Universidade Federal do Rio de Janeiro

Origami e Matemática: Confluência entre ciência e arte.

ANDRÉ MONTEIRO NOVAES

2011

Origami e Matemática: Confluência entre ciência e arte.

ANDRÉ MONTEIRO NOVAES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Coppe/IQ/IM, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

Rio de Janeiro

Abril de 2011

Novaes, André Monteiro.

Origami e Matemática: Confluência entre ciência e arte./ André Monteiro Novaes. - Rio de Janeiro: UFRJ/ HCTE, 2011.

ix, 84f.: il.; 31 cm.

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

Dissertação (Mestrado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) – Coppe/IQ/IM, Universidade Federal do Rio de Janeiro, HCTE, Rio de Janeiro 2010.

Referências Bibliográficas: f. 73-76.

1. História do Origami 2. Matemática do Origami 3. Construções com Origami. I. Kubrusly, Ricardo Silva. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Institutos Coppe/IQ/IM, Pósgraduação e Pesquisa em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

III. Origami e Matemática: Confluência entre ciência e arte.

ANDRÉ MONTEIRO NOVAES

Origami e Matemática: Confluência entre ciência e arte.

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia pelo programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Coppe/IQ/IM, da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Prof. Dr. Ricardo Kubrusly, Coordenador do Programa.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Ricardo Silva Kubrusly (Orientador) – UFRJ

____
Prof. Dr. Carlos Benevenuto Guisard Koehler – UFRJ

____
Prof. Dr. Angela Rocha dos Santos – UFRJ

Rio de Janeiro, 14 de abril de 2011

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os professores e colegas do HCTE por contribuírem na minha formação, possibilitando assim a realização dessa dissertação. Gostaria de agradecer também aos meus familiares que me deram todo o suporte durante este mestrado no HCTE em especial meus pais, José Antonio e Maria Alice, minha irmã Daniela, minha avó Rosa e minha Tia Valdemira. Aos meus amigos e colegas de trabalho que sempre me apoiaram e incentivaram durante este processo, obrigado por toda ajuda, incentivo e compreensão.

Dedicatória

Aos meu pais Maria Alice e José Antonio

Resumo

ORIGAMI E MATEMÁTICA: CONFLUÊNCIA ENTRE CIÊNCIA E ARTE.

André Monteiro Novaes

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Coppe/IQ/IM, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

A arte do Origami desenvolveu-se durante milhares de anos, evoluindo e modificando-se de acordo com as novas descobertas e mudanças no modo de pensar de seus artistas. No entanto, nenhum desses processos foi tão marcante e revigorante como o iniciado em meados do século XX quando se implementou um processo de matematização desta arte em busca de padrões e leis que a regessem e que possibilitassem a ampliação de suas fronteiras. Graças à utilização da matemática, o origami transcende o universo da arte e passa a ser utilizado em diversos campos como: engenharia espacial e medicina. Dobrar papel apresenta-se, também, como uma forte ferramenta matemática, mais poderosa que a régua e o compasso, possibilitando soluções para os problemas clássicos como a duplicação do cubo e trissecção do ângulo que não eram solúveis com aquelas ferramentas.

Palavras-chave: Origami, Matemática do Origami, Duplicação do Cubo, Trissecção do Ângulo, Dobra Miura-ori, Axiomas Huzita-Justin

Rio de Janeiro

Abril de 2011

Abstract

ORIGAMI AND MATHEMATICS: CONFLUENCE OF SCIENCE AND ART.
André Monteiro Novaes
Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Coppe/IQ/IM, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

The art of Origami has developed over thousands of years, evolving and modifying itself according to new findings and changes in the thinking of its artists. However, none of those cases was so striking and refreshing as initiated in mid-twentieth century when it implemented a process of mathematization of the art in search of patterns and instruments governing the laws, which could allow the expansion of its borders. Thanks to the use of mathematics, origami art transcends the universe and shall be used in various fields such as aerospace engineering and medicine. Fold paper presents itself also as a powerful mathematical tool, more powerful than the ruler and compass, allowing solutions to classical problems such as duplicating the cube and trisection of the angle that were not soluble with those tools.

Keywords: Origami, Mathematics of Origami, Doubling Cube, Angle trisection, Miura-ori Fold, Huzita-Justin axioms

Rio de Janeiro
Abril de 2011

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O homem, durante toda a sua existência, busca entender o universo, compreender a natureza e anseia por explicações sobre o funcionamento de cada evento que o envolve. Descobrir as leis que regem esse universo vem sendo ao longo dos anos a principal meta da humanidade. Através dessa curiosidade o homem foi desenvolvendo conhecimentos e técnicas que o auxiliassem nessa busca incessante por respostas. As ciências como a matemática, física, química, astrologia, sociologia entre outras são resultados dessa busca por conhecimento e entendimento próprio.

Neste trabalho temos como plano de fundo uma dessas ciências, a matemática. Pretendemos mostrar que essa vai muito além de cálculos e equações, de modo mais abrangente pretendemos ilustrar a idéia de que a “matemática é a linguagem com a qual Deus escreveu o universo”, como definiu Galileu Galilei e iremos estudar a matemática que existe por trás do origami.

Hoje em dia, encontramos uma sociedade que desconhece o papel da matemática - apesar de usá-la em seu dia-a-dia - suas curiosidades e principalmente sua essência. Alunos do ensino fundamental ou médio questionam constantemente quem inventou a matemática como se essa fosse uma invenção humana e não inata ao mesmo. Nesse trabalho, pretendemos exemplificar através do origami aspectos mais amplos que a matemática pode assumir e sua utilização com objetivos variados e em temas considerados improváveis.

Para isso, faremos uma breve introdução sobre o surgimento do origami no ocidente e no oriente, seu desenvolvimento através dos anos nessas duas escolas e sua globalização. Em momento algum pretendemos contar a história do mesmo minuciosamente, simplesmente a introduziremos para melhor entendermos seu significado, seus principais aspectos e curiosidades.

Na continuação do trabalho abordaremos a história do origami, destacando como a matemática e a linguagem, possibilitaram o reinicio do processo de desenvolvimento do mesmo. Descobertas de padrões atrelados a teorias matemáticas e uma linguagem universal de dobras permitiram que o origami evoluísse após passar um longo período estanque.

Finalizamos voltando nossa atenção para as características dos processos de dobras referentes à construção de números e ângulos. O origami adquiri um aspecto de ferramenta matemática, como a régua e o compasso, sendo usado para a resolução de problemas, nos fazendo crer na viabilização de seu uso no ensino acadêmico da matemática.

1. HISTÓRIA DO ORIGAMI

1.1. O Surgimento

Antes de começarmos a falar da matemática por trás do origami, de seu uso como uma ferramenta matemática e do seu ensino, é preciso definir o conceito dessa técnica, seu surgimento e evolução ao longo dos anos.

A palavra origami é de origem japonesa e vem de *orikami*, que significa dobrar papel (ori - dobrar e kami - papel). No Brasil, além do nome origami, é comum usarmos o termo "dobradura" para nos referirmos a esta arte milenar. Já na Espanha, país que também possuiu grande tradição em origami, o termo usado é "papiroflexia" (papiro – papel e flexia – dobra). Esses são os termos mais encontrados ao pesquisarmos sobre a técnica. No entanto, para este trabalho, vamos preterir os termos "dobradura" e "papiroflexia" por considerarmos que (a palavra) origami abrange um sentido mais amplo e possui uma maior simbologia, sendo mais eficiente para produzir a análise.

O termo origami é associado a uma arte que tem como matéria-prima o papel e como principal técnica a dobra. Para o origamista Joseph Wu's, origami é "a form of paper art where folding is the primary technique to achieve an effect"[1] (WU JOSEPH, 2002). Esta definição nos atenta ao fato de o origami não ser simplesmente uma forma de arte com papel, mas uma arte que está atrelada ao modo que usamos esse papel e, assim como todo tipo de arte, também possui técnicas. A principal delas é a dobra, que é a base da construção de um origami. Porém, outros artifícios como cortes, colagens e até o uso de água para moldar alguns modelos podem ser usados, associados a essa técnica. Sua versão mais comum são modelos feitos a partir de um pedaço de papel quadrado, não marcado e onde são permitidas apenas dobras, sem cortes. Mas o origami vai além disso.

Vamos considerar origami como algo que vai além da arte. Consideraremos o lado científico por trás do origami. Deste modo, assim como David Lister já definiu anteriormente em seu ensaio "*What is origami?*", vamos tomar origami como "the art and science of folding"[2] (LISTER, 2003) e assim, de modo mais amplo, não vamos

---

[1] uma forma de arte em papel aonde dobrar é a técnica primária para de chegar a um efeito
[2] a arte e a ciência da dobra

nos ater somente a dobras com papel. Veremos mais adiante que podemos usar os mais diversificados tipos de material para fazermos origami.

Ao separarmos arte e ciência queremos deixar claro que uma independe da outra. Não precisamos ser cientistas para fazermos arte com papel por meio de dobras e muito menos precisamos ser artistas para estudarmos e descobrirmos teorias e técnicas de dobras que nos levem a resultados e relações interessantes. Entendemos, porém que esses dois campos, arte e ciência, podem sim confluir - e a História nos mostra isso. Veremos alguns exemplos dessa confluência ao longo deste trabalho.

A história do origami ainda apresenta incertezas e diversos pontos conflitantes em relação a sua origem e desenvolvimento. Muitas dessas incertezas são causadas pela falta de documentação que possibilitem a seus historiadores pontos de vista variados. Ao pesquisarmos, observamos que cada historiador e origamista têm sua própria definição para origami, o que contribui para que a história de seu surgimento/desenvolvimento seja diferente para cada um. Aqui vamos nos ater à definição que demos para o termo origami e aos fatos que realmente mostram-se importantes a esse tema, não tendo como objetivo escrever a sua "verdadeira" história.

Pela composição da palavra origami (dobrar papel) temos a invenção do papel como ponto de partida para seu surgimento. O papel foi inventado na China em 105 D.C., durante a antiga dinastia Han, por Ts`ai Lun, um oficial da corte. Na época, os materiais usados para escrita eram papiros e tecidos. Ts`ai Lun utilizou restos de tecidos (trapos) para criar o papel. Sua técnica foi sendo modificada e aperfeiçoada devido à grande procura e à falta de matéria prima: incluíram-se fibras vegetais (na época o material usado era o bambu) em sua composição, tal como temos até hoje.

Com o surgimento da principal matéria-prima, surge, para historiadores como Isao Honda, Sam Randlett e Vicente Palaclos, o origami. Porém, apesar desse surgimento, ainda no ano de 105 D.C., técnicas de dobra em papel só apareceriam mais de quinhentos anos depois no Japão e na Europa. Dobrar não era prioridade no início da descoberta do papel e é por isso que muitos historiadores desconsideram essa teoria. Segundo Hatori Koshiro, "*The paper of Former Han* *dynasty shows no trace of origami."*[3] (HATORI, 2002, p.2). O papel tinha como objetivo único a escrita. A China provavelmente foi o primeiro lugar do mundo em que o papel foi dobrado, mas seu povo não apresenta a dobra como traço cultural e, portanto, é desconsiderada sua importância no surgimento do origami.

Focando o surgimento do papel, esquecemos que a técnica da dobra em si não se dá apenas por esse meio. Outros materiais como roupas, por exemplo, devem ser considerados. Segundo David Lister em seu texto intitulado "The history of paperfolding: a German perspective":

> "Clothing with simple pleats seems to be a long way from the complexities of paperfolding as we know it today. However, the Sixteenth Century brought new ways of folding cloth, which suggest that the folding and pleating of cloth could have contributed to the development of paperfolding of the modern kind."[4] (LISTER, 2004, p.1 e 2).

Deste modo, os diversos relatos que encontramos sobre a vestimenta usada no Egito antigo servem como ilustração para o início do uso de dobras. No texto de Antônio Brancaglion Júnior, o autor cita que técnicas de dobras eram usadas na montagem das roupas egípcias: "... uma túnica feita a partir de uma peça retangular de tecido, dobrada e costurada nas costas..." (BRANCAGLION JR., 2009, p.4). Os egípcios já possuíam esta característica em suas vestimentas desde as eras bizantinas e clássicas. Traços de dobras também foram encontrados em um papiro com um mapa egípcio.

1.2. Origami no Japão

O papel inventado na China começou a ser difundido por todo o mundo. Através de suas fronteiras com o Oriente Médio, chegou à África e Europa e, do outro lado, Coréia e Japão também recebiam a novidade e começavam a utilizá-la. No começo, seu uso era destinado somente a escrita e seu alto custo impossibilitava sua popularização.

---

3 o papel na antiga dinastia Han não apresentava nenhum traço de origami.

4 Roupas com pregas simples parecem estar a um longo caminho desde as complexidades da dobragem de papel como conhecemos hoje. No entanto, o século XVI trouxe novas formas de tecido dobrável, o que sugere que a dobradura e dobras de pano podem ter contribuído para o desenvolvimento da dobragem de papel do tipo moderno.

No Japão, surge, então, o origami. Considerado uma arte de igual valor a pinturas e esculturas, era relacionado a cerimoniais e a etiqueta da sociedade. O alto valor do papel o tornava artigo de luxo e origamis feitos com esta matéria-prima, consequentemente, possuíam grande valor, além de significarem status.

Jhon Smit, citado por Peter Van Note, relata a existência de um manuscrito que descreve dobraduras em papel de acordo com práticas antigas e que, segundo ele, datam da Era Helan (794 – 1185) (SMITH, 2005, p.5). Tais dobraduras seriam borboletas feitas com papel, usadas em cerimoniais, como enfeite. Entre os séculos XIII e XVI, também encontramos relatos do uso do origami em cerimoniais. No entanto, todos esses relatos são vagos e as teorias sobre esse surgimento não passam de conjecturas. As evidências da existência desses origamis só aparecem após o ano de 1600.

O primeiro origami usado em cerimoniais consistia em uma dobra feita com guardanapo, conhecida como tsutsumi (figura1.2.1). Além deste, outro origami também era usado em cerimoniais para enfeitar as garrafas de saquê, as borboletas Mecho e Ocho citadas por Peter Van Note acima. Mecho e Ocho é um casal de borboletas e é considerado o primeiro origami recreativo japonês, apesar de também ser usado em cerimoniais (figura 1.2.2). De fato, no início os origamis japoneses cerimoniais e de recreação não possuíam muitas diferenças (LISTER, 2003, p.2).

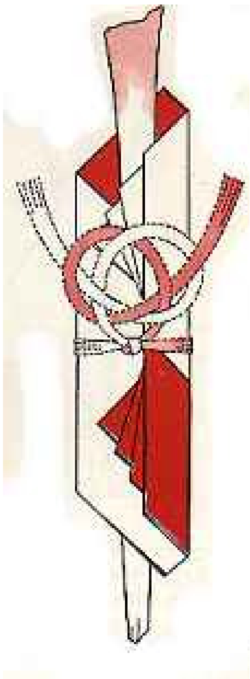


Figura 1.2.1 – Tsutsumi

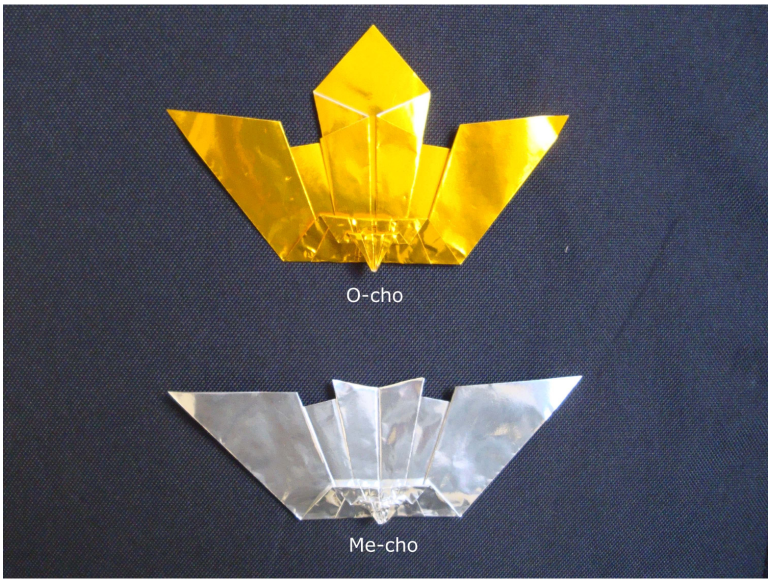


Figura1.2.2 – Mecho e Ocho

Outro tipo de origami também usado no Japão naquela época eram os origamis utilitários. Sacolas, chamadas Tato e feitas por dobras eram usadas por homens e mulheres para carregar diversos produtos como sementes e alimentos.

A partir do ano 1700 começaram a aparecer registros e exemplares de origamis como caixas perfumadas “tsuno kobako” (figura 1.2.3), bonecos “komosou” (figura1.2.4), pássaros “tsuru” (figura 1.2.5), barcos (figuras 1.2.6), compartimento para oferendas com pernas “Ashitsuki-Sanpo” (figura1.2.7) e inclusive um origami modular chamado Tamatebako (figura 1.2.8) entre outros. Kunihiko Ksahara conta que “editado por Hayato Ohaka em 1734, Ramma-Zushiki é uma antologia de três volumes sobre a Era Edo” (1603 – 1867). Nessa antologia consta uma publicação denominada Origata (figura 1.2.9), que significa modelos dobráveis e é o primerio registro que encontramos sobre o origami tendo sido apresentada no livro de Satoshi Takagi, *Origami from de Classics* e lançada pelo Jornal mensal *Origami* em 1993 (KSAHARA, 2004, p 48 – 51).

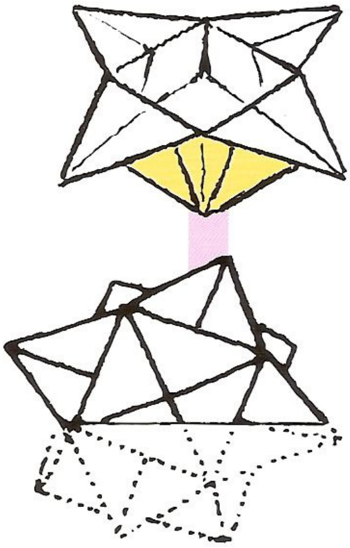


Figura 1.2.3: Tsuno Kobako

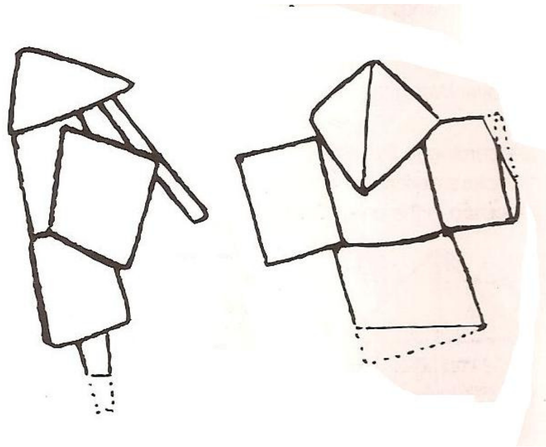


Figura 1.2.4: Komosou

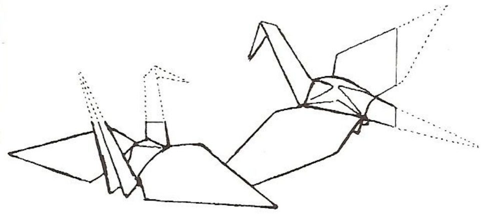


Figura 1.2.5: Tsuru

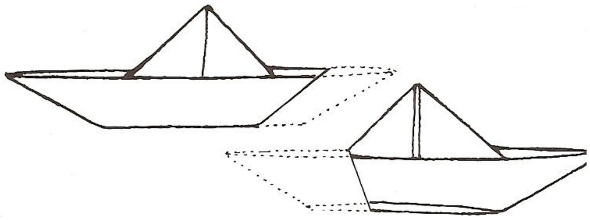


Figura 1.2.6: Barcos

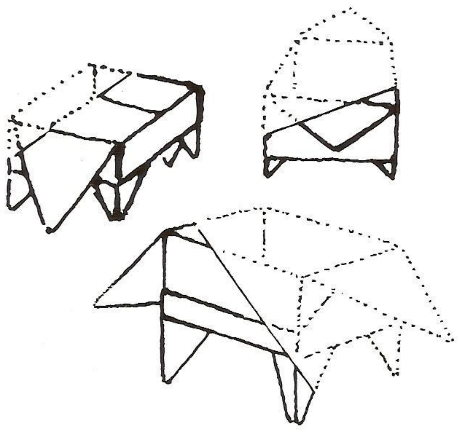


Figura 1.2.7: Ashitsuki-Sanpo

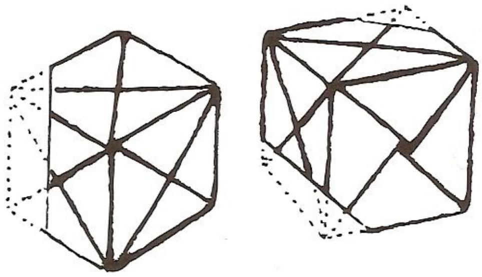


Figura 1.2.8: Tamatebako

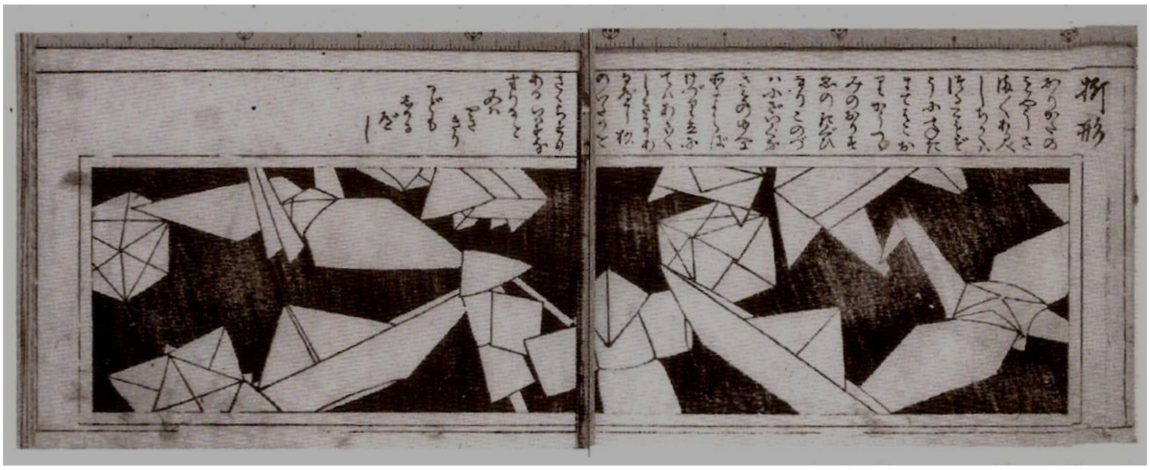


Figura 1.2.9: Origata

Em 1797, Akisato Ritto publica o primeiro livro de origami japonês, “Senbazuru Orikata”. Tradicionalmente os modelos eram passados de geração em geração, sem a preocupação de registrar-se. Juntamente com o livro de “Orikata-dehon Chushingura” que não possui título, Senbazuru Orikata marca uma divisão na maneira de se fazer origami no Japão. Com base nessas publicações, David Lister acredita que há uma separação entre origamis para crianças (sem cortes) e origamis para adultos (com cortes) enquanto Hatori Koshiro destaca que “os escritos enumeram as características dos origamis clássicos japoneses. Eles dobravam papel em formas diferentes e utilizavam muito cortes”, além disso, “o projeto dependia da qualidade do papel artesanal japonês usado, washi. Para fazer padrões coloridos, eles usavam algumas folhas de papel em cores diferentes das outras, ou pintadas.” (HATORI, 2002, p.3).

