UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO – UFRJ

ANA PAULA GONÇALVES

PERGUNTAS E HISTÓRIAS SOBRE O INFINITO MATEMÁTICO: O QUE OS ESTUDANTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA DESEJAM SABER ACERCA DA HISTÓRIA CULTURAL DO INFINITO?

RIO DE JANEIRO

2019

Ana Paula Gonçalves

PERGUNTAS E HISTÓRIAS SOBRE O INFINITO MATEMÁTICO: O QUE OS ESTUDANTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA DESEJAM SABER ACERCA DA HISTÓRIA CULTURAL DO INFINITO?

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Silva Kubrusly

RIO DE JANEIRO

2019

CIP - Catalogação na Publicação

GG635p

Gonçalves, Ana Paula
PERGUNTAS E HISTÓRIAS SOBRE O INFINITO MATEMÁTICO: O QUE OS ESTUDANTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA DESEJAM SABER ACERCA DA HISTÓRIA CULTURAL DO INFINITO? / Ana Paula Gonçalves. -- Rio de Janeiro, 2019.
125 f.

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Decania do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2019.

1. Infinito Matemático. 2. História Cultural do Infinito. 3. Educação Básica. 4. História da Matemática. 5. Infinito Matemático. I. Kubrusly, Ricardo Silva, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

ANA PAULA GONÇALVES

PERGUNTAS E HISTÓRIAS SOBRE O INFINITO MATEMÁTICO:

O QUE OS ESTUDANTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA DESEJAM SABER ACERCA DA HISTÓRIA CULTURAL DO INFINITO?

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Aprovada em: 11 de dezembro de 2019

Prof. Dr. Ricardo Silva Kubrusly
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof[a]. Dr[a]. Isabel Leite Cafezeiro
Universidade Federal Fluminense

Prof[a]. Dr[a]. Ana Paula Damato Bemfeito
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia

Ata de Defesa de Dissertação para obtenção do grau de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

No dia 11 de dezembro de 2019, às 14h, a aluna de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, **Ana Paula Gonçalves**, DRE 117071607, orientada pelo Prof. Ricardo Silva Kubrusly, apresentou-se no Anfiteatro Profª. Maria Irene Melo - NCE/CCMN, perante a banca integrada pelos professores Ricardo Silva Kubrusly (HCTE/UFRJ), Isabel Leite Cafezeiro (UFF-HCTE/UFRJ) e Ana Paula Damato Bemfeito (IFRJ). A aluna iniciou a apresentação de sua dissertação intitulada **"Perguntas e histórias sobre o Infinito Matemático: O que os estudantes da educação básica desejam saber acerca da História Cultural do Infinito?"**, às 14:05.

Palavras-chave: História Cultural do Infinito ; Educação básica ; História da Matemática ; Infinito matemático.

A apresentação teve duração de 35 minutos. A seguir, a candidata foi arguida pela banca examinadora durante 70 minutos. Terminada a arguição, a banca examinadora reuniu-se e considerou a candidata:

(X) Aprovado(a)   ( ) Reprovado(a)   ( ) Aprovado(a) com restrição

Observações:____

Para constar, eu, **Ricardo Silva Kubrusly**, lavrei a presente ata que vai por mim assinada, bem como pelos outros membros da banca examinadora e pelo candidato.

Em, 11 de dezembro de 2019

NOME	INSTITUIÇÃO	ASSINATURA
Ricardo Silva Kubrusly	HCTE/UFRJ CPF: 403.321.367-87	RSK
Isabel Leite Cafezeiro	UFF - HCTE/UFRJ CPF: 000.926.387-08	Isabel Ca
Ana Paula Damato Bemfeito	IFRJ CPF: 883.044.777-34	[illegible]
Ana Paula Gonçalves	CPF: 055.039.727-24	Ana Paula Gonçalves

Dedicatória

Aos meus filhos Samira, Samuel e Sara,

donos das melhores infinitas perguntas.

Agradecimentos

A Deus, por estar sempre na frente de tudo e manter minha fé inabalável.

Aos meus pais, João (in memorian) e Maria, meus provedores, que me apresentaram à história oral e ao saber ancestral, desde sempre.

Ao meu marido Diogo Mauro, meu maior parceiro, meu amigo de todas horas, meu ouvinte, meu cúmplice nos maiores projetos dessa vida.

Ao meu irmão André, a criança que me apresentou à episteme do cuidar.

À CAPES, por subsidiar meus estudos durante dois longos anos.

À Universidade Federal do Rio de Janeiro, em especial aos professores do programa de História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia, por me acolherem com sensibilidade.

Ao meu orientador, Ricardo Silva Kubrusly, pelo incentivo na busca da autonomia de pensamento e de escrita, e por me apresentar ao infinito com poesia.

Aos membros da banca examinadora Ana Paula Damato Bemfeito e Isabel Leite Cafezeiro, pelas colaborações firmes e cuidadosas com o meu texto.

A todos os meus professores, em especial à Lucia Maria Aversa Vilella, a culpada de tudo. Por ela, eu escolhi o caminho da Matemática. Ao professor Jorge Saroldi, que me fez acreditar ser possível estar aqui, me desafiando sempre.

Aos meus orientadores da graduação, professores Jorge Petrúcio Viana, Maria Antonieta Pirrone Tavares e Ana Maria Martensen Rolland Kaleff, por me apresentarem os primeiros passos no caminho da pesquisa acadêmica e da docência.

Aos meus primos e tios da Família Flor dos Santos e Gonçalves, que são a minha base e o meu espelho.

Aos meus alunos e ex-alunos que nortearam minha pesquisa com as perguntas mais intrigantes sobre Infinito.

Aos meus colegas professores e pós-graduandos, das mais diversas áreas, que estão sempre dispostos a ouvir e colaborar com as minhas inquietações e às equipes

pedagógicas dos colégios onde trabalhei e hoje trabalho, que foram incansáveis em viabilizar condições para que meus estudos acontecessem com a melhor qualidade possível.

À Coletiva de Bruxas das Ciências HCTEanas, pela torcida de sempre, e pela audiência no dia da defesa. Vocês são o meu fôlego e minha inspiração!

EPÍGRAFE

"Dentro de si mesmo
mesmo que lá fora
fora de si mesmo
mesmo que distante
e assim por diante
de si mesmo, ad infinitum

tudo de si mesmo
mesmo que pra nada
nada pra si mesmo
mesmo porque tudo
sempre acaba sendo
o que era de se esperar."

Meditação – Gilberto Gil

RESUMO

GONÇALVES, Ana Paula. Perguntas e Histórias sobre o Infinito Matemático: o que os estudantes da educação básica desejam saber acerca da História Cultural do Infinito?. Rio de Janeiro, 2019. Dissertação (Mestrado em História das Ciências das Técnicas e Epistemologia), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

O presente trabalho tem por objetivo apresentar, a partir de questionamentos realizados por estudantes da Educação Básica acerca de conceitos relacionados ao infinito matemático, caminhos epistemológicos para o trabalho com a História Cultural do Infinito na sala de aula. Através dessas cenas cotidianas, e das inquietações provocadas por essas perguntas, pretende-se traçar um panorama da História da Matemática relacionada ao conceito do infinito, através da contação de histórias, narrativa essa que facilita o diálogo com os estudantes, e instiga a imaginação e a criatividade. Deseja-se apresentar os resultados do levantamento de dados sobre o que os estudantes entendem como conceito de infinito, assim como as suas opiniões sobre o ensino de História de Matemática e seus interesses em estudar com e sobre essa história. Também deseja-se apresentar resultados de conversas com professores, tanto da Educação Básica quanto da Educação Superior, a respeito de suas opiniões sobre a pertinência ou não da discussão do conceito de Infinito na Educação Básica, e suas relações com os cursos da Educação Superior. Serão apresentadas também as atividades realizadas nos momentos em que as perguntas provocadoras das reflexões sobre infinito aconteceram, e ações que podem ser realizadas a partir das opiniões tabuladas nesse estudo, modificando, inclusive, essas práticas de sala de aula.

