. O analítico é aquele que não apresenta conhecimento novo, pois o predicado associado ao sujeito já está contido na definição, por exemplo, “todos oculistas são médicos de vista”, entendendo que a definição de oculista seja a de médico de vista, então o enunciado se torna verdadeiro apenas por causa de sua forma lógica. Já no conhecimento sintético, o predicado não está presente na definição do sujeito, é um conhecimento novo e a experiência seria o “terceiro elemento” capaz de unir os dois conceitos distintos presentes no sujeito e no predicado. Mas para Kant, podem existir conhecimentos sintéticos *a priori* (juízos matemáticos), ou seja, o “terceiro elemento” não seria a experiência, pois se assim fosse, não poderia ser *a priori*. O “terceiro elemento” seria as impressões dos sentidos, ou seja, a intuição.

Kant justifica que as proposições matemáticas são sempre juízos *a priori* porque expressam necessidade, o que não pode ser obtido pela experiência. Mas para os que não aceitam essa justificação, ele diz que se limita à matemática pura, a qual já traz no seu próprio conceito o de não conter conhecimentos empíricos (KANT, 2009, p.8). Para justificar que são sintéticos, e não analíticos ele apresenta dois exemplos, um de aritmética e outro de geometria.

Poder-se-ia em verdade crer, à primeira vista, que a proposição  $7 + 5 = 12$  é puramente analítica, resultante, segundo o princípio de contradição, do conceito de uma soma de sete e cinco. Mas se a considerarmos com mais atenção, acharemos que o conceito de soma de sete e cinco não contém mais do que a união dos dois números em um só, o que não faz pensar qual seja esse número único que compreenda aos outros dois. O conceito de 12 não é de modo algum percebido só pelo pensamento da união de cinco e sete, e posso decompor todo meu conceito dessa soma tanto quanto quiser, sem que por isso encontre o número 12. É preciso, pois, ultrapassar esse conceito recorrendo-se à intuição correspondente a um dos dois números, quiçá aos 5 dedos da mão ou a cinco pontos (como faz Segner em sua Aritmética), e aditar sucessivamente ao conceito sete as cinco unidades dadas na intuição.

Com efeito, tomo primeiramente o número sete, e auxiliando-me de meus dedos como intuição para o conceito de 5, acrescento sucessivamente ao número 7 as unidades que tive de reunir para formar o 5, e assim vejo surgir o número 12. Pela adição de sete e cinco tenho idéia desta soma  $7 + 5$ , é verdade; mas não que esta seja igual ao número 12. A proposição aritmética é, pois, sempre sintética: o que se compreende ainda mais claramente se se tomam números maiores, pois então é evidente que, por mais que volvamos e coloquemos nosso conceito quanto quisermos, nunca poderemos achar a soma mediante a simples decomposição de nossos conceitos e sem o auxílio da intuição. Tampouco é analítico um princípio qualquer de Geometria pura. É uma proposição sintética que a linha reta, entre dois pontos é a mais curta, porque meu conceito de reta não contém nada que seja quantidade, senão só qualidade. O conceito de mais curta é completamente aditado e não pode provir de modo algum da decomposição do conceito de linha reta. É preciso, pois, recorrer-se aqui à intuição, único modo para que seja possível a síntese. (KANT, 2009, p.8 e 9)

Com esses exemplos, ele deixa bem claro qual é o “terceiro elemento” que faz a ligação, a intuição, que pra ele, é a impressão dos sentidos nas nossas mentes. No entanto, a intuição de Kant parece uma camuflagem para a experiência, pois que intuição me levaria a concluir que a linha reta é o caminho mais curto entre dois pontos, senão a experiência? Kant consegue isso explicando que a noção de espaço é uma intuição a priori. Para o filósofo alemão, o espaço não pode vir da experiência porque é ele que possibilita as percepções externas, sem ele, não podemos experimentar os objetos, isto é, para qualquer experiência, o espaço é necessário. “É impossível conceber que não exista espaço, ainda que se possa pensar que nele não exista nenhum objeto” (KANT, 2009, p. 16). Semelhantemente, Kant atribui o tempo como uma forma de intuição pura, a priori. (KANT, 2009, p. 16 a 21)

## 2.4 O Espaço e a Experiência

A partir das secções anteriores, podemos buscar entender se os objetos matemáticos, mais especificamente os da geometria, são objetos *a priori* independentes de qualquer intuição, ou se são empíricos, ou se, como afirmava Kant, são sintéticos *a priori*.

Kant afirma que o espaço é único e não é dependente da experiência. Quando se fala em mais de um espaço, apenas são tomadas partes de um mesmo espaço. A partir da intuição pura do espaço é que se derivam as noções necessárias para a constituição da geometria. A partir dessa concepção kantiana, percebe-se que o espaço para ele é abstrato. (KANT, 2009, p. 16 a 19)

Com o advento das geometrias não euclidianas, não parece que os diferentes espaços estudados (euclidianos e não euclidianos) sejam partes de um só, pois possuem propriedades diferentes. No entanto, Poincaré nos mostra uma inacessibilidade ao espaço porque nossa experiência nos fornece apenas as propriedades dos materiais utilizados. Segundo ele, uma experiência para decidir o valor de  $\Pi$ , por exemplo, não é sobre o espaço, mas sobre o material de que é feito o círculo e a régua utilizada (POINCARÉ, 1992, p. 96). Obviamente Poincaré sabe que a matemática não trata de círculos desenhados, mas de círculos ideais. Por isso ele defende que as geometrias, euclidianas ou não euclidianas, são independentes da experiência, pois quando decidimos sobre uma geometria, analisamos as inferências das observações diretas, e não as próprias observações diretas do espaço (Apud SKLAR, 1992, p.55). Poincaré apresenta um exemplo de astronomia que parece ser possível de se decidir com a experiência, mas segundo ele, não é. A paralaxe de uma estrela muito distante depende de qual geometria escolhermos, assim, se for possível, por meio de experiências, decidir a favor de um resultado não compatível com a geometria euclidiana, poder-se-ia abandonar a geometria de Euclides ou alterar as leis da óptica, pois uma linha reta em astronomia é a trajetória de um raio de luz. Bastaria dizer que a trajetória de um raio de luz não se propaga em linha reta (POINCARÉ, 1992, p. 95 e 96). Para Poincaré não faz sentido perguntar qual é a verdadeira geometria do mundo. Uma geometria não pode ser mais verdadeira que

outra, apenas mais cômoda. A escolha de uma geometria seria uma convenção (POINCARÉ, 1992, p. 71).

Embora a teoria de Poincaré seja diferente da kantiana (SKLAR, 1992, p. 55), o espaço é imune à experiência para os dois. Dessa forma, a idéia de espaço é muito abstrata e parece não ser útil as nossas experiências – por isso Poincaré defende o convencionalismo. A intuição pura do espaço, como alega Kant, parece que não nos fornece conclusões úteis e novas para a geometria. Analisemos, pois, o exemplo que ele usou e que apresentei na secção 2.3. A conclusão de que a linha reta é a menor distância entre dois pontos não seria justificada pela intuição de um espaço tão abstrato. Como vemos na figura 7, em uma geometria esférica, temos duas retas que ligam os pontos A e B (verde e preto), sendo uma a menor (a preta), logo, somente a intuição do espaço *a priori* de Kant, não nos garante essa menor distância como algo vindo da intuição do espaço. Se esse espaço é o mesmo do euclidiano, então ele é contraditório. Para se ter a reta como a menor distância entre dois pontos, é necessário postular exatamente isso: que só seja chamada de reta aquela que for a menor ou, então, postular um outro conceito para que dele se possa demonstrar esta propriedade da reta.

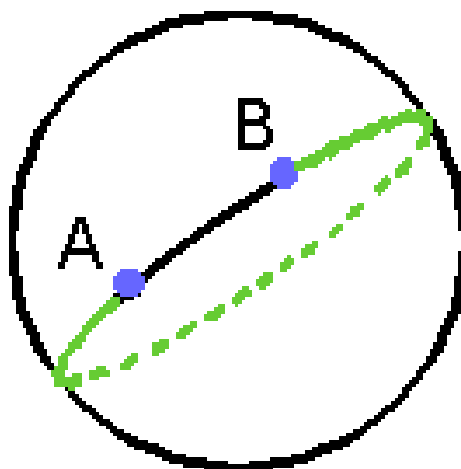


Figura 7: Geometria esférica.

O mesmo acontece com o quinto postulado euclidiano, pois sua veracidade não provem de uma intuição pura do espaço abstrato kantiano, mas sim de um espaço com a propriedade de ser plano. Ou seja, se ele não vem de um espaço *a priori*, vem de onde? De um espaço da experiência? Se sim, ele é *a posteriori*.

Não podemos crucificar o Kant, afinal, as geometrias não euclidianas surgiram depois. E, além disso, seu objetivo parece estar assegurado, pois se ele não queria relegar a geometria ao entendimento puro, nada mudou com as novas geometrias, pois elas também dependem de uma forma de sensibilidade. Ainda não podemos dizer que tudo vale, como acontece na metafísica, pois ainda estamos presos a uma sensibilidade.

A idéia de que a observação depende da teoria (CHALMERS, 1993, p. 46 a 50) dificulta a divisão entre observações diretas de um lado e de inferências das observações de outro, o que dificulta a tese de Poincaré. Mas se, por outro lado, tal divisão não pode ser feita, o espaço se torna uma convenção sobre quais objetos representam o espaço, por exemplo, a escolha da trajetória de um raio de luz como sendo uma reta.

Aceitando o convencionalismo de Poincaré, os objetos matemáticos seriam incognoscíveis ou apenas uma ficção. Uma solução como esta, apontando para um dos dois lados: coisa em si incognoscível ou ficcionalismo<sup>32</sup> – não é satisfatória para grande parte dos filósofos. É importante destacar que um convencionalismo não implica em dizer que vale tudo, mas abre um mundo de possibilidades.

Antes da invenção dos microscópios, não era possível uma “observação direta” de bactérias. O mesmo ocorreu com o surgimento dos microscópios eletrônicos, possibilitando “observações diretas” dos vírus. Assim, como Poincaré pode garantir que não existirá um instrumento que possibilite “observações diretas” do espaço? Para isso, talvez fosse mais eficaz defender que não existem observações diretas e que até mesmo

---

<sup>32</sup> Ficcionalismo em matemática é um tipo de nominalismo, cuja teoria consiste em considerar os objetos matemáticos como criações, ou ficções.

a observação de bactérias e vírus, através de microscópios, não seriam diretas, pois já se pressupõe teoria, uma visão treinada. Mas uma “visão treinada” não significa necessariamente ter conhecimento, e sim ter conhecimento de alguma teoria, o que mostra que as observações dependem de teoria. Assim, parece que o espaço está imune às experiências e estamos limitados a um convencionalismo, pois se podemos fazer observações diretas, Poincaré nos diz que a decisão sobre qual geometria é verdadeira está assentada em inferências das observações diretas, mas se, por outro lado, não são possíveis as observações diretas ficamos dependentes de uma teoria, outra vez uma convenção.

## **2.5 Teoria da Verdade**

Como a questão seria buscar qual é a geometria do mundo, então poderíamos imaginar que uma teoria da verdade pudesse nos mostrar a verdadeira geometria do mundo. No entanto, as teorias da verdade não nos garantem geometria alguma. Das teorias da verdade, eu gostaria de destacar duas: a da coerência e a da correspondência.

A teoria da coerência, basicamente, afirma que um enunciado é verdadeiro quando é coerente com o todo. A verdade não está em um enunciado isolado. Embora isso seja importante para uma axiomatização ou teoria, a coerência não nos permite decidir qual, dentre diferentes axiomatizações, é a verdadeira. Os teoremas de Euclides são coerentes com os seus primeiros princípios, assim como os teoremas não euclidianos também são coerentes com os seus próprios primeiros princípios.

A teoria da correspondência é o que chamam de concepção clássica aristotélica da verdade. Em sua “Metafísica”, Aristóteles diz:

Dizer do que é que não é, ou do que não é que é, é falso, enquanto que dizer do que é que é, ou do que não é que não é, é verdadeiro. (apud Tarski, 2007, p. 160)

O nome “teoria da correspondência” deriva de uma formulação equivalente em linguagem moderna “a verdade de um enunciado consiste em sua correspondência com a realidade”.

Alfred Tarski (1901 – 1983) buscou torna a teoria da correspondência mais clara e precisa de forma a eliminar paradoxos como, por exemplo, o do mentiroso<sup>33</sup>. Sua estratégia foi semelhante a de Bertrand Russell com a teoria dos tipos para eliminar paradoxos da teoria dos conjuntos. As linguagens que contêm termos semânticos como falso e verdadeiro e que possuem nomes para os próprios termos, ou seja, falam de si mesmas, são chamadas por Tarski de linguagens semanticamente fechadas, as quais geram paradoxos. Por isso, é necessário que uma teoria da verdade seja definida com o uso de duas linguagens, uma linguagem objeto – sobre qual falamos – e uma metalinguagem usada para falar da primeira. Esses termos são apenas relativos, pois se quisermos falar da metalinguagem, passaríamos a chamá-la de linguagem objeto e buscaríamos uma metalinguagem para ela. Cada sentença da linguagem objeto deve ter um nome na metalinguagem, a qual também possui termos lógicos, ou seja, a metalinguagem deve conter a linguagem objeto como uma de suas partes. (TARSKI, 2007, p. 168 a 171)

Considere X como sendo um termo da metalinguagem e como um nome para uma sentença p da linguagem objeto, Tarski apresenta o que ele chamou de concepção semântica da verdade:

X é verdadeira se, e somente se, p. (TARSKI, 2007, p. 171)

---

<sup>33</sup> Paradoxo do mentiroso: “esta afirmação é falsa”. O paradoxo também pode aparecer com o uso de duas afirmações para evitar que a afirmação se refira ao próprio valor lógico: “A afirmação seguinte é verdadeira”, “A afirmação anterior é falsa”.