1.3 - Origami no Ocidente

A história mostra que a arte de dobrar papel na Europa era menos avançada e mais esporádica que no Japão, no entanto, não menos antiga. Como já vimos, as técnicas de dobra começam nas vestimentas egípcias e bizantinas e são consideradas a base para a elaboração de dobras em guardanapos na Europa no século XVI, principalmente na Itália onde formas peculiares de se dobrar guardanapos foram desenvolvidas para enfeitar as mesas renascentistas.

A arte do origami ou a arte de dobrar papel foi levada para a Europa, mais especificamente para a Espanha pelos mouros, quando esses a invadiram ainda no século VIII trazendo com eles o segredo da fabricação de papel aprendida com os árabes. Porém por sua religião os proibirem de fazer representações simbólicas como pessoas e animais, os mouros deram ao origami uma nova leitura que refletia o fato dos mouros serem grandes matemáticos, astrônomos e serem fascinados por geometria. Com o origami descobriram várias propriedades das dobras em um quadrado e encontraram muito que explorar no reino das construções geométricas e na criação de origamis modulares[5]. Podemos dizer que foram os primeiros a relacionar o origami com a matemática.

Mesmo após a expulsão dos Mouros em 1492 o origami continuou a ser praticado na Europa. Na Espanha teve seu renascimento quando o poeta e filosofo Miguel de Unamuno (1864-1936) criou formas originais incluindo um gorila, uma xícara e um pássaro. Mostrando que a impossibilidade de fazer representações simbólicas já havia acabado. A partir daí o origami foi levado também a América do Sul onde passou a ser praticado de modo similar.

Na Alemanha, o origami deu o primeiro passo para sua popularização no resto do mundo quando o alemão Friedrich Fröbel - um dos primeiros educadores a considerar que a fase inicial da infância era primordial para o aprendizado e criador do jardim de infância - incluiu o origami em atividades educacionais para crianças. Fröbel incluía em seu sistema educacional brinquedos chamados de “presentes” e algumas brincadeiras denominadas “ocupações” que eram divididas em três categorias, formas de vida, formas de beleza e formas de conhecimento (LISTER, 2004). O origami permeava essas três categorias de modo distinto. Os origamis mais simples eram classificados na categoria de forma da vida (representações de animais, caixas, barcos, etc.) na categoria sobre formas de beleza, dobras com padrões de simetria[6] (figura1.3.1) eram usadas e por fim, na categoria sobre formas de conhecimento, Fröbel já relacionava, ainda que de forma superficial, origamis com a geometria elementar de Euclides. Podemos perceber que é no Ocidente que a matemática e o ensino com origami apresentam seus primeiros traços na história.

[5] origami modular é um tipo de origami construído a partir de módulos. O resultado final é obtido pela junção desses módulos.

[6] desde os tempos mais antigos, nas civilizações gregas e nas demais, a simetria é tratada como sinal de beleza e esta idéia de simetria e beleza como correspondentes mantém-se até hoje. Formas simétricas são agradáveis ao olhar humano, vide arquitetura.

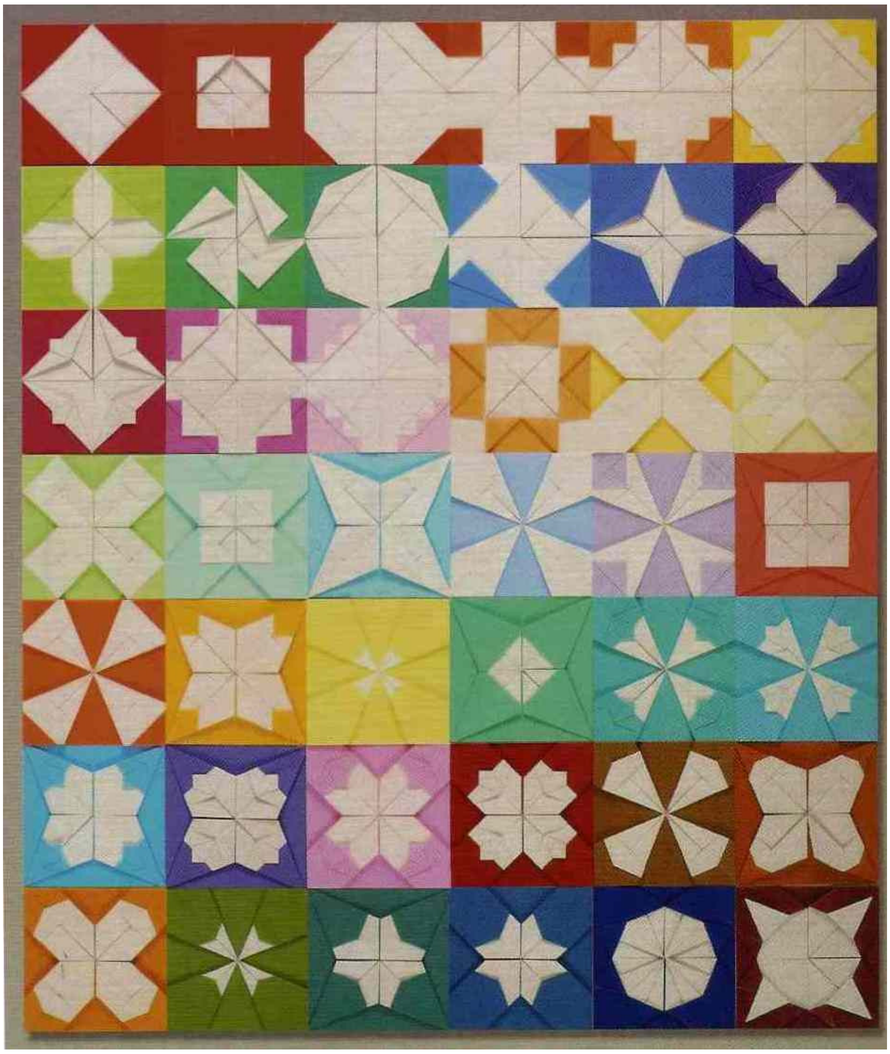


Figura 1.3.1 – Formas básicas de Fröbel

O uso do origami no jardim de infância foi um dos principais colaboradores para sua difusão. Diversos livros sobre o assunto foram lançados fazendo com que muitas pessoas se interessassem pelo tema além do fator principal, a familiarização das pessoas com o origami desde o início de suas vidas.

O origami tradicional na Europa tinha como principal característica as dobras feitas a partir de ângulos de 45° enquanto no Japão, a base eram dobras de 22,5° [7] (HATORI, 2002, p.4). Outra diferença importante entre o origami desenvolvido no ocidente e o origami desenvolvido no Japão durante seu período de isolamento é o uso de cortes que como vimos, era uma das características do origami japonês feito pelos adultos. Os origamis feitos na Europa comparados aos origamis feitos no

[7] Os origamis eram feitos a partir de papeis quadrados ou retângulos, onde os ângulos internos medem 90°. Os ângulos de 45° e 22,5° são formados a partir da divisão desse ângulo ao meio ou em quatro partes respectivamente.

Japão possuíam tanta diferença que podemos afirmar que seus desenvolvimentos independeram um do outro.

A primeira evidência da inserção do origami feito no Japão na Europa são as obras já citadas de Miguel de Unamuno, apenas no início do século XX. Ainda assim, suas figuras têm como base o origami japonês Orizuru que segundo Lister foram trazidos para a Europa através de viajantes japoneses.

1.4 - Origami Moderno

A divisão entre o origami desenvolvido no Japão e no Ocidente ocorreu, muito provavelmente, pelo isolamento que o Japão sofreu até o começo do século XX. Os origamis japoneses e os origamis feitos no ocidente possuíam características distintas e seus processos de evolução foram igualmente distintos. Com o começo da troca de informação entre origamistas japoneses com o restante do mundo muita coisa foi acrescentada em cada escola de origami e o origami que conhecemos hoje é um hibrido entre as escolas japonesas e ocidentais.

O origami japonês tinha como principal característica a criação de modelos a partir de bases já existentes, por exemplo, para fazer um tsuru ou uma flor de lis, usamos a mesma base. Até hoje percebemos isso ao observarmos alguns livros de origami clássicos e/ou livros com origamis mais simples como: “Kit d`initiation à l`origami” de Junko Hirota, “Origami, arte e técnica da dobradura de papel” de Mai Kanegae e Paulo Imamura. Alguns apresentam primeiro as bases e a partir delas partem os diagramas dos modelos a serem construídos. No Anexo I apresentamos alguns exemplos dessas bases.

O origami tradicionalmente constituído a partir de bases tinha os criadores de cada peça e sequência de dobras desconhecidos, os dados e referências de seus criadores se perderam no processo de transmissão de informação durante o processo evolutivo do origami. No origami moderno isso não acontece, cada modelo possui um criador e estes passaram a ser patenteados. O primeiro origamista a patentear seus modelos foi Uchiyama Koko, considerado por muitos o pai do origami moderno.

Um novo paradigma foi constituído, principalmente a partir dos anos de 1940 a 1950. O principal motivo para essa mudança de paradigma foi o que podemos chamar de: A reinvenção do origami. Até os anos de 1940, 1950 o origami ainda usava apenas as bases clássicas e a quantidade de modelos novos era praticamente nula. Porém essa junção das escolas de origami (japonesa e ocidental) e o engajamento de alguns origamistas em desenvolverem novos modelos fizeram com que o origami ganhasse novos caminhos em sua evolução. As bases começaram a ser deixadas de lado e novas técnicas de se dobrar papel foram descobertas.

Apenas a partir desses anos é que novos modelos foram surgindo e com eles uma característica marcante, as sequências de dobras que nos origamis tradicionais raramente passavam de 20 ou 30 passos e o tempo de construção dos modelos que demoravam apenas alguns minutos deram lugar a sequências com centenas de passos e modelos que demoram horas para serem construídos. Para Robert J. Lang em *Origami Design Secrets* “os últimos 60 anos no Japão e 40 anos no restante do mundo tem presenciado a renascença do origami no mundo e uma aceleração no seu processo evolutivo” (LANG, 2003, p.3).

Podemos apontar a descoberta dos padrões de dobras como uma das principais descobertas que possibilitaram o design de uma quantidade maior de origamis, mais detalhados e similares aos objetos a serem construídos (Figura 1.4.1). Dentre os modelos de origami existentes hoje a maioria tem uma característica em comum, foram criados a partir dos anos 1950/1960. É como se o origami fosse moderno e milenar ao mesmo tempo.

Figura 1.4.1 – A esquerda um tsuru e a direita um beija-flor criado em 2002 por Robert Lang.

No origami moderno a criatividade de um modelo é atribuída ao origamista que projeta o modelo e sua apreciação aos que construíram este modelo. Segundo Hatori Koshiro “Modelos que possuem não apenas um resultado final bom, mas que também possuem boas sequências de dobras são os preferidos." (HATORI, 2002, p.6).

2. A MATEMÁTICA DO ORIGAMI

2.1 – Teorias Matemáticas No Desenvolvimento Do Origami

O intercambio entre as escolas ocidentais e japonesas de origami ajudaram no desenvolvimento e evolução das técnicas de dobras no mundo. As diferenças eram notórias e essa mistura possibilitou que o cenário do origami no mundo mudasse. Porém essa evolução começou a se estancar depois de um pequeno período e a criação de novos modelos de origami e novas técnicas também. Apenas a partir da década de cinquenta e principalmente sessenta, século XX, é que o origami sofreu mais do que um processo de evolução, um processo de revolução.

E qual foi o motivo dessa revolução? Vimos que o processo de criação do origami tomava bases já conhecidas como ponto de partida para novos modelos e que com o passar do tempo o processo de criação foi sendo saturado. De fato, podemos dizer houve uma mudança de paradigma no origami, e essa mudança resultou na passagem do origami clássico para o moderno apresentado nessas ultimas décadas. As bases foram abandonadas e novas formas de se fazer origami foram descobertas e desenvolvidas. E por que desenvolvidas? É nesse ponto que começamos a chamar a atenção para a matemática por trás do origami.

O origami a partir das décadas de cinquenta e sessenta se dividiu basicamente em duas correntes filosóficas. De um lado artistas, de modo geral japoneses, que consideravam o origami apenas como arte e tinham como objetivo usar suas criatividades e técnicas para desenvolver novos modelos enquanto do outro lado surgiam matemáticos e engenheiros que formalizavam teorias e técnicas sobre o origami. Apesar de bem distintas, essas duas correntes ajudaram na revolução do processo criativo do origami e atualmente encontram-se dissolvidas uma na outra. Artistas usam teorias e modelos desenvolvidos por origamistas “cientistas” e vice versa. As correntes filosóficas ainda são distintas e existem, mas as teorias e técnicas se misturam e a quantidade de origamistas que podemos encaixar nas duas correntes aumenta a cada dia.

As técnicas que foram desenvolvidas, como frisamos acima, têm a matemática por trás. A matemática trabalha com padrões. A todo o momento na matemática procuramos padrões e relações para descrever fenômenos e situações problemas. Por exemplo, quando Pitágoras escreveu seu famoso teorema que relaciona os lados de um triângulo retângulo (o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos), ele estava descrevendo o padrão característico desses triângulos. Muito antes de Pitágoras os triângulos retângulos já eram utilizados pelos egípcios tanto para o cálculo e demarcação das áreas plantadas a beira do rio Nilo que sofriam alterações com a cheia e a seca do mesmo quanto para a construção de ângulos retos. Os egípcios já possuíam tabelas com medidas que resultavam na construção de triângulos retângulos. Possivelmente essas medidas foram descobertas de modo experimental, sem que se determinasse uma relação geral entre cada um dos lados. Coube a Pitágoras descobrir essa relação e facilitar a construção de triângulos retângulos e a verificação se um triângulo é ou não retângulo. Com o origami não foi diferente e os estudos dos padrões de dobras possibilitaram seu desenvolvimento.

Algo incomum de se observar em qualquer tipo de arte ocorreu com o origami, que foi a inclusão da matemática no processo criativo. Pesquisadores começaram a aplicar princípios matemáticos no origami a fim de encontrar leis e padrões estruturais subjacentes a esses campos. Os padrões de dobras começaram a ser estudados a partir da década de sessenta e consistem na observação das linhas de dobras de um modelo qualquer.

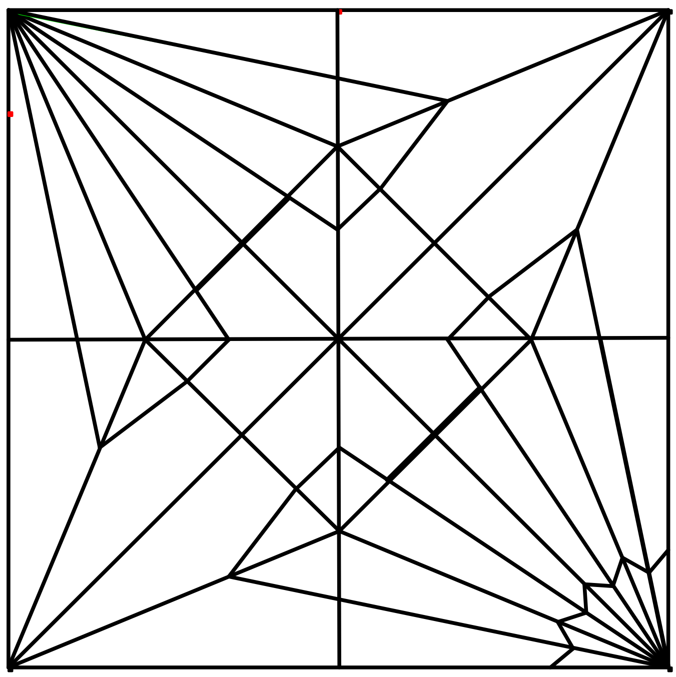


Figura 2.1.1: Exemplo das linhas de dobras obtidas quando desdobramos um Tsuru.

No capitulo I, quando falamos do origami moderno, citamos o origamista japonês Yoshizawa como sendo o percursor dessa era. De fato, sem Yoshizawa, o origami não teria sofrido toda essa evolução ou levaria mais tempo para isso. Foi Yoshizawa que surgiu com centenas de novos modelos, formados a partir de bases diferentes das clássicas, quando a arte do origami parecia estar esgotada, e mais, Yoshizawa foi o responsável por inventar uma linguagem para o origami, uma maneira de se comunicar através de traços, pontos e setas (figura 2.1.2). Para Robert Lang, "criou-se um meio de transmitir informação com distinção e hereditabilidade" (LANG, 2008) permitindo que o origami começasse a se diversificar. Susan Blackmore afirma que "(...) o que temos como algoritmo evolutivo hoje é o fato de que precisamos de três pontos: diversidade, seleção e hereditabilidade." e que se você consegue unir esses pontos, "(...) então você está apto a evoluir." (BLACKMORE, 2008). Ao criar uma linguagem para o origami, Yoshizawa forneceu as ferramentas necessárias para que este evoluísse. Graças a Yoshizawa, essa unificação da linguagem, tão ansiada no mundo globalizado que vivemos ocorre no mundo do origami e permite a interação entre origamistas de qualquer parte do mundo sem que haja a necessidade do conhecimento da língua pátria ou de uma língua comum entre eles. Essa característica de uma linguagem universal que transcende as línguas nativas também foi um fator importante para a evolução de outras ciências ou áreas do conhecimento como a matemática e a química.

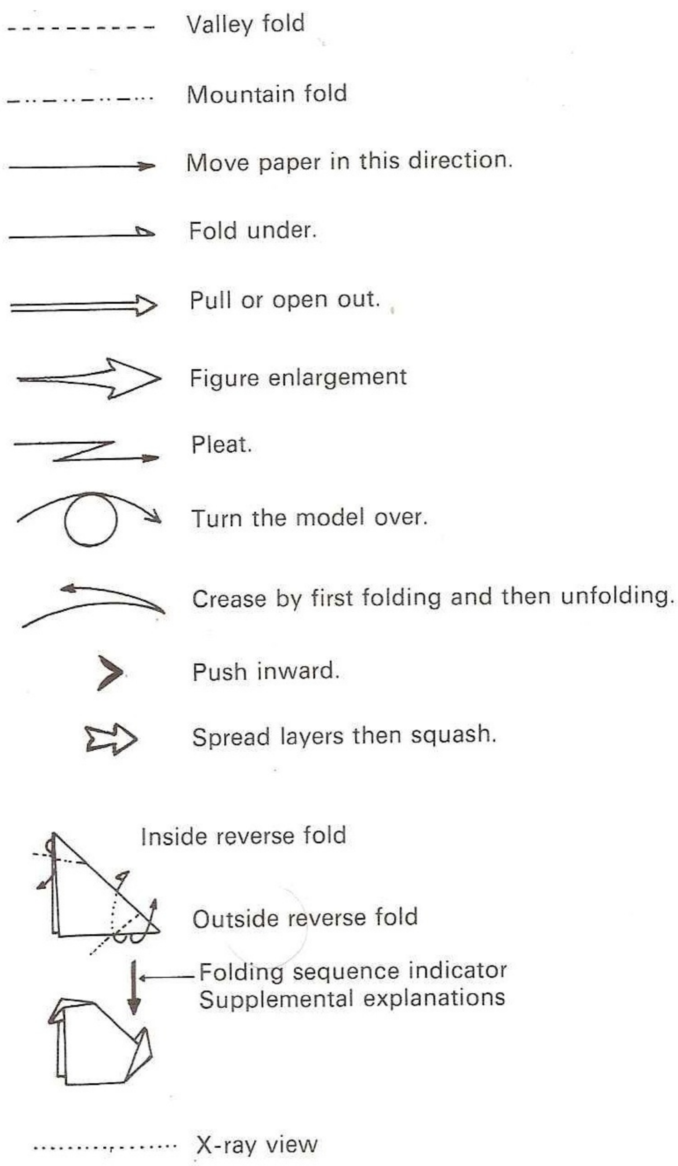


Figura 2.1.2: Linguagem do origami, (KASAHARA, 1988)

Ao pegarmos qualquer livro ou esquema de dobras de um modelo, encontraremos a linguagem acima descrita, seja o origamista japonês, russo, alemão ou brasileiro, os símbolos são os mesmos e o sucesso na construção do modelo vai independer do idioma em que o origami é apresentado (figura 2.1.3).