Palavras-chave: História Cultural do Infinito . Educação Básica . História da Matemática. Infinito Matemático

ABSTRACT

GONÇALVES, Ana Paula. Questions and Stories about Mathematical Infinity: What do Basic Education students want to know about the Cultural History of Infinity?. Rio de Janeiro, 2019. Dissertation. (Master in História das Ciências das Técnicas e Epistemologia), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

From questions made by students of Basic Education about concepts related to mathematical infinity, the present work aims to show epistemological paths to work with the Cultural History of Mathematics associated to the concept of infinity, through storytelling, a narrative that facilitates dialoguing with students, and instigates imagination and understanding the creativity. It is desired to present the results of the survey about what students understand as the concept of infinity, as well as their opinions about the teaching of history of mathematics and their interests in studying with and about this history.

It is also intended to present results of conversations with teachers from both Basic and Higher Education about their opinions related to the relevance or irrelevance of the discussion of the concept of infinity in Basic Education. This dissertation also presents the activities performed when the questions provoking the reflections on infinity happened, and actions that can be performed from the opinions tabulated in this study, including modifying these classroom practices.

Keyboards: Infinity Cultural History. Basic Education. Math History. Mathematical Infinity.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

APM – Associação de Professores de Matemática (Portugal)

BNCC – Base Nacional Curricular Comum

CAP-UFRJ – Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática

GNE – Geometrias Não Euclidianas

HCTE – Programa de História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia

ICM – International Congress of Mathematicians

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada

LEG-UFF – Laboratório de Ensino de Geometria da UFF

OBMEP – Olimpíada brasileira de Matemática das escolas públicas

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

RPM – Revista do Professor de Matemática

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

UERJ – Universidade Estadual do Rio de Janeiro

UFF – Universidade Federal Fluminense

UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRRJ – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

PREÂMBULO 15

INTRODUÇÃO...18

APRESENTAÇÃO 22

CAPÍTULO 1 – DA METODOLOGIA DA PESQUISA 24

CAPÍTULO 2 – DAS PERGUNTAS QUE OS ALUNOS FAZEM E SOBRE O QUE IMAGINAM SER HISTÓRIA CULTURAL DO INFINITO 27

2.1 - "*O infinito existe mesmo, professora?"* – Infinito Potencial x Infinito Atual 29

2.2 - *"Uma pirâmide pode virar um cone, caso aumentemos infinitamente o número de lados de sua base?* "– Arquimedes, Eudoxo e os seus métodos de exaustão 31

2.3 – **"***Por que essa soma de frações não acaba nunca?"* - Séries convergentes, Paradoxo de Zenão e o Olho de Horus e o Homem que viu o infinito 35

2.4 - *"A diagonal do quadrado existe? Como pode um segmento de reta, que tem início e fim, ser representado por um número de infinitas casas?"* O surgimento e a incomensurabilidade dos números irracionais...39

2.5 - *"Se a reta é infinita e a Terra é redonda, então na verdade a reta não é uma reta, é uma circunferência?"* – Geometria Euclidana x Geometrias Não-euclidianas ... 42

2.6 - *"Como o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números reais se o conjunto dos números naturais é infinito?" Há infinitos maiores que outros?"* – O infinito dos números racionais x o infinito dos números reais 45

2.7 - *"Se o π representa o comprimento de uma circunferência dividido pelo seu diâmetro, ou seja, é uma razão e por isso é racional, por que é representado por um número de infinitas casas e sem período?"* Números Racionais x Números Irracionais 47

2.8 – *"Ao construírmos uma pipa teatrédrica (máquina voadora de Grahan Bell), sempre teremos uma nova face triangular que é formada por subdivisões de triângulos, com dobro da quantidade de triângulos da anterior. Até quantas vezes é possível subdividir esse triângulo dessa forma? "*- Triângulo de Sierpinski, poeira de Cantor e Geometria Fractal 49

2.9 - *“Se uma soma é um resultado exato de parcelas, como é possível calcular uma soma de infinitos termos de uma sequência numérica?”* – Soma de uma progressão com infinitos termos 54

2.10 *– 0,99999999... é infinito e 1 é finito. Por que 0,9999999... é igual a 1*? Números Irracionais e Dízimas Periódicas 56

CAPÍTULO 3 – DAS RESPOSTAS A ESSAS PERGUNTAS E O QUE OS PROFESSORES PENSAM SOBRE O CONCEITO DE INFINITO...................57

3.1 – Tabulação dos dados questionários submetidos aos professores da Educação Básica 58

3.2 - Conversas com professores que preparam professores....................................59

3.3 – Resultados e Análise...79

3.4 – Tabulação – Respostas dos Alunos ao questionário sobre História Cultural do Infinito 81

3.4.1– Das perguntas com respostas fechadas 81

3.4.2 – Das perguntas com respostas abertas 82

CAPÍTULO 4 – DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O CONCEITO DE HISTÓRIA CULTURAL DO INFINITO 91

4.1 – História Cultural do Infinito? 91

4.2 – As diversas definições de História Cultural do Infinito oferecidas pelos professores 95

CAPÍTULO 5 – DA HISTÓRIA À CONTAÇÃO DE HISTÓRIAS – POTENCIALIDADES E DIFICULDADES 96

CAPÍTULO 6 – DA BNCC E O ESTUDO DE INFINITO MATEMÁTICO NA EDUCAÇÃO BÁSICA – BREVE ANÁLISE 101

CONSIDERAÇÕES FINAIS 104

REFERÊNCIAS 107

APÊNDICE...117

PREÂMBULO

Escrever uma dissertação sobre Infinito Matemático, baseada nas perguntas que os alunos já me fizeram, foi uma ideia que tomou forma aos poucos. Na verdade, eu queria escrever sobre infinito o tempo inteiro. E a ideia das perguntas como sustentação da escrita surgiu a partir da poesia. Observando textos de poesias onde a ideia de eternidade, de para sempre, de sem fim existem, eu ficava associando aos conceitos de conjuntos enumeráveis. Eu me fazia perguntas do tipo: "Será que aqui Manoel de Barros percebeu que o conjunto dos naturais é enumerável?" ou ainda "Nesse trecho, Fernando Pessoa, despretensiosamente ou não, está falando da ideia de número irracional?" ou ainda "Poesia concreta mostra muito sobre infinito, principalmente na forma. Leminski é bom nisso."

Confesso a vocês que recebi duras críticas dos meus amigos das Letras. Um deles me disse que eu estaria "endurecendo a escrita poética" e que isso é praticamente uma heresia literária. Fiquei tensa. Jamais gostaria de fazer isso. No caso, é um caminho inverso. Eu gostaria mesmo é de "poetar" a Matemática, promover uma aliança entre os números e as letras, mostrar que a Matemática é linguagem na essência, e essa linguagem é uma alcança com a linguagem poética. Para isso, por onde eu deveria começar?

Dentre muitas coisas que eu já fiz na vida, uma das que eu mais gostei foi um curso de contação de histórias. Isso já tem tempo, mas eu percebi que o potencial da narrativa atrai as pessoas, e que, partindo daí, podemos "dar o tom" do discurso, seja por um gesto, seja por uma expressão mais apurada ou uma entonação mais exagerada. Imaginei o que eu poderia aproveitar do curso de contação de histórias nas minhas aulas. E, até hoje, quando é possível contextualizar um conteúdo novo, sempre tem uma história para chamar para a discussão do assunto.

A partir dessas propostas, a escrita sobre o infinito presente nas perguntas dos alunos, a poesia e da contação de histórias, decidi delinear o meu projeto de pesquisa no HCTE: responder (ou provocar outras) perguntas sobre infinito, feitas pelos alunos, usando contação de histórias e trechos de poesias para contar a história da Matemática. Um "balaio de gatos"? Uma "triangulação de métodos"? Não sei. Só sei que, estando eu em um curso tão plural como o HCTE, onde vivo em contato com pessoas tão preciosas, de áreas tão diversas, seria um desperdício não sorver das fontes que me são oferecidas ao longo desses 4 anos, – 2 como ouvinte, 2 como mestranda-bolsista – e tentar uma proposta transdisciplinar para a discussão do Infinito Matemático na Educação Básica.

Antes das perguntas dos alunos, eu mesma me fiz algumas perguntas:

- Por que é importante falar sobre infinito para os alunos da Educação Básica? Em quais segmentos seria possível fomentar essa discussão de forma satisfatória?