Embora tal formulação tenha sido importante para lógica matemática, não rompemos a barreira da linguagem, pois  $X$  pode ser verdadeiro com relação a  $p$ , mas  $p$  é uma sentença observacional, e não o próprio fato. Não é uma defesa de que o fato é inalcançável ou qualquer outra coisa mística, mas, como foi dito na secção 2.4, as observações também dependem da teoria. Quando usamos uma metalinguagem (geometria) para decidir a verdade das propriedades do espaço (linguagem objeto), seja euclidiana ou não euclidiana, não analisamos o próprio espaço.

## 2.6 A Concepção Moderna da Axiomatização

Com o tempo, a noção de axiomatização foi se alterando e a principal responsável por essa mudança foi a discussão sobre o quinto postulado euclidiano. A ideia de que os axiomas precisavam ser evidentes em si, necessários e possuir uma homogeneidade ontológica foi abandonada com o estabelecimento do sistema hipotético-dedutivo. (RAGGIO, 2003, p. 100 a 103)

As negações do quinto postulado euclidiano se tornam falsas se considerarmos a ontologia atribuída à geometria euclidiana. Um sistema hipotético-dedutivo torna um enunciado em uma função proposicional, assim, sem ontologia, sem uma evidência, sem uma episteme, sem uma semântica no “mundo real” – embora nos baseemos na evidência de alguma ontologia – e sem uma necessidade. Tomemos por exemplo, o primeiro postulado, o qual afirma que é possível traçar uma reta de qualquer ponto para qualquer ponto. Para transformarmos em uma função proposicional, é preciso manter só as constantes lógicas, portanto, “traçar”, “ponto” e “reta” necessitam de serem “vazios” quanto a uma ontologia. Para não sermos tentados a interpretar como o usual, substituímos “traçar” por  $T$ , “ponto” por  $P$  e “reta” por  $R$ , então o primeiro postulado afirmaria que é possível  $T$  uma  $R$  de qualquer  $P$  para qualquer  $P$ . Com isso, seu valor de



verdade depende da ontologia que atribuirmos aos termos T, P e R. (RAGGIO, 2003, p. 101 a 102)

A ontologia atribuída aos conceitos e o uso de diagramas (desenhos) na geometria, por exemplo, justificavam, muitas vezes, as conclusões. Isto é, não era uma conclusão puramente lógica, usava-se uma intuição da ontologia mentalmente ou em forma de diagramas. Em um sistema hipotético-dedutivo, tais conclusões não podiam ser tomadas por falta de uma ontologia, logo, a lógica que antes estava implícita precisava estar clara para que fosse possível tirar conclusões estritamente lógicas. Dessa forma, qualquer ontologia que tornasse verdadeiro o conjunto de axiomas de um sistema, tornaria também verdadeiro seu conjunto de teoremas. Caso um teorema fosse uma conclusão com base numa ontologia específica, seria bem provável que uma outra ontologia que validasse os axiomas, invalidasse o suposto teorema. Por isso, os sistemas necessitavam de uma definição de consequência lógica. Os sistemas hipotéticos-dedutivos foram formalizados com o tempo, apresentando as regras operatórias dos sinais lógicos, tais sistemas ficaram conhecidos como sistemas formais. (RAGGIO, 2003, p. 105 a 107)

## **2.7 Os Teoremas da Incompletude de Gödel**

Um forte golpe nos sistemas axiomáticos foram os dois teoremas da incompletude de Gödel (NAGEL-NEWMANN, 2003). O primeiro teorema afirma que qualquer teoria axiomática capaz de expressar a aritmética elementar não pode ser completo e consistente ao mesmo tempo. Isto quer dizer que não se pode demonstrar – mostrar se é falso ou verdadeiro – todos os enunciados que um sistema gera e ao mesmo tempo esse

sistema ser consistente<sup>34</sup>, desde que o sistema em questão consiga expressar no mínimo a complexidade da aritmética. O segundo teorema já coloca um empecilho para o próprio sistema poder provar sua própria consistência. O teorema afirma que qualquer teoria axiomática capaz de expressar a aritmética elementar e também elementos de uma metateoria, ou seja, elementos de uma teoria formal de prova pode provar sua consistência se, e somente se, for inconsistente.

Além das dificuldades que surgiram de se relacionar a experiência com a teoria, apareciam agora, com os teoremas de Gödel, dificuldades nas próprias teorias. Mostrava-se, assim, que a própria formalização tem o seu limite.

## **2.8 Mudanças Também na Lógica**

Não só com a geometria ocorreram transformações. A lógica também passou por algumas mudanças e eu gostaria de chamar atenção não necessariamente para as lógicas paraconsistentes, difusas e para completas, mas para a forma em que se estruturou a lógica clássica. Aristóteles afirmava que o princípio da não contradição (PNC) era indemonstrável, assim ele seria a base das demonstrações, no entanto, na compreensão da lógica moderna, o PNC pode ser demonstrado. Com isso, pode-se ver que as diferentes axiomatizações não são uma exclusividade das geometrias.

Aristóteles nos afirma a existência de princípios que são comuns a todos os gêneros e que têm um papel de base nas demonstrações. Assim, ele vai em busca de um princípio que seja o fundamental para um discurso científico. Tal princípio, deve satisfazer algumas condições: em primeiro lugar, ele deve ser tal que ninguém possa se enganar a seu respeito, pois isso seria incompatível com um conhecimento seguro. Em segundo lugar, e pela mesma razão, o primeiro princípio não pode ser hipotético, pois só se toma

---

<sup>34</sup> Um sistema, ou teoria consistente não pode afirmar duas coisas contraditórias como existe e não existe, por exemplo.

algo como uma hipótese quando ainda não se tem um conhecimento seguro. Além disso, por ser o princípio primeiro, não haveria nada a que poderíamos recorrer para comprová-lo. A terceira condição acarreta que ele não é adquirido por demonstração, mas naturalmente conhecido. Sendo assim, Aristóteles enuncia o princípio: “é impossível que o mesmo atributo pertença e não pertença ao mesmo sujeito sob o mesmo aspecto” (ARISTÓTELES, 1984, *Metafísica, Gama*, 1005b19-20). Tal formulação ficou conhecida como o Princípio de Não-Contradição (PNC).

Aristóteles é levado a formular uma estratégia diferenciada para defender o PNC, visto que o princípio não pode ser demonstrado. Segundo Aristóteles, não se mostra ao adversário algo que ele não conhece, mas, pelo contrário, mostra-se que ele de certa forma já “conhece” o princípio em questão. Para isso, seria necessário apenas que o adversário “signifique algo”, ou seja, dizer algo com sentido. Aristóteles compara uma pessoa que não diz qualquer coisa com sentido a um vegetal. Uma vez que ele tenha dito algo com significado, resta mostrar, basicamente, que esse “algo” significado não inclui a sua negação, ou seja, que seu significado é  $x$  e que isso não inclui  $\text{não-}x$ . Logo, o PNC já estaria sendo admitido.

Aristóteles fornece um exemplo com o nome “homem”. Um nome não pode significar infinitamente, mas deve significar algo uno. Se o adversário não respeitar essa limitação, a consequência é que o seu discurso não é significativo. Ou seja, se alguém pretende significar algo através de um nome qualquer, mas ao fazer isso inclui em sua definição o seu complemento, então o nome em questão significa tudo ao mesmo tempo. Mas isso não é significar, pois nesse caso é impossível compreender o que o nome designa naquele discurso particular.

Bertrand Russell diz que não há razão alguma para o PNC ser superior aos outros princípios e que a prova da incoerência da contradição de uma proposição precisa de

princípios que não estão no PNC (RUSSELL, 2007, p. 240). Newton da Costa corrobora esta afirmação de Russel quando afirma que sem a idéia de espaço e tempo, por exemplo, duas sentenças como "está chovendo" e "não está chovendo" podem ser verdadeiras. Uma teoria do tempo e do espaço precisa de uma lógica, assim o PNC não seria o mais fundamental da lógica ou se estaria num círculo vicioso (DA COSTA, 2008, p. 116 e 147).

Poder-se-ia objetar que as alegações de Russel e Da Costa seriam referentes à lógica e Aristóteles se refere a um princípio metafísico, da ciência do ser enquanto ser; e como Aristóteles, segundo Lukasiewicz (apud DA COSTA, 2008, p. 121) também formula o princípio com uma forma lógica "... proposições contraditórias não são simultaneamente verdadeiras", então o PNC poderia ser rejeitado como o mais fundamental apenas na lógica, no entanto, permaneceria com a primazia na metafísica. A alegação, porém, de Da Costa de que nem todas contradições trivializam um sistema, o que ele mostra na sua lógica paraconsistente, indica que o PNC não é um princípio comum a todos os gêneros. Além disso a afirmação de Russell se aplica também à metafísica.

Alguém ainda poderia dizer que as contradições que não trivializam o sistema não são contradições legítimas, pois são introduzidos níveis de negação. A contradição que envolvesse a negação caracterizada pelos opostos contraditórios seria a legítima, pois é a utilizada por Aristóteles. Mas, por quê? O PNC, por si só, não define o sentido da negação e como disse Russell: a incoerência da contradição é externa. Então é necessário uma definição da negação, no entanto, isso não é uma tarefa simples.

Uma definição como normalmente é dada para a negação nos cursos de lógica através da tabela verdade –  $p$  é verdadeira se, e somente se,  $\neg p$  é falsa e vice-versa – não é suficiente, pois se vale do valor de verdade de uma proposição, mas nas axiomatizações abstratas (sistemas hipotéticos-dedutivos) as sentenças (proposição) não

possuem valor de verdade, como foi mostrado na secção anterior. Para se definir todos os usos da negação, é necessário introduzir a definição de verdade formulada por Tarski, a qual não é um procedimento semântico simples que instaura diferentes níveis de linguagem, ou por meio de um método sintático com axiomas e regras de inferência (DA COSTA, 2008, p. 46). Por isso, a negação aparece normalmente como um termo primitivo e, como todo termo primitivo, sua interpretação fica determinada pelos axiomas e as definições que a contém.

O objetivo de Russell e Whitehead era mostrar que a matemática era uma lógica desenvolvida e para isso escreveram o “Principia Mathematica”, no qual também apresentam a teoria dos tipos, usada para não permitir a trivialização causada pelo axioma da separação. Por algumas razões, que fogem ao tema dessa dissertação, a tese logicista não foi considerada válida (NAGEL-NEWMAN, 2003, p. 42 a 44). No entanto, para alcançar tal objetivo, eles construíram uma lógica com o PNC como teorema.

A negação aparece como um termo indefinido é representada por “ $\sim$ ” (til). A disjunção, também um termo primitivo, é simbolizada por “ $\vee$ ”. A implicação e a equivalência, porém, são definidas pelos termos primitivos citados e são representadas por “ $\supset$ ” e “ $\equiv$ ”, respectivamente. Assim,  $p \supset q$  fica definido por  $\sim p \vee q$  e a equivalência  $p \equiv q$  por  $p \supset q$  e  $q \supset p$ . A demonstração do PNC (RUSSELL-WHITEHEAD, 1910, p. 117) é feita usando dois teoremas do sistema: o princípio do terceiro excluído ( $p \vee \sim p$ ); e uma parte de uma das leis de De Morgan  $\sim p \vee \sim q \supset \sim(p \wedge q)$ <sup>35</sup>. Partindo-se do terceiro excluído e substituindo  $p$  por  $\sim p$ , obtém-se:

$$\sim p \vee \sim(\sim p),$$

com a lei de De Morgan citada, usando  $q$  como  $\sim p$ :

---

<sup>35</sup> Lei de De Morgan:  $\sim p \vee \sim q \supset \sim(p \wedge q)$  (e), na notação do Principia Mathematica, a conjunção é representada por “ $\cdot$ ” (ponto).

$$\sim(p \text{ e } \sim p);$$

a demonstração é aparentemente simples, mas esconde os princípios que estão na dedução dos teoremas envolvidos. A demonstração do terceiro excluído, por exemplo, também não é complicada, mas envolve um princípio de funções proposicionais, o qual, segundo Russell e Whitehead, expressa no simbolismo um resultado vindo da teoria dos tipos (RUSSELL-WHITEHEAD, 1910, p. 99). O princípio é: quando  $\Phi x$  pode ser afirmado, onde  $x$  é uma variável real, e  $\Phi x \supset \Psi x$  pode ser afirmado, onde  $x$  é uma variável real, então  $\Psi x$  pode ser afirmado, onde  $x$  é uma variável real.