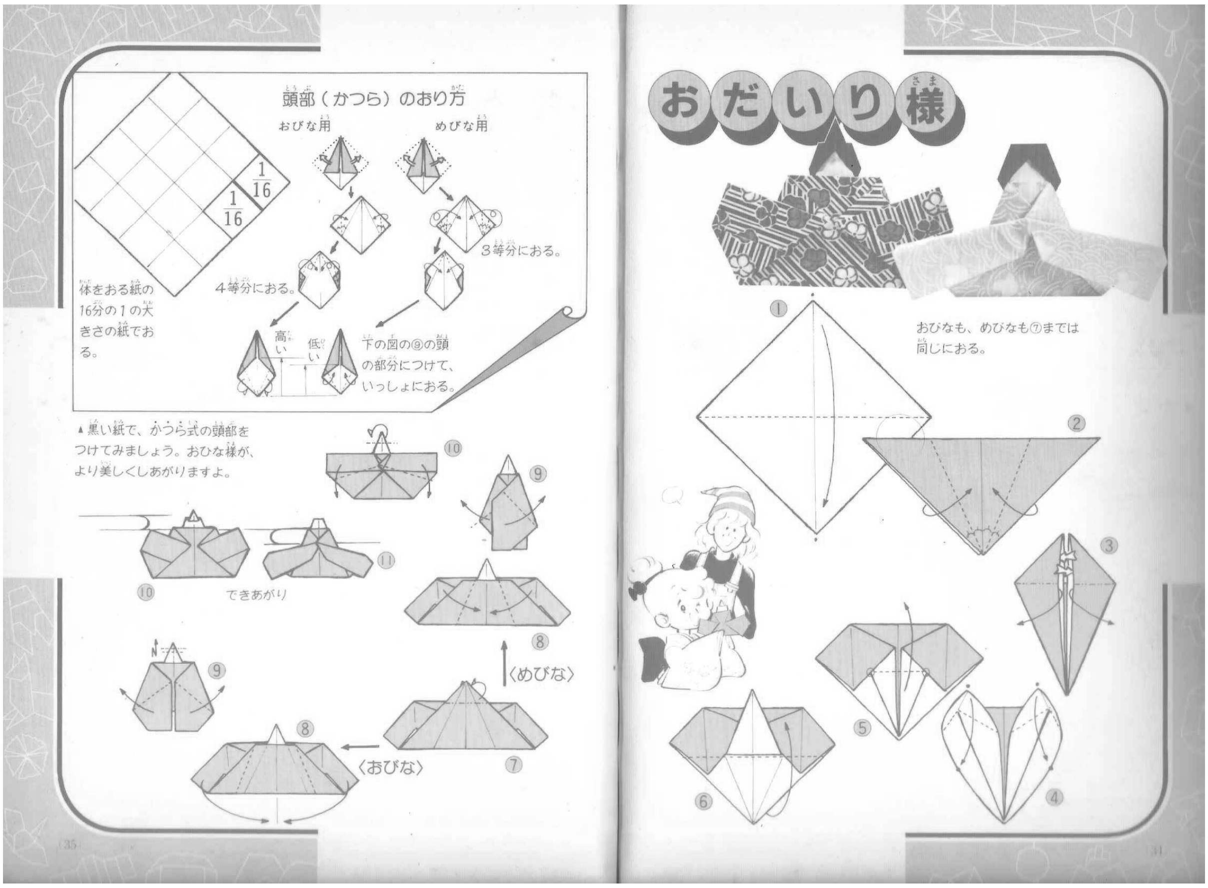


Figura 2.1.3: Esquema de um livro japonês

Antes de prosseguir, vamos definir alguns conceitos para facilitar nossa compreensão ao estudarmos origami. Ao fazermos uma dobra em uma folha podemos formar dobras de vale ou dobras de montanha. Se a dobra feita trouxer o papel para frente, então dizemos que formamos uma dobra de vale. Se a dobra for feita para trás, dizemos que esta dobra é uma dobra de montanha. Na figura 2.1.4 temos esses dois exemplos de dobras. A dobra da direita é uma dobra de montanha enquanto a dobra da esquerda é uma dobra de vale. Se vincarmos essas dobras e depois desdobramos o papel perceberemos o porquê dessa nomenclatura, a dobra de vale fica para baixo enquanto a de montanha para cima.

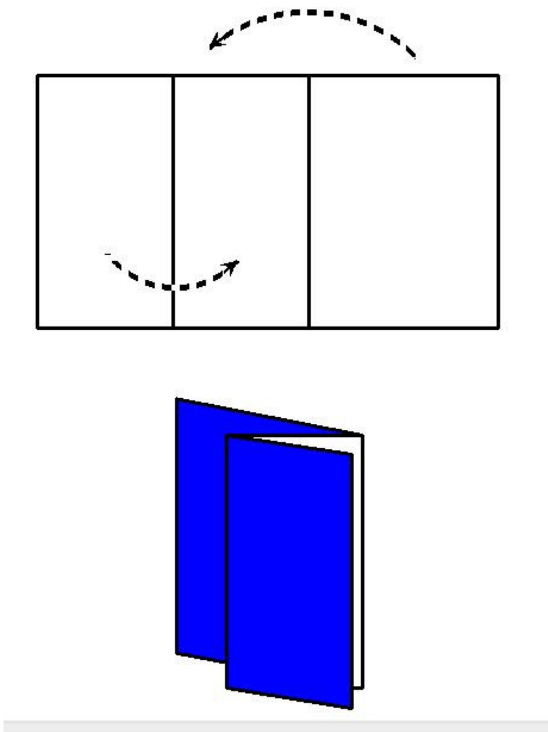


Figura 2.1.4: Dobra de vale e dobra de montanha

Uma Linguagem e o estudo dos padrões de dobra resultaram no desenvolvimento do processo criativo do origami. Ao estudar as linhas de dobras, foram sendo descobertas leis que eram seguidas por todos os modelos e foi o descobrimento e o entendimento dessas leis que revolucionaram o origami. Ao pegarmos arbitrariamente qualquer modelo de origami este terá que obedecer a quatro leis simples:

1) A primeira lei é a lei da colorabilidade com duas cores. Podemos colorir qualquer padrão de dobras, com apenas duas cores, sem nunca ter a reunião da mesma cor.

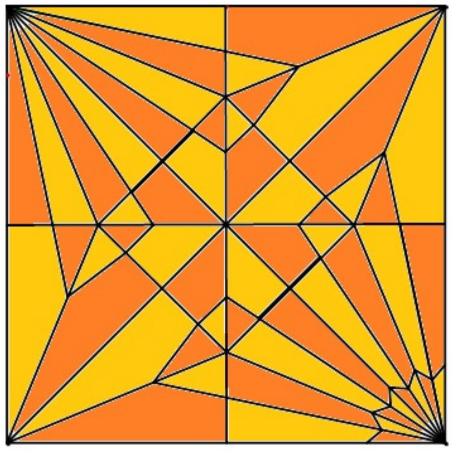
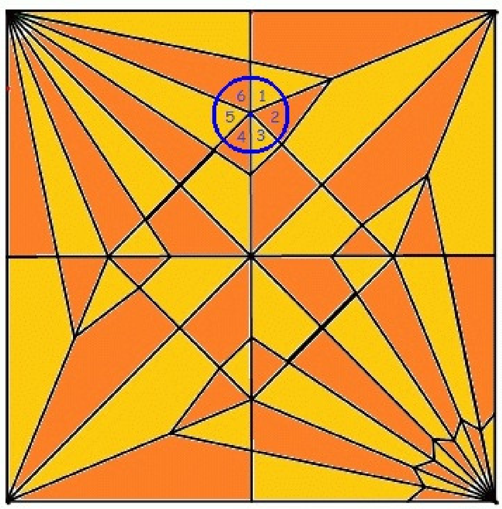


Figura 2.1.5: Linhas de dobra do tsuru em duas cores

2) A segunda lei relaciona as direções das dobras em qualquer vértice, ou seja, o número de dobras de montanha e o número de dobras de vale que sempre se diferem por dois. Ou teremos duas dobras de montanhas a mais que dobras de vales ou teremos duas dobras de vale a mais que dobras de montanha.

3) A terceira lei diz respeito aos ângulos formados a partir de um vértice. Ao observarmos os ângulos formados em volta de um vértice, ao numerarmos esses ângulos circularmente teremos que os ângulos pares são suplementares (2 + 4 + 6 = 180º), assim como os ângulos ímpares (1 + 3 + 5 = 180º).



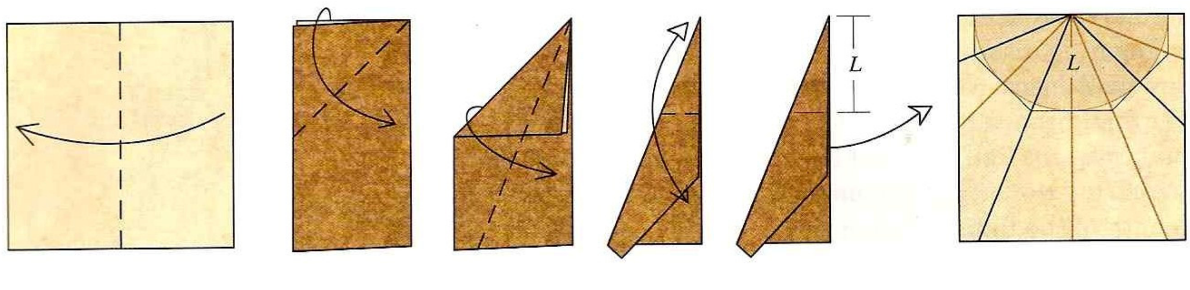
4) A quarta lei consiste na relação entre as dobras e as folhas soltas. Não importa como as dobras e as folhas soltas estão empilhadas, uma folha não pode penetrar uma dobra.

Essas são as quatro leis que definem um origami. Tudo que precisamos saber para desenvolver um origami vem dessas quatro simples leis. Seguindo essas leis podemos fazer coisas incríveis dobrando um único pedaço quadrado de papel, sem usar cortes. Essas leis possibilitaram o acréscimo de texturas em alguns modelos de origami como as escamas de um peixe ou de uma cobra, cascos de tartarugas, penas de uma ave e etc.

Figura 2.1.6: Serpente e garça, modelos de LANG

O que essas leis permitiram, juntamente com o uso de teorias matemáticas, foi que qualquer objeto pudesse ser criado por meio de dobras. A matemática forneceu ferramentas tão poderosas que, basta juntarmos uma ideia a um papel que temos o modelo desejado. Mas como chegamos a esse ponto? Para responder a essa pergunta vamos mostrar aonde as teorias matemáticas foram usadas nesse processo. Vimos que a observação dos padrões de dobras resultou no descobrimento das quatro leis que regulamentam o origami, mas para o desenvolvimento de um novo modelo apenas essas leis não bastam.

Antes de desenvolver um modelo foi necessário analisar o que cada dobra feita em um papel resultava em sua linha de dobras. Observemos o esquema abaixo:



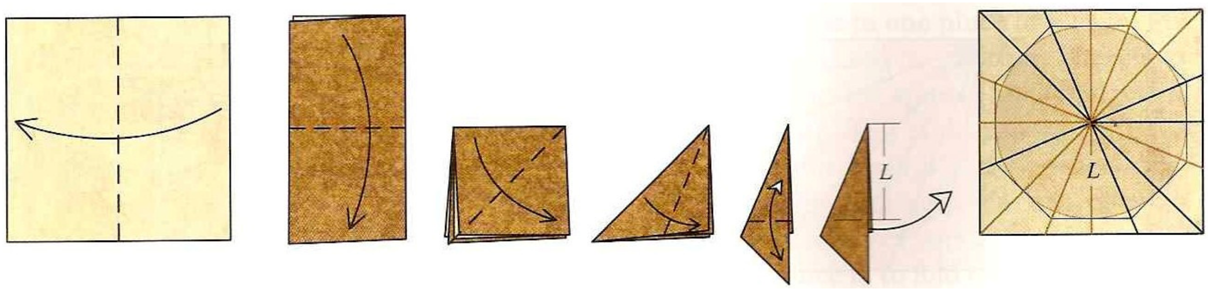


Figura 2.1.7: LANG, 2003, p.280

Quando dobramos uma aba em um papel que foi dobrado duas vezes pela bissetriz do ângulo de um vértice, temos que a figura formada na linha de dobra é parte de um polígono regular. Ao dobrarmos mais vezes por esse ângulo, obtemos lados cada vez menores e esse polígono passa a ter lados tão pequenos que a figura obtida se aproxima muito de um quarto de círculo (referente ao esquema acima). Se fizéssemos essa dobra com um vértice posicionado em um dos lados do papel iriamos obter um semicírculo e se essa dobra tivesse um vértice no meio deste mesmo papel formar-me-íamos uma circunferência completa. Não importa aonde coloquemos o vértice, ao fazermos uma aba, esta precisa de alguma parte de uma região circular de papel. Então quando queremos desenvolver um modelo com várias abas precisamos de vários círculos.

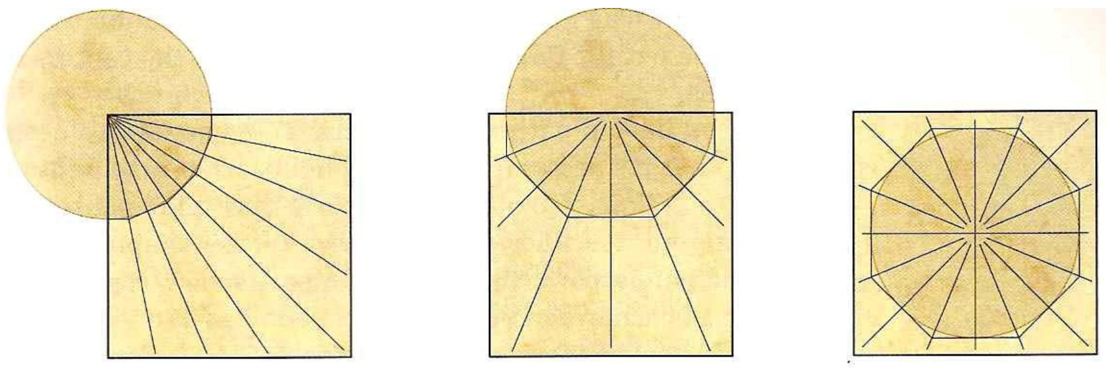


Fig 2.1.8: LANG. 2003, p.281

Por volta dos anos 1990 os artistas de origami descobriram esses princípios e perceberam que poderiam fazer figuras arbitrariamente complicadas apenas arrumando círculos. E foi aí que a matemática começou a ser usada. Vários matemáticos já haviam estudado arranjo de círculos em um plano, de fato, como observa Robert Lang “o fato do arranjo de círculos já ser bem explorado no campo da matemática, possibilitou que se pesquisassem bibliografias matemáticas atrás de padrões que dessem origem a novas bases para o origami." (LANG, 2003, p.303 e 304). Assim, a cada novo arranjo de círculos, novas bases podem ser formadas em origami.

O arranjo de círculos para formar novas bases não chegou a ser um problema graças a uma das principais características da matemática, o desenvolvimento de novos teoremas sem que haja a necessidade de uma aplicabilidade direta dos mesmos. Essa característica possibilita que muitos problemas, quando apresentados, já possuam sua solução ou modelo matemático previamente apresentado. As teorias sobre o arranjo de círculos no plano, já existentes, facilitaram a vida dos origamistas que estudavam os padrões e buscavam novos processos de criação de modelos.

Os estudos matemáticos sobre arranjo de círculos tendiam a se concentrar em padrões nos quais os círculos possuíam tamanhos semelhantes (LANG, 2003, p.293), no entanto, em origami a maioria dos círculos a serem arranjados possuem medidas diferentes. Em uma rã, por exemplo, a medida das pernas traseiras é maior que das pernas dianteiras, ou seja, têm que ser arranjados dois círculos grandes para as pernas traseiras, dois círculos pequenos para as pernas dianteiras e ainda um circulo médio para o corpo e outro menor para a cabeça. O arranjo de círculos de tamanhos diferentes passou a ser mais estudados e novos teoremas desenvolvidos, entretanto é importante salientarmos que são justamente os padrões que usam círculos de mesmo tamanho que formam os padrões de dobras mais elegantes e simétricos (LANG, 2003, p.293).

Partindo dessa teoria temos que para formar um novo modelo devemos seguir as seguintes etapas: primeiro, estruturarmos o esqueleto do objeto a ser construído numa folha. A segunda etapa é arranjar os círculos de acordo com o que queremos montar, depois formar a base desejada e então finalizar a figura com os detalhes desejados. A primeira e a última etapas são as mais simples e não necessitam de nenhuma teoria ou vasto domínio sobre a técnica de dobrar para serem executadas, ou seja, a segunda e a terceira etapas são o grande pulo na construção de um modelo. Como vimos acima, graças à matemática, arranjar círculos já não é mais um problema, na verdade, a matemática tornou esse problema tão simples que possibilitou o desenvolvimento de um software que projeta as linhas de dobras, arranjando os círculos de acordo com o desejado. Este software é o TreeMaker, desenvolvido por Robert Lang inicialmente como uma curiosidade acadêmica até evoluir e se tornar “ uma poderosa ferramenta, capaz de construir padrões de dobras completos para uma enorme variedade de bases de origami.”(LANG, site oficial, <http://www.langorigami.com/science/treemaker>). O software cria as linhas de dobras de acordo com o desejo de seu design, no entanto o programa não define se as dobras são de vale ou de montanha e, portanto, a passagem mais importante em todo esse processo que consiste em transformar as linhas de dobra em uma base não cabe ao programa e sim ao origamista.

Apesar da técnica de arranjar círculos garantir a existência de uma sequência de dobras que converta essas linhas de dobras encontradas em uma base, ela não nos fornece um manual de como fazer uma sequencia de dobras para chegarmos nesta base. De acordo com Lang “...mesmo que você trabalhe no padrões circulares, ainda assim você ainda terá algum trabalho pela frente para descobrir como dobrar o padrão de dobras em uma base.” (LANG, 2008) Para isso, dominar as técnicas de dobra e principalmente, compreender as quatro leis das linhas de dobras permitirão passarmos da segunda para a terceira etapa do processo construtivo. No livro Origami Desing Secrets, Robert Lang mostra outro exemplo da dificuldade de se transformar linhas de dobras em modelos, figura 2.1.9.

Observe que as formas da figura 2.1.9 abaixo consistem num canto dividido em três partes iguais que podem ser dobradas de cinco maneiras diferentes e que possuem o mesmo padrão de dobras, a única diferença é quais são dobras de vale, representadas na figura pelas linhas em vermelho, e quais são dobras de montanha, representadas pelas linhas em preto.

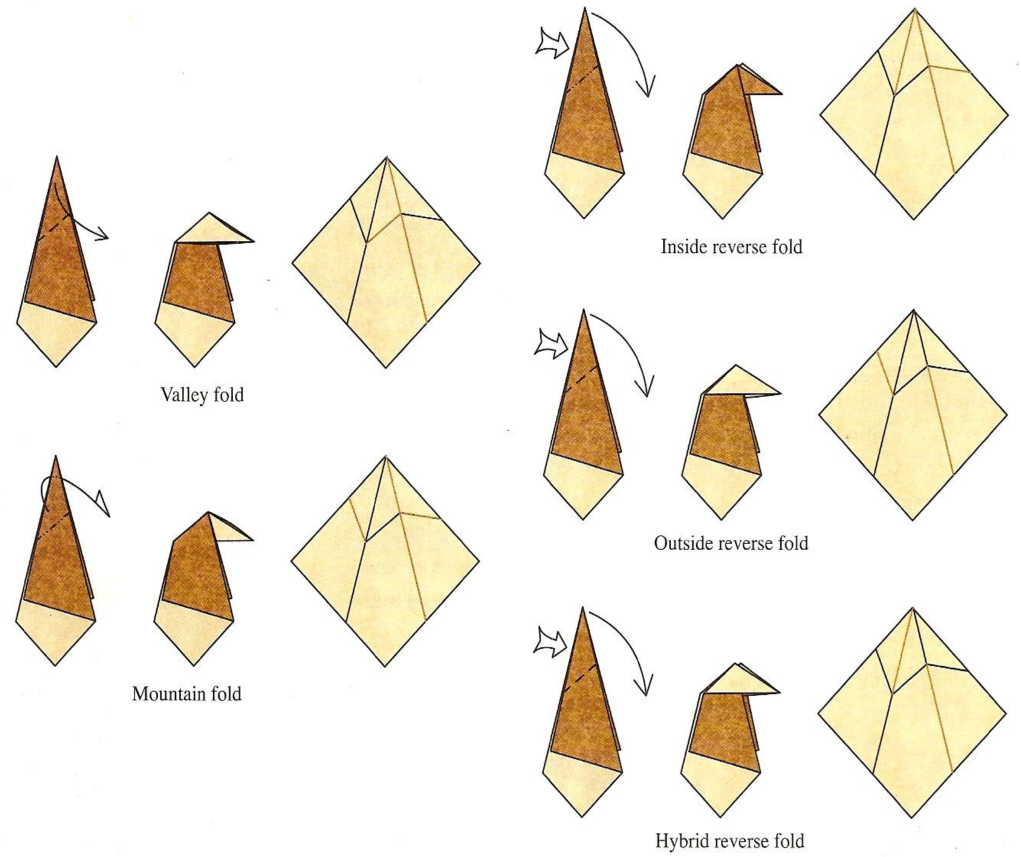


Figura 2.1.9 – Origami Desing Secrets, Robert Lang, página 24

Essa forma de criar novas bases revolucionou o mundo do origami, mas este não é o único modo de desenvolver novas bases e modelos. Artistas como Kunihiko Kasahara com seus cubos de arte e outros origamistas continuam desenvolvendo técnicas e modelos sem se utilizarem do arranjo de círculos. Origami modular e mosaicos, que veremos posteriormente, são exemplos disso.