- Eles alcançarão a abstração necessária para entender / discutir esse conceito nessa etapa de aprendizagem?

- Será possível um diálogo entre o conceito de infinito discutido na Educação Básica e na Educação Superior?

- As perguntas aparecem, principalmente, em quais séries do ensino fundamental?

- Os livros didáticos abordam de que forma o conceito de infinito matemático? Essas perguntas estão respondidas lá?

- Onde é que a contação de histórias conflluiu com a narrativa da História das Ciências, especificamente da Matemática, visto que os textos de livros de História da Matemática são tão engessados e densos?

- Quais recursos podem ser utilizados para viabilizar essa discussão na sala de aula?

- A quais perguntas dos alunos poderia dar resposta de forma satisfatória?

- Mostrar ao aluno que a pergunta feita por ele já foi feita por cientistas matemáticos pode ser "mal visto" pela academia, como se diminuísse um questionamento importante?

- Que "produto" esse estudo pode trazer ao final da pesquisa?

- Vamos apresentar as perguntas, o texto histórico, a narrativa para a sala de aula e as confluências poéticas? Ou podemos ampliar, apresentando dados de pesquisa, por exemplo, perguntando a professores se essas perguntas aparecem em suas aulas?

Essas são as perguntas que impulsionam o trabalho que será apresentado aqui. Todas foram contempladas? Por cento não, mas a disponibilidade para buscar esse caminho existia e continua existindo.

INTRODUÇÃO

"Hoje eu quero apenas

uma pausa de mil compassos

Para ver as meninas, e nada mais nos braços

Só esse amor, assim descontraído...

Quem sabe de tudo, não fale.

Quem não sabe nada, se cale.

Se for preciso eu repito.

Porque hoje eu vou fazer, ao meu jeito eu vou fazer

Um samba sobre o Infinito."

Paulinho da Viola – Para ver as meninas

Parece um oito deitado. É uma coisa que não termina nunca. Não é o mesmo que eterno. "Que seja infinito enquanto dure". *Best Friends Forever*. "Há infinitos maiores que outros". Essa coisa que nunca acaba, essa soma de infinitos, que às vezes a gente conta, às vezes não. Que fascina o mais novo, que continua a fascinar o mais velho, do infinitamente pequeno ao infinitamente grande. É a eternidade dos crentes. É o limite dos céticos. É inspiração dos poetas. O infinito, esse "desconhecido" conhecido dos matemáticos. Essa entidade paradoxal. É sobre ele que essa dissertação quer falar. Aliás, quer responder. Responder aos questionamentos dos alunos pré-adolescentes e adolescentes, que, apesar de serem tão jovens, fazem perguntas grandiosas. E às vezes a resposta é a própria busca pela resposta, pois a base do texto é sobre o que se quer saber, sobre perguntas que são feitas sobre.

Ao longo de anos tenho colecionado perguntas sobre o Infinito, que são feitas nas minhas aulas de Matemática da Educação Básica. Alguns questionamentos são próximos dos realizados por personalidades que marcaram a História da Matemática, como, por exemplo, se é possível transformar um quadrado em círculo, caso a medida do seu lado tenda a zero, de modo que, de tanto aumentar a quantidade de lados do polígono, consiga-se fazer com que seus vértices consecutivos se justaponham. Outras perguntas também se aproximam das feitas por estudiosos que se debruçaram sobre questões da Geometria Plana de Euclides. E outras sobre as geometrias não-euclidianas. Também há perguntas sobre fractais, sobre os números irracionais. Esta dissertação tem por objetivo apresentar algumas dessas perguntas, mostrar em que conjuntura elas aconteceram, no que a História Cultural do Infinito pode contribuir para suas respostas, e como essa história pode ser abordada através da poesia e da contação de Histórias.

Das perguntas que compõem os tópicos do Capítulo 2, as que se tornaram as perguntas da pesquisa, pois foram aquelas que instigaram pela busca pelo entendimento do por que os alunos desejam saber sobre infinito ainda nos segmentos iniciais da Educação Básica, foram “Por que essa soma de frações não acaba nunca?”, que faz alusão a um dos Paradoxos de Zenão; a outra, foi sobre o questionamento do fato de π ser classificado como número irracional, mas ser apresentado nas aulas como uma razão entre duas grandezas; e a terceira grande motivadora da pesquisa foi a que substitui a reta, considerada infinita, por uma circunferência, onde os alunos, intuitivamente, sugerem uma geometria que não é a euclidiana, mesmo sem nunca ter estudado nenhuma geometria diferente dessa.

Esta pesquisa traz também o olhar de professores sobre o conceito de infinito e a História da Matemática, sobre como pensam em relação às suas abordagens na sala de aula da Educação Básica, se concordam ou não com a “presença” desse conceito abstrato e seu suporte histórico nos bancos escolares. E sobre o que os professores entendem sobre “História Cultural do Infinito”.

Foram entrevistados também alguns professores que formam professores, que escrevem sobre História da Matemática, que fazem a ponte entre a Educação Básica e a formação docente. As perguntas que os alunos fazem foram submetidas a esses professores e, nas entrevistas, cada um deles deu o seu olhar sobre o “como” e o “por quê” respondê-las, tendo como suporte a História Cultural do Infinito.

Seguindo as inquietações provocadas por essas perguntas, assim como as sugestões de respostas feitas pelos professores entrevistados e a necessidade de perguntar aos alunos sobre conceitos que permeiam essas questões e, surpreendentemente, perceber os resultados encontrados, foi necessário escolher uma metodologia que contemplasse uma pesquisa que tivesse três frentes de trabalho: pesquisa bibliográfica, para fundamentar o contexto histórico dessas questões, onde essas perguntas já apareciam na História da Matemática e quais matemáticos se referiam de alguma forma a elas; pesquisa qualitativa, onde a análise das respostas dos professores formadores de professores trouxesse subsídios para fomentar possíveis respostas a essas questões; e a pesquisa qualitativa, onde foi feito um levantamento sobre conceitos básicos que permeiam as perguntas, e se os alunos possuíam ou não esses conceitos, através de afirmativas que, normalmente, provocam um desconforto nas formas de pensar conceitos já discutidos em conteúdos abordados na Educação Básica relacionado ao infinito matemático, desde o 6º. Ano, quando se estudam os conjuntos dos números naturais, e os elementos primitivos de Geometria, passando pelo 8º. Ano, onde os alunos são apresentados ao conjuntos dos irracionais, até o Ensino Médio, onde, formalmente, os alunos investigam as sequências numéricas com formato de Progressões Geométricas. Dessa forma, a metodologia de pesquisa escolhida foi a triangulação de métodos, apresentada por Minayo (2010), que foi justificada no *Capítulo* 1.

No *Capítulo 2,* as perguntas são listadas, atreladas às cenas do cotidiano onde ocorreram, em qual segmento da Educação Básica aconteceram e que atividade da prática pedagógica foi a que possibilitou ou provocou a pergunta.

No *Capítulo 3*, são apresentadas as perguntas que foram feitas aos professores formadores de professores, aos professores que estão atuando na Educação Básica e também as que foram feitas aos alunos, referentes aos conceitos básicos que permeiam os questionamentos do Capítulo 2, assim como alguns resultados encontrados a partir dessas respostas.

No *Capítulo 4*, é discutido o polêmico conceito de História Cultural do Infinito. Para tal, utilizou-se a bibliografia de Maor (1991) e foram listadas as respostas dos professores sobre o que pensa ser História Cultural do Infinito, e se estuda-la na Educação Básica traria possibilidades para a discussão dos conceitos de infinito que permeiam conteúdos do currículo escolar vigente.

No *Capítulo 5* são apresentados alguns textos presentes em livros de História da Matemática que servem como base para a defesa de que a contação de histórias, hoje também utilizada como a metodologia ativa *storytelling*, serve como recurso para facilitar a comunicação do binômio professor-aluno e, por isso, está a serviço investigação na busca para as respostas das perguntas motivadoras descritas no Capítulo 2.