Segundo Aristóteles, essa demonstração seria circular, pois, por exemplo, quando defino  $p \supset q = \sim p \vee q$ , não estou querendo dizer que a negação disso também faz parte da definição, portanto eu já estaria admitindo  $\sim(p \text{ e } \sim p)$ . Contudo, a negação dessa definição só teria sentido dentro do sistema, mas não de uma forma isolada e, considerando todo o sistema, tenho o PNC como teorema, logo, a negação dessa definição não seria permitida. Parece meio estranho, mas a negação da definição de implicação, sequer pode ser considerada contraditória com a definição de implicação sem levar em conta todo o sistema. Quando se faz uma definição, a veracidade dela é garantida, mas só mediante todo o sistema é que o uso da negação, a existência de contradição e o valor de verdade da negação da definição são determinados.

Devido à possibilidade de diversas axiomatizações para um mesmo assunto, a primazia de qualquer axioma seria contestada, até mesmo a do PNC. Isso somado às demais alterações nas teorias axiomáticas tornaram possível uma demonstração do PNC na sua formulação lógica, assim como se pode estender semelhante linha de raciocínio à sua formulação metafísica.

Aristóteles relega ao PNC a tarefa de dar sentido a um discurso, pois, segundo ele, qualquer discurso significativo, até mesmo qualquer palavra com sentido, já faz uso

do PNC. Aquele que não quiser ser comparado a um vegetal se vale do PNC. Com isso, podemos dizer que o intuito de Aristóteles era a não trivialização do discurso. A não trivialização de um sistema é um desejo de qualquer lógico ou cientista, pois ninguém quer um sistema em que tudo é teorema, tudo é verdade. Quando se prova um teorema, apenas se desvela, se ressalta, o que já, de antemão, se encontra nos axiomas do sistema. Não há lugar para emergências estranhas nas lógicas que se querem inferentes. O desejo de não trivialização do sistema lógico impõe alguma restrição quanto à possibilidade de existirem contradições, quer seja pela imposição de algum PNC como axioma quer seja por meio de outros axiomas que permitam o aparecimento do PNC como teorema.

### 3 A Geometria Euclidiana por Hilbert e Tarski

No Capítulo anterior, fomos seduzidos a pensar em um convencionalismo quanto à geometria do mundo. Poincaré mostra a dificuldade de se escolher uma geometria como um conjunto epistêmico de enunciados sobre o espaço. E ainda, foi visto no capítulo anterior que uma teoria da verdade da correspondência, a qual poderia acabar com um convencionalismo, não rompe a barreira da linguagem.

As diferentes geometrias partem de diferentes concepções de objetos geométricos clássicos. A reta e o plano de uma geometria não euclidiana, por exemplo, são objetos diferentes. No entanto, pretendo chamar a atenção para axiomatizações de concepções clássicas dos objetos geométricos.

A consistência das ditas geometrias não euclidianas relativas à consistência da geometria de Euclides fez com que se revisasse a própria geometria de Euclides. Essa revisão mostrou algumas falhas lógicas nos *Elementos* de Euclides, o que motivou novas axiomatizações para a geometria dos *Elementos*. Quando os objetos geométricos de uma axiomatização são compreendidos da mesma forma que os da geometria de Euclides, ou seja, os objetos possuem as mesmas características, essa geometria é dita euclidiana. Em geral, a diferença entre as axiomatizações da geometria euclidiana é com relação a quais objetos seriam os mais básicos do espaço, isto é, quais seriam os objetos primitivos (objetos sem definição).

Hilbert se preocupou em apresentar uma axiomatização em que as falhas lógicas dos *Elementos* fossem resolvidas. Outros pensadores também apresentaram diferentes axiomatizações para a geometria euclidiana, mas focarei só em Hilbert e Tarski.

A título de exemplo, vejamos uma dessas falhas (BARKER, 1969, p. 55 a 57):

Sobre um segmento de reta dado, construir um triângulo equilátero. Seja AB o segmento dado. É necessário construir um triângulo equilátero sobre o segmento AB. Que do centro A e através do intervalo AB seja descrito o



círculo BCD (postulado 3), et em seguida, do centro B e através do intervalo BA, seja descrito o círculo ACE (postulado 3), e que do ponto C, onde os círculos se interceptam, sejam unidos os segmentos CA, CB até os pontos A, B (postulado 1). Porque o ponto A é o centro do círculo CDB, AC é igual ao segmento AB (definição 15); em seguida, porque o ponto B é o centro do círculo CAE, BC é igual ao segmento BA (definição 15). E tem sido demonstrado que CA é igual a AB; portanto cada um dos segmentos CA, CB é igual ao segmento AB; coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si (axioma 1); e portanto CA é igual a CB; portanto os três segmentos CA, AB, BC são iguais entre eles. Portanto o triângulo ABC é equilátero (definição 20) e ele está construído sobre o segmento AB dado.<sup>36</sup> (proposição 1, Livro I).

A partir da demonstração apresentada, pode-se ver que a existência do ponto C, ou seja, a afirmação que os círculos se interceptam, não parte de nenhum postulado ou axioma, mas é assumido por causa do desenho.

### 3.1 A Axiomatização de Hilbert

O sistema de Hilbert (HILBERT, 2005) evidencia a necessidade de termos indefinidos (termos primitivos) pela mesma razão que precisamos de princípios sem demonstração: evitar um regresso ao infinito. As definições são feitas a partir dos termos primitivos ou de termos que são definidos por termos primitivos. Por não terem uma definição, os termos primitivos têm os seus significados determinados unicamente pelos axiomas. Manter a axiomatização imune à influência externa é outra característica do uso dos termos primitivos. Por exemplo, nos *Elementos*, a definição de reta é muito vaga “reta é uma linha que assenta igualmente entre as suas extremidades”. O que seria “assentar igualmente”? Mesmo que fosse feita uma mudança para uma definição com um termo melhor conhecido, tal como “curva” e, assim, definindo uma reta como sendo uma linha sem curva, o termo “curva” não está definido e, certamente, se fossemos defini-lo,

---

<sup>36</sup> Os postulados e os axiomas podem ser conferidos a partir da página 15, primeiro capítulo. Já as definições, no anexo I.

precisaríamos de outro termo. Todos nós temos a idéia de que uma reta não é curva, mas tal propriedade da reta só será assegurada pelo quinto postulado.

Hilbert percebe que os termos primitivos são de dois tipos diferentes: objetos da geometria e relações desses objetos. Assim, ele escolhe os três objetos matemáticos considerados como os mais básicos da geometria, são eles o ponto, a reta e o plano. Esses objetos se interagem através de relações, tais como paralelismo, congruência, etc. Hilbert escolhe três relações como indefinidas, são elas a incidência, a ordem e a congruência.

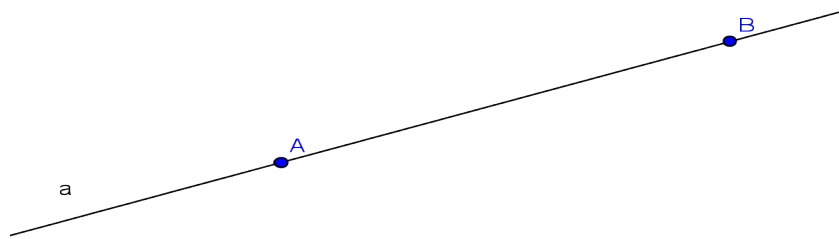
A partir daí, Hilbert divide seus axiomas em cinco grupos. Os axiomas que envolvem a relação de incidência são chamados de axiomas de conexão. São esses axiomas que vão fixar o significado da relação de incidência. O segundo grupo de axiomas vai fixar o significado da relação de ordem, logo, ele trata dos axiomas que envolvem a relação de ordem. No terceiro grupo só encontramos um axioma, o famoso quinto postulado de Euclides, no entanto, o enunciado de Hilbert é mais parecido com o enunciado de Playfair, como veremos a seguir. O quarto grupo é o grupo dos axiomas de congruência, os quais determinaram o sentido dessa relação. O quinto, e último grupo, é reservado para o axioma da continuidade de Arquimedes. Agora analisemos os axiomas desses grupos.

### **3.1.1 Axiomas de Conexão**

Axiomas de Conexão são:

1. Dois pontos distintos A e B sempre determinam completamente uma reta.

Escrevemos  $AB = a$  ou  $BA = a$ .



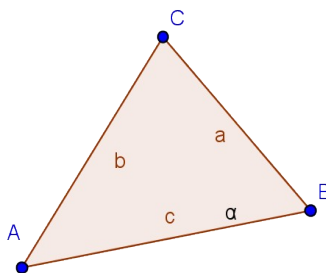
**Figura 8:** O primeiro axioma de Hilbert.(conexão)

2. Quaisquer dois pontos distintos de uma reta determinam completamente essa reta; isto é, se  $AB = a$  e  $AC = a$ , onde  $B \neq C$ , então é também  $BC = a$ .

Estes axiomas são semelhantes ao primeiro e ao segundo postulado de Euclides, pois indicam a existência da reta. Estes dois primeiros axiomas são referentes a uma geometria plana – como o próprio Hilbert indica (2005, p. 3) – por relacionarem apenas retas e pontos. Hilbert também diz que podemos usar os termos “cair sobre”, “é um ponto de”, “passa por”, “une”, etc, ao invés do termo “determinar”, isto é, quando estes termos aparecerem, está se referindo a uma única relação.

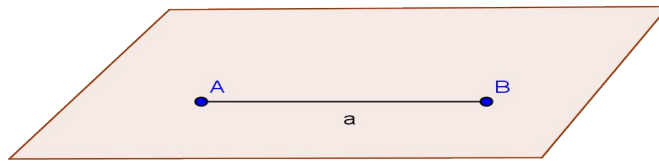
Os axiomas de conexão continuam:

3. Três pontos A, B, C que não são pontos de uma mesma reta sempre determinam completamente um plano  $\alpha$ . Nós escrevemos  $ABC = \alpha$ .



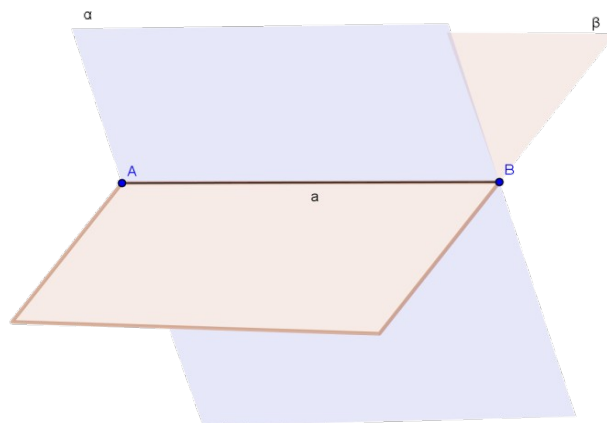
**Figura 9:** Existência do plano.

4. Quaisquer três pontos  $A, B, C$  de um plano  $\alpha$ , que não são pontos de uma mesma reta, determinam completamente esse plano.
5. Se dois pontos  $A, B$  de uma reta  $a$  estão em um plano  $\alpha$ , então todos os pontos de  $a$  estão em  $\alpha$ .



**Figura 10:** O quinto axioma de Hilbert.(conexão)

6. Se dois planos  $\alpha, \beta$  têm um ponto  $A$  em comum, então eles têm ao menos um segundo ponto  $B$  em comum.



**Figura 11:** O sexto axioma de Hilbert.(conexão)

7. Sobre toda reta existe ao menos dois pontos, em todo plano ao menos três pontos não são pontos de uma mesma reta, e no espaço existe ao menos quatro pontos que não são pontos em um plano.

Assim como os dois primeiros axiomas são referentes à geometria plana, os outros cinco são de geometria espacial. Desses axiomas de conexão somente, Hilbert apresenta apenas dois teoremas, no entanto, seu primeiro teorema equivale a três. Seguem os dois teoremas:

1. Duas retas de um plano têm ou um ponto em comum, ou nenhum ponto em comum; Dois planos têm nenhum ponto em comum ou uma reta em comum; Um plano e uma reta que não está nele têm um ponto ou nenhum ponto em comum.

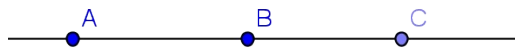
A primeira parte desse teorema nos assegura a unicidade de uma reta entre dois pontos, pois não existe a possibilidade de duas retas possuírem dois pontos em comum. Ou seja, a unicidade da reta não é postulada por Hilbert como comumente se fala. No entanto, ele não faz a demonstração do teorema, assim, não se pode verificar se ele usou intuitivamente a unicidade da reta entre dois pontos, pois em seu texto “On the infinite” (1964, p. 187), ele acrescenta a unicidade como postulado e afirma que duas retas se cruzam no máximo em um ponto. O segundo teorema também é sobre unicidade, mas a unicidade do plano:

2. Através de uma reta e de um ponto que não está nela, ou através de duas distintas retas tendo um ponto em comum, passa-se um e somente um plano.

### 3.1.2 Axiomas de Ordem

O grupo de axiomas seguintes de Hilbert é o grupo dos axiomas de ordem, os quais irão definir o vocábulo “entre”, a fim de estabelecer uma ordem de sequência entre pontos sobre uma reta, sobre um plano e sobre o espaço. São eles:

1. Se A, B, C são pontos de uma reta e B caí (está, jaz) entre A e C, então B está também entre C e A.



**Figura 12:** Primeiro axioma de ordem.

2. Se A e C são dois pontos de uma reta, então existe ao menos um ponto B que está entre A e C e ao menos um ponto D situado de forma que C está entre A e D.