O origami tomou um caminho surpreendente extrapolando o mundo das artes plásticas e mostrando-se útil também no mundo real. Todo esse processo além de diversificar e colaborar com a evolução do origami possibilitou o desenvolvimento de origami sobre demanda. Não há mais limites no origami, a não ser, claro, os limites físicos. Estruturas desenvolvidas em origami vêm sendo aplicadas na medicina, na ciência, em eletroeletrônicos e no espaço. Mais do que isso, o origami expandiu suas fronteiras para além do desenvolvimento de modelos em papel, passou a ser usado no desenvolvimento de projetos de engenharia como, por exemplo, a criação de air bags e satélites espaciais. As estruturas de dobras desenvolvidas possibilitam a compressão de uma estrutura extensa em um espaço reduzido e é isto que se procura nesses dois exemplos citados acima.

Sabemos que em ambos os casos citados acima o que possibilita essas extensões são processos mecânicos, entretanto para que esses processos sejam bem sucedidos, técnicas e estruturas de dobras tiveram que ser desenvolvidas. Dentre essas técnicas, a mais importante, com base no origami e aplicada em projetos exteriores ao mundo do origami é a dobra conhecida por Miura-ori, desenvolvida pelo engenheiro espacial japonês Koryo Miura.

Koryo Miura desenvolveu esse padrão de dobras quando pesquisava um meio de criar um modelo extremamente compacto, com estrutura de fechamento e abertura simples. Conhecida por sua utilidade em mapas, essa estrutura, segundo Jun Maekawa é "tecnicamente denominada de estrutura de ondulação dupla, pois pode ser facilmente desenvolvida sobre um plano." (MAEKAWA, 2008, p.118) e consiste em um padrão com paralelogramos congruentes distribuídos de maneira simétrica no plano.

Em sua pesquisa Koryo Miura percebeu que a chave para seu problema poderia estar na milenar arte de dobrar papel, o origami. Modelos de dobras sanfonadas já eram feitos para a composição de leques e outros artefatos. Em um dos artigos publicados pela da sociedade britânica de origami (SOB) "The Miura-ori Map", Ian Bain afirma que "one of the most common origami effects is to use a variant on concertina folding to produce a slightly ridged congruent composed of a series of congruent parallelograms, by a variation on concertina folding"[8]. Com base nisso, Miura começou a estudar variações sobre essas estruturas, analisando suas geometrias e elasticidades e concluiu que ao fazer dobras ortogonais, estas estruturas resultavam em dobras interdependentes, ou seja, Miura descobrira um padrão que permitia a abertura com um único movimento, permitia que toda a superfície dobrada se abrisse com um simples puxar dos cantos.

[8] que um dos efeitos mais comuns em origami é a utilização de uma variação da dobra sanfonada a fim de produzir uma superfície ligeiramente enrugada, composta de uma série de paralelogramos congruentes

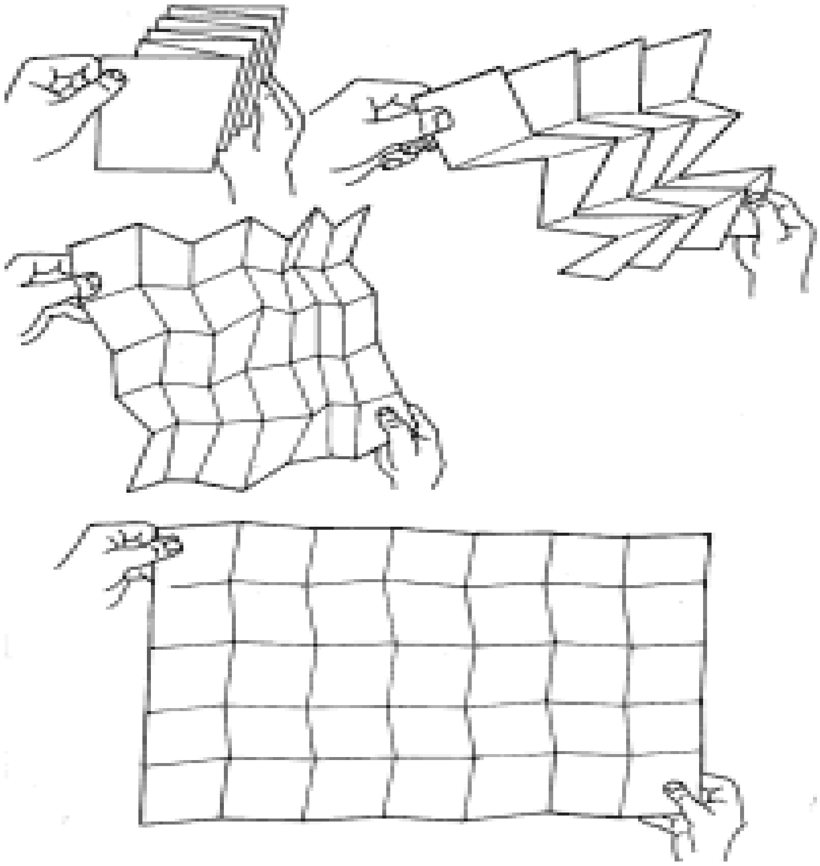


Figura 2.1.10 – Dobra Miura-ori

Antes do desenvolvimento da dobra Miura-ori, existiam dois outros processos para compactação de uma membrana: o processo de dobra de cartas e o processo de dobra de mapas. Nas dobras de cartas a membrana é dobrada ao meio, consecutivas vezes até chegar ao tamanho mínimo possível, já na dobra de mapas, usada principalmente em mapas turísticos e rodoviários, pega-se a membrana a ser dobrada e faz-se uma dobra sanfonada, depois dobramos a tira com um tamanho aproximado de um oitavo do comprimento original da folha e essa tira é dobrada em sanfona novamente. Em ambos os processos a abertura não é automática e simples como no processo de Miura. No caso da dobra de cartas, são necessários vários passos para se chegar à abertura completa da folha enquanto no caso da dobra de mapas, são necessários dois movimentos, um na horizontal e outro posterior na vertical (ou vice-versa). A dobra de Miura revolucionou a engenharia espacial, o origami, e apesar de apresentar uma mínima diferença em relação aos outros dois processos já conhecidos "ela introduziu uma mudança radical no processo de desdobramento" (PELLEGRINO E VICENT, 2009). Outros padrões começaram a ser desenvolvidos usando os princípios da dobra Miura-ori. Pequenas variações como o número de paralelogramos e angulações resultaram em outros padrões como MARS, desenvolvido pelo artista gráfico português Paulo Taborda Barreto, com dois tipos de paralelogramos em contrapartida a um usado no Miura-ori ou ainda o padrão UMBRELA, desenvolvido com a ajuda de origamistas como Robert Lang que consiste em dobrar qualquer disco até que este se transforme em um pequeno cilindro.

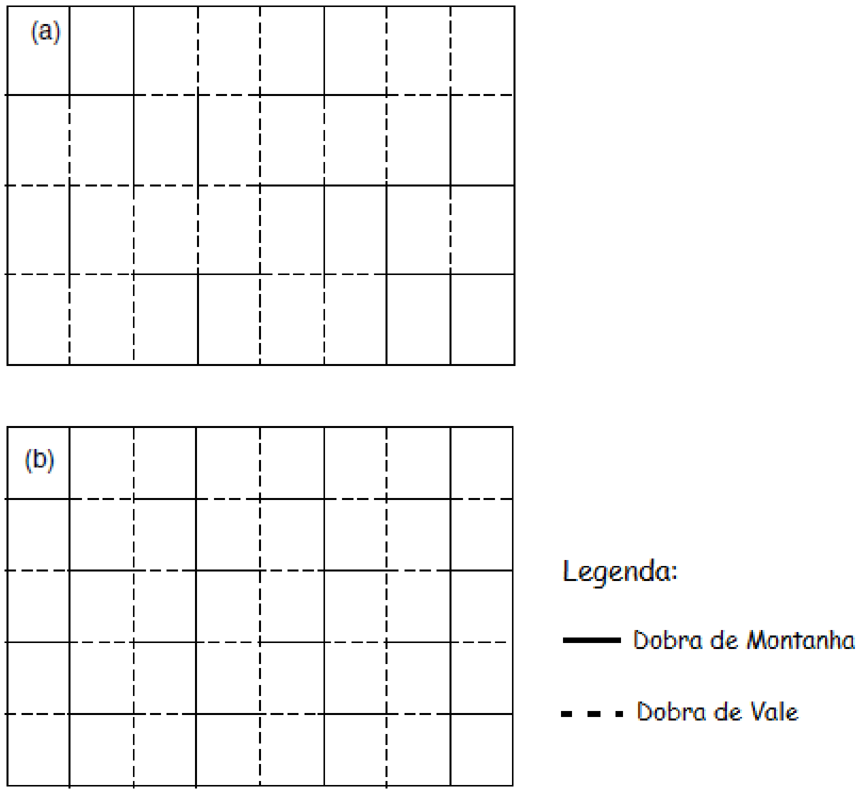


Figura 2.1.11: (a) dobra de cartas; (b) dobra de mapas

Com essas técnicas de dobra projetos ambiciosos começaram a sair do papel e em 1995, o primeiro origami chegou ao espaço. Um painel solar que utilizava o padrão desenvolvido por Miura foi lançado ao espaço e após ele muitos outros projetos espaciais usaram o origami como o telescópio Eyeglass projetado pela Lawrence Lincermore National Laboratory e a Vela Solar, figura 2.1.12, enviada ao espaço em 2004 pelo Institute of Space and Astronautical Science (ISAS) do Japão.

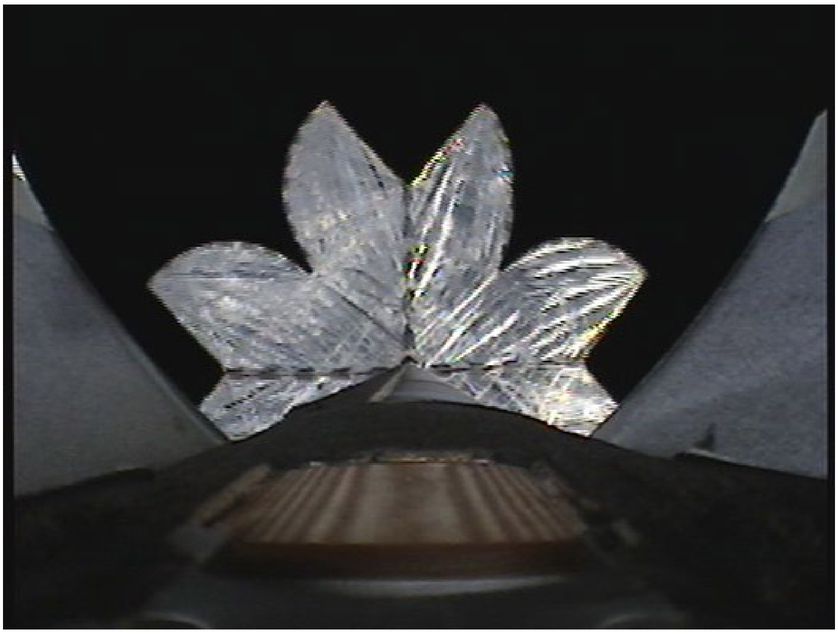


Figura 2.1.12: Vela Solar

Padrões de dobra como o de Miura foram denominados padrões de ladrilhos ou mosaicos, devido aos desenhos que formam, e são usados para compor esculturas de papel como a cauda de um pavão ou de um peru. Origamistas usam modelos com formas diferentes dos paralelogramos para criarem efeitos diversos em suas obras de arte. Arte e ciência se completam em origami.

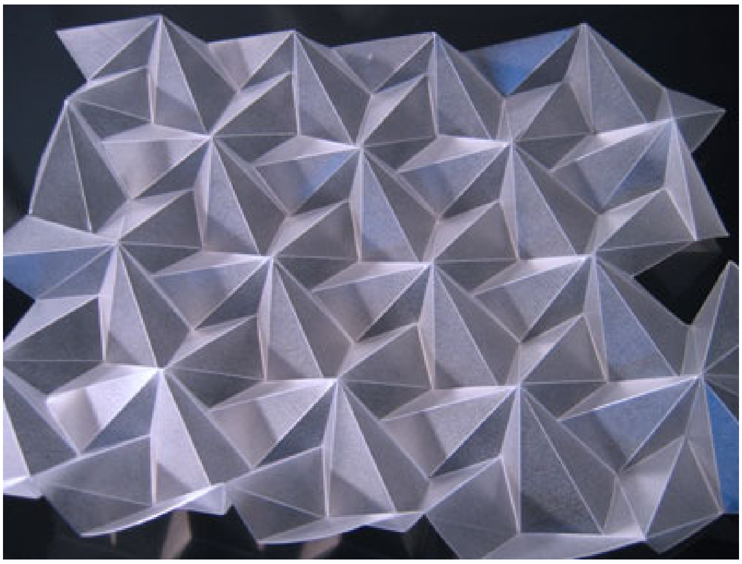


Figura 2.1.13: Mosaico construído com folhas plásticas.

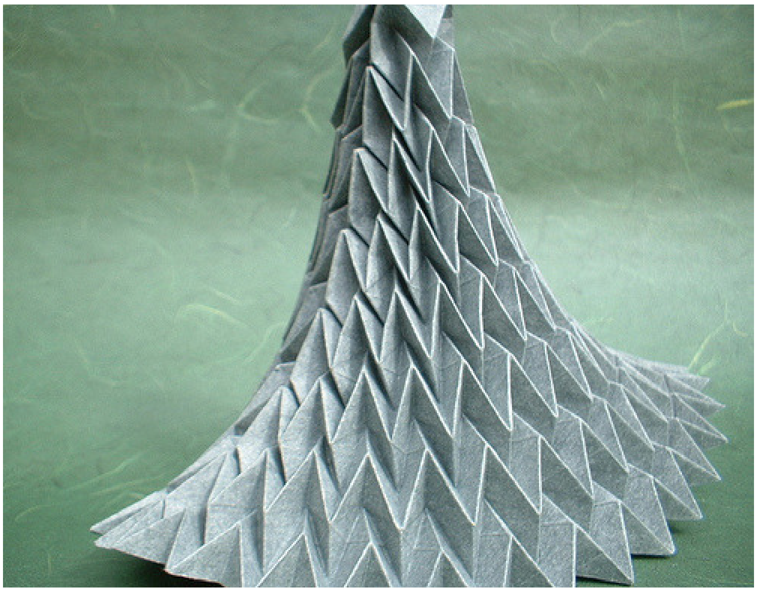


Figura 2.1.14: Estrutura construída com dobras Miura-ori.

A estrutura desenvolvida por Miura foi usada e aperfeiçoada na engenharia espacial. Como vimos, diversos projetos foram desenvolvidos através dessas estruturas de dobras, mas um fato curioso é o uso que a dobra Miura-ori em mapas. A curiosidade não é o fato de sua utilização com esse intuito, mas a relação desse fato com a história do origami.

Quando vimos a história do origami no capítulo 1, chamamos a atenção para o fato do origami não ser necessariamente feito a partir de uma folha de papel, outros materiais podem ser utilizados como roupas (egípcios) ou mapas (naquela época o papel ainda não existia e os mapas eram feitos em papiros ou gravados em pedras). Essa ligação do origami com mapas continuou no século VIII com os mouros, importantes personagem da historia do origami no ocidente. Os mouros eram grandes navegadores e desenvolveram um padrão de dobra que também permitia a extensão do mapa dobrado com apenas um movimento, característica essa de extrema importância facilitando o acesso a estes em caso de tempestades ou outras situações críticas.

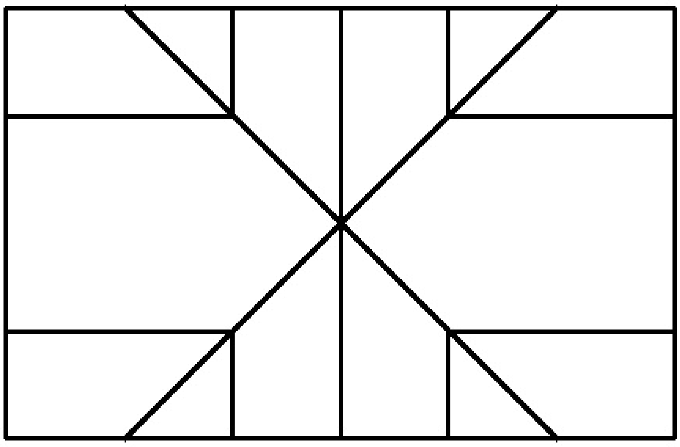


Figura 2.1.15: Linhas de dobras do mapa mouro

2.2 O Sistema Axiomático e o Origami

Acreditamos que a origem do sistema axiomático tenha ocorrido na era clássica, mais especificamente na Grécia, isto porque, a ciência de culturas apresentadas por China, Índia, Egito entre outros são colocadas por muitos autores em planos diferentes da ciência dita ocidental.

Apesar de contestável, existe uma explicação para essa visão. Primeiramente podemos perceber que apesar do desenvolvimento do conhecimento de povos como os babilônios, egípcios e chineses, muito anteriores à civilização grega, o conhecimento prático era preferido ao conhecimento teórico. Estas civilizações não possuíam sistemas teóricos baseados em princípios tal como a geometria de Euclides e tampouco regras universais como, por exemplo, o teorema de Pitágoras. Como já vimos, muito antes de Pitágoras descobrir a relação entre os lados de um triângulo retângulo, os babilônios já conheciam inúmeros números que formavam esses triângulos, porém nunca se preocuparam em fazer uma relação universal.

Além disso, esses povos ainda estavam muito ligados à metafísica como forma de explicar fenômenos naturais. Havia um predomínio do aspecto religioso sobre o racional e foi nesse sentido que a ciência realizada na Grécia se distinguiu das demais ciências, ditas orientais. Não que esta separação tenha ocorrido entre oriente e ocidente, mas sim na própria Grécia.

Na matemática podemos apontar Hipócrates de Quios como o primeiro matemático grego a fazer demonstrações. Foi ele que no século V a.C. compilou um texto dos *Elementos*. Os *Elementos* de Euclides consistiam inicialmente em treze pergaminhos, já que, naquela época ainda não tínhamos livros. Desses treze pergaminhos, os quatro primeiros são derivados dos trabalhos e escritos de Hipócrates que representa o ponto de partida da matemática grega, que teve ainda matemáticos mais conhecidos como Tales de Mileto, Pitágoras até chegar a Euclides. De fato, Euclides não foi e nunca reivindicou ser o autor original das demonstrações e teoremas que estão contidas em sua obra. Podemos encontrar nela teoremas já antes demonstrados por outros matemáticos como o teorema de Pitágoras e de Tales, por exemplo. Seu mérito foi o de organizar toda essa teoria de forma consistente, estruturando a geometria grega existente até aquele momento.

Pouco se sabe sobre Euclides, segundo Mlodinow, Euclides desprezava o materialismo e teria aberto uma escola em Alexandria aonde teve alunos brilhantes e escreveu pelo menos dois livros. Há ainda a suspeita de que Euclides fosse apenas um nome, por trás do qual haveria um grupo de matemáticos alexandrinos. Essa suspeita também existe quanto a Pitágoras e pode ser justificada pelo fato de suas obras serem muito vastas e principalmente por sabermos poucos aspectos sobre suas vidas devido a informações perdidas na história.

Sua obra é um dos livros mais importantes de todos os tempos, considerado um clássico, serviu como base para a educação superior de diversas civilizações por milhares de anos e ainda hoje é estudado. Sua geometria foi tida durante muito tempo como única e verdadeira, assim como a mecânica de Newton, mas foi por pouco que todo esse conhecimento não se perdeu no tempo. Esquecida durante séculos, só foi redescoberta durante a Idade Média assim como os livros de Arquimedes e outras obras.

A obra de Euclides é um exemplo de sistema axiomático o qual consiste de um conjunto de axiomas estabelecidos como verdadeiros que não requererem demonstrações e de teoremas que são derivados desses axiomas. Todas as demonstrações têm como base esses axiomas e devem ser provadas por meio de uma dedução lógico-matemática. Essas fórmulas lógicas estão inseridas nos Elementos de Euclides de forma implícita.

Enumerando os postulados ou axiomas de Euclides temos:

P.I) Uma linha reta pode ser traçada de um ponto para outro qualquer;

P.II) Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;

P.III) Dado um ponto e uma distância, pode-se traçar uma circunferência com centro nesse ponto e raio[9] igual à distância;

P.IV) Todos os ângulos retos são iguais entre si;

P.V) Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Os dois primeiros não causam estranheza. Não encontramos dificuldade em traçar uma reta dado quaisquer dois pontos e tampouco temos dificuldade em imaginar uma barreira no espaço que nos impeça de sempre poder prolongar um segmento de reta. O terceiro postulado é um pouco mais sutil, mas também de fácil constatação bem como o quarto. A maior dificuldade é encontrada no quinto postulado. É o único postulado determinado por Euclides e não fazia parte do grande corpo de conhecimento que estava sendo organizado por ele. Muitos matemáticos posteriores não se sentiam confortáveis com esse postulado, pois não o achavam simples nem auto-evidente. Esses matemáticos achavam que o quinto postulado deveria ser demonstrado como um teorema. De fato, a história nos mostra como esse postulado foi importante para o surgimento de outras geometrias ditas não euclidianas.