Como a dissertação foi escrita no período de elaboração e posterior implementação da BNCC, o *Capítulo 6* apresenta uma breve análise sobre onde o conceito de infinito é recomendado nesse documento, que hoje norteia as práticas pedagógicas e os currículos implementados ensino fundamental.

O presente trabalho foi realizado com subsídios da CAPES. Foi possível, com o fomento, produzir artigos com partes intermediárias da pesquisa, e ligações com outras áreas de conhecimento. Esse estudo foi divulgado em congressos e encontros de História das Ciências, entre os anos de 2017 e 2019, de Educação Matemática, nos anos de 2018 e 2019 e no Congresso Internacional de Matemáticos realizado em 2018, realizado aqui no Brasil, com apoio do IMPA .

APRESENTAÇÃO

"Eis o melhor e o pior de mim
No meu termômetro o meu quilate
Vem, cara, me retrate
Não é impossível
Eu não sou difícil de ler
Faça sua parte
Eu sou daqui, eu não sou de Marte
Vem, cara, me repara
Não vê, 'tá na cara
Eu sou porta-bandeira de mim
Só não se perca ao entrar
No meu infinito particular."

Infinito Particular – Marisa Monte

Um dia, um professor me disse uma frase que me deixou extremamente encucada: "Dissertação de Mestrado, Ana, tem de ter 'pedigree'." "Vira-lata" que sou, fiquei matutando sobre essa afirmativa. O que esse professor estaria querendo dizer com isso? Será que ele não imagina que, num programa como o meu, onde tudo deveria ser "junto e misturado" é inviável "ter pedigree"? Será que ele quis dizer que deveria ser uma dissertação de "peso", com fundamentação teórica bem elaborada, com certificação, impecavelmente formatada nas regras da ABNT? Ou sobre um tema "puro", já que eu sou da área de Matemática? Até hoje eu me pergunto qual seria a definição de "pedigree" adotada pelo professor.

Não existe dissertação "com pedigree" em um programa interdisciplinar, que dirá em um programa transdisciplinar de pós-graduação. E eu, naturalmente mestiça, e academicamente "miçangueira" das exatas, me recusaria a defender um texto sem misturas. Minha dissertação tem as marcas da minha trajetória de "cariocamente" nordestina, matematicamente historiadora, tem as epistemes femininas das minhas tias, das minhas primas e da minha mãe, que são as epistemes do "cuidar", e o "cuidar" passar pelo "ouvir" o outro, daí as perguntas colecionadas e suas provocações; tem a sensibilidade do meu pai, virginiano minucioso, sempre preocupado com os detalhes; tem o embalo dos meus filhos no meu colo, tem os ombros, os olhos e os ouvidos do meu marido, meu maior parceiro. Tem os questionamentos dos meus alunos, tem as trilhas desenhadas pelos meus colegas de trabalho mais antigos, tem a ousadia dos meus colegas mais novos, e tem os sonhos dos meus antepassados.

Minha dissertação quer ter tudo, menos “pedigree”. Não é possível porque, do lado de fora da universidade, que é de onde vêm boa parte das perguntas, esse “saber mestiço” é parte da vida cotidiana dos meus alunos. Existir aqui fora, nas escolas periféricas principalmente, requer um olhar holístico para o mundo. Requer saber dar um “drible” na existência, parar e respirar fundo, resolver um problema cuja solução você nem imaginava conseguir, mas deu certo por conta de um saber ancestral, passado de geração em geração. Alguns dos meus alunos enxergam Infinito aí, naquele saber que se eterniza na oralidade. Outros, na busca por algo melhor para os seus dias, na vontade incansável de transformar as suas vidas. A mestiçagem evita os reducionismos. E a transdisciplinaridade do meu programa de pós-graduação deve garantir que as misturas enriqueçam nossa forma de ver a academia. Portanto, sigamos a misturar epistemes, histórias, filosofias, arte, literatura e tudo o mais que puder estar a serviço das respostas às questões propostas pelas crianças. Salve a mestiçagem!

CAPÍTULO 1 – DA METODOLOGIA DE PESQUISA

A presente pesquisa foi elaborada utilizando três frentes de metodologia: pesquisa bibliográfica, pesquisa quantitativa e pesquisa qualitativa. Para isso, foi empregada a Análise por Triangulação de Métodos, referenciada por Minayo (2010). Tal metodologia tornou-se a mais adequada para reunir as informações necessárias e analisar as diversas conjunturas nas quais as perguntas dos alunos aconteceram. Da mesma forma, foi de grande valor para analisar o olhar do professor e do aluno diante do objeto a ser estudado - o que ambos percebem por infinito matemático na Educação Básica e como sua história pode contribuir para o ensino – para encontrar um caminho possível para a exploração desses episódios educacionais, valorizando a curiosidade do aluno e apresentando a História da Matemática como um processo humano e, por isso, rico suporte para uma aprendizagem matemática efetiva.

Foi necessário ouvir educadores dentro de suas experiências, analisar suas respostas às perguntas norteadoras da pesquisa, entender quais conceitos os alunos trazem sobre os tópicos base do currículo de Matemática da Educação Básica, conhecer a história dos conceitos presentes nos episódios educacionais relatados nas perguntas, e, com essas informações, entender como é a sala de aula do aluno que pergunta sobre infinito e, dessa forma, um rico espaço de produção científica, ainda que localizada em um espaço da Educação Básica.

Ainda sobre a Triangulação de Métodos,

> Segundo Minayo (2010), em uma primeira dimensão, a Triangulação é utilizada para avaliação aplicada a programas, projetos, disciplinas, enfim. No processo avaliativo, sua conceituação torna-se abrangente e complexa, abarcando diferentes variáveis, dentre elas, a necessidade de se ter presente avaliadores externos, além dos internos, e que, preferencialmente, sejam de formações distintas, possibilitando “combinação e cruzamento de múltiplos pontos de vista” (MINAYO, 2010, p. 29); a realização de pesquisas quantitativas e qualitativas; a análise do “contexto, da história, das relações, das representações [...], visão de vários informantes e o emprego de uma variedade de técnicas de coleta de dados que acompanha o trabalho de investigação” (MINAYO, 2010, pp. 28- 29). No que tange à coleta de dados, a Triangulação permite que o pesquisador possa lançar mão de três técnicas ou mais com vistas a ampliar o universo informacional em torno de seu objeto de pesquisa, utilizando-se, para isso, por exemplo, do grupo focal, entrevista, aplicação de questionário, dentre outros. Numa terceira dimensão, tem-se o emprego da Triangulação para análise das informações coletadas. Nesse sentido, a técnica prevê dois momentos distintos que se articulam dialeticamente, favorecendo uma percepção de totalidade acerca do objeto de estudo e a unidade entre os aspectos teóricos e empíricos, sendo essa articulação a responsável por imprimir o caráter de cientificidade ao estudo. (MARCONDES;BRISOLA, 2013, p. 203)

A bibliografia base da pesquisa é o livro "Ao Infinito e Além – Uma história Cultural do Infinito", de Eli Maor (1991)[1], de onde foram extraídas as ideias iniciais do que seria o estudo do infinito – matemático ou não – analisando sua história cultural. A partir dela foram disparadas as primeiras ideias do estudo do conceito de infinito relacionado ao conceito matemático, sem abrir mão do humano, da arte, da literatura, das ciências e de toda sorte de manifestações de expressão do objeto base da pesquisa.

Foi necessário entender, através de pesquisa qualitativa, analisando as falas de professores em rodas de conversas, o que os professores entendiam sobre História Cultural do Infinito e se, em suas aulas, o conceito de infinito era discutido; se sim, de que forma era abordado o conceito e qual conjuntura surgiam perguntas sobre o tema ou se o mesmo se manifestava apenas sob provocações do próprio professor. Essa pesquisa foi realizada ouvindo professores da Educação Básica, professores da Educação Superior que formam professores e professores da Educação Básica que orientam futuros professores em suas práticas, através de acompanhamento de estágio de formação docente. Os relatos proferidos pelos professores e a análise da conjuntura em que os mesmos ocorreram, configuram o segundo aporte da triangulação de métodos supracitada: a pesquisa qualitativa.