**Figura 13:** Segundo axioma de ordem.

3. De qualquer três pontos que estão em uma reta existe sempre um e somente um ponto que está entre os outros dois.

4. Quaisquer quatro pontos A, B, C, D de uma reta sempre podem ser arranjados de maneira que o ponto B esteja entre o A e o C e também entre o A e o D, além disso, de maneira que o ponto C esteja entre o A e o D e também entre o B e o D.

Antes de enunciar o quinto axioma de ordem, Hilbert apresenta a definição de segmento, de pontos de um segmento e extremidade de um segmento. Um segmento é definido como o sistema de pontos A e B que estão em uma reta; os pontos de um segmento são os pontos que estão entre A e B; A e B são as extremidades do segmento. Eis o quinto axioma:

5. Sejam A, B, C três pontos que não estão numa mesma reta e seja a uma reta do plano ABC e não passando por nenhum dos pontos A, B, C. Então, se a linha a passar por um ponto do segmento AB, ela também passará ou por um ponto do segmento BC ou por um ponto do segmento AC.

Os quatro primeiros axiomas são axiomas de linearidade, pois são concernentes a pontos de uma única linha. Já o quinto é sobre geometria plana.

Hilbert faz mais definições e apresenta teoremas que seguem dos axiomas dos dois grupos já apresentado: conexão e ordem. A partir da de segmento, ele define linha quebrada e segue definindo polígono, vértice de um polígono, lados de um polígono, triângulo, quadrilátero, pentágono, etc. Dos cinco teremos apresentados por ele, destacarei dois: o primeiro, o qual afirma que entre dois pontos de uma reta existem infinitos pontos; o outro (o sétimo na conta do Hilbert) diz que:

- todo plano  $\alpha$  divide os pontos restantes do espaço em duas regiões com as seguintes propriedades: todo ponto A de uma região determina com cada ponto B da outra região um segmento AH, dentro do qual está um ponto de

$\alpha$ . Por outro lado, quaisquer dois pontos  $A, A'$  que estão dentro de uma mesma região determina um segmento  $AA'$  sem nenhum ponto de  $\alpha$ .

Segundo Hilbert (2005, p. 7), esse teorema nos dá os fatos mais importantes com relação à ordem de sequência dos elementos do espaço. Esses fatos partem desses axiomas sem a necessidade de qualquer outro axioma do espaço no grupo dos axiomas de ordem.

### 3.1.3 Axioma das Paralelas

No terceiro grupo de axiomas, Hilbert enuncia apenas o famoso quinto postulado de Euclides. A versão hilbertiana é mais parecida com a versão de Playfair. Sua redação é:

- Em um plano  $\alpha$  pode ser traçado de qualquer ponto  $A$ , que esteja fora da reta  $a$ , uma e somente uma reta que não corta a reta  $a$ . Essa linha é chamada de paralela a reta  $a$  através do ponto  $A$  dado.

Esse axioma é sobre geometria plana e contém duas partes, uma sobre a existência e outra sobre a unicidade da paralela. Hilbert mostra que essa primeira parte, a existência, decorre dos axiomas do grupo um, dois e quatro. Como ainda não apresentei os axiomas do grupo quatro, os axiomas de congruência, eu mostrarei essa demonstração dele mais a frente. Nesse grupo, ele apresenta só um teorema:

- Se duas retas  $a, b$  de um plano não encontram uma terceira reta  $c$  do mesmo plano, então elas não se encontram.

Hilbert afirma que a partir desse teorema pode-se provar a redação original do quinto postulado euclidiano.

Esse axioma, como já foi mostrado, causou muita polêmica quanto à questão de saber se ele era decorrente dos demais ou não. Por isso, Hilbert se preocupa em falar



sobre a independência de todos os axiomas de seu sistema e separa uma parte para falar especificamente do axioma em questão. Para concluir sobre a independência do axioma das paralelas, ele faz uso do seu método de redução à aritmética. Antes, para demonstrar a consistência dos axiomas, ele construiu pontos, retas e planos de forma aritmética, então ele pede para considerar esses objetos construídos em uma esfera fixada e que se defina a congruência dessa geometria como uma transformação linear. A partir daí, ele afirma que essa nova geometria obedece todos os axiomas do sistema dele, exceto o axioma das paralelas. Assim, fica provada a independência do axioma.

### 3.1.4 Axiomas de Congruência

O grupo quatro é o grupo dos axiomas de congruência. Esses axiomas expressão o significado de “congruente” e “deslocamento”. Os axiomas são:

1. Se  $A, B$  são dois pontos em uma reta  $a$  e se  $A'$  é um ponto sobre a mesma reta ou em uma outra  $a'$ , então, sobre um lado dado de  $A'$  na reta  $a'$ , nós podemos sempre encontrar um, e somente um, ponto  $B'$  de maneira que o segmento  $AB$  (ou  $BA$ ) é congruente ao segmento  $A'B'$ . Nós indicamos essa relação escrevendo  $AB \equiv A'B'$ . Todo segmento é congruente a ele mesmo; isto é, nós sempre temos  $AB \equiv AB$ .
2. Se um segmento  $AB$  é congruente ao segmento  $A'B'$  e também ao segmento  $A''B''$ , então o segmento  $A'B'$  é congruente ao segmento  $A''B''$ ; isto é, se  $AB \equiv A'B'$  e  $AB \equiv A''B''$ , então  $A'B' \equiv A''B''$ .
3. Sejam  $AB$  e  $BC$  dois segmentos de uma reta  $a$  que não tem pontos em comum além do ponto  $B$ , e, além disso, seja  $A'B'$  e  $B'C'$  dois segmentos do mesmo ou de uma outra linha  $a'$  que tenha, da mesma forma, nenhum

ponto além de  $B'$  em comum. Então, se  $AB \equiv A'B'$  e  $BC \equiv B'C'$ , nós temos  $AC \equiv A'C'$ .

Antes de prosseguir com o quarto axioma desse grupo, Hilbert define o que é um ângulo, vértice de um ângulo e região interior e exterior de um ângulo. Com essas definições, ele parte para o quarto axioma:

4. Seja um ângulo  $(h, k)$  dado em um plano  $\alpha$  e seja uma reta  $a'$  dada em um plano  $\alpha'$ . Suponha também que, em um plano  $\alpha$ , um lado definido da reta  $a'$  seja marcado. Denote-se por  $h'$  uma semi-reta da reta  $a'$  que parte de um ponto  $O'$  desta reta. Então no plano  $\alpha'$  existe um e somente uma semi-reta  $k'$  tal que o ângulo  $(h, k)$ , ou  $(k, h)$ , é congruente ao ângulo  $(h', k')$  e ao mesmo tempo todos os pontos interiores do ângulo  $(h', k')$  estão sobre o lado dado de  $a'$ . Nós expressamos essa relação através da notação  $(h, k) \equiv (h', k')$ . Todo ângulo é congruente a ele mesmo; isto é,  $(h, k) \equiv (h, k)$  ou  $(h, k) \equiv (k, h)$ .
5. Se o ângulo  $(h, k)$  é congruente ao ângulo  $(h', k')$  e ao ângulo  $(h'', k'')$ , então o ângulo  $(h', k')$  é congruente ao ângulo  $(h'', k'')$ . Isso é o mesmo que dizer que, se  $(h, k) \equiv (h', k')$  e  $(h, k) \equiv (h'', k'')$ , então  $(h', k') \equiv (h'', k'')$ .
6. Se, em dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , as congruências  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$ , ângulo  $BAC \equiv$  ângulo  $B'A'C'$  se verificam, então as congruências ângulo  $ABC \equiv$  ângulo  $A'B'C'$  e ângulo  $ACB \equiv$  ângulo  $A'C'B'$  também se verificam.

Os três primeiros axiomas desse grupo são lineares e os demais, são de geometria plana. Nesse grupo, Hilbert faz mais definições tais como ângulo reto, ângulo suplementar, etc. Dentre os teoremas, ele prova um sobre congruência de triângulos e apresenta outros dois, também sobre congruência de triângulos, além de outros

teoremas. Hilbert não mostra a maioria dos teoremas, mas nesse grupo quase todos são provados. Seu décimo quinto teorema é o quarto postulado de Euclides, o qual é demonstrado por Hilbert. O vigésimo teorema hilbertiano afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, teorema que vimos estar relacionado com o quinto postulado euclidiano. A última colocação de Hilbert nesse grupo é a definição de círculo por segmentos congruentes e a afirmação que dessa definição, através do axioma das paralelas e dos axiomas de congruência, pode-se deduzir todas importantes propriedades do círculo. Assim, seria redundante enunciar o terceiro postulado euclidiano sobre a existência do círculo.

Antes de irmos para o último grupo de axiomas de Hilbert, vejamos como a existência da paralela é de decorrência dos axiomas, sendo assim, é necessário postular apenas a unicidade, mas a redação do axioma ficaria estranha se não usasse o vocábulo “existe”. O que estou ressaltando aqui é que o existe se refere a existência da unicidade, e não da reta. Proceda da seguinte forma para ver que a existência procede dos axiomas: ligue o ponto A, que está fora da reta  $a$ , até um ponto B qualquer da reta  $a$ , formando o segmento AB. Marque um ponto C qualquer na reta  $a$  e a partir do ponto A, sobre o segmento AB e do lado oposto ao ponto C, construa um ângulo igual ao ângulo ABC. Essa reta que passa por A e faz ângulo ABC com o segmento AB não corta a reta  $a$  em ponto algum, logo, ela é paralela. Hilbert faz essa demonstração (2005, p. 19). É fácil ver que tais ângulos são alternos internos, caso em que próprio Euclides prova que essas retas são paralelas sem usar o postulado das paralelas.

### **3.1.5 Axioma da Continuidade**

O último grupo de axiomas, o quinto, é unitário como o terceiro. Nesse grupo final, temos o axioma da continuidade, intitulado por Hilbert de axioma arquimediano. Antes de

prossequir com o axioma, Hilbert diz que devemos entender a igualdade de segmentos como uma congruência ou através de construções adequadas, usando o teorema de Desargues de maneira que não seja necessário a idéia de congruência como ele faz (2005, p. 51). Eis então o axioma:

- Seja  $A_1$  qualquer ponto sobre uma reta entre pontos  $A$  e  $B$  escolhidos arbitrariamente. Tome os pontos  $A_2, A_3, A_4, \dots$  de maneira que  $A_1$  esteja entre  $A$  e  $A_2$ ,  $A_2$  entre  $A_1$  e  $A_3$ ,  $A_3$  entre  $A_2$  e  $A_4$ , etc. Além disso, sejam os segmentos  $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$  iguais um ao outro. Então, dentre esta série de pontos, sempre existe um certo ponto  $N_n$  tal que  $B$  está entre  $A$  e  $N_n$ .

Esse axioma é linear e Hilbert não apresenta demonstração alguma nesse grupo, apenas apresenta um axioma, que não é puramente geométrico, chamado de axioma de completude, o qual é referente a pontos de acumulação.<sup>37</sup>

### 3.1.6 Considerações sobre a Axiomatização de Hilbert

Vimos que a axiomatização de Hilbert organiza os axiomas em grupos de acordo com as relações utilizadas nos axiomas. Podemos perceber que existe um outro grupo, o qual Hilbert sempre menciona: um grupo quanto a dimensão. Assim, temos o grupo dos axiomas lineares, axiomas planos e axiomas espaciais. Outro fato que podemos notar em sua axiomatização é que nem todos os axiomas só tratam de objetos indefinidos, como é o caso do quinto axioma do segundo grupo (ordem), o primeiro, segundo e terceiro do quarto grupo (congruência), o axioma do quinto grupo (continuidade), os quais usam o objeto "segmento". O quarto, o quinto e o sexto axioma do grupo quatro (congruência) usam o objeto ângulo, sendo que o quarto utiliza também o objeto semi-reta. Assim,

---

<sup>37</sup> Pontos de acumulação são referentes ao cálculo diferencial e integral.

temos três objetos definidos: segmento, ângulo e semi-reta, os quais figuram entre os axiomas.

O objetivo de Hilbert era provar a consistência da geometria, ou seja, provar que da geometria não é possível obter dois enunciados contraditórios. Para provar essa consistência, Hilbert mapeia a geometria na aritmética, assim, sendo a aritmética consistente, também será a geometria. A redução de teorias matemáticas à aritmética faz parte da filosofia de Hilbert, que tem semelhanças com o positivismo lógico, o qual afirmava que devemos distinguir entre os termos observacionais e os termos teóricos na ciência. Enquanto os termos observacionais estão ligados diretamente à experiência sensível, os teóricos são postulados para explicar fenômenos da natureza. Segundo Carnap, os termos observacionais não precisavam de justificação, enquanto os teóricos sim. Fazendo um paralelo, pode-se equiparar os termos observacionais e os termos teóricos, respectivamente, ao que Hilbert chama de parte real e ideal (apud MOLINA, 2001, p. 131 e 132). A parte real seria aritmética, da qual ninguém duvida, embora Hilbert mencione partes ideais na aritmética também (HILBERT, 1964, p. 191).