Além desses axiomas, referentes à geometria, Euclides enunciou ainda outros nove axiomas que consistem em procedimentos ou definições que serão usados nas demonstrações, reduzidas aqui a oito, adaptadas de Laso:

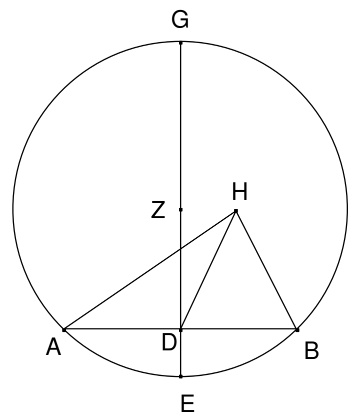
1) Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;
2) Se de parcelas iguais são adicionadas quantidades iguais, então os resultados serão iguais entre si;
3) Se de parcelas iguais são retiradas quantidades iguais, então os resultados serão iguais entre si;
4) Se de parcelas desiguais são adicionadas quantidades iguais, então os resultados serão desiguais entre si;

[9] Euclides não usava o termo “raio”, mas sim o termo semelhante “linhas traçadas desde o centro”.

5) Coisas que coincidem com uma outra são iguais;
6) Coisas congruentes entre si são iguais entre si;
7) O todo é maior que a parte;
8) Duas retas não formam região.

Para entendermos o processo utilizado em um sistema axiomático, vamos analisar um exemplo de demonstração contida no livro *Elementos de Euclides* editado pela Biblioteca Scriptorium Graecorum et Romanorum Mexicana onde podemos perceber as características do sistema axiomático (EUCLIDES, 1944, p.181 e 182).

1.1 Seja o circulo dado ABG; (Hip.)
1.2 É necessário encontrarmos o centro do circulo ABG (Tes.)



Demonstração:
1.31 Tracemos uma reta qualquer AB; (P.I)
1.32 Divida-a em duas partes iguais em um ponto D; (T.I.10)
1.33 Trace a perpendicular DG desde o ponto D a reta AB, (T.I.11)
1.34 Alongue essa perpendicular até E. (P.II)
1.35 Divida GE em duas partes iguais no ponto Z: (T.I.10)
1.36 Digo que o ponto Z é o centro do circulo ABG. (1.2)

1.41 Porque se não o for, se fosse possível, seria H, (Hip.)

1.42 Tracemos então os segmentos HA, HB, HD, (P.I)

1.43 e por ser AD igual a DB, comum à DH, (1.32)

1.44 as retas AD, DH são iguais a HD, DB uma a uma, (1.43)

1.45 e a base HA igual a base HB, por ser (linhas) do centro. (D.I.15)

1.46 assim sendo, o ângulo ADH é igual ao ângulo HDB. (T.I.8)

1.51 Quando, uma reta é traçada sobre uma outra reta formando os ângulos que forma iguais, ambos os ângulos são retos. (D.I.10)

1.52 Por tanto o ângulo HDB é reto; (1.51)

1.53 mas também o ângulo ZDB é reto; (D.I.10 & 1.33)

1.54 logo HDB é ZDB, (P.IV)

1.55 o maior seria o menor: o que é impossível. (N.VIII)

1.56 Logo não é H o centro do círculo ABG. (Cf. 1.41)

1.57 Analogamente demonstramos que nenhum outro fora de Z o é. (L.S.)

1.12 Logo o ponto Z é o centro do circulo ABG.

Observando o teorema acima podemos perceber melhor como funciona o método lógico-matemático utilizado por Euclides. Partindo de um círculo qualquer, suposto por ele, deseja-se determinar o centro deste círculo.

Estão ai a hipótese e a tese apresentada como um problema. Essa é uma característica da geometria de Euclides e mais amplamente do sistema axiomático, elaborar problemas e tentar resolve-los utilizando somente os axiomas e outros teoremas provados anteriormente. No desenvolvimento da matemática após Euclides este processo se manteve, no entanto, apenas a partir de Hilbert (1862-1943) - matemático alemão que contribuiu para a matemática com ideias brilhantes em suas diversas áreas - que o sistema axiomático ganhou um rigor maior. A mentalidade dos matemáticos pode ser bem definida pela seguinte afirmação feita por Hilbert, no final dos *Grundlagen der Geometrie*, onde diz:

> "Em minha opinião, esta máxima contém uma recomendação geral e natural; de fato, sempre que, em nossas considerações matemáticas, encontramos um problema ou conjecturamos um teorema, nosso desejo do conhecimento não se satisfaz enquanto não estabelecemos a solução completa e a prova exata, ou enquanto não compreendemos claramente as razões para a impossibilidade de fazê-lo e a necessidade de nosso fracasso." (FREUDENTHAL, 2007,p.1122)

Esta solução completa citada por ele são as provas rigorosas, Hilbert buscava na axiomática a consistência e independência da matemática. Esta estrutura formal apresentada pela matemática permite que problemas e teorias sejam propostas e provadas sem que os mesmos tenham uma relação com a pratica ou necessitem ser uteis. Como vimos anteriormente, as teorias e problemas resolvidos pela matemática muitas vezes só se mostram uteis muitos anos depois de provados e desenvolvidos. O curioso em todo esse processo de axiomatização é que também o origami possui axiomas que embasam suas dobras.

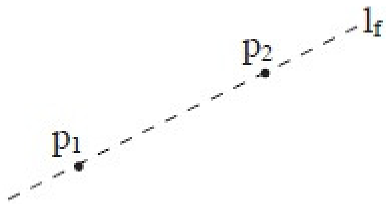
Em 1989, Humiaki Huzita introduziu organizou o Primeiro Encontro Internacional de Origami, Ciência e Tecnologia e em um de seus trabalhos apresentados neste encontro *"The Algebra of Paper Folding (Origami)"*, Huzita intruduziu as seis operações que hoje são conhecidas como os axiomas de Huzita. Os axiomas de Huzita consistem em seis modos distintos de se fazer uma dobra em uma folha apenas juntando pontos pré-existentes (i.e. interseção de dobras), ou linhas (i.e. dobras e/ou a própria folha). Segundo Robert Lang, em *Origami and Geometric Constructions*,

> "Dado um conjunto de pontos e de linhas em uma folha de papel, As operações de Huzita permitem a criação de novas linhas, as interseções entre as linhas antigas e novas definem pontos adicionais. O conjunto expandido de pontos e linhas, em seguida, pode ser expandido através de repetidas aplicação das operações para obter mais combinações de pontos e linhas." (LANG, 2004)

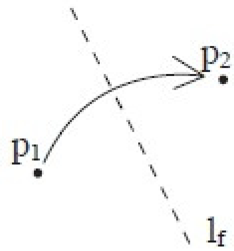
Os conjuntos de pontos construídos através dos axiomas de Huzita apresentam importância tanto acadêmica como prática. Com esses axiomas é possível construir pontos que sejam soluções de equações cúbicas, permitindo a resolução de problemas como o da trissecção de um ângulo por origami além de soluções de equações quadráticas. De fato, isso revela a força do origami como ferramenta matemática, mostrando-se superior aos clássicos instrumentos da geometria, régua e compasso onde se encontram soluções apenas para equações quadráticas. Na prática, a descoberta desses pontos possibilitaram estruturas com ângulos e partições diferentes dos usados na era clássica do origami.

Os seis axiomas de Humiaki Huzita são:

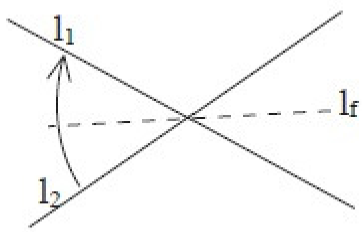
A1 – Dados dois pontos p_1 e p_2 podemos traçar uma reta que os conectem



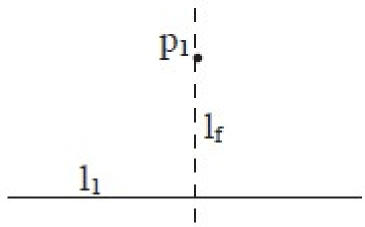
A2 – Dados dois pontos p_1 e p_2 podemos unir p_1 em p_2



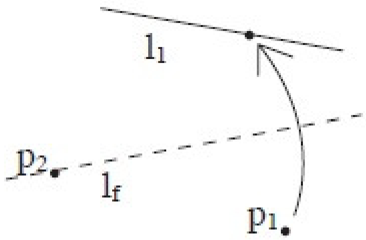
A3 – Dadas duas retas l_1 e l_2, podemos dobrar l_1 sobre l_2



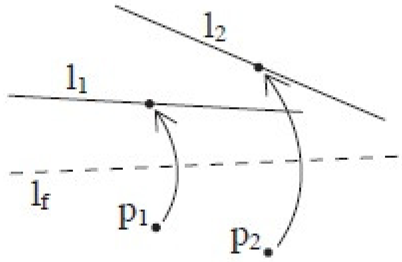
A4 – Dados um ponto p_1 e uma reta l_1, podemos fazer uma dobra perpendicular a l_1 passando pelo ponto p_1.



A5 – Dados dois pontos p_1 e p_2 e uma reta l_1, podemos fazer uma dobra que leve p_1 a l_1 e que passe pelo ponto p_2



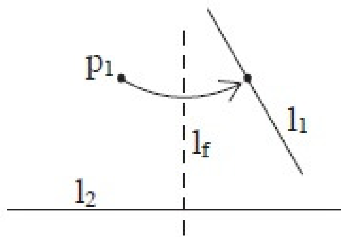
A6 – Dados dois pontos p_1 e p_2 e duas retas l_1 e l_2, podemos fazer uma dobra que posicione p1 na reta l_1 e p_2 na reta l_2.



Os axiomas A1 ao A5 possibilitam a construção da solução de qualquer equação quadrática, assim como a régua e o compasso utilizados na geometria euclidiana, enquanto o A6 é o responsável por possibilitar a resolução de qualquer equação cúbica, como a trissecção de um ângulo. Veremos no capitulo 3 este e outros exemplos de construção de soluções de equações cúbicas e quadráticas com origami.

Neste mesmo Encontro Internacional de Origami, Jacques Justin também apresentou uma lista com operações (JUSTIN, 1997). Na lista de Justin apareciam sete operações, uma a mais que na lista de Huzita. O trabalho de Justin foi revisto e analisado por outros matemáticos e origamistas, incluindo Huzita, e recentemente, em 2001, Koshiro Hatori descobriu que este axioma a mais, apresentado por Justin não se equivale a nenhum dos axiomas descritos por Huzita. No entanto este axioma é responsável apenas pela solução de algumas equações quadráticas, ou seja, não trouxe nenhum acréscimo no campo de construção com origami. O sétimo axioma diz que:

A7 – Dado um ponto p_1 e duas retas l_1 e l_2, podemos criar uma dobra perpendicular a l_2 que posicione p_1 sobre a reta l_1.



Analisando esses axiomas percebemos a forte relação entre o origami e a geometria euclidiana. De fato, a geometria que encontramos no origami é a geométrica euclidiana, sendo este um instrumento e modelo da mesma. Os instrumentos clássicos usados na geometria euclidiana encontrados nos Elementos eram a régua e o compasso, no entanto, como instrumento para a geometria, o origami é mais completo, estendendo a possibilidades de construção de soluções de problema, que com régua e compasso se reduzem a equações quadráticas enquanto o origami, tomando o grupo de axiomas acima, apresenta soluções para equações cúbicas além das quadráticas.

O grupo total com os sete axiomas ficou conhecido como os axiomas Huzita-Justin. Sobre esses axiomas, Roger C. Alperin levanta uma questão: seriam esses axiomas completos ou existiria ainda algum axioma de dobra simples a ser descoberto? Segundo ele:

> "Ao longo dos anos vários trabalhos apresentaram construções elegantes usando os axiomas Huzita-Justin, incluindo construções impossíveis de serem feitas com régua e compasso, como a trissecção do ângulo, duplicação do cubo e vários polígonos regulares. Porém, ainda restam construções que não podem ser feitas com os axiomas Huzita-Justin, como a quinsecção do ângulo, o polígono regular com onze lados (o menor polígono regular que não pode ser construído com os axiomas), ou a solução geral de uma equação quíntupla." (ALPERIN, 2000)

De fato parece que este campo ainda está em aberto, pois construções como a quintesecção do ângulo já foram obtidas por Robert Lang por exemplo. O fato é que a construção desenvolvida por Lang não utiliza somente os axiomas de Huzita-Justin. Foi provado matematicamente que só existem esses sete axiomas, ou seja, o sistema de axiomas de Huzita-Justin está fechado e que os mesmos produzem a solução de qualquer equação quadrática ou cúbica. Esta prova deveria responder o questionamento levantado por Alperin, porém um detalhe deve ser analisado: os axiomas de Huzita-Justin referem-se a dobras simples, ou seja, um único vinco é definido ao combinarmos pontos e linhas (ALPERIN, 2006). Entretanto, quando analisamos o processo de quintesecção do ângulo de Lang observamos dobras que definem dois vincos. Uma mesma dobra pode resultar em dois, três ou mais vincos e formar assim diversas combinações de alinhamento. Lang afirma que

“Esses alinhamentos mais complicados formam uma classe inteiramente nova de "axiomas" de origami, o que potencialmente pode vir a resolver equações de graus consideravelmente mais elevados.”.

Usaremos nesse trabalho demonstrações matemáticas das construções feitas com origami e deixamos a cargo do leitor a percepção que cada dobra feita está incluída no grupo de axiomas mostrados acima e observar que quando dobramos um papel, quando fazemos um origami, estamos traçando retas perpendiculares (A4 e A7), retas paralelas (A2), bissetrizes (A3), mediatrizes (A7) e etc.

3. CONSTRUÇÕES FEITAS COM ORIGAMI

A História da Matemática carrega consigo conceitos que são criados, desenvolvidos e modificados durante toda a sua evolução, como o conceito de números, ângulos, retas, planos, entre outros. Durante o desenvolvimento da matemática, novas definições sobre esses conceitos são criadas substituindo a ideia anterior, abrangendo-a ou simplesmente ampliando a mesma.

Neste capítulo pretende-se/pretendemos mostrar dois desses importantes tópicos matemáticos: o ângulo e o número. Através de construções feitas com origami, será possível exemplificar e analisar conceitos e a evolução de cada um na História.

Nos casos que mostraremos a seguir, o origami está sendo tratado como simples dobras de papel, sem que com isso se tenha a intenção de construir objetos ou formas específicas. O origami é tratado como uma ferramenta matemática como a régua e o compasso e é utilizado de modo a construir um processo de soluções para problemas. Essas soluções aparecem muitas vezes nas criações vistas nos capítulos anteriores, por exemplo, para construirmos uma caixa em forma de prisma de base hexagonal, usamos durante sua montagem o processo de construção de ângulos de 60º.

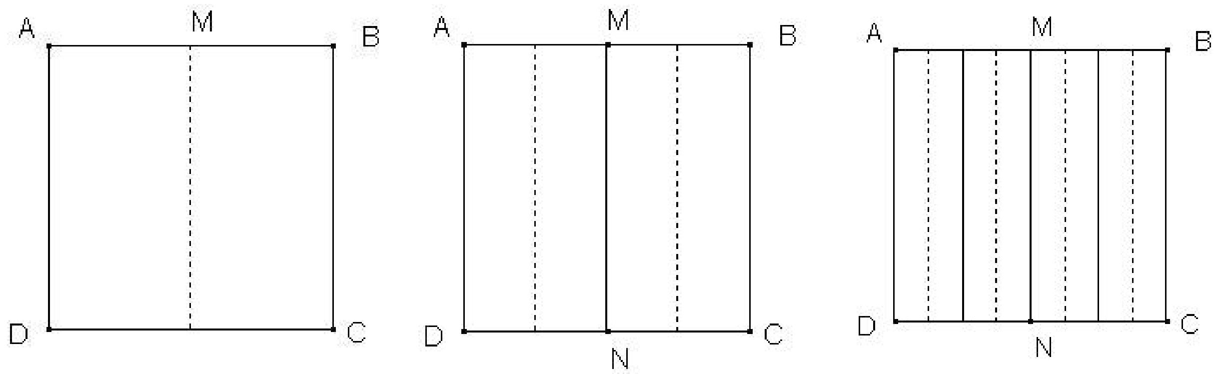
3.1. Números

Nessa seção vamos mostrar algumas construções feitas com origami para obtenção de números.

O conceito de número, atrelado a ideia de contagem, é um dos primeiros conceitos matemáticos a surgir. O homem primitivo necessitava saber quantas pessoas existiam em sua tribo ou em uma tribo inimiga, saber se seu rebanho de ovelhas estava aumentando ou diminuindo e neste contexto a ideia de número surge. Inicialmente os números usados eram o que hoje chamamos de números naturais - que nada mais são do que os números inteiros positivos – que usamos para contar coleções finitas de objetos, pessoas e etc. Porém a vida cotidiana mostrou a necessidade de contar além de objetos individuais, medições de várias quantidades como tempo, comprimento e peso. Com essas medições surgem as frações como forma de repartir um inteiro, os submúltiplos e as partição de um número em partes homogenias. Ampliando-se o conceito de números.

É nesse ponto que iniciamos a relação de construção de números com origami, formando números naturais e fracionários pretendemos mostrar que o origami pode ser usado como uma ferramenta muito poderosa na resolução de problemas matemáticos, sendo mais forte que a régua e o compasso, instrumentos de Euclides utilizados na geometria plana. De fato, segundo Philip J. Davis e Reuben Hersch é possível definir a geometria euclidiana como “a ciência daquilo que pode ser construído com régua e compasso” (DAVIS e HERSCH, 1985).

Inicialmente vamos usar o origami para dividir um quadrado em partes iguais. É fácil observarmos que para dividirmos o quadrado em uma potência inteira de dois, maior que um, basta que façamos conforme o esquema abaixo.



(1) Dobrar ao meio unindo os vértices A com B e C com D.

(2) Dobrar unindo os vértice A e B com M e D e C com N

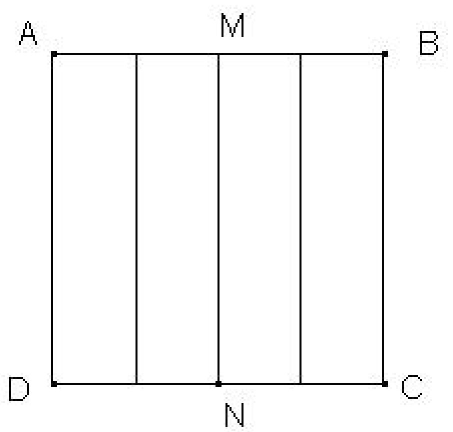
(3) Assim sucessivamente até chegarmos a potência de dois desejada.

Ao fazermos isso, tomando o lado do quadrado como unidade, estamos definindo as frações decorrentes das potências de dois entre elas ½; ¼; ¾; 5/16 e etc.

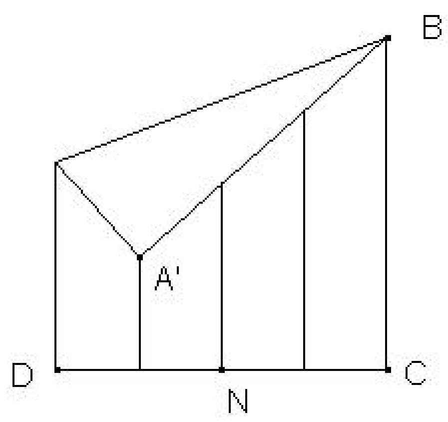
3.1.1 Lei segmentar de Tales

Continuando o processo de obtenção de números fracionário por dobraduras, vamos apresentar um método atribuído a Tales de Mileto para a divisão de um segmento em partes iguais. Tales de Mileto é considerado o pai da geometria construtiva e o principal antecessor de Pitágoras e Euclides. A Lei segmentar de Tales é facilmente demonstrada a partir de semelhança de triângulos e permite a divisão de um segmento não apenas em potências de dois, como no método usado acima (ideia de divisão de um segmento por suas mediatrizes), e sim num número natural qualquer (NOVAES, 2006, p.111).

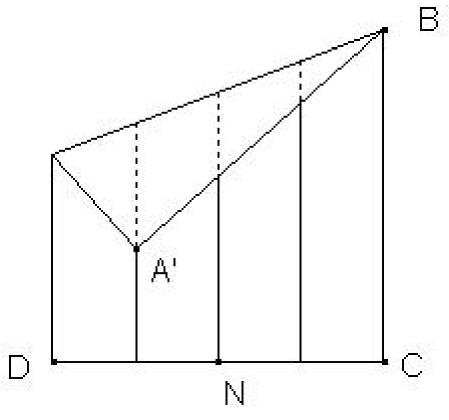
Para particionar o lado do quadrado em três partes iguais, por exemplo, devemos seguir os seguintes passos:



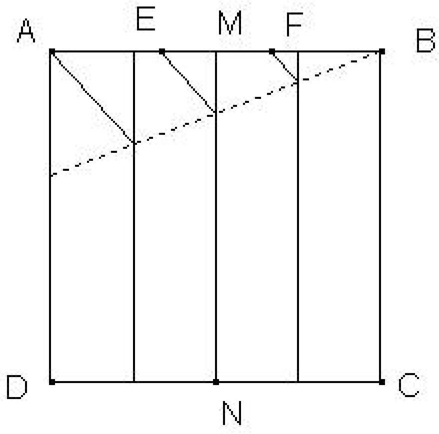
(1) Dividir o quadrado em quatro partes iguais.



(2) Levar o vértice A até a terceira linha.