O terceiro aporte da pesquisa, que também configura um dos tripés da Triangulação de Métodos, foi a pesquisa qualitativa. Essa etapa da pesquisa se fez necessária pois, após a conversa com alguns dos colegas participantes das rodas de conversa, muito foi dito sobre o fato dos alunos não dominarem alguns conceitos básicos relacionados ao infinito, e que, talvez por isso, as perguntas sobre infinito não aparecessem em suas aulas. Ou ainda por querer saber, utilizando essa metodologia, quais eram as ideias que os alunos relacionavam com infinito – matemático ou não – e como esse olhar poderia ser fruto da conjuntura educacional da sua vivência dentro ou fora da escola.

Essas frentes são justificadas no diagrama abaixo, segundo Marcondes e Brisola (2013).

---

[1] Título original: "To Infinity and Beyond – A Cultural History of the Infinity"

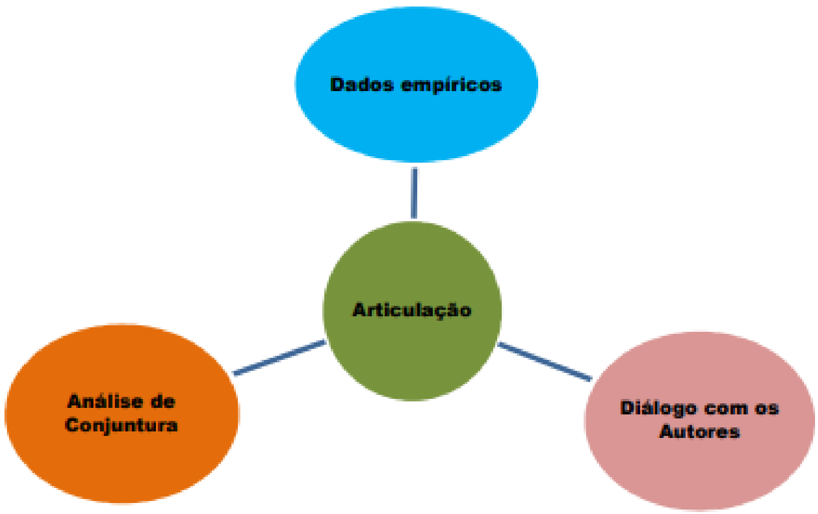


Figura 1 - Análise por Triangulação de Métodos.

Fonte: Elaborado pelas Autoras (2013).

Imagem 1[2]

O diagrama descreve a metodologia empregada na presente pesquisa, onde os dados empíricos foram analisados através dos questionários submetidos a professores e alunos, a análise de conjuntura pode ser realizada através das rodas de conversas com os professores e o diálogo com os autores foi concretizado pela pesquisa bibliográfica referente ao tema.

[2] Imagem extraída do artigo "ANÁLISE POR TRIANGULAÇÃO DE MÉTODOS: UM REFERENCIAL PARA PESQUISAS QUALITATIVAS", publicado em Revista Univap – revista.univap.br São José dos Campos-SP-Brasil, v. 20, n. 35, jul.2014. ISSN 2237-175

CAPÍTULO 2 – DAS PERGUNTAS QUE OS ALUNOS FAZEM E SOBRE O QUE IMAGINAM SER HISTÓRIA CULTURAL DO INFINITO

"As coisas que não têm nome são mais pronunciadas por crianças."

Manoel de Barros

Como é que as crianças perguntam sobre Ciência? Fazem perguntas que, de tão simples, são dificílimas de responder. E quando perguntam? O tempo todo. Quando acordam, quando observam a natureza, quando leem algo duvidoso, quando suas curiosidades afloram. Não se faz Ciência sem questionamento. A sala de aula da Educação Básica deve ser um espaço de curiosidade e perguntas.

Diante desse cenário, a fala da professora Andrea Polo (2019) é bastante pertinente.

> O que a gente pretende para nossas crianças daqui a 20 anos? Se eu pretendo adultos curiosos, que saibam cuidar do planeta... É muito bonito a gente pretender. A gente pode fazer planos incríveis a respeito disso, e isso pode ficar só no papel. Mas, na prática, o que eu preciso fazer para que essas crianças possam aprender a se ouvir, aprender a perguntar, aprender a duvidar...? Porque, neste espaço reflexivo, você vai encontrar problemas. E esses problemas nos mobilizam à ação. Então não dá para entender a escola como um espaço só de respostas. A escola é um espaço de perguntas. Quanto mais eu me perguntar, mais reflexiva eu serei, porque nem sempre eu vou encontrar resposta.[3]

Crianças não são reféns dos formatos. Crianças não conhecem ainda barreiras e questionam tudo. Suas curiosidades são suas aliadas e combustíveis para o entusiasmo ao aprender. E esse entusiasmo deve ser valorizado em sala de aula, onde cada um deve ser visto como único, porém como força pulsante do interesse coletivo pela busca do conhecimento. Segundo Hooks (2013),

> Para começar, o professor deve valorizar de verdade cada um. Precisa reconhecer permanentemente que todos influenciam a dinâmica da sala de aula, que todos contribuem. Essas contribuições são recursos. Usadas de modo construtivo, elas promovem capacidade de qualquer turma criar uma comunidade aberta de aprendizado.(HOOKS, 2013, p. 18)

Dessa forma, as perguntas que os alunos fazem costumam acontecer em uma sala de aula onde cada um é visto como um ser em construção, e que seus

[3] Fala transcrita de vídeo publicado em ocasião da sistematização de uma palestra oferecida pela professora Andrea Polo, do Centro de Formação da Vila, em setembro de 2019, no Colégio MOPI – unidade Itanhangá, no Rio de Janeiro.

questionamentos são contribuições valorosas para o coletivo. Um bom professor é o que estimula perguntas e responde com perguntas, até que o aluno encontre a solução do problema. Dada essa liberdade de se expressar, a sala de aula da Educação Básica é encarada como um espaço de investigação, um espaço de construção científica.

Segundo Freire (1996)

> Como professor devo saber que sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino. Exercer a minha curiosidade de forma correta é um direito que tenho como gente e a que corresponde o dever de lutar por ele, o direito à curiosidade. Com a curiosidade domesticada posso alcançar a memorização mecânica do perfil deste ou daquele objeto, mas não o aprendizado real ou o conhecimento cabal do objeto. A construção ou a produção do conhecimento do objeto implica o exercício da curiosidade, sua capacidade crítica de "tomar distância" do objeto, de observá-lo, de delimitá-lo, de cindi-lo, de "cercar" o objeto ou fazer sua aproximação metódica, sua capacidade de comparar, de perguntar. (FREIRE, 1996 – p. 52)

E é nesse contexto que ocorrem as perguntas sobre História Cultural do Infinito relatadas nesse texto: no lugar onde tudo pode ser perguntado, no lugar onde os devaneios são bem-vindos, onde, mesmo que não se tenha a resposta imediata, a pergunta é a direção. E é por isso que esse texto existe. Porque foi criado um espaço libertário e de questionamento.

Ainda sobre as perguntas, Freire (1996) nos diz mais.

> Estimular a pergunta, a reflexão crítica sobre a própria pergunta, o que se pode pretender com esta ou com aquela pergunta em lugar da passividade em face das explicações discursivas do professor, espécies de respostas a perguntas que não foram feitas. Isto significa realmente que devamos reduzir a atividade docente em nome da defesa da curiosidade necessária, a puro vai-e-vem de perguntas e respostas, que burocraticamente se esterilizam. A dialogicidade não nega a validade de momentos explicativos, narrativos em que o professor expõe ou fala do objeto. O fundamental é que o professor e alunos saibam que a postura deles, do professor e dos alunos, é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve. O que importa é que professor e alunos se assumam epistemologicamente curiosos. (FREIRE, 1996 – p. 52)

Freire nos apresenta uma forma dialógica de se fazer ciência, ou seja, professor e alunos juntos, na busca de novas epistemes, construídas através do diálogo aberto e respeitoso, não anulando a possibilidade da exposição de um conceito ou experimento. O lugar das perguntas deve ser o lugar da erupção das epistemes que virão romper paradigmas metodológicos.