### **3.2 A Axiomatização de Tarski**

A axiomatização de Tarski segue o mesmo caminho da realizada por Hilbert, no entanto, só apresenta duas relações como primitivas e apenas um objeto geométrico primitivo. As relações são de ordem e de congruência e o objeto geométrico, o ponto.

Tarski começa sua axiomatização no final da década de vinte do século vinte, mas seu trabalho só foi submetido a publicação em 1940, sendo publicado somente em 1967<sup>38</sup>. Ao longo dos anos, esse trabalho de Tarski foi estudado e aprimorado, alguns axiomas que se mostraram dependentes dos demais foram eliminados e outros tiveram sua redação melhorada. Assim, por volta de 1965, com os estudos de Gupta, Szmielew,

<sup>38</sup> The completeness of elementary algebra and geometry, Institut Blaise Pascal, Paris, 1967

Schwabhäuser e Tarski, chega-se a uma concisa axiomatização da geometria euclidiana (TARSKI-GIVANT, 1999, p. 188 a 190), a qual mostrarei abaixo, através dos escritos de Tarski e Givant publicado em “The Bulletin of Symbolic Logic”.

O sistema de Tarski é mais simbólico que o de Hilbert, ao invés de palavras como “existe”, “para todo”, usa-se símbolos lógicos como “ $\exists$ ” e “ $\forall$ ” respectivamente, entre outros. Tarski procura organizar sua geometria somente com o uso da lógica de primeira ordem (LPO)<sup>39</sup>, deixando claro uma diferença entre lógica e matemática. A idéia de Tarski é fazer com que nenhuma teoria se sobreponha a outra, por isso, ele busca só usar a lógica de primeira ordem como base para seu sistema. No entanto, ele só consegue isso para uma parte da geometria, a qual chamará de “geometria elementar”, pois o uso de uma lógica de segunda ordem (LSO) se mostra necessário. Um outro motivo para uma separação entre o uso das LPO e LSO, em sua geometria, pode ser a vantagem da LPO ser completa, ou seja, para qualquer forma válida da LPO, pode-se verificar se ela é falsa ou verdadeira. Tal resultado foi obtido em 1930 por Gödel (ENCYCLOPEDIA BRITANNICA). Embora essa descoberta tenha sido feita alguns anos depois de Tarski iniciar sua axiomatização da geometria, ele já tinha alguma intuição sobre o assunto, pois vinha trabalhando sobre isso e seu aluno, Presburger, axiomatizou uma aritmética sem a multiplicação e só com uma lógica de primeira ordem, conseguindo assim, mostrar a completude dessa aritmética (STANSIFER, 1984).

Como foi dito no parágrafo anterior, Tarski atribui um grande papel a lógica e, por isso, seu sistema evidencia os seus objetos lógicos. Irei apresentar o aparato lógico usado por Tarski com o uso de uma tabela.

---

<sup>39</sup> Enquanto a LPO quantifica apenas sobre elementos individuais de um conjunto, a LSO quantifica também conjunto de elementos, os conjuntos são tratados como variáveis. Exemplo, “todo número inteiro possui divisores nos racionais” é um enunciado da LPO, pois trata de elementos de conjuntos. Já o enunciado: “todo país possui uma bandeira”, entendendo-se país como um conjunto de cidades, é um enunciado da LSO. Uma Lógica de segunda ordem mais geral ainda pode quantificar funções.

Nome e Significado	Símbolo
Igualdade “igual”	=
Conjunção “e”	$\wedge$
Disjunção “ou”	$\vee$
Negação “não”	$\neg$
Implicação “se... então”	$\Rightarrow$
Bicondicional “se, e somente se” ou “equivalente”	$\Leftrightarrow$
Quantificador universal “todo” ou “para todo”	$\forall$
Quantificador existencial “existe”	$\exists$

**Tabela 1:** Símbolos lógicos.

Como foi dito, Tarski só usa um objeto geométrico como primitivo: o ponto, o qual será denotado por letras minúsculas a, b, c, etc. As duas relações geométricas primitivas são: ordem e congruência representadas por “B(abc)” e “ $\equiv$ ” respectivamente. A relação B(abc) afirma que o ponto b está entre o a e o c. Intuitivamente, ela nos diz que ponto b está no segmento que une o ponto a ao ponto c. Já a relação  $ab \equiv cd$  afirma que há uma equidistância entre os pontos a, b, c e d. Intuitivamente, ela nos diz que a distância do ponto a ao ponto b é a mesma que a distância do ponto c ao ponto d. A partir de agora podemos entender os axiomas de Tarski. Eles são:

1. (Congruência) – Axioma de reflexividade para a relação de equidistância.

$$ab \equiv ba$$

2. (Congruência) – Axioma de transitividade para a relação de equidistância.

$$ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \Rightarrow pq \equiv rs$$

Esse segundo axioma de Tarski é o mesmo que o segundo axioma do grupo dos axiomas de congruência de Hilbert. A única diferença é o uso dos símbolos lógicos “  $\wedge$  ” e “  $\Rightarrow$  ” e dos pontos serem simbolizados por letras minúsculas ao invés de maiúsculas.

3. (Congruência) – Axioma de identidade para a relação de equidistância.

$$ab \equiv cc \Rightarrow a = b$$

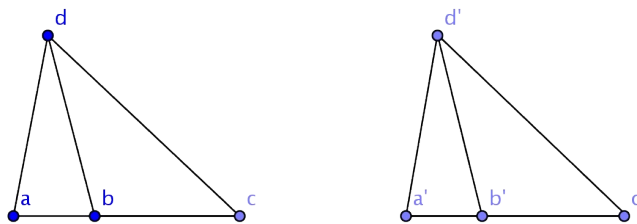
4. (Ordem/Congruência) – Axioma de construção de segmento.

$$\exists x ( B(qax) \wedge ax \equiv bc ).$$

O axioma de construção de segmento nos diz intuitivamente que a partir de um segmento  $bc$  é sempre possível construir um segmento congruente a ele. Com isso, esse quarto axioma é semelhante ao primeiro axioma do grupo dos axiomas de congruência de Hilbert.

5. (Ordem/Congruência) – Axioma dos cinco-segmentos.

$$[ a \neq b \wedge B(abc) \wedge B(a'b'c') \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd' ] \\ \Rightarrow cd \equiv c'd'$$



**Figura 14:** Axioma dos cinco-segmentos.

O axioma dos cinco-segmentos é um axioma de congruência de triângulos.

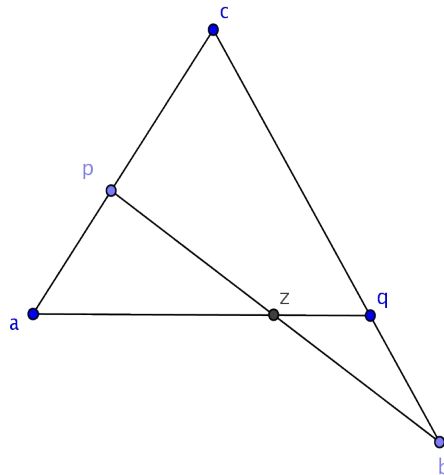
6. (Ordem) – Axioma de identidade para a relação de ordem.

$$B(aba) \Rightarrow a = b$$

7. (Ordem) – Axioma de Pasch.



$$B(apc) \wedge B(bqc) \Rightarrow \exists z [B(pzb) \wedge B(qza)]$$



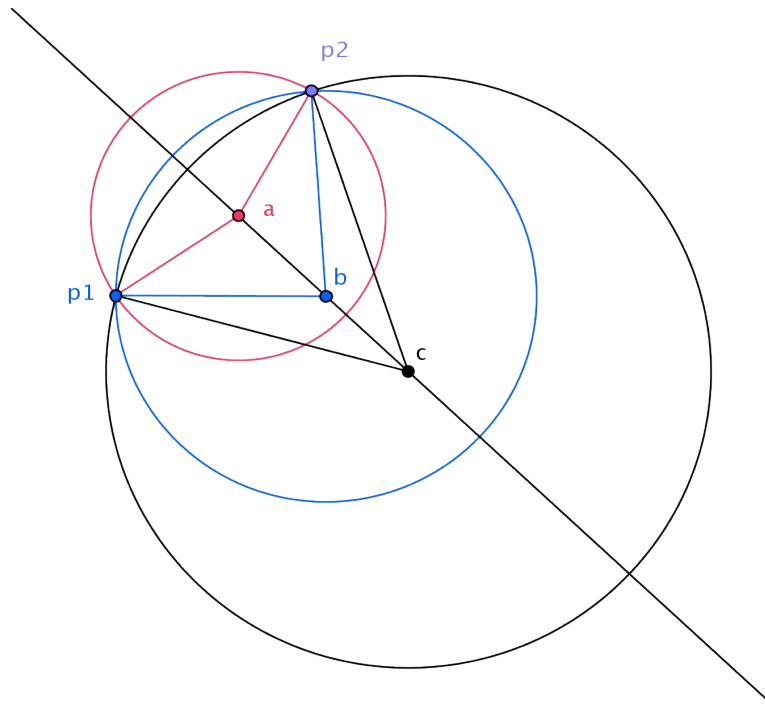
**Figura 15:** Axioma de Pasch.

O axioma de Pasch afirma que em um plano se uma reta cortar um dos lados de um triângulo e nenhum de seus vértices, então ela também cortará um dos outros dois. Esse axioma sete é o mesmo axioma cinco do grupo dos axiomas de ordem de Hilbert.

Os próximos dois axiomas, o oitavo e o nono, garantem uma dimensão fixa para a geometria. Primeiro, eles serão apresentados para a geometria plana, ou seja, caso em que a dimensão é igual a dois, e depois serão generalizados para para dimensão igual a  $n$ . Seguem os axiomas:

- Menor dimensão para  $n= 2$ :  $\exists a \exists b \exists c [\neg B(abc) \wedge \neg B(bca) \wedge \neg B(cab)]$ , ou seja, existem três pontos não colineares.
- Maior dimensão para  $n= 2$ : o conjunto de todos os pontos equidistantes de cada dois distintos pontos é uma linha.

$$[p_1 \neq p_2 \wedge ap_1 \equiv ap_2 \wedge bp_1 \equiv bp_2 \wedge cp_1 \equiv cp_2] \Rightarrow B(abc) \vee B(bca) \vee B(cab)$$



**Figura 16:** Axioma da maior dimensão para n=2.

Generalizando para n, temos os axiomas:

8. (Ordem/Congruência) – Axioma da menor dimensão para n= 3, 4, ....

$$\begin{aligned} & \exists a \exists b \exists c \exists p_1 \exists p_2 \dots \exists p_{n-1} \\ & \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} p_i \neq p_j \wedge \bigwedge_{i=2}^{n-1} ap_1 \equiv ap_i \wedge \bigwedge_{i=2}^{n-1} bp_1 \equiv bp_i \wedge \bigwedge_{i=2}^{n-1} cp_1 \equiv cp_i \wedge \\ & [\neg B(abc) \wedge \neg B(bca) \wedge \neg B(cab)] \end{aligned}$$

9. (Ordem/Congruência) – Axioma da maior dimensão para n= 2, 3, ...

$$\begin{aligned} & \left[ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} p_i \neq p_j \wedge \bigwedge_{i=2}^n ap_1 \equiv ap_i \wedge \bigwedge_{i=2}^n bp_1 \equiv bp_i \wedge \bigwedge_{i=2}^n cp_1 \equiv cp_i \right] \Rightarrow \\ & [B(abc) \vee B(bca) \vee B(cab)] \end{aligned}$$

Os axiomas de número oito e nove garantem uma dimensão finita e permitem a introdução de uma dimensão n qualquer, onde n é um número natural. Dessa forma, o sistema de Tarski, diferente do de Hilbert, introduz a dimensão da geometria com axiomas

próprios, facilitando assim, o uso de dimensões diferentes apenas substituindo dois axiomas. Apenas alterando o valor de  $n$ , gera-se novos axiomas. Segue o décimo axioma:

10. (Ordem) – Axioma de Euclides.

$$B(ad t) \wedge B(bdc) \wedge a \neq d \Rightarrow \exists x \exists y [B(abx) \wedge B(acy) \wedge B(ytx)]$$

Essa versão do axioma de Euclides afirma que para qualquer ponto  $t$  no interior do ângulo  $bac$  existe uma reta  $xy$  que intercepta ambos os lados do ângulo.

11. (Ordem) – Axioma da continuidade.

$$\exists a \forall x \forall y [x \in X \wedge y \in Y \Rightarrow B(axy)] \Rightarrow \exists b \forall x \forall y [x \in X \wedge y \in Y \Rightarrow B(xby)]$$

$X$  e  $Y$  são variáveis de segunda ordem, pois são conjuntos. A fim de não usar uma lógica de segunda ordem, Tarski apresenta um esquema de axioma para a continuidade. Esse esquema é:

- Esquema do axioma da continuidade.

Todos os casos do esquema é um axioma.

$$\exists a \forall x \forall y [\alpha \wedge \beta \Rightarrow B(axy)] \Rightarrow \exists b \forall x \forall y [\alpha \wedge \beta \Rightarrow B(xby)]$$

Onde  $\alpha$  e  $\beta$  são fórmulas de primeira ordem que substituem as de segunda ordem, assim, tem-se uma axiomática infinita, pois para cada caso de  $\alpha$  e  $\beta$  tem-se um axioma.