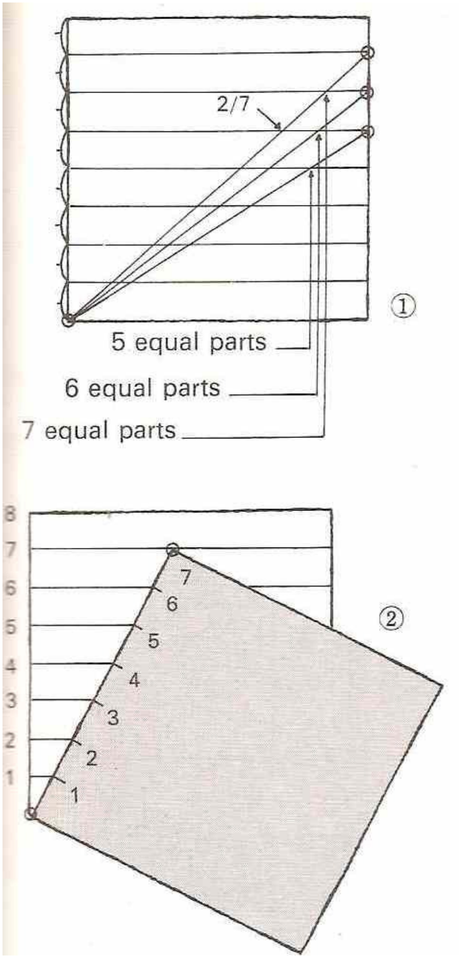


(3) Prolongar as linhas conforme indicado acima pelas linhas pontilhadas.

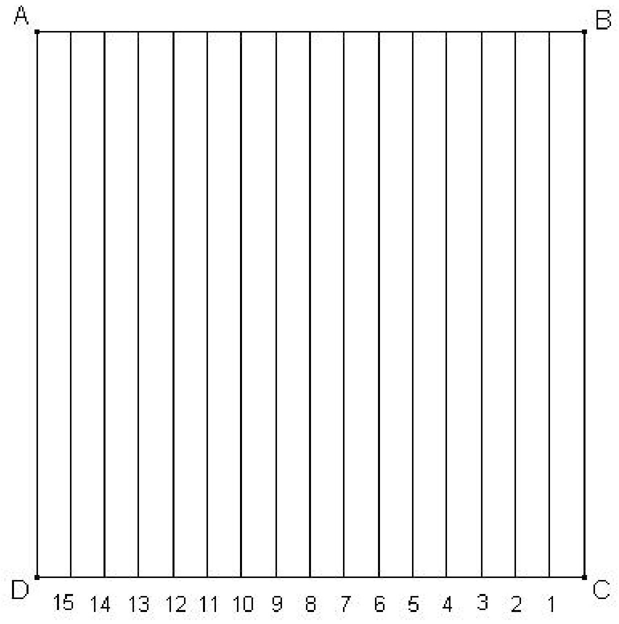


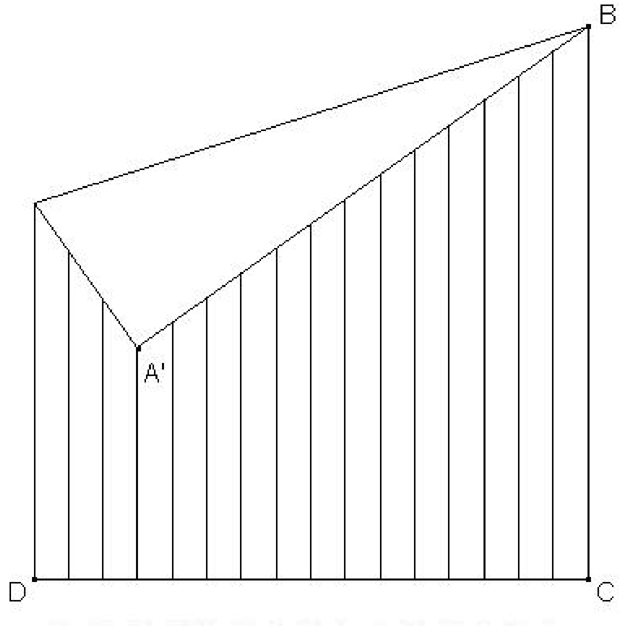
(4) Abrindo o papel após as dobras, teremos o ponto E e F onde AE = EF = FB

Ou ainda, se não quisermos deixar as marcas das dobras guias no papel, podemos utilizar o método (KASAHARA, 1988, p. 85): dobre um papel em 4, 8 (esquema abaixo), 16, etc. partes. Faça um dos vértices de outro papel quadrado, congruente ao primeiro, coincidir com o vértice A do papel que você dobrou e outro vértice coincidir com a linha de dobra referente ao número de partes que você deseja particionar o papel conforme a figura:



Estes métodos, apresentados acima a partir de uma folha de papel quadrada, é uma simples aplicação da “Lei Segmentar de Tales” citada acima e ensinada no Ensino Fundamental na matéria de desenho geométrico e, assim como no método ensinado por régua e compasso, onde podemos dividir um segmento em n partes iguais, se usarmos de forma análoga o processo acima descrito, também podemos dividir um quadrado n partes iguais. Para isso devemos sempre (no caso do método por origami), inicialmente, dividir o quadrado numa potência de dois, maior que o número de partes que desejamos dividi-lo e ligarmos o vértice A ao segmento de número igual ao número de divisões que desejamos fazer. Por exemplo, se desejamos dividir em 13 partes iguais, teremos que inicialmente dividir o quadrado em pelo menos $16 = 2^5$ partes iguais e ligar o vértice A ao 13° segmento conforme mostra o esquema abaixo.





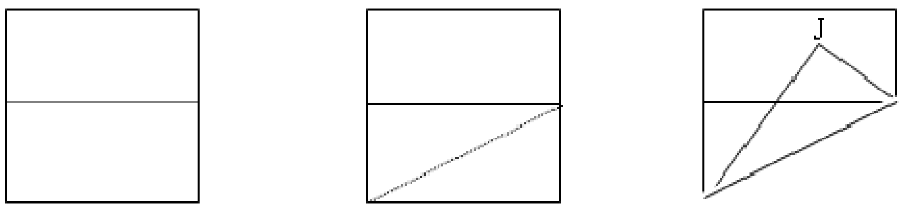
É fácil verificarmos que dependendo do número de divisões a construção torna-se difícil por motivo de precisão ou até mesmo por questões materiais do tipo tamanho do quadrado. Porém na construção por régua e compasso também observaremos estes tipos de problemas.

3.1.2 Partição clássica em 5 partes

Outros métodos para a obtenção de números racionais existem e de maneira menos genérica, um deles é uma elegante divisão de um papel em cinco partes iguais

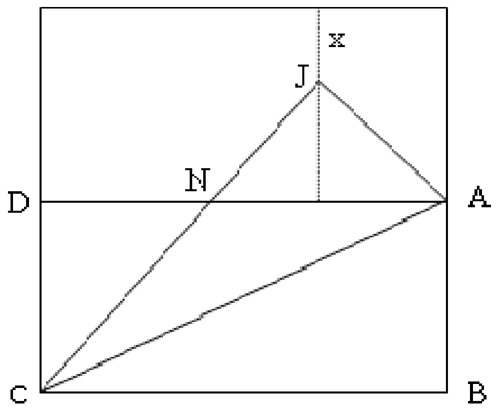
Dobre um papel quadrado pela mediatriz do lado.

1. Em seguida dobre pela diagonal de um do dois retângulos que ficaram determinados pelos lados do papel e pela linha de dobra.
2. Marque o ponto J, que o vértice do papel determina no interior do quadrado. A distância deste ponto ao lado mais próximo mede $\frac{1}{5}$ do lado.



1. 2. 3.

Vamos mostrar que a distância de J ao lado mais próximo mede o lado dividido por 5. Na figura abaixo denotando BC = ℓ. Devemos mostrar que $x = \frac{l}{5}$.



O ângulo $A\hat{C}B \equiv A\hat{C}N$ por construção com dobradura.

Os ângulos $B\hat{C}A \equiv C\hat{A}N$ pois são alternos e internos.

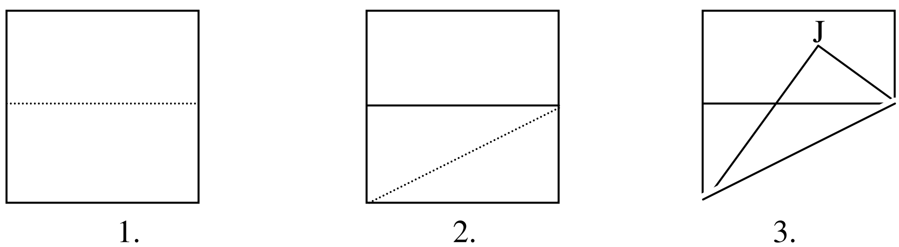
Logo $C\hat{A}N \equiv A\hat{C}N \rightarrow \Delta ACN$ é isósceles. Portanto AN = CN.

O ΔJAN é retângulo em J.

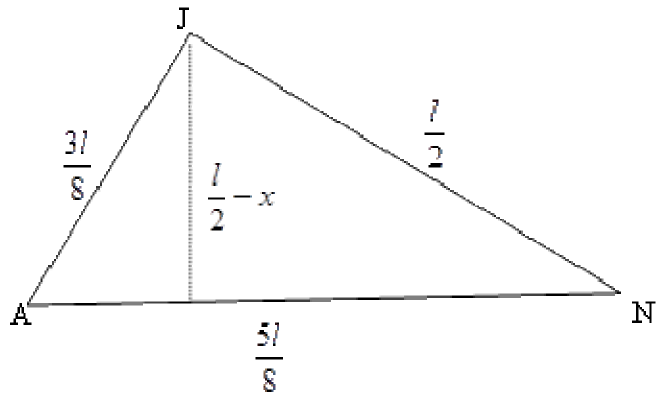
CJ = λ → NJ = λ – CN = λ – AN.

$(AN)^2 = (l - AN)^2 + (\frac{l}{2})^2$. Daí concluímos que $AN = \frac{5l}{8} \rightarrow NJ = \frac{3l}{8}$.

Destacando o ΔJAN temos: $\left(\frac{l}{2} - x\right).\frac{5l}{8} = \frac{3l}{8}.\frac{l}{2}$



1. 2. 3.



Simplificando obtemos:

$5\left(\frac{l}{2}-x\right)=\frac{3l}{2}$, daí tiramos que $\frac{5l}{2}-5x=\frac{3l}{2}$ e finalmente concluímos que $x=\frac{l}{5}$.

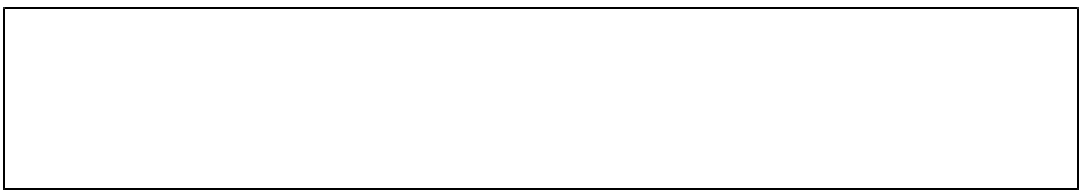
3.1.3 – Números Irracionais

A obtenção de números fracionários, seja por meio de dobras, seja por régua e compasso são equivalentes e nenhuma das duas ferramentas apresenta-se mais ou menos poderosa que a outra. A diferenciação desses dois métodos só se torna perceptível quando buscamos a obtenção de números irracionais (e ainda assim, a família dos números irracionais decorrentes de raízes quadradas não exatas apresentam-se análogos nos dois métodos. Veremos mais a frente porque isso acontece.).

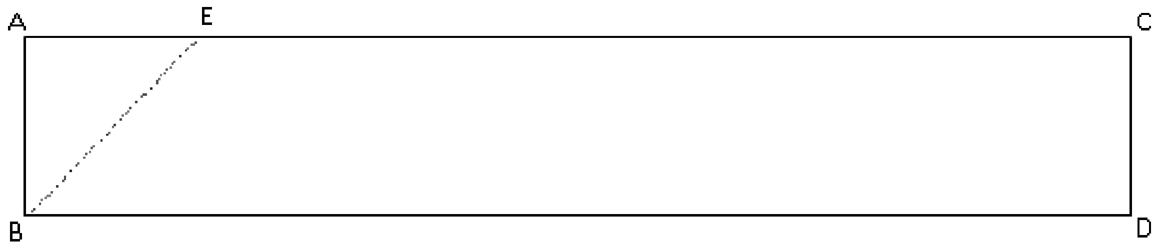
Utilizando régua e compasso, é possível construirmos a raiz quadrada de qualquer número natural bem como com origami e ambos os métodos partem de um dos teoremas mais conhecidos da matemática (geometria), o teorema de Pitágoras.

Para traçarmos esses números a partir de dobraduras devemos seguir os seguintes passos

1) Tome uma tira de papel de lados paralelos. Tome cuidado para que esta tira seja um retângulo conforme figura abaixo.



2) Dobre o papel pela linha pontilhada, conforme o indicado na figura. O ângulo ABE deve ser congruente ao ângulo EBD. ($A\hat{B}E \equiv E\hat{B}D$)



3) Marque o ponto F que é o ponto que A determina quando realizamos a dobra por BE.

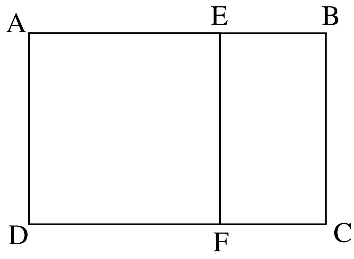
4) Dobre a tira pela bissetriz do ângulo EBD, determinando assim os pontos M e N, conforme a figura abaixo:

Observando os triângulos BFE e BMN, e considerando AB como unidade, temos que os segmentos traçados BE e BN são respectivamente $\sqrt{2}\ e\ \sqrt{3}$. Se continuarmos esse processo, podemos definir todas as raízes quadradas dos números naturais.

Um número racional muito importante na história da humanidade e que foi tema de muitos estudos matemáticos é o número áureo. Esse conceito de número áureo vem sendo observado e estudado desde as primeiras civilizações por suas características intrigantes e principalmente por sua constante presença em elementos da natureza como na reprodução de coelhos, crescimentos de árvores e razões que se repetem nas flores e até no corpo humano.

Diz-se que um ponto divide um segmento de reta em razão áurea se o mais longo dos segmentos é média geométrica entre o menor e o segmento todo (EVES, 2004, p.125). No caso de um retângulo, dizemos que este é um retângulo áureo quando retirando dele um quadrado, de lado igual ao menor lado do retângulo, o retângulo que resta é semelhante ao retângulo original.

Desta maneira temos que:



Os retângulos ABCD e EBCF são semelhantes. Chamando AB de x e AE de a, dizemos:

a) a é o segmento áureo de x e,
b) x/a é a razão áurea.

Com os valores acima temos EB = x – a e da semelhança de retângulos vem:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a} \Rightarrow x^2 - ax = a^2 \Rightarrow x^2 - ax - a^2 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau em x, obtemos:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

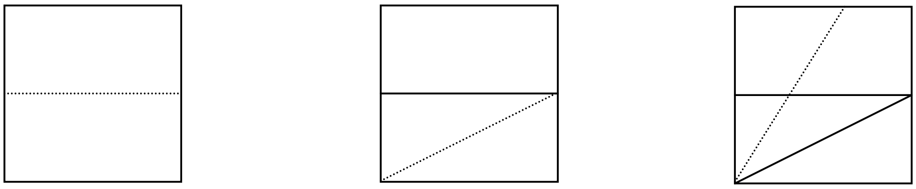
Como só temos valores positivos a solução $x = \frac{a - a\sqrt{5}}{2}$ é estranha ao problema portanto $x = \frac{a + a\sqrt{5}}{2}$ é a solução que nos interessa. Daí $\frac{x}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o valor da razão áurea.

Para a construção do segmento áureo utilizando origami temos:

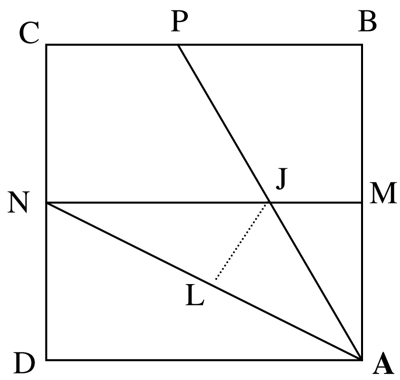
1) Dobre um papel quadrado pela mediatriz do lado e desdobre. (lado, com lado oposto)

2) Dobre um dos retângulos pela diagonal e desdobre. Esta diagonal determina dois ângulos de medidas diferentes.

3) Dobre o papel pela bissetriz do maior ângulo. O maior segmento determinados no lado oposto é o segmento áureo do lado. Veja as figuras na página seguinte.



Devemos mostrar o que acabamos de afirmar. Para isto vamos repetir a última figura e dar nomes aos pontos.



Chamando PB de **a** e AB de **x**, temos por semelhança que MJ = $\frac{a}{2}$ e daí

NJ = $x - \frac{a}{2}$.

Seja JL a altura do triângulo JAN. Os triângulos AMN e JLN são semelhantes. Daí, concluímos que:

$$\frac{AN}{ND} = \frac{JN}{JL} \text{ (1)}$$

Por Pitágoras é fácil concluir que $AN = \frac{x\sqrt{5}}{2}$. Como os triângulos AMJ e AJL são congruentes, JL = MJ. Daí:

$$\frac{\frac{x\sqrt{2}}{5}}{\frac{x}{2}} = \frac{x - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \frac{ax\sqrt{5}}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4}$$

Simplificando (divisão por x e multiplicação por 4) temos:

$$a\sqrt{5} \;=\; 2x - a \;\Rightarrow\; \frac{x}{a} \;=\; \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Que é a nossa afirmação.

O segmento áureo aparece em muitas construções geométricas. Só para exemplificar citaremos duas.

1. O lado do pentágono regular é igual ao segmento áureo da diagonal do mesmo.

2. O lado do decágono regular é igual ao segmento áureo do raio do círculo circunscrito ao decágono.

3.1.4 Duplicação do Cubo

Nos passos seguintes, vamos nos ater a problemas que não possuem solução com régua e compasso em passos finitos. Esses problemas nos mostraram exemplos de outras famílias de números irracionais provenientes de equações de graus maior ou igual a três.

Antes de citarmos tais problemas deixemos claro o que é permitido fazer com régua e compasso. Devem-se seguir duas regras:

1 . Com régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados.

2 . Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo qualquer dado.

Devemos frisar que a régua não possuiu escala e que o compasso de Euclides é diferente do compasso moderno, já que o compasso de Euclides se desmonta quando uma de suas pontas sai do papel, ou seja, não podemos usá-lo para transportar um segmento (EVES, 2004, p.134). Esse aspecto nos faz pensar que o compasso de Euclides seja menos poderoso que o compasso moderno o que de fato não é verdade já que os dois instrumentos acabam por ser equivalentes.

Dos problemas propostos para a resolução através de régua e compasso três possuem uma importância maior:

1 . Trissecção do ângulo

2 . Duplicação do cubo

3 . Quadratura do círculo

Esses três problemas se tornaram famosos pelo fato de não possuírem solução para a construção com régua e compasso, fato este só descoberto no século XIX, ou seja, mais de 2000 anos depois dos problemas serem propostos. Mas o que os tornam mais importantes é o fato de terem inspirado, durante anos, desenvolvimentos da matemática e a criação de novas teorias como as secções cônicas, muitas curvas cônicas, números algébricos e teoria dos grupos.

Neste momento vamos mostrar a solução do problema de duplicação do cubo por meio do origami visto que nosso tópico são as construções de números.

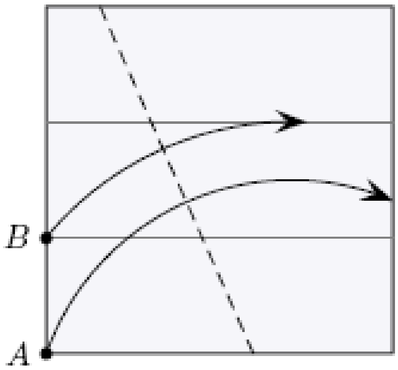
Duplicação do cubo:

O problema da duplicação do cubo, também é conhecido por problema Deliano, pois conta-se que certa vez na Grécia, os habitantes da Ilha de Delos perguntaram ao oráculo de Apolo o que deveriam fazer para se livrarem da peste que os assolavam e este teria respondido que o altar de Apolo, que possuía uma forma cúbica, devia ser duplicado.

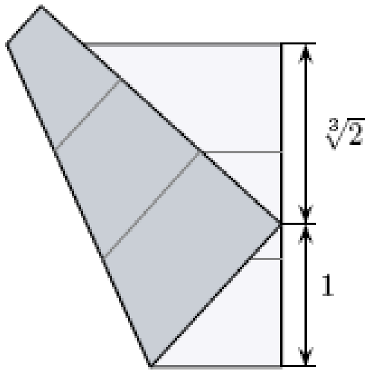
No entanto, acredita-se que antes deste fato, o problema já havia surgido quando o rei Minos, insatisfeito com o tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco, ordenou que o mesmo fosse dobrado. Dobraram então cada uma das dimensões do túmulo. Porém esse procedimento não dobra o volume do túmulo e a partir desta falha matemática, os geômetras abraçaram o problema de dobrar um sólido dado de modo a manter sua forma.

Este problema pode ser reduzido a obter dois segmentos de reta nos quais seus comprimentos estejam na relação 1 : $\sqrt[3]{2}$ (observe que aqui o número procurado é proveniente de uma equação de terceiro grau). De fato se tomarmos o cubo inicial de aresta a, $V_a = a^3$. Desejamos obter um segmento b tal que $V_b = b^3 = 2a^3$. Daí teremos que $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = 2$ e, portanto $\frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$.

Para construirmos a solução deste problema, teremos que inicialmente dividir a folha em três partes iguais. Para isso vamos usar o método já descrito anteriormente.



(1) Dobrar de forma que o ponto A fique sobre a borda direita, e o ponto B sobre a linha horizontal indicada.