Diante do exposto, serão listadas cenas, histórias e historicidades relacionadas às perguntas que os alunos fazem sobre o infinito. É importante ressaltar que, na grande maioria das vezes, o tema da aula não é a discussão sobre infinito, porém essa provocação acontece espontaneamente, por parte dos professores, e assim, os alunos sentem-se impulsionados a perguntar para além do assunto. Em uma sala de aula onde o ambiente de aprendizagem é trabalhado para a liberdade de ação e investigação é propício para esse tipo de atitude. Vamos às perguntas e suas histórias.

2.1 "O infinito existe mesmo, professora?" – Infinito Potencial x Infinito Atual

> *O quotidiano mata muitas vezes a transcendência. A realidade é fragmentária. Só é uma a realidade o ultra-som e a ultraluz do infinito.*
>
> *Clarice Lispector*[4]

Cena 1: *A aula era sobre Números Complexos. A professora-estudante carregava consigo um livro cujo título era "Diálogos de alunos sobre o Infinito". Entrou na sala, colocou o livro sobre a mesa. Virou-se. Escreveu a data no quadro. Colocou o título "Números Complexos e suas relações de inclusão". Daí a aluna conversa com o amigo.*

- Livro esquisito. Quem é que vai ficar conversando sobre "Infinito", gente?

Alunos acham que professores de costas para a turma ficam surdos. Não ficam.

- Esquisito o quê, garota? O livro é de Matemática. E em Matemática tem infinito, ué.

- Tem mesmo?

- Tem. Não vê quando a gente conta. Não termina nunca.

- Termina sim. Termina quando eu canso de contar. Coisa de doido! E outra coisa: tudo termina. Meu dinheiro, meus créditos do celular, o amor, a minha paciência... Ô, professora! Faz favor!

E a professora veio:

- Diga?

- O infinito existe mesmo?

O episódio aconteceu em uma turma de curso noturno de terceira série do Ensino Médio, em uma escola pública estadual do Rio de Janeiro, logo no início do segundo semestre de 2018. Era uma turma de alunos jovens trabalhadores, que vislumbravam

[4] Clarice Lispector em "Um sopro de vida". 1978, p. 103

seus crescimentos intelectuais e profissionais, mas que encontravam uma série de empecilhos em suas vidas acadêmicas. Alguns já possuíam família construída. Outros, ajudavam a família – pai, mãe, irmãos, sobrinhos avós - nas despesas domésticas. Outros ainda, tinham muitas dificuldades em Matemática, devido à ausência de pré-requisitos para compreendê-la e, mais que isso, baixa auto-estima para lidar com um conhecimento tido como destinado apenas para pessoas geniais. Para além de tudo isso, um episódio inesperado aconteceu com essa turma: uma aluna faleceu em um assalto nas proximidades do colégio.

Diante de todos esses fatos, é muito natural que os alunos questionem a existência do infinito. Nas suas rotinas, vivem tudo para ontem. Ou vivem intensamente o seu hoje, pois a falta de perspectivas os obriga a assim pensar. E, nesse cenário, discutir o conceito de infinito se torna um desafio ainda maior para esse grupo de alunos e seus professores, pois tudo em suas vidas possui limite bem delineado, é tudo tem um fim, inclusive antes do que se deseja. A própria pergunta sobre a existência ou não do infinito ter acontecido nesse grupo é surpreendente, porque a maioria nem questiona a existência do infinito. Para eles, não existe e pronto. Sem discussões.

Sobre a existência ou a não existência do infinito, Brito (2018) nos diz que

> o infinito era o não finito. Isto é, a definição de infinito era dada pela negação do finito. O infinito, para Cantor é um objeto matemático totalizado, acabado, o *infinito atual*. Não é algo a vir a ser, algo que não acaba e que se realiza potencialmente, o *infinito potencial*, o único infinito sobre o qual estávamos “autorizados” a falar desde Aristóteles. Bolzano, já havia proposto que o infinito deveria ser tratado de forma atual e não potencial. Somente a partir dessa mudança de paradigma que o infinito pode ser matematizado e, sob essa ótica, estudado e problematizado. (BRITO, 2018, p. 12)

Portanto, existe sim o infinito, como potência e como ato. Cabe a explicação aos estudantes sobre a diferença entre eles, sobre qual pôde ser matematizado, o infinito como ato, e não o infinito como potência, que é aquele que normalmente é imaginado, o infinito aristotélico. A questão aqui é ainda mais ampla: é sobre como discutir a respeito de algo que não se sabe discutir. Mas essa é uma fala que será aprofundada no final deste capítulo.

2.2 - “Uma pirâmide pode virar um cone, caso aumentemos infinitamente o número de lados de sua base? “– Arquimedes, Eudoxo e os seus métodos de exaustão

“Se as portas da percepção fossem limpas,

tudo apareceria ao homem como realmente é: infinito.”

William Blacke.

Cena 2 : *“A aula acontece em uma turma de 6º. Ano do Ensino Fundamental II de uma escola privada do Rio de Janeiro, onde a professora apresenta o software de Geometria Dinâmica. O objetivo da aula é fazer relações entre figuras espaciais e figuras planas, através da análise das faces de um poliedro, apresentado na sua forma planificada. Várias imagens de pirâmides giram, se planificam, e, aos poucos, alteram as suas quantidades de lados das bases.*

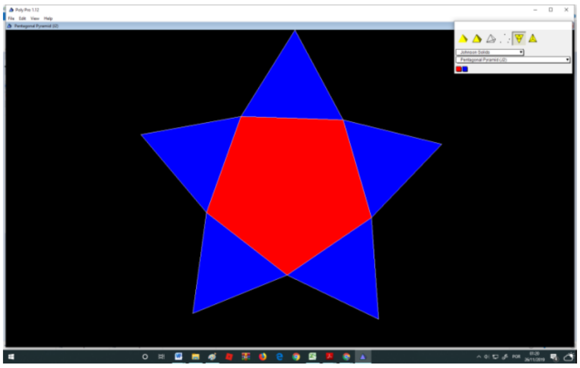


Imagem 2[5]

Depois, são oferecidos aos alunos livros de espelhos duplos e uma fita colorida representa o lado de um polígono , como mostra a imagem abaixo.

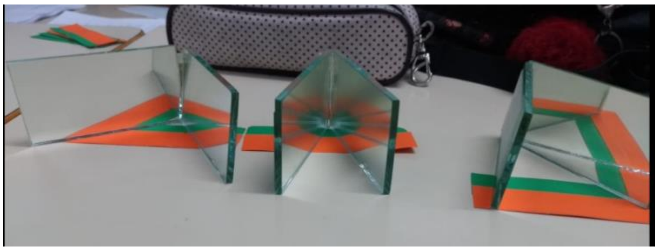


Imagem 3[6]

[5] Imagem capturada do software de Geometria Dinâmica Poly Pro 1.12, no menu Sólidos de Johnsons.
[6] Foto dos livros de espelhos onde são construídos polígonos aumentando sua quantidade de lados quando diminuída a medida do seu ângulo central.

Nesse momento da aula, deseja-se mostrar que forma-se um polígono com uma quantidade cada vez maior de lados, à medida que o espelho se fecha, diminuindo assim o ângulo central desse polígono.

A pergunta surge quando o livro de espelhos praticamente se fecha completamente, e tem-se a ilusão que o polígono, na verdade, se transformou em uma circunferência."

A pergunta acima nos remete ao seguinte questionamento: se aumentarmos o número de vértices de um polígono, e diminuirmos o tamanho do seu lado, até que ele tenda a zero, é possível que se encontre uma situação em que os vértices consecutivos se encontrarão e a base da pirâmide vai se transformar em um círculo, e que as arestas laterais se encontrarão para formar a superfície curva de um cone?

Durante a experiência e utilizando o livro de espelhos, o aluno que fez o questionamento representou polígonos fechando cada vez mais o livro, obtendo representações com as da imagem a seguir.