### 3.2.1 Considerações sobre a Axiomatização de Tarski

Uma das vantagens dessa axiomatização tarskiana é que a complexidade do sistema é mais facilmente verificada que a de Hilbert, pois Tarski só usa em seus axiomas objetos primitivos (não definidos), enquanto que Hilbert, não. A outra vantagem, que sem dúvida é a principal delas, é o fato de Tarski conseguir provar a consistência, a completude e a decidibilidade da geometria elementar através da eliminação de

quantificadores, mostrando assim, partes da geometria que não são passíveis dos teoremas da incompletude de Gödel.

As vantagens citadas são todos resultados metamatemático, o que mostra que os resultados de Tarski são mais vantajosos para um filósofo da matemática. No entanto, axiomatização hilbertiana parece mais fácil de ser manejada, sendo mais vantajosa no campo da prática matemática.

### 3.3 Consequências

A partir das exposições e comparações entre as axiomatizações hilbertiana e tarskiana, percebe-se a dificuldade de dizer que uma é melhor que a outra ou que uma é a axiomatização, a qual descreve a realidade. Isso nos faz concluir que a axiomatização não é de entidade ontológica, mas sim epistemológica<sup>40</sup>, isto é, não se descobre uma axiomatização, ela é apenas um aparato, um artifício para nos ajudar a compreender o mundo.

Como consequência disso, tem-se que os objetos geométricos são relativos. Na axiomatização de Tarski a reta, por exemplo, é um objeto supérfluo, visto que pode-se suprimir a ideia de reta e mesmo assim se fazer geometria. Dessa forma, seria a reta apenas um artifício para a nossa compreensão, assim como Tarski exemplifica mostrando retas em suas figuras? Por isso que foram escolhidas duas axiomatizações tão próximas quanto a concepção dos objetos geométricos, pois duas geometrias com concepções bem diferentes quanto aos seus objetos não nos mostrariam essa dificuldade, visto que poder-se-ia objetar que elas tratam de mundos diferentes.

---

40 O termo “epistemológica” abordado aqui, não se refere a conhecimento verdadeiro, mas a nossa capacidade de compreensão.

## Considerações Finais

Sempre houve muitas discussões sobre a natureza dos objetos matemáticos e, sem dúvida alguma, o surgimento das geometrias não euclidianas tornou essas discussões mais evidentes e mais calorosas. Além disso, as novas geometrias mostraram que, ainda que elas fossem falsas, a velha axiomatização da geometria euclidiana era falha, embora teorema euclidiano algum tenha sido invalidado.

Apesar de tantos dilemas causados pelas geometrias não euclidianas, elas, hoje em dia, não apresentam grandes dificuldades filosóficas como antes. Ora, se o plano e a reta, por exemplo, são objetos distintos nas diferentes geometrias, poder-se-ia dizer que os objetos variam de acordo com a curvatura do espaço, mais ou menos como acontece na geometria diferencial. Outra solução seria atribuir nomes distintos para cada objeto já que eles são, de fato, diferentes, o que também ocorre na geometria diferencial, de uma certa forma. Assim, poder-se-ia dizer que a descoberta das geometrias não euclidianas foi uma descoberta de novos objetos geométricos.

No entanto, as dificuldades emergem na hora de se organizar os objetos, na hora da axiomatização. Como foi visto, o objeto reta não é necessário na geometria de Tarski. É possível fazer geometria somente com relações entre pontos. Supondo que exista uma realidade e se a geometria tarskiana a descrevesse corretamente, então a reta seria um objeto para nos facilitar a compreensão. Ela representaria um conjunto de pontos com certas características, dessa forma, se misturariam as filosofias nominalistas e realistas para os objetos da geometria. Realista porque partimos de uma realidade existente, ou seja, o objeto ponto seria real e nominalista porque a reta seria apenas um nome, uma abreviação. Contudo, não existe uma forma de concluir que a geometria de Tarski descreva a realidade corretamente. Na verdade, ela parece bem artificial nessa tentativa de separar as disciplinas bem no início, enquanto geralmente vemos que na prática é

difícil de determinar onde acaba uma e começa outra. Por isso, essa tentativa de divisão entre as lógicas de primeira e segunda ordem parece mais uma obra de organização humana em busca de sistemas elegantes. Devo destacar que o trabalho de Tarski não busca tentar descrever a realidade, esse não era o objetivo dele.

Talvez você deva estar se perguntando por que eu insisto em falar em uma realidade matemática, enquanto muitos se contentam em afirmar que a matemática é apenas um instrumento e, por isso, poder existir diferentes matemáticas. Mas a resposta é muito simples. Embora haja muita gente que acredita num instrumentalismo para física ou para a ciência em geral, muitos outros acreditam que a física tenha uma realidade e que, mesmo que nunca possamos alcançá-la, pelo menos estamos cada vez mais próximos dessa verdade. No entanto, os que defendem uma realidade física, ou científica, não vêem dificuldades em sustentar um instrumentalismo para a matemática. Acontece que se existe uma realidade física, então existe uma matemática que a descreva e essa seria a matemática real. A não ser que a física real não seja matematizada, no entanto, por mais que isso seja verdade, dificilmente a física mais “real” que o homem puder chegar irá abrir mão da matematização, a qual levou a física para outro patamar. Além disso, a física não ser matematizável é uma questão epistemológica (limitação da nossa capacidade de compreensão) ou uma questão ontológica (propriedade da física)?

As axiomatizações de Tarski e Hilbert, porém, podem descrever o mesmo tipo de realidade e, no entanto, continuaria o nosso impasse sobre os objetos da geometria ou, então, poderíamos admitir filosofias distintas para os diferentes objetos da geometria – realismo e nominalismo – assim como foi dito anteriormente. A axiomatização de Tarski tem melhores resultados metamatemáticos, enquanto a axiomatização de Hilbert é de melhor manuseio para os matemáticos. Tomemos como exemplo o axioma euclidiano das

paralelas, ou seja, o décimo axioma de Tarski<sup>41</sup>, que é de difícil compreensão a primeira vista.

A filosofia da matemática tem caminhado para uma aproximação entre a física e a matemática para tentar explicar a matemática, como foi o caso do argumento de indispensabilidade de Quine e Putnam, no entanto, é um argumento muito questionado. Contudo parece difícil procurar uma episteme geométrica ou matemática, sem nos atentarmos para a relação entre a matemática e a física.

---

41 Vide página 80.

## Referências Bibliográficas

ARISTÓTELES. **Analíticos Posteriores, I – 10.** Disponível em <<http://classics.mit.edu/Aristotle/posterior.1.i.html>> Acessado em 20/07/2009.

ARISTÓTELES. **Analíticos Primeiros, I.** Disponível em <<http://classics.mit.edu/Aristotle/prior.1.i.html>> Acessado em 20/07/2009.

ARISTÓTELES. **Metaphysics.** In: The Complete Works of Aristotle: The revised Oxford Translation. (ed. J. Barnes). 2 vols. Princeton: Oxford University Press, 1984.

BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 2.ed. São Paulo, 1996.

CAVEING, M. **La Tradition euclidienne dans la Grèce ancienne.** In: Vitrac, B. *Éléments*, Les. Paris: Presses Universitaires de France, 1990. p. 13-148.

CHALMERS, A. F. **O que é ciência afinal?** São Paulo: Brasiliense, 1993.

COMMANDINO. **Elementos, Os.** Universidade de Coimbra:Coimbra, 1855.

COPI, I. **Introduction to Logic.** 3. ed. Londres: Macmillan Comapny, 1969.

DA COSTA, N. C. A. **Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica.** São Paulo: HUCITEC, 2008.

DIZIONARIO GRECO ANTICO. Verbetes: δόξα; τέχνη; ἐπιστήμη. Disponível em <<http://www.grecoantico.com/dizionario-greco-antico.php>> Acessado em 29/10/2010.

ENCYCLOPEDIA BRITANNICA. Disponível em <<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/346217/history-of-logic/284165/Godels-incompleteness-theorems?anchor=ref535846>> Acessado em 05/08/2010.

HEATH, T. L. **Everyman's Library Euclid Introduction,** 1932. Disponível em <[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Everyman\\_Euclid.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Everyman_Euclid.html)> Acessado em 05/02/2010.



HEATH, T. L. **Thirteen Books of Euclid's Elements, The**. Vol. 1. 2.ed. Nova Iorque: Dover Publications, INC, 1956.

HEIBERG, I. L.; MENGE, H. **Euclidis Opera Omni**, 1896. Disponível em <[www.wilbourhall.org/pdfs/MBP/euclidisoperaomn06eucluoft.pdf](http://www.wilbourhall.org/pdfs/MBP/euclidisoperaomn06eucluoft.pdf)> Acessado em 15/03/2010.

HILBERT, D. **Foundations of Geometry, The**. Projeto Gutenberg. 2005.

HILBERT, D. **Infinite, On The**, In: Benacerraf, P., Putnam, H. Philosophy of Mathematics. Cambridge University Press: Cambridge, 1964.

KANT, I. **Crítica da Razão Pura**. Grupo Acrópolis <<http://br.groups.yahoo.com/group/acropolis/>> Disponível em <<http://www.slideshare.net/josefiorin/kant-critica-da-razo-pura>> Acessado em 20/07/2010.

LAMBERT, **Theorie der Parallel-Linien**, 1766. Disponível em <<http://www.kuttaka.org/~JHL/L1786a.html>> Acessado em 14/05/2010.

LEVI, B. **Lendo Euclides**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008.

MOLINA, J. A. Lakatos como Filósofo da Matemática. **Episteme**, Porto Alegre, n. 13, p. 129-153, jul/dez, 2001.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. **A Prova de Gödel**. São Paulo: Perspectiva, 2003.

PANZA, M. **Problema di Platone, II**, 2009. Disponível em <[http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/43/30/02/PDF/Panza-Sereni\\_-\\_ProblemaPlatone-1.pdf](http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/43/30/02/PDF/Panza-Sereni_-_ProblemaPlatone-1.pdf)> Acessado em 15/01/2010.

PENSADORES, COLEÇÃO OS. Tempo de Deuses e Heróis. In: **Os Pensadores: Os Pré-Socráticos**. São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda, 1996. ISBN 85-351-0694-4

PINGUELLI, L. **Tecnociências e Humanidades: Novos Paradigmas e Velhas questões**. Vol.1 1A.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

PLATÃO, **República**. Perseus Digital Library. Disponível em <<http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0168>> Acessado em 15/03/2010.

POINCARÉ, H. **Science et l'Hypothèse, La**. Paris: La Boheme, 1992.

RAGGIO, A. Evolução da Noção de Sistema Axiomático, A. **Philosophos**. Goiás: UnB/UFG, Vol. 8, N. 1, 2003.

RUSSELL, B. **Introdução à Filosofia Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

RUSSEL, B. WHITEHEAD, A. N. **Principia Mathematica**, Vol. I. Cambridge:Cambridge University Press, 1910.

Saccheri, G. *Euclides Vindictus*. Trad.: Halsted, G. B.; The Open Court Publishing Company: Chicago, 1920.

SCHOPENHAUER, A. **Crítica da filosofia kantiana**. São Paulo: Abril Cultura, 1980.

SKLAR, L. **How Do We Know the True Geometry of the World**. In: *Philosophy of Physics*. Nova Iorque: Oxford University Press, 1992.

STANDFORD. Disponível em <<http://plato.stanford.edu/entries/aristotle-mathematics/#7.1>> Acessado em 15/01/2010.

STANSIFER, R. **Presburger's Article on Integer Arithmetic: Remarks and Translations**, 1984. Disponível em <<http://ecommons.library.cornell.edu/bitstream/1813/6478/1/84-639.pdf>> Acessado em 10/10/2009.

SZABÓ, A. **Beginnings of Greek Mathematics, The**. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1913.

TARSKI, A. **Concepção Semântica da Verdade, A**. São Paulo: Unesp, 2007.

TARSKI, A., GIVANT, S. Tarski'System of Geometry. **The Bulletin of Symbolic Logic**, vl. 5, n. 2, p. 175-214.

VITRAC, B. **Éléments, Les**. Paris: Presses Universitaires de France, 1990.

VITRAC, B. **L'idéal démonstratif des Éléments d'Euclide et les incertitudes philologiques du texte édité par Heiberg**, 2006. Disponível em <[hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/17/56/.../Incertitudes\\_du\\_texte\\_des\\_El.pdf](http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/17/56/.../Incertitudes_du_texte_des_El.pdf)> Acessado em 10/02/2010.

## ANEXO I

As definições dos Elementos de Euclides contidos na edição de Teon com base na tradução de Commandino são:

1. Ponto é o, que não tem partes, ou o, que não tem grandeza alguma.
2. Linha é o, que tem comprimento sem largura.
3. As extremidades da linha são pontos.
4. Linha recta é aquella, que está posta igualmente entre as suas extremidades.
5. Superfície é o, que tem comprimento e largura.
6. As extremidades da superfície são linhas.
7. Superfície plana é aquella, sobre a qual assenta toda uma linha recta entre dous pontos quaesquer, que estiverem na mesma superfície.
8. Angulo plano é a inclinação reciproca de duas linhas, que se tocam em uma superfície plana, sem estarem em direitura uma com a outra.
9. Angulo plano rectilineo é a inclinação reciproca de duas linhas rectas, que se encontram, e não estão em direitura uma com outra.