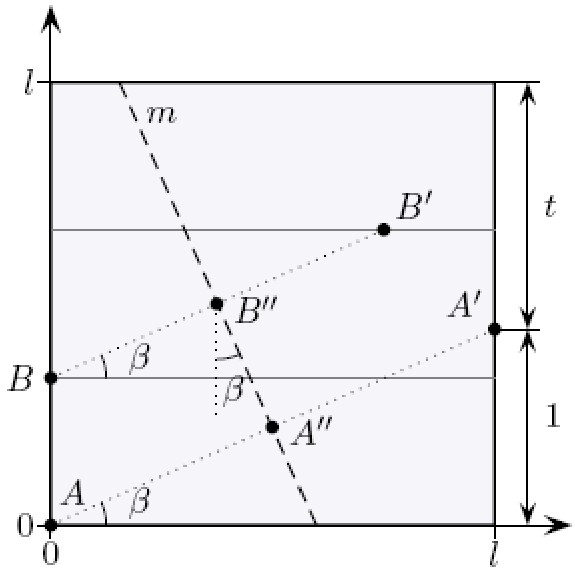


(2) Resultado final.

A facilidade em encontrar a relação de 1 : $\sqrt[3]{2}$ causa estranheza pois após dividirmos o quadrado em três partes iguais, foi necessário apenas uma simples dobra. A seguir vamos mostrar que de fato esta única dobra soluciona nosso problema.

Queremos mostrar que a dobra do passo (1) determina $\sqrt[3]{2}$ sobre a borda direita da folha. Para isso devemos colocar um par de eixos cartesianos *x* e *y*, com origem no canto inferior esquerdo da folha de papel, conforme podemos observar na figura abaixo (LUCERO, 2007, p.26).

Os pontos *A* e *B* são indicados no passo (1) anterior, e têm coordenadas $(x_A , y_A) = (0 , 0)$ e $(x_B , y_B) = (0 , l/3)$, respectivamente. Nesse mesmo passo, realizamos a dobra sobre a linha *m*, e os pontos *A* e *B* passam a ocupar as posições *A'* e *B'*, respectivamente, de coordenadas $(x_A' , y_A') = (l , 1)$ e $(x_B' , y_B') = (a , 2l/3)$, onde *a* designa a abscissa do ponto *B'*. Os pontos *A'*e *B''*, sobre a linha de dobrado, são os pontos médios dos segmentos *AA'* e *BB'*, respectivamente, e têm coordenadas $(x_A'' , y_A'') = (l/2 , 1/2)$ e $(x_B'' , y_B'') = (a/2 , l/2)$.



Por conhecimentos geométricos anteriores sabemos que os ângulos denominados por *β* com vértices *A*, *B* e *B''* são iguais e, portanto podemos achar a tangente do ângulo *β* em cada um dos casos. Teremos assim:

$$tg\,\beta = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} = \frac{1}{l} \qquad (1)$$

$$tg\,\beta = \frac{y_{B'} - y_B}{x_{B'} - x_B} = \frac{l/3}{a} \qquad (2)$$

$$tg\,\beta = \frac{x_{A''} - x_{B''}}{y_{A''} - y_{B''}} = \frac{l-a}{l-1} \qquad (3)$$

Igualando as equações (1) e (2) teremos

$$\frac{1}{l} = \frac{l}{3a} \Rightarrow a = \frac{l^2}{3}$$

Igualando agora (1) e (3)

$$\frac{1}{l} = \frac{l-a}{l-1}$$

Substituindo o valor de *a*, achado anteriormente, nesta equação e desenvolvendo-a, obteremos

$$l^3 - 3l^2 + 3l - 3 = 0$$

Que pode ser reescrita na forma

$$(l - 1)^3 - 2 = 0$$

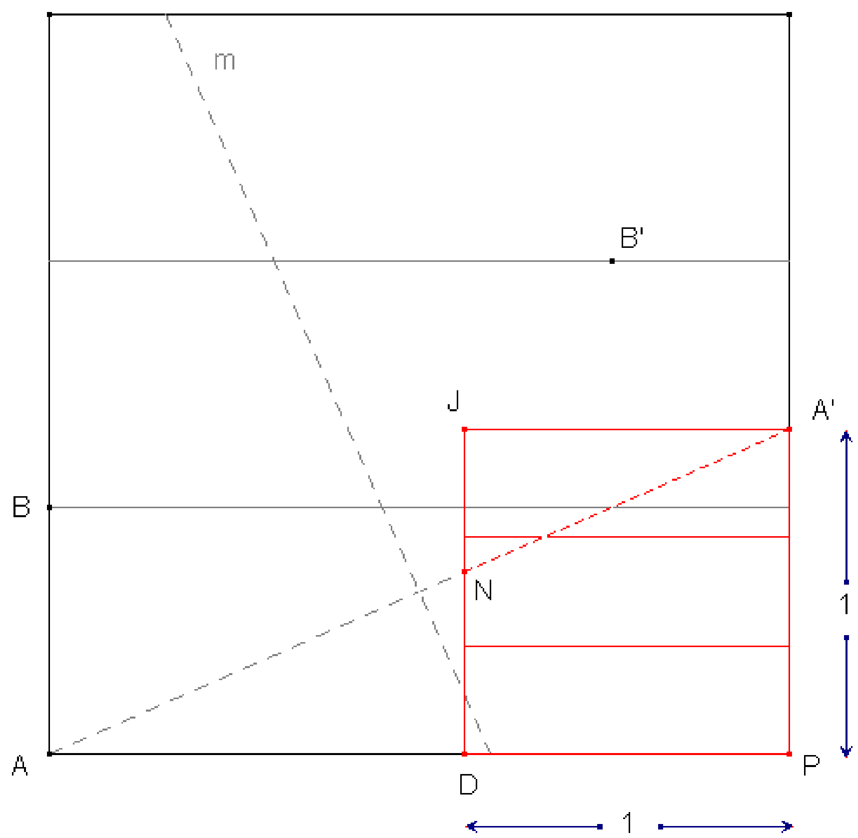
Por fim, substituindo $t = l - 1$, obtemos

$$t^3 - 2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2}$$

O que prova que a dobra do passo (7) de fato divide o lado do quadrado na razão 1: $\sqrt[3]{2}$.

Ainda assim surge um problema, pois dado um cubo de aresta 1, qual deve ser o caminho para obternos o quadrado acima?

Para isso devemos construir o quadrado *DPA'J*, conforme mostra a figura abaixo. É fácil observar que o *ΔJA'N* ~ *ΔAA'P*. Portanto basta repetir a construção acima para o quadrado *DPNJ* e prolongar o segmento $\overline{A'N}$ até a intercessão com o prolongamento de $\overline{PA}$ e assim determinar-se o lado *MP* do quadrado inicial. A obtenção do *ΔJA'N* é dada fazendo o processo, que acabamos de ver, onde obtivemos a razão 1: $\sqrt[3]{2}$. Sendo assim, N é o ponto que divide o lado $\overline{JD}$ na razão desejada.



Este processo vale para qualquer que seja a aresta do cubo inicial dado, sendo esta aresta o lado do quadrado menor (NOVAES e KUBRUSLY, 2009, p. 208).

De fato, com dobraduras de papel, é possível resolver qualquer equação cúbica do tipo ax3 + bx2 + cx + d =0 (LUCERO, 2007, p.27), ou seja, qualquer problema geométrico que possa ser reduzido a uma equação de terceiro grau tem solução através do origami (afirmação proveniente dos axiomas de Huzita-Hatori) o que já não ocorre quando usamos régua e compasso. Mais do que isso, não ficamos limitados a equações de terceiro grau que são obtidas com dobras simples mas se passarmos a utilizar dobras duplas (não utilizadas nos axiomas de Huzita-Hatori, Capitulo 2) ou triplas, o grau da equação que podemos resolver via origami aumenta. O número de possíveis alinhamentos e combinação de alinhamentos cresce de maneira explosiva com o número de dobras simultâneas (ALPERIN e LANG, 2006, p.9) e estudos já comprovam a resolução de equações de graus quatro, cinco, sete e oito.

Uma consequência direta desses estudos é a resolução de outro problema da geometria que é a quinsecção de um ângulo que resulta da resolução de uma equação de grau cinco e que portanto pode ser resolvida por origami (Anexo 2).

3.2. Ângulos:

Com conceitos e ideias diversas sobre seu significado, o ângulo pode ser trabalhado com a ideia de rotação, posição, medição, argumento de um número complexo entre outros. Tópicos como a construção de prédios, pavimentação, localização global são exemplos da importância de sua obtenção. Na matemática, a construção de polígonos regulares (onde todos os ângulos bem como os lados devem ser congruentes) mexeu com a mente de grandes matemáticos que buscavam a construção desses ângulos notáveis por régua e compasso. A construção dos ângulos como o de 90º (reto) e 60º e de seus múltiplos e submúltiplos permitem a obtenção de uma numerosa família de ângulos.

Com origami também conseguimos criar esses ângulos, seus múltiplos e submúltiplos. De fato, ao unir dois lados por um vértice comum estamos traçando a bissetriz do ângulo formado por esses lados nesse vértice. Percebemos que mais uma vez a régua e o compasso parecem se equivaler e não nos parece interessante mostrar a obtenção de todos esses ângulos por origami.

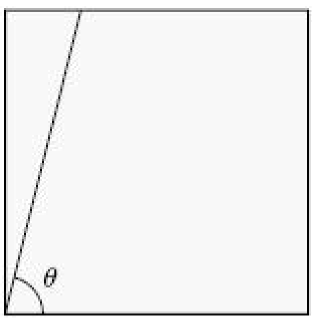
No entanto, vamos olhar outro problema clássico para vermos que isso não acontece. Estamos falando da trissecção do ângulo.

3.2.1. Trissecção do ângulo

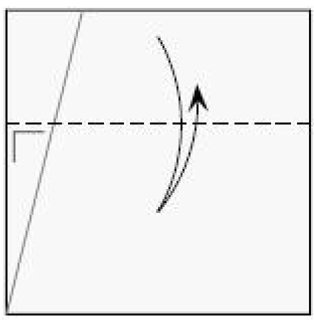
É o mais conhecido e intrigante dentre os três problemas por ser o de mais fácil compreensão e também pelo fato da bissecção de um ângulo ser tão trivial. Acredita-se que o problema tenha surgido quando na Grécia, tentavam a construção do eneágono regular, para a qual é necessário trisseccionar o ângulo de 60°. Sua resolução possibilitaria a construção de qualquer polígono regular.

Mostraremos aqui uma solução usando origami devido a Abe com diagramas de Lucero (LUCERO, 2007).

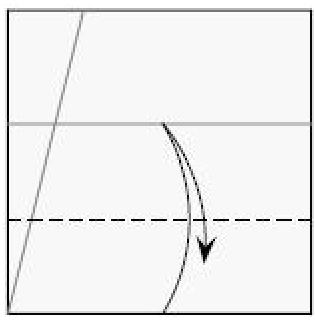
Partimos de uma folha quadrada de papel, de dimensão arbitrária. Consideramos aqui a trissecção de um ângulo agudo; contudo, o método pode ser estendido facilmente a ângulos obtusos. Isso se deve ao fato de podermos dividir o ângulo obtuso em dois ângulos agudos de mesma medida ao traçarmos sua bissetriz.



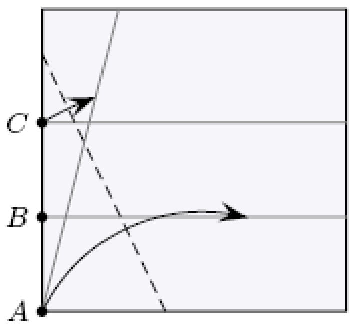
(1) Marcar o ângulo θ a ser trisseccionado.



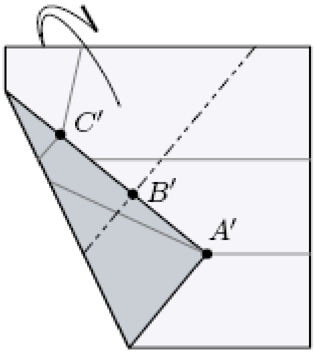
(2) Dobrar horizontalmente, em qualquer lugar da folha.



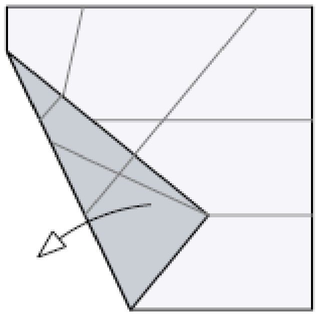
(3) Dobrar e abrir.



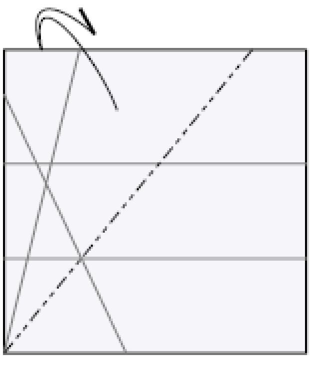
(4) Dobrar de forma que o ponto *A* fique sobre a linha horizontal indicada, e o ponto *C* sobre a linha oblíqua marcada no passo (1).



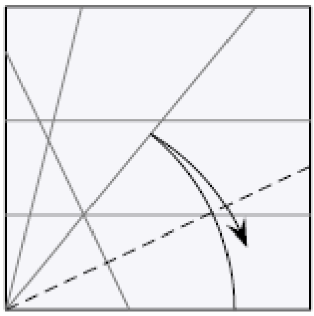
(5) Dobrar prolongando a linha que termina no ponto *B* (dobra feita no passo 3), e logo abrir.



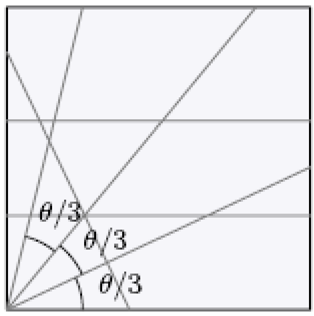
(6) Abrir.



(7) Dobrar prolongando a dobra feita no passo (5). Note que a dobra deve terminar no vértice inferior esquerdo.



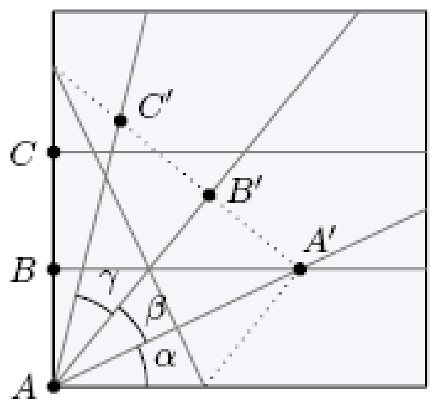
(8) Dobrar e abrir.



(9) Resultado final.

Faremos agora a demonstração que este processo, de fato, divide o ângulo θ em três partes iguais. É interessante observarmos que quando fazemos dobras no papel, na maioria das vezes, estamos traçando bissetrizes, mediatrizes e retas perpendiculares além também de transportarmos pontos e medidas. Poderemos observar melhor algumas dessas características na demonstração que segue.

Abaixo reproduzimos o resultado final, junto com a dobradura do passo (4).



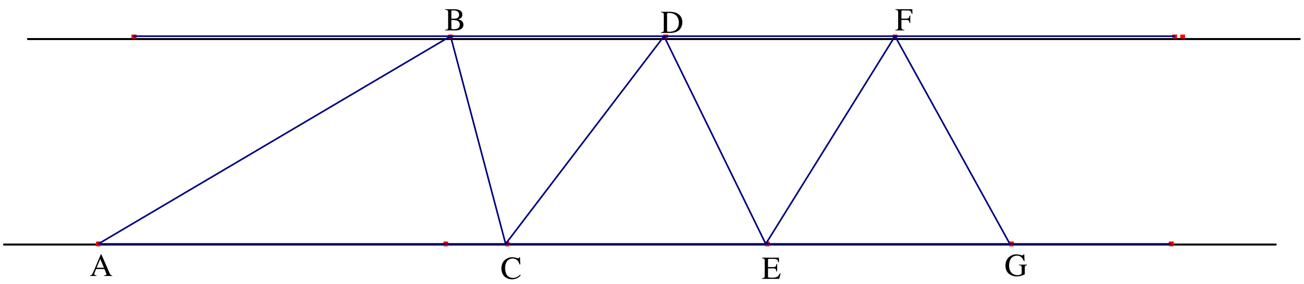
Queremos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma$. Pelo passo (8), sabemos que $\alpha = \beta$. Analisemos agora os triângulos *AA'B'* e *AB'C'*. Pelo passo (3), *AB* = *BC* e, portanto *A'B'* = *B'C'*. Pelo passo (5), o segmento *AB'* é perpendicular ao *A'C'*. Estes fatos nos permitem concluir que os triângulos *AA'B'* e *AB'C'* são iguais, e consequentemente, que $\beta = \gamma$.

A família de ângulos que podemos construir com origami aumenta exponencialmente se pensarmos nos múltiplos e submúltiplos que podemos obter com esse processo de trissecção e ainda mais se lembrarmos do processo de quintesecção (Anexo 2) citado anteriormente.

3.2.2. Método Iterativo para obtenção do ângulo de 60º

Um processo muito utilizado no calculo numérico/computacional são os métodos iterativos para a obtenção dos resultados procurados. Esses métodos aparecem em diversas área da matemática e trabalham com a ideia de infinito, um processo que repetido infinitas vezes chega ao resultado desejado. Com o origami também podemos desenvolver esses tipos de processos (apesar de não chegarmos ao resultado final) podemos obter uma boa aproximação. Vejamos o exemplo de como se obter um triangulo equilátero (ou um ângulo de 60º) por um método iterativo:

A figura abaixo representa duas retas paralelas. Tome uma tira de papel de lados paralelos e faça nela um dobra qualquer. Assim você obtém o segmento de reta AB. Dobre pela bissetriz do ângulo $\hat{B}$ e obtenha o segmento BC. Continue este procedimento até obter o segmento FG.



Devemos constatar se com esse processo:

1) O triângulo ABC e eqüilátero?

2) E o triângulo EFG? Você apostaria que não?

Vamos provar que esta sequência de triângulos converge para um triângulo equilátero.

Seja α_0 a medida do ângulo $B\hat{A}C$ e α_1 a medida do ângulo $A\hat{B}C$ então temos:

$$\alpha_1 = \frac{\pi - \alpha_0}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_0}{2}$$

Chame de α_2 a medida do ângulo $B\hat{C}D$, então:

$$\alpha_2 = \frac{\pi - \alpha_1}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi - \alpha_o}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_0}{4}$$

Continuando assim, obtemos:

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2^n}{}_1 + (-1)\frac{\alpha_0}{2^n}$$

A última igualdade é a série geométrica de razão um meio e primeiro termo $\frac{\pi}{2}$ logo temos que $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \frac{\pi}{3}$.

CONCLUSÃO

A matemática, principalmente a matemática pura, está fadada a ter sua importância contestada em decorrência de sua alta abstração e por se desenvolver, através de sistemas lógicos, independente das necessidades práticas. Essa característica, atrelada ao senso comum de que matemática se resume a fazer contas faz com que esta ciência seja subavaliada por uma imensa maioria, o que não deveria acontecer, já que a matemática pode servir de modelo para cada relação da natureza, nas artes e em tudo que vivemos.

Quando imaginaríamos que um simples ato de dobrar papel, presente no cotidiano humano trouxesse consigo tantos padrões, regras e curiosidades matemáticas? Quando imaginaríamos que uma arte saturada poderia se reinventar, milhares de anos depois com um simples auxilio da matemática?

Nesse trabalho vimos que a matemática transcende do conceito de medida e cálculo. Que sua estruturação lógica permite a resolução de problemas, por vezes ainda inexistentes, mas que já estão respondidos para quando os mesmos apareçam. É o lado mágico de uma ciência dura que por trás de seus conteúdos pesados esconde a beleza de suas consequências.

As artes, no caso desse trabalho o origami, apresenta-se como uma ferramenta forte, tanto no uso da matemática (resolvendo problemas reduzíveis a equações de graus dois, três, quatro, cinco, sete ou oito) como forma alternativa no desenvolvimento de tecnologias espaciais, médicas ou mecânicas. Um campo que ainda pode e vai ser muito explorado e estudado nas mais diversificadas áreas.

A mistura de arte, ciência e história ficou clara nos últimos capítulos e nos faz perceber quão importante é divagarmos por caminhos e matérias diversificadas, fazer e descobrir relações entre objetos e conteúdos que a um primeiro olhar parecem tão desconexos. Acreditamos que assim podemos não apenas enriquecer nosso conhecimento, mas também aprender como funciona o mundo que vivemos (objetivo esse, que rege a humanidade).

Esse entendimento tem que ser passado aos jovens, alunos. A história não deve ser apenas uma matéria para ser decorada sem objetivos, a história serve para que o Homem entenda como funciona o mundo que vive. Então, se conseguirmos juntar essa idéia, de entender o mundo por meio da história, relacionando as ciências como matemática, química, física e outras, nossos alunos poderão entender como essas ciências se desenvolveram, com que objetivo e o ensino passará a ter uma finalidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALPERIN, R. C. **A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers**, New York Journal of Mathematics, p.119 – 133, 2000.

ALPERIN, R. C. e LANG, R. J. **One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms**, 2006. Disponível em <www.math.sjsu.edu/~alperin/alperinlang.pdf>. Acessado em 20/04/2009.

BLACKMORE, S. **Transcript of Memes and "Temes".** Disponível em <http://www.ted.com/talks/susan_blackmore_on_memes_and_temes.html> Acessado em 18/09/2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Editora Edgar Blücher Ltda., São Paulo, 1996. Traduzido por Elza F. Gomide do original em inglês: A History of Mathematics, John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1991.

BRANCAGLION JR., A. - **A Metalinguagem das Roupas** , Revista Eletrônica do Coletivo Estudo da Estética, Artigo 3, 2009.