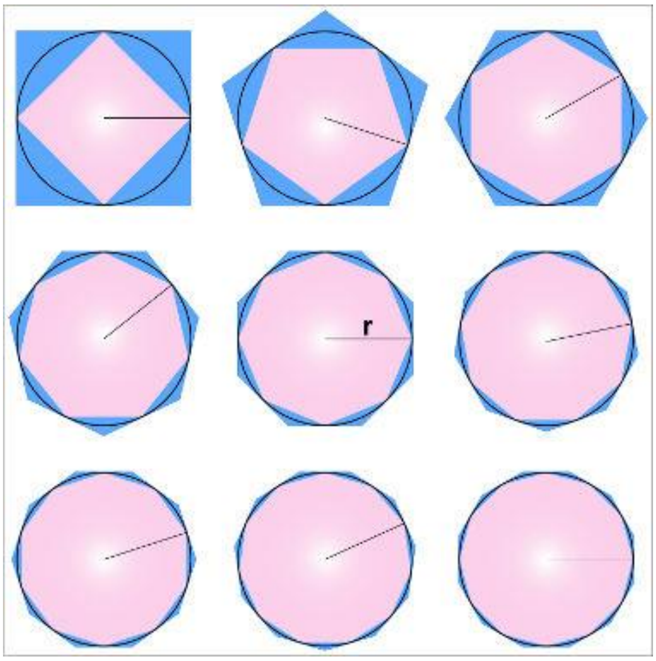


Imagem 4[7]

[7] Polígonos regulares inscritos em uma circunferência. Disponível em < https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/elementos-poligono-regular-inscrito.htm>, acesso em 30 Nov.2019.

Criado por Eudoxo e aprimorado por Arquimedes, o método da Exaustão consiste em inscrever uma figura formada por lados retos – polígonos – em uma figura com lados curvos – no caso a circunferência – e ir aumentando os seus números de lados, normalmente dobrando, até que essas áreas se aproximem ou praticamente coincidam. A História aponta que não foi nem Eudoxo nem foi Arquimedes o pioneiro da ideia do método da exaustão. O pioneiro foi Antífon, que sugeriu a inscrição do quadrado no círculo e o aumento sucessivo do seu número de lados até que a diferença entre essas áreas seja praticamente nula.

Sobre o método de Antífon, Eves (1997) nos diz

> Consta que Antífon teria antecipado a ideia de que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono, ao fim, exaurir-se-ia. E como se pode construir um quadrado de área igual à qualquer polígono, seria então possível construir um quadrado de área igual a do círculo. A crítica que imediatamente se levantou contra esse argumento sustentava-se no princípio de que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente e que, assim, o processo de Antígon jamais esgotaria a área do círculo. Não obstante, a corajosa abordagem de Antífon continha o germe do famoso método da exaustão grego. (EVES, 1997, p. 418)

A falibilidade do argumento de Antífon é intuitivamente observada pelos alunos no experimento do livro de espelhos. Apesar de se imaginar que a medida do lado do polígono diminuirá infinitamente até que os vértices se encontrem, e assim conseguindo que surja uma circunferência como contorno, não é possível observar enquanto o espelho não se fecha. E se o espelho se fecha, o infinito vai para a imaginação e não a imagem refletida. Essa experiência é muito rica para ilustrar os pensamentos associados às tentativas de quadratura do círculo e dos métodos primórdios para o cálculo de π, mesmo que de maneira informal.

Sobre o método de exaustão de Arquimedes, com base nas ideias de Eudoxo, Roque (2012) nos diz que

> O método de Eudoxo, do século V a.E.C, consistia em inscrever polígonos regulares em uma figura curvilínea, como um círculo, e ir dobrando o número de lados, até que a diferença entre a área da figura e a do polígono inscrito se tornasse menor do que qualquer quantidade dada. Arquimedes propôs um refinamento desse método, comprimindo a figura entre duas outras cujas áreas mudam e tendem para a figura inicial, uma crescendo e a outra decrescendo. A área do círculo, por exemplo, era envolvida por polígonos inscritos e circunscritos de modo que, aumentando-se o número de lados, suas áreas se aproximavam da área desse círculo. Ou seja, a diferença entre as áreas dos dois polígonos pode ser notada menor do que qualquer quantidade dada quando o número de lados aumenta. (ROQUE, 2011, p. 203)

Portanto, diante do exposto, o polígono que representa a base da pirâmide não se transforma em uma circunferência, apenas se aproxima. E, por isso, a pirâmide não se transforma em um cone. Mas fica muito próxima de sê-lo. Diante dessa observação, pode-se se estender para observações envolvendo conceitos topológicos. Veloso (2008) cita Marcelo Viana, em seu artigo "*Há vida na geometria para além dos prismas, paralelepípedos, cubos, esferas, cilindros e cones* " publicado na revista da APM. Este título é uma grande provocação e elucida outros tópicos que serão discutidos ao longo do texto, principalmente o relacionado às geometrias não-euclidianas e suas discussões para a sala de aula. Nesse artigo, Veloso afirma que assistiu a uma palestra em Gulbenkian, onde o professor Marcelo Viana apresentava uma conferência sobre a Conjectura de Poincaré e que ele falou que, se for habilidoso, conseguiria dar umas pancadas nos vértices de um cubo e transformá-lo numa esfera e o mesmo faria para um cone ou para um cilindro. Para as crianças, essa linguagem é bastante acessível e é outra forma de se falar sobe essas transformações sem usar, necessariamente, a geometria com superfícies planas. Nesse mesmo artigo, Veloso ainda diz que na nossa vida há muito mais elipses do que circunferência e que, por isso, é bastante pertinente discutir outras curvas, que não apenas a circunferência. E ainda nos brinda com texto a seguir

> Estamos na altura de acabar com a habitual pobreza da geometria escolar e de dar a todos os nossos alunos a possibilidade de fazer experiências com muitas outras curvas notáveis para além da circunferência, como as cónicas, as ciclóides, as hipociclóides (de que existem até pequenas maquinetas à venda que as traçam), as conchóides, eu sei lá… Em futuras notas, tentaremos mostrar (através de propostas concretas) como há vida muito interessante, na geometria, para além da circunferência e dos prismas, pirâmides, cubos, esferas, cilindros e cones... (VELOSO (2008), p. 19)

Dessa forma, Veloso apud Viana elucidam conceitos bastante complexos com possibilidades para discussão na Educação Básica, sendo eles a topologia e os sistemas dinâmicos.

2.3 - *“Por que essa soma de frações não acaba nunca?” - Séries convergentes, Paradoxo de Zenão, o Olho de Horus e o Homem que viu o infinito*

> “A utopia está lá no horizonte. Me aproximo dois passos, ela se afasta dois passos. Caminho dez passos e o horizonte corre dez passos. Por mais que eu caminhe, jamais alcançarei. Para que serve a utopia? Serve para isso: para que eu não deixe de caminhar.”
>
> ***– Fernando Birri***[8]

Cena 3: *“A aula era sobre frações equivalentes, redução de frações a um mesmo denominador e soma de frações, e ocorreu em uma turma de 6º. Ano do Ensino Fundamental II de uma renomada escola privada do Rio de Janeiro. Para esta tarefa, a professora separou quatro copos com água até determinada altura, conforme as indicações da ilustração a seguir:*

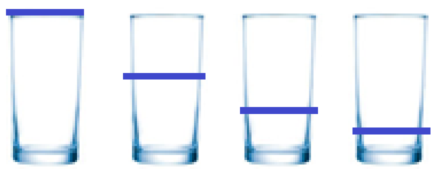


Imagem 5[9]

Nota-se que o primeiro copo está totalmente cheio, o segundo está cheio até a metade, o terceiro até a metade da metade, e o quarto até a metade da metade da metade. A professora, num momento inicial, pede que os alunos batam com a ponta da caneta nas bordas dos copos, e analisem os tipos de sons que apresentam (mais graves ou mais agudos, associados aos copos mais cheios ou mais vazios).

A professora lançou como desafio a seguinte pergunta: será que, se juntarmos os conteúdos dos copos 2, 3 e 4, teremos um copo cheio, como o número 1?

Um aluno percebeu que não, que ½ + ¼ + 1/8 resultavam em 7/8. E resolveu continuar acrescentando: mais um copo com 1/16. Não conseguiu a unidade. Mais 1/32. Também não conseguiu. Mais 1/64. Continuou menos que 1. Até que perguntou à professora: “Professora, essa soma não vai terminar nunca?”

---

[8] Citado por Eduardo Galeano in ‘Las palabras andantes?’ de Eduardo Galeano, publicado por Siglo XXI, 1994.