Se alguns angulos existirem no mesmo ponto B, cada um delles vem indicado com tres letras do alfabeto; e a, que estiver no vertice do angulo, isto he, no ponto, no qual se encontram as rectas, que formam o angulo, se põe no meio das outras duas; e destas uma está posta perto de uma das ditas rectas, em alguma parte, e a outra perto da outra linha. Assim o angulo feito pelas rectas AB, CB representar-se-ha com as letras ABC, ou CBA; o angulo formado pelas rectas AB, DB, com as letras ABD, ou DBA; e o angulo que fazem as rectas DB, CB, com as letras DBC, ou CBD. Mas, se um angulo estiver separado de outro qualquer, poder-se-ha marcar com a mesma letra, que estiver no vertice, como o angulo no ponto E

10. Quando uma linha recta, caindo sobre outra linha recta, fizer com esta dous angulos eguaes, um de uma, e outro de outra parte, cada um destes angulos eguaes se chama angulo recto; e a linha incidente se diz perpendicular á outra linha, sobre a qual cae.
11. Angulo obtuso é o, que é maior, que o angulo recto.
12. Angulo agudo é o, que é menor, que o angulo recto.
13. Termo se diz aquillo, que é extremidade de alguma cousa.
14. Figura é um espaço, fechado por um ou mais termos.
15. Circulo é uma figura plana, fechada por uma só linha, a qual se chama circumferencia: de maneira que todos as linhas rectas, que de um certo ponto existente no meio da figura, se conduzem para a circumferencia, são eguaes entre si.
16. O dicto ponto se chama centro do circulo.
17. Diametro do circulo é uma linha recta, que passa pelo centro, e que se termina por ambas as partes na circumferencia.
18. Semicirculo é uma figura, comprehendida entre o diametro e aquella parte da circumferencia do circulo, que é cortada pelo diametro.
19. Segmento de circulo é uma figura, comprehendida entre uma linha recta e uma porção da circumferencia.
20. Figuras rectilineas são as, que são formadas com linhas rectas.
21. As trilateras são aquellas, que são formadas com tres linhas rectas.

22. As quadrilateras são aquellas, que são feitas por quatro linhas rectas.
23. As multilateras são as, que são feitas por mais de quatro linhas rectas.
24. Entre as figuras trilateras o triangulo equilatero é o, que tem os tres lados eguaes.
25. Triangulo isosceles é o, que tem dous lados eguaes.
26. Triangulo scaleno é o, que tem os tres lados desiguaes.
27. Triangulo rectangulo é o, que tem um angulo recto.
28. Triangulo obtusangulo é o, que tem um angulo obtuso.
29. O triangulo acutangulo é o, que tem todos os angulos agudos.
30. Entre as figuras quadrilateras o quadrado é o, que é junctamente equilatero e rectangulo.
31. E a figura, que de uma parte for mais comprida, pode ser rectangula, mas não equilatera.
32. Mas o rhombo é uma figura equilatera, e não rectangula.
33. Rhomboide é uma figura, que, tendo os lados opostos eguaes, nem é equilatera nem equiangulara.
34. Todas as mais figuras quadrilateras, que não são as referidas, se chamam trapezios.
35. Linhas parallelas ou equidistantes são linhas rectas, que existindo no mesmo plano, e sendo produzidas de ambas as partes, nunca se chegam a tocar.

As definições dos Elementos de Euclides contidos no manuscrito Vaticano (P) com base na tradução de Heath são:

1. A point is that which has no part.
2. A line is breadthless length.
3. The extremities of a line are points.
4. A straight line is a line which lies evenly with the points on itself.
5. A surface is that which has length and breadth only.
6. The extremities of a surface are lines.
7. A plane surface is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.
8. A plane angle is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line.
9. And when the lines containing the angle are straight, the angle is called rectilinear.
10. When a straight line set up on a straight line makes the adjacent angles equal to one another, each of the equal angles is right, and the straight line standing on the other is called a perpendicular to that on which it stands.
11. An obtuse angle is an angle greater than a right angle.
12. An acute angle is an angle less than a right angle.
13. A boundary is that which is an extremity of anything.
14. A figure is that which is contained by any boundary or boundaries.
15. A circle is a plane figure contained by one line such that all the straight lines falling upon it from one point among those lying within the figure are equal to one another ;
16. And the point is called the centre of the circle.
17. A diameter of the circle is any straight line drawn through the centre and terminated in both directions by the circumference of the circle, and such a straight line also bisects the circle.

18. A semicircle is the figure contained by the diameter and the circumference cut off by it. And the centre of the semicircle is the same as that of the circle.
19. Rectilineal figures are those which are contained by straight lines, trilateral figures being those contained by three, quadrilateral those contained by four, and multilateral those contained by more than four straight lines.
20. Of trilateral figures, an equilateral triangle is that which has its three sides equal, an isosceles triangle that which has two of its sides alone equal, and a scalene triangle that which has its three sides unequal.
21. Further, of trilateral figures, a right-angled triangle is that which has a right angle, an obtuse-angled triangle that which has an obtuse angle, and an acute-angled triangle that which has its three angles acute.
22. Of quadrilateral figures, a square is that which is both equilateral and right-angled; an oblong that which is right-angled but not equilateral; a rhombus that which is equilateral but not right-angled; and a rhomboid that which has its opposite sides and angles equal to one another but is neither equilateral nor right-angled. And let quadrilaterals other than these be called trapezia.
23. Parallel straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.

## ANEXO II

Tentativas de demonstração do quinto postulado, apresentadas por Heath:

### A) Tentativa de Ptolomeu.

Suppose that there are two straight lines AB, CD, and that EFGH, meeting them, makes the angles BFG, FGD equal to two right angles. I say that AB, CD are parallel, that is, they are non-secant. For, if possible, let FB, GD meet at K. Now, since the angles BFG, FGD are equal to two right angles, while the four angles AFG, BFG, FGD, FGC are together equal to four right angles, the angles AFG, FGC are equal to two right angles. "If therefore FB, GD, when the interior angles are equal to two right angles, meet at K, the straight lines FA, GC will also meet if produced; for the angles AFG, CGF are also equal to two right angles. Therefore the straight lines will either meet in both directions or in neither direction, if the two pairs of interior angles are both equal to two right angles.

"Let, then, FA, GC meet at L.

Therefore the straight lines LABK, LCDK enclose a space: which is impossible.

"Therefore it is not possible for two straight lines to meet when the interior angles are equal to two right angles. Therefore they are parallel."

[The argument in the words italicised would be clearer if it had been shown that the two interior angles on one side of EH are severally equal to the two interior angles on the other, namely BFG to CGF and FGD to AFG; whence, assuming FB, GD to meet in K, we can take the triangle KFG and place it (e.g. by rotating it in the plane about the middle point of FG) so that FG falls where GF is in the figure and GD falls on FA, in which case FB must also fall on GC; hence, since FB, GD meet at K, GC and FA must meet at a corresponding point L. Or, as Mr Frankland does, we may substitute for FG a straight line MN through the middle point of FG drawn perpendicular to one of the parallels, say AB. Then, since the two triangles OMF, ONG have two angles equal respectively, namely FOM to GON (i. 15) and OFM to OGN, and one side OF equal to one side OG, the triangles are congruent, the angle ONG is a right angle, and MN is perpendicular to both AB and CD. Then, by the same method of application, MA, NC are shown to form with MN a triangle MALCN congruent with the triangle NDKBM, and MA, NC meet at a point L corresponding to K. Thus the two straight lines would meet at the two points K, L. This is what happens under the Riemann hypothesis, where the axiom that two straight lines cannot enclose a space does not hold, but all straight lines meeting in one point have another point common also, and e.g. in the particular figure just used K, L are points common to all perpendiculars to MN. If we suppose that K, L are not distinct points, but one point, the axiom that two straight lines cannot enclose a space is not contradicted.]

11. Ptolemy now tries to prove 1. 29 without using our Postulate, and then deduces the Postulate from it.

The argument to prove 1. 29 is as follows.

The straight line which cuts the parallels must make the sum of the interior angles on the same side equal to, greater than, or less than, two right angles. "Let AB, CD be parallel, and let FG meet them. I say (1) that FG does not make the interior angles on the same

side greater than two right angles. " For, if the angles AFG, CGF are greater than two right angles, the remaining angles BFG, DGF are less than two right angles. " But the same two angles are also greater than two right angles; for AF, CO are no more parallel than FB, GD, so that, if the straight line falling on AF, CG makes the interior angles greater than two right angles, the straight line falling on FB, GD will also make the interior angles' greater than two right angles. " But the same angles are also less than two right angles; for the four angles AFG, CGF, BFG, DGF are equal to four right angles : which is impossible.

-'Similarly (2) we can show that the straight line falling on the parallels does not make the interior angles on the same side less than two right angles.

" But (3), if it makes them neither greater nor less than two right angles, it can only make the interior angles on the same side equal to two right angles."

III. Ptolemy deduces Post 5 thus:

Suppose that the straight lines making angles with a transversal less than two right angles do not meet on the side on which those angles are. Then, a fortiori, they will not meet on the other side on which are the angles greater than two right angles. Hence a straight line will not meet in either direction; they are therefore parallel. But, if so, the angles made by them with the transversal are equal to two right angles, by the preceding proposition (= 1. 29). Therefore the same angles will be both equal to and less than two right angles: which is impossible. Hence the straight lines will meet.

IV. Ptolemy lastly enforces his conclusion that the straight lines will meet on the side on which are the angles less than two right angles by recurring to the a fortiori step in the foregoing proof. Let the angles AFG, CGF in the accompanying figure be together less than two right angles. Therefore the angles BFG, DGF are greater than two right angles. We have proved that the straight lines are not non-secant. If they meet, they must meet either towards A, C, or towards B, D.

( 1 ) Suppose they meet towards B, D, at K.

Then, since the angles AFG, CGF are less than two right angles, and the angles AFG, GFB are equal to two right angles, take away the common angle AFG, and the angle CGF is less than the angle BFG; that is, the exterior angle of the triangle KFG is less than the interior and opposite angle BFG: which is impossible. Therefore AB, CD do not meet towards B, D.

( 2 ) But they do meet, and therefore they must meet in one direction or the other: therefore they meet towards A, B, that is, on the side where are the angles less than two right angles.

The flaw in Ptolemy's argument is of course in the part of his proof of 1. 29 which I have italicised. As Proclus says, he is not entitled to assume that, if AB, CD are parallel, whatever is true of the interior angles on one side of FG (i.e. that they are together equal to, greater than, or less than, two right angles) is necessarily true at the same time of the interior angles on the other side. Ptolemy justifies this by saying that FA, GC are no more parallel in one direction than FB, GD are in the other : which is equivalent to the assumption that through any point only one parallel can be drawn to a given straight line. That is, he assumes an equivalent of the very Postulate he is endeavouring to prove.



## B) Tentativa de Proclo.

Before passing to his own attempt at a proof, Proclus examines an ingenious argument (recalling somewhat the famous one about Achilles and the tortoise) which appeared to show that it was impossible for the lines described in the Postulate to meet.

Let AB, CD make with AC the angles BAC, ACD together less than two right angles. Bisect AC at E and along AB, CD respectively measure AF, CG so that each is equal to AE. Bisect FG at K and mark off FK, GL each equal to FH; and so on. Then AF, CG will not meet at any point on FG; for, if that were the case, two sides of a triangle would be together equal to the third: which is impossible.

Similarly, AB, CD will not meet at any point on KL; and "proceeding like this indefinitely, joining the non-coincident points, bisecting the lines so drawn, and cutting off from the straight lines portions equal to the half of these, they say they thereby prove that the straight lines AB, CD will not meet anywhere." It is not surprising that Proclus does not succeed in exposing the fallacy here (the fact being that the process will indeed be endless, and yet the straight lines will intersect within a finite distance). But Proclus' criticism contains nevertheless something of value. He says that the argument will prove too much, since we have only to join AG in order to see that straight lines making some angles which are together less than two right angles do in fact meet, namely AG, CG. "Therefore it is not possible to assert, without some definite limitation, that the straight lines produced from angles less than two right angles do not meet. On the contrary, it is manifest that some straight lines,

when produced from angles less than two right angles, do meet, although the argument seems to require it to be proved that this property belongs to all such straight lines. For one might say that, the lessening of the two right angles being subject to no limitation, with such and such an amount of lessening the straight lines remain non-secant, but with an amount of lessening in excess of this they meet.

[Here then we have the germ of such an idea as that worked out by Lobachewsky, namely that the straight lines issuing from a point in a plane can be divided with reference to a straight line lying in that plane into two classes, "secant" and "non-secant," and that we may define as parallel the two straight lines which divide the secant from the non-secant class.]

Proclus goes on to base his own argument upon "an axiom such as Aristotle too used in arguing that the universe is finite. For, if from one point two straight lines forming an angle be produced indefinitely, the distance between the said straight lines produced indefinitely will exceed any finite magnitude. Aristotle at all events showed that, if the straight lines drawn from the center to the circumference are infinite, the interval between them is infinite. For, if it is finite, it is impossible to increase the distance, so that the straight lines (the radii) are not infinite. Hence the straight lines, when produced indefinitely, will be at a distance from one another greater than any assumed finite magnitude."