DAVID, P. J. e HERSH, R. **A experiência matemática**, tradução de João Bosco Pitombeira, Rio de Janeiro: F.Alves, 1985

EUCLIDES: **Elementos de Geometria I e II,** Versão Juan David Garcia Bacca, Universidade Nacional Autônoma do México, 1944

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Traduzido por Hygino H. Domingues, Editora da Unicamp, Campinas, SP, 2004.

FREUDENTHAL,H. **Hilbert, David** constando do Dicionário de Bibliografia Científicas, Vol II, organizador Charles Coulston Gillispie; tradução Carlos Almeida Pereira, Rio de Janeiro, Contraponto, 2007.

FUSE, T. **United Origami: multidimensional transformations**. Editora Kodansha American, 1990

HATORI, K. **History of origami**, 2002. Disponível em <http://origami.ousaan.com/library/historye.html> Acessado em 10/06/2010.

HIROTA, J. **Kit d`initiation à l`origami**, Group Fleurus, Paris, 2006.

IMAMURA, P. e KANEGAE, M. **Origami, arte e técnica da dobradura de papel**, Palas Atena, 1988.

JUSTIN, J. **Resolution par le pliage de l'équation du troisième degree et applications géométriques**, 1997.

KASAHARA, K. **Origami Omnibus, paper folding for everybody**, Japan Publications, Inc., Tokyo, 1988.

KASAHARA, K. **The art and Wonder of Origami**, Quarry Books, 2004.

KAWASAKI, T. **Roses, Origami & Math**, Traduzido para o inglês por Kazuhiko Nagai, Japan Publications Trading Co., Ltd. 2005.

LANG, R. J. **Origami and geometric constructions**, 2004. Disponível em <www.lang**origami**.com/science/hha/**origami_constructions**.pdf>. Acessado em 20/04/2009.

LANG, R. J. **Origami design secrets: mathematical methods for an ancient art**, A K Peters, Ltd., 2003

LANG, R. J. **Origami: Complexity in creases (again)**. Engineering and Science, LXVII(1): p.8–19, 2004.

LANG, R. J. **Transcript of Robert Lang folds way-new origami**, 2008. Disponível em <http://www.ted.com/talk/robert_lang_folds_way_new_origami.html>. Acessado em 18/09/2010.

LISTER, D. **Friedrich Froebel,** 2004. Disponível em <http://www.britishorigami.info/academic/lister/froebel.php> Acessado em 015/06/2010.

LISTER, D. **The history of paperfolding: a German perspective** , 2004 . Disponível em <http://www.britishorigami.info/academic/lister/german.php> Acessado em 21/08/2010.

LISTER, D. **What is origami?**, 2003. Disponível em <http://www.britishorigami.info/academic/lister/what_is_ori.php> Acessado em 08/06/2010.

LUCERO, J. C. **O Problema Deliano**, Revista do Professor de Matemática 62. p.25-27, 2007.

MIURA, K. **A Note on Intrinsic Geometry of Origami**, Research of Pattern Formation, editado por R. Takaki, p. 91 – 102, 1993.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço**, Tradução de Enézio E. de Almeida Filho do original em inglês: Euclid´s Window – The Story of Geometry from Paralled Lines to Hyperspace, São Paulo, Geração Editorial, 2004.

NOVAES, A. e KUBRUSLY, R. **Trissecção do ângulo e duplicação do cubo por dobradura**, Anais do Congresso Scientiarum Historia II: Encontro Luso-Brasileiro de História da Ciência: 28 a 30 de outubro de 2009, Rio de Janeiro, Brasil, 2009.

NOVAES, J. A. **Números e Geometria com dobradura de papel**. Boletim GEPEM N°49, Rio de Janeiro, p.109-122, 2006.

PELEGRINO, S. e VINCENT, J. F. V. **How to fold a membrane**, Disponível em <www.bath.ac.uk/mech-eng/biomimetics/**Fold**Membrane.PDF>. Acessado em 21/04/2009.

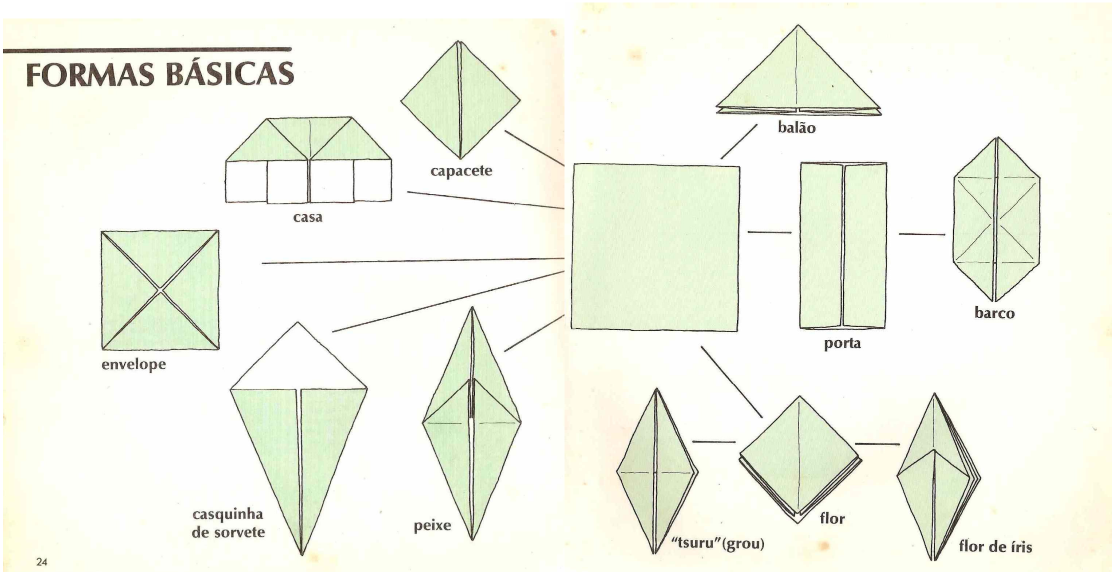
SMITH, J. **Notes on the history of origami**, Terceira edição, 2005. Disponivel em <http://homepage.ntlworld.com/peterjohn.rootham-smith/history.htm>. Acessado em 18/06/2010.

WU, J. **What is origami?**, 2002. Disponível em <http://www.origami.as/home.html>. Acessado em 08/06/2010.

ANEXO I

Com diagramas retirados de IMAMURA, P. e KANEGAE, 1988, apresentamos abaixo as bases clássicas do origami, ponto de partida para milhares de modelos:

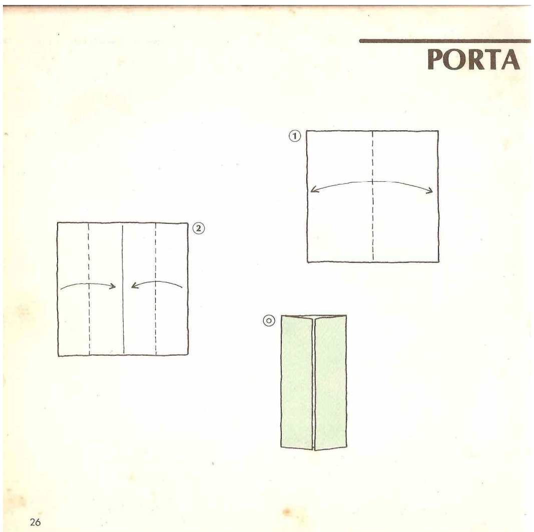
- A partir de um papel quadrado as bases clássicas do origami são as seguintes:

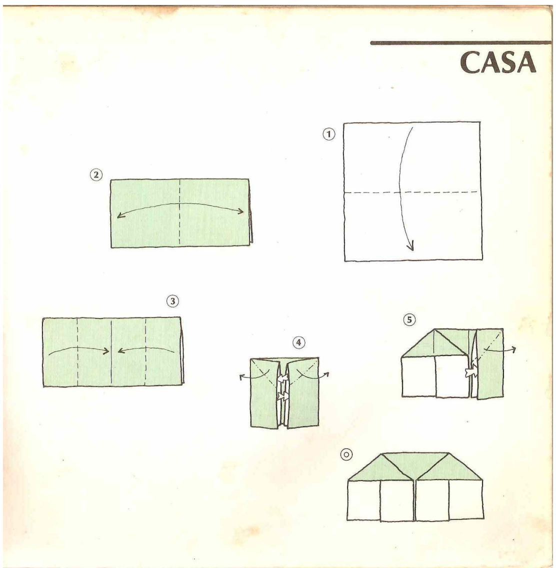


Vamos mostrar a diagramação dessas bases:

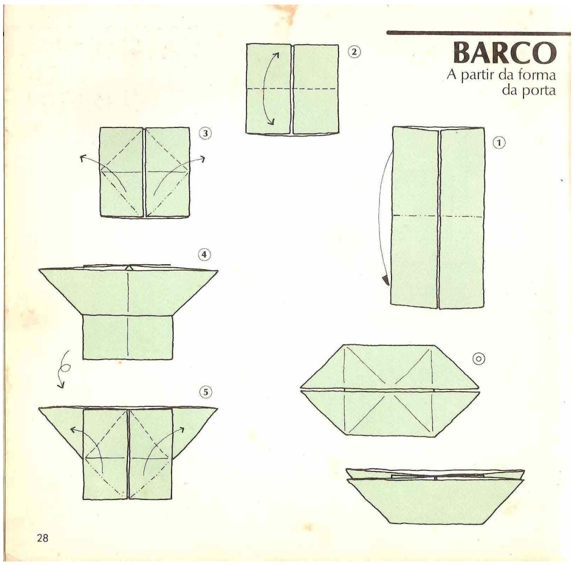
1) Base da Porta

2) Base da Casa



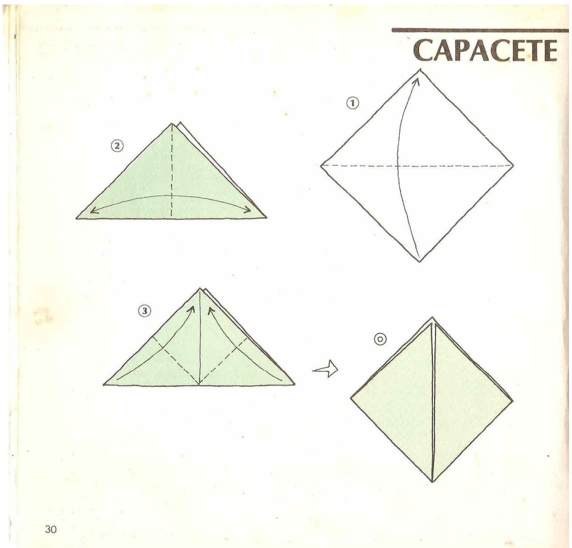


3) Base do Barco

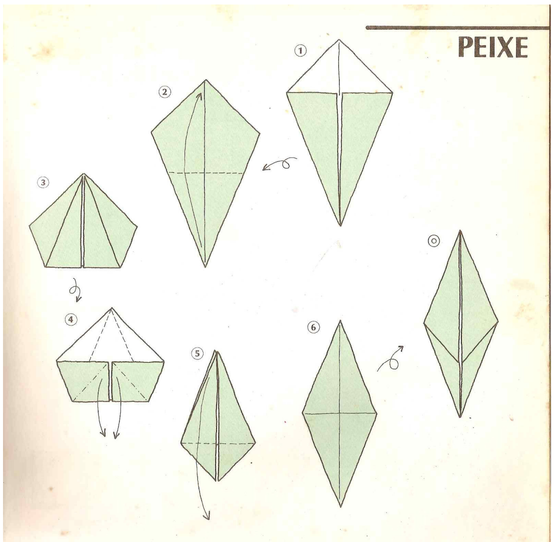


4) Base da Casquinha de Sorvete

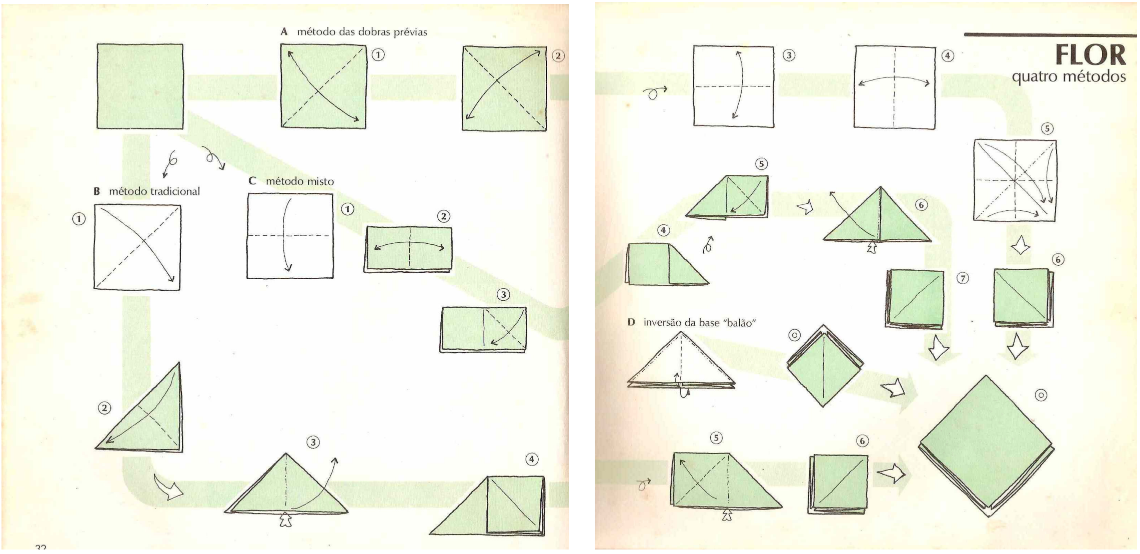
5) Base do Capacete



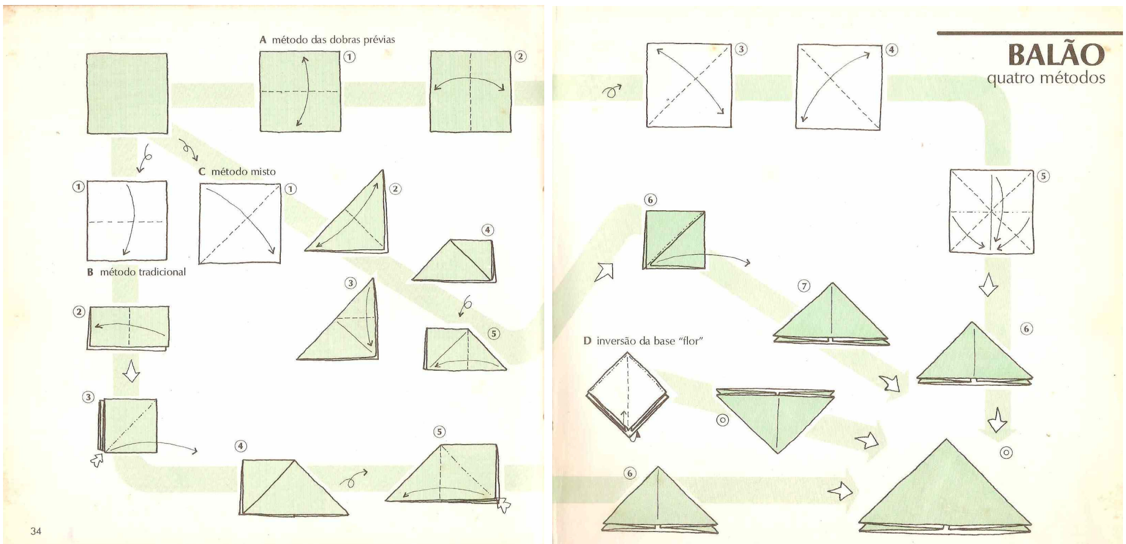
6) Base do Peixe



7)Base da Flor



8) Base do Balão



Se observarmos os diagramas das bases 7 e 8, podemos entender a complexidade de se criar um origami mesmo possuindo suas linhas de dobra, como vimos no capítulo 2, visto que essas duas bases apresentam pelo menos quatro maneiras diferentes de serem obtidas.

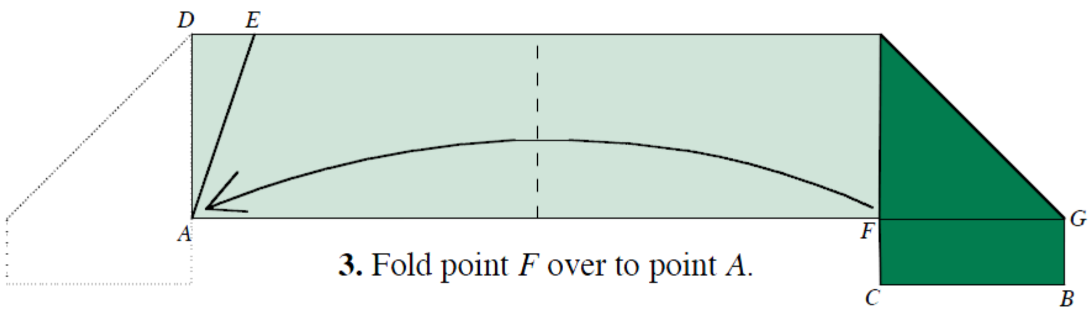
ANEXO II

A Quintesecção de um Ângulo, por Robert J. Lang

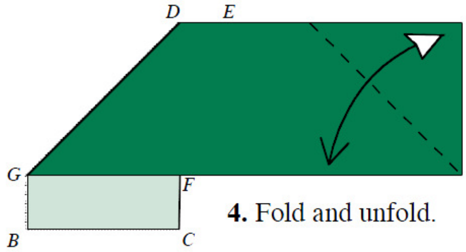
O esquema para a divisão de um ângulo em cinco partes iguais apresentada aqui é de autoria do matemático, engenheiro e origamista Robert J. Lang e apresenta passos que não estão relacionados nos sete axiomas de Huzita-Hatori já que não contém apenas dobras simples, condição sobre a qual esses axiomas tratam.

1. Start with a long strip 1 unit high and 5–6 units long. Angle EAB is the angle to be quintisected. Make a vertical crease about 1/3 unit from the right side.

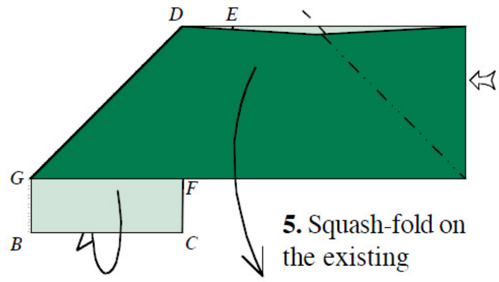
2. Fold line *FG* down to lie along edge *AB*.



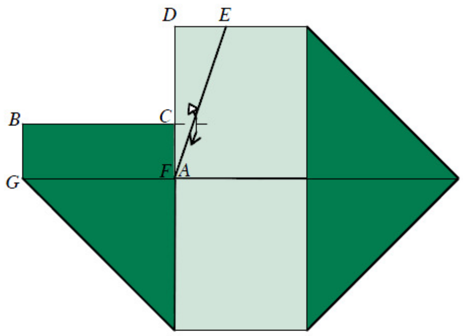
3. Fold point *F* over to point *A*.



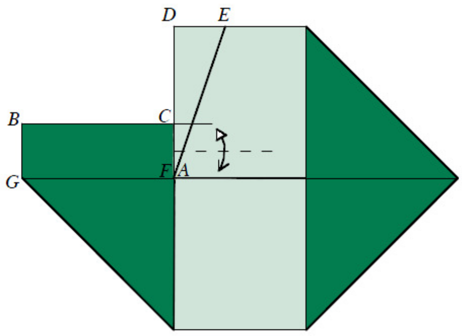
4. Fold and unfold.



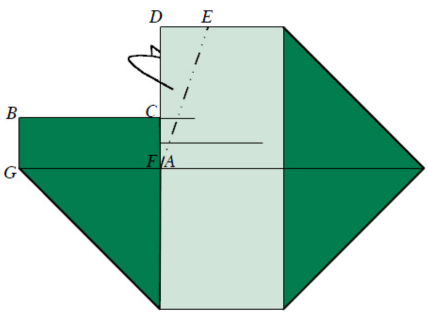
5. Squash-fold on the existing creases.



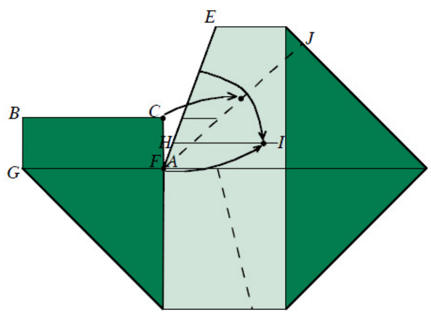
5. Make a horizontal fold aligned with point C.



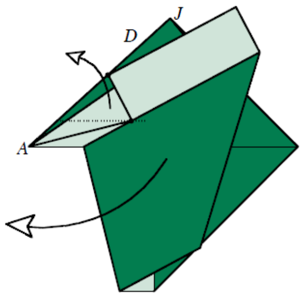
6. Fold point C to point A and unfold, making a second longer horizontal crease.



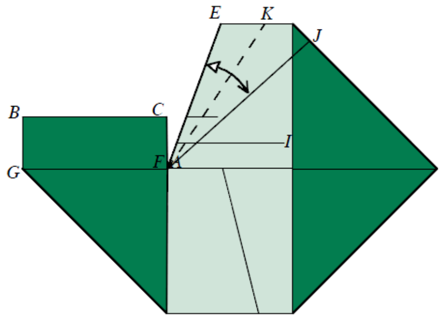
7. Mountain-fold corner D behind.



7. Here's where it all happens. Fold edge AE down along crease AJ. At the same time, fold the left flap up so that point F touches crease HI at the same point that edge AE does and point C touches crease AJ. You will have to adjust both folds to make all the alignments happen at once.



8. Here's what it looks like folded. Yours may not look exactly like this, depending on the angle you used and the length of your strip. Unfold to step 7.



9. Bisect angle EAJ.