Proclus proceeds:

I. I say that, if any straight line cuts one of two parallels, it will cut the other also. For let AB, CD be parallel, and let EFG cut AB; I say that it will cut CD also. For, since BF, FG are two straight lines from one point F, they have, when produced indefinitely, a distance greater than any magnitude, so that it will also be greater than the interval between the

parallels. Whenever therefore they are at a distance from one another greater than the distance between the parallels, FG will cut CD. " Therefore etc."

II. Having proved this, we shall prove, as a deduction from it, the theorem in question.

For let AB, CD be two straight lines, and let EF falling on them make the angles BEF, DFE less than two right angles. I say that the straight lines will meet on that side on which are the angles less than two right angles. For, since the angles BEF, DFE are less than two right angles, let the angle HEB be equal to the excess of two right angles (over them), and let HE be produced to K. Since then EF falls on KH, CD and makes the two interior angles HEF, DFE equal to two right angles, the straight lines HK, CD are parallel. And AB cuts KH; therefore it will also cut CD, by what was before shown. Therefore AB, CD will meet on that side on which are the angles less than two right angles. " Hence the theorem is proved."

Clavius criticised this proof on the ground that the axiom from which it starts, taken from Aristotle, itself requires proof. He points out that, just as you cannot assume that two lines which continually approach one another will meet (witness the hyperbola and its asymptote), so you cannot assume that two lines which continually diverge will ultimately be so far apart that a perpendicular from a point on one let fall on the other will be greater than any assigned distance; and he refers to the conchoid of Nicomedes, which continually approaches its asymptote, and therefore continually gets farther away from the tangent at the vertex ; yet the perpendicular from any point on the curve to that tangent will always be less than the distance between the tangent and the asymptote. Saccheri supports the objection. Proclus' first proposition is open to the objection that it assumes that two " parallels" (in the Euclidean sense) or, as we may say, two straight lines which have a common perpendicular, are (not necessarily equidistant, but) so related that, when they are produced indefinitely, the perpendicular from a point of one upon the other remains finite. This last assumption is incorrect on the hyperbolic hypothesis; the "axiom" taken from Aristotle does not hold on the elliptic hypothesis.

### C) Tentativa de Nasir Edin.

The Persian-born editor of Euclid has three lemmas leading up to the final proposition. Their content is substantially as follows, the first lemma being apparently assumed as evident.

I. (a) If AB, CD be two straight lines such that successive perpendiculars, as EF, GH, KL, from points on AB to CD always make with AB unequal angles, which are always acute on the side towards B and always obtuse on the side towards A, then the lines AB, CD, so long as they do not cut, approach continually nearer in the direction of the acute angles and diverge continually in the direction of the obtuse angles, and the perpendiculars diminish towards B, D, and increase towards A, C.

(b) Conversely, if the perpendiculars so drawn continually become shorter in the direction of B, D, and longer in the direction of A, C, the straight lines AB, CD approach continually nearer in the direction of B, D and diverge continually in the other direction; also each perpendicular will make with AB two angles one of which is acute and the other is obtuse,

and all the acute angles will lie in the direction towards B, D, and the obtuse angles in the opposite direction.

[Saccheri points out that even the first part (a) requires proof. As regards the converse (b) he asks, why should not the successive acute angles made by the perpendiculars with AB, while remaining acute, become greater and greater as the perpendiculars become smaller until we arrive at last at a perpendicular which is a common perpendicular to both lines? If that happens, all the author's efforts are in vain. And, if you are to assume the truth of the statement in the lemma without proof, would it not, as Wallis said, be as easy to assume as axiomatic the statement in Post. 5 without more ado?]

II. If AC, BI) be drawn from the extremities of AB at right angles to it and on the same side, and if AC, BD be made equal to one another and CD be joined, each of the angles ACD, BDC will be right, and CD will be equal to AB.

The first part of this lemma is proved by reductio ad absurdum from the preceding lemma. If, e.g., the angle ACD is not right, it must either be acute or obtuse. Suppose it is acute; then, by lemma 1, AC is greater than BD, which is contrary to the hypothesis. And so on. The angles ACD, BDC being proved to be right angles, it is easy to prove that AB, CD are equal.

[It is of course assumed in this "proof" that, if the angle ACD is acute, the angle BDC is obtuse, and vice versa.]

III. In any triangle the three angles are together equal to two right angles. This is proved for a right-angled triangle by means of the foregoing lemma, the four angles of the quadrilateral ABCD of that lemma being all right angles. The proposition is then true for any triangle, since any triangle can be divided into two right-angled triangles.

IV. Here we have the final "proof" of Post. 5. Three cases are distinguished, but it is enough to show the case where one of the interior angles is right and the other acute.

Suppose AB, CD to be two straight lines met by FCE making the angle ECD a right angle and the angle CEB an acute angle. Take any point G on EB, and draw GH perpendicular to EC. Since the angle CEG is acute, the perpendicular GH will fall on the side of E towards D, and will either coincide with CD or not coincide with it. In the former case the proposition is proved.

If GH does not coincide with CD but falls on the side of it towards F, CD, being within the triangle formed by the perpendicular and by CE, EG, must cut EG. [An axiom is here used, namely that, if CD be produced far enough, it must pass outside the triangle and therefore cut some side, which must be EB, since it cannot be the perpendicular (1. 27), or CE.]

Lastly, let GH fall on the side of CD towards E. Along HC set off HK, KL etc., each equal to EH, until we get the first point of division, as M, beyond C. Along GB set off GN, NO etc., each equal to EG, until EP is the same multiple of EG that EM is of EH. Then we can prove that the perpendiculars from N, O, P on EC fall on the points K, L, M respectively. For take the first perpendicular, that from N, and call it NS. Draw EQ at right angles to EH and equal to GH, and set off SR along SN also equal to GH. Join QG, GR.

Then (second lemma) the angles EQG, QGH are right, and  $QG = EH$ . Similarly the angles SRG, RGH are right, and  $RG = SH$ . Thus RGQ is one straight line, and the vertically opposite angles NGR, EQG are equal. The angles NRG, EQG are both right, and  $NG = GE$ , by construction.

Therefore (1. 26)  $RG = GQ$ , whence  $SH = HE = KH$ , and S coincides with K. We may proceed similarly with the other perpendiculars. Thus PM is perpendicular to EE. Hence CD, being parallel to MP and within the triangle PME, must cut EP, if produced far enough.

#### D) Um Resumo da Tentativa de Saccheri

He takes a plane quadrilateral ABDC, two opposite sides of which, AC, BD, are equal and perpendicular to a third AB. Then the angles at C and D are easily proved to be equal. On the Euclidean hypothesis they are both right angles; but apart from this hypothesis they might be both obtuse or both acute. To the three possibilities, which Saccheri distinguishes by the names (1) the hypothesis of the right angle, (2) the hypothesis of the obtuse angle and (3) the hypothesis of the acute angle respectively, there corresponds a certain group of theorems; and Saccheri's point of view is that the Postulate will be completely proved if the consequences which follow from the last two hypotheses comprise results inconsistent with one another.

Among the most important of his propositions are the following:

(1) If the hypothesis of the right angle, or of the obtuse angle, or of the acute angle is proved true in a single case, it is true in every other case. (Props, v., VI., VII.)

(2) According as the hypothesis of the right angle, the obtuse angle, or the acute angle is true, the sum of the three angles of a triangle is equal to, greater than, or less than two right angles. (Prop, ix.)

(3) From the existence of a single triangle in which the sum of the angles is equal to, greater than, or less than two right angles the truth of the hypothesis of the right angle, obtuse angle, or acute angle respectively follows. (Prop, xv.)

These propositions involve the following:

If in a single triangle the sum of the angles is equal to, greater than, or less than two right angles, then any triangle has the sum of its angles equal to, greater than, or less than two right angles respectively, which was proved about a century later by Legendre for the two cases only where the sum is equal to or less than two right angles.

The proofs are not free from imperfections, as when, in the proofs of Prop. xii. and the part of Prop. xiii. relating to the hypothesis of the obtuse angle, Saccheri uses Eucl. 1. 18 depending on 1. 16, a proposition which is only valid on the assumption that straight lines are infinite in length; for this assumption itself does not hold under the hypothesis of the obtuse angle (the Riemann hypothesis).

The hypothesis of the acute angle takes Saccheri much longer to dispose of, and this part of the book is less satisfactory; but it contains the following propositions afterwards established anew by Lobachewsky and Bolyai, viz.:

(4) Two straight lines in a plane (even on the hypothesis of the acute angle) either have a common perpendicular, or must, if produced in one and the same direction, either intersect once at a finite distance or at least continually approach one another. (Prop, xxm.)

(5) In a cluster of rays issuing from a point there exist always (on the hypothesis of the acute angle) two determinate straight lines which separate the straight lines which intersect a fixed straight line from those which do not intersect it, ending with and including the straight line which has a common perpendicular with the fixed straight line. (Props, xxx., xxxi., xxxn.)

## ANEXO III

Prova da equivalência entre o axioma de Playfair (P) e o postulado de Euclides (E):

Prova de que (P)  $\Rightarrow$  (E).

Supomos o axioma (P) como verdadeiro e queremos provar o postulado (E). Sejam  $r$  e  $s$  duas retas cortadas pela transversal  $t$  (Fig. 1), com  $\alpha + \beta < R$ , onde  $R$  é igual a dois ângulos retos. Queremos provar que elas se encontram num ponto  $P$ . Pelo ponto  $A$  tracemos uma reta  $r'$  tal que os ângulos alternos internos  $\alpha'$  e  $\gamma$  sejam iguais, de maneira que, pela proposição 27 de Euclides,  $r'$  e  $s$  são retas paralelas. Como  $\alpha' = \gamma$ ,  $\gamma + \beta = R$ , temos que  $\alpha' + \beta = R$ , assim, como  $\alpha + \beta < R$  concluímos que  $\alpha < \alpha'$ . Então  $r$  e  $r'$  são retas distintas pelo mesmo ponto  $A$ , e como  $r'$  é paralela a  $s$ , por (P),  $r$  não pode ser paralela a  $s$ , logo, encontra  $s$  num certo ponto  $P$ , como queríamos demonstrar.

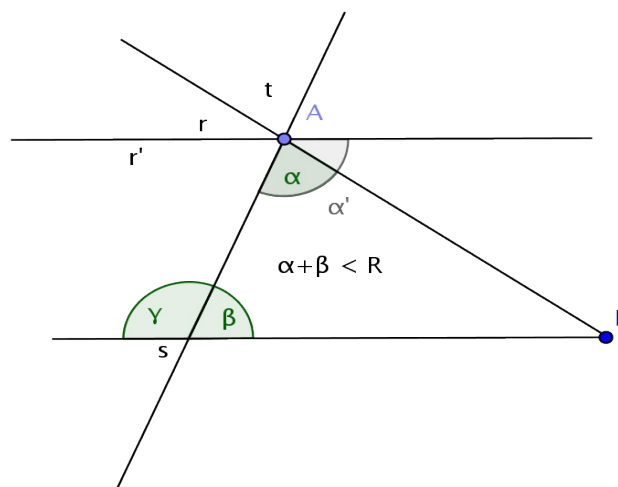
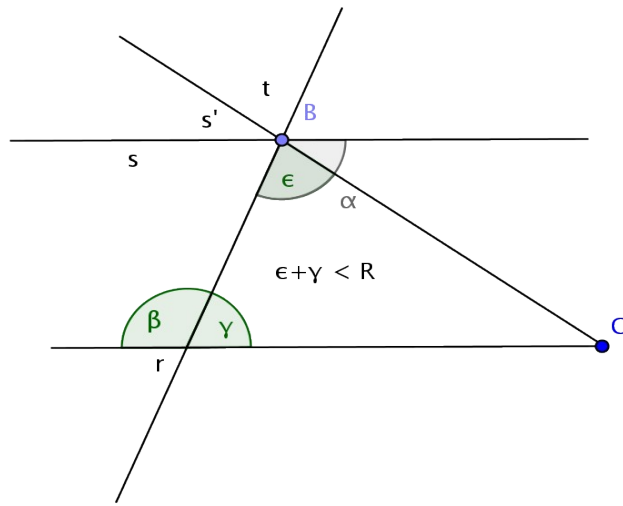


Figura 1: (P)  $\Rightarrow$  (E).

Prova de que (E)  $\Rightarrow$  (P).

Dada uma reta  $r$  e um ponto  $B$  fora dela, queremos provar que por  $B$  não existe mais que uma paralela à reta  $r$ . Existe por  $B$  uma reta  $s$  paralela à reta  $r$ , garantida pela proposição 27 de Euclides (Fig. 2), com  $\alpha = \beta$ , de forma que  $\alpha + \gamma = R$ . Qualquer outra reta por  $B$ , como  $s'$ , resultará num ângulo  $\epsilon < \alpha$ , donde  $\epsilon + \gamma < R$ . Portanto, por (E),  $s'$  deve encontrar  $r$  num ponto  $C$ . Isso prova que por  $P$  não passa mais que uma paralela à reta  $r$ , que é o que desejávamos provar.



**Figura 2:** (E)  $\Rightarrow$  (P)