[9] Copos cilíndricos representando um xilofone de copos. Descrição da atividade no apêndice.

A cena se passou em uma aula introdutória ao conceito de frações equivalentes e de operações com frações. Não havia a menor pretensão em se discutir o conceito de infinito nem de convergência. De forma surpreendente, o aluno do sexto ano percebeu – mesmo sem conhecer ainda a multiplicação de frações – que o denominador sempre dobrava, e por isso era uma potência de base 2. Além disso, que o valor sempre diminuía pela metade. A soma nunca resultava em um inteiro. Sempre faltava $1/2^n$, sendo esse n a quantidade de vezes que o conteúdo do copo tinha sido dividido ao meio.

Diante da pergunta "essa soma não vai terminar nunca?", é possível se discutir alguns conteúdos relacionados a essa famosa série convergente. A soma em questão representa a soma dos termos de uma PG infinita de razão ½.

O experimento em questão lembra a história do Paradoxo de Zenão sobre Aquiles e a tartaruga. Segundo Britto e Gonçalves (2016),

> O infinito, quando tomado em ato, é fonte de problemas sem solução, como os paradoxos de Zenão. Zenão argumenta que o movimento é impossível quando admitimos o infinito em ato. Na conhecida estória "Aquiles e a Tartaruga", Zenão mostra que se houvesse uma disputa de corrida entre o homem mais veloz da Grécia, Aquiles, e uma tartaruga, e fosse dada uma vantagem à tartaruga, dela largar à frente, Aquiles jamais alcançaria a tartaruga. Isso porque, para ele alcançar a tartaruga, ele deveria antes percorrer a metade da distância. Mas, para percorrer essa metade, antes ele deveria percorrer um quarto da distância. Para percorrer um quarto, antes deveria percorrer um oitavo dessa distância e assim sucessivamente. Ou seja, ele jamais alcançaria a tartaruga. O que obviamente não aconteceria, pois Aquiles ultrapassaria a tartaruga em tal caso. Aristóteles então concluiu que o infinito só pode ser tratado enquanto potência, nunca enquanto ato. (BRITTO;GONÇALVES, 2016, p. 3)

Figure 1.1. *The runner's paradox.*

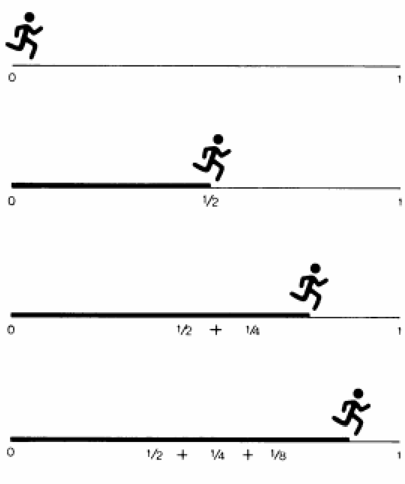


Imagem 6[10]

[10] Do livro "To infinity and beyond", de MAOR (1991).

É pertinente reforçar que essa atividade não tinha a menor intenção de elucidar o conceito de paradoxo, muito menos discutir infinito ou a existência ou não de movimento. Nessa aula, inclusive, alguns colegas do aluno questionador não conseguiram entender o que ele pensava, e os que conseguiram acharam aquilo tudo uma loucura ou uma perda de tempo. Defender que toda pergunta é importante e trazer para a prática de sala de aula o desejo do estudante de aprender com e não aprender sobre é mais que nossa obrigação, é uma estratégia didática que humaniza a Matemática, que a torna mais próxima de uma prática comum a todos os que se dispõem a desbravá-la.

Voltando ao paradoxo de Zenão e a história do maior corredor grego e sua adversária tartaruga, Vilela e Monteiro (2016) nos trazem a seguinte narrativa

> O que Zenão está dizendo é que Aquiles deve efetuar uma série infinita de atos, algo que não pode se feito num período de tempo finito. Se preferimos não acreditar nisso, temos que demonstrar onde reside a falácia. Segundo Morris(2008)[11] o objetivo de Zenão com esse paradoxo era rebater a ideia de que espaço e tempo eram infinitamente divisíveis. Para isso descreve uma situação absurda em que Aquiles tem que transpor uma série de distâncias que ficam progressivamente mais curtas, gerando um absurdo que nos impede de pensar em dividir o espaço dessa maneira. (VILELA;MONTEIRO, 2016, P. 231)

Dessa forma, meio que sem querer, o conceito de séries infinitas e de paradoxo surgiu em sala de aula. Inquietados com a novidade, os alunos foram pesquisar o que seria um paradoxo, quem era Zenão de Eléia e seu mestre Parmênides, em parceira com a professora de História. Ouvir as crianças proporciona um olhar holístico para a prática pedagógica. Normalmente, o questionamento despretensioso dialoga com outros lugares do conhecimento e atinge outras instâncias jamais planejadas.

No fluxo do tema soma de termos, foram apresentadas duas representações além da trabalhada na conversa sobre Aquiles e a tartaruga. Uma delas foi o Olho de Horus, e suas relações com o conceito de fração, como vemos na imagem abaixo:

[11] Morris destaca a impossibilidade dessa velocidade proposta a Aquiles e a Tartaruga, e argumenta que está usando valores que facilitem a aritmética

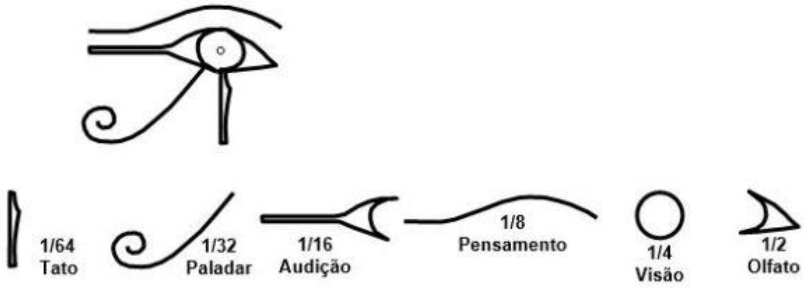


Imagem 7[12]

Nota-se que as frações representadas no olho de Horus são as mesmas que o estudante tenta somar na pergunta apresentada no início do texto. E que se todas essas frações forem somadas não se terá um inteiro, e sim $\frac{63}{64}$.

As imagens abaixo também ilustram essa soma de frações.

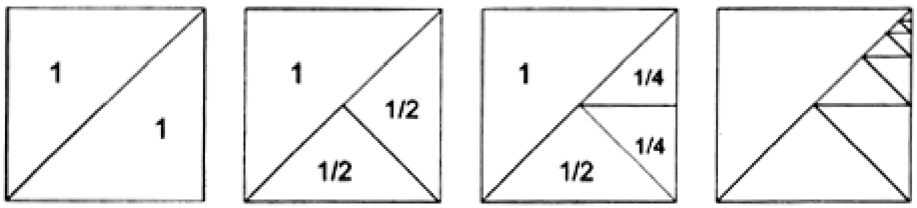


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=2,$$

$$1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots=2.$$

$$S=1+q+q^2+q^3+q^4+\cdots=\frac{1}{1-q}.$$

$$\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

Imagem 8[13]

[12] Olho de Horus associado a hierarquia dos sentidos.

A soma descrita pelo aluno representa uma metade do quadrado representado na foto. Se a soma converge para 2, então a soma feita pelo estudante convergirá para 1.

Nesse episódio de ensino, a autora explicou essa situação para o aluno desenhando um segmento de reta no quadro, de tamanho 1, e subdividindo-o ao meio, e depois tomando uma parte e dividindo-a ao meio, formando ¼, e assim por diante, até que o aluno percebesse que todos aqueles pedacinhos juntos, em um dado momento, formariam um inteiro.

2.4 - "A diagonal do quadrado existe? Como pode um segmento de reta, que tem início e fim, ser representado por um número de infinitas casas?" O surgimento e a incomensurabilidade dos números irracionais.

"Redondo sem início e sem fim, eu sou o ponto antes do zero e do ponto final, Do zero ao infinito vou caminhando sem parar.

Clarice Lispector

Cena 4: A discussão da aula era a diferença entre área e perímetro, e aconteceu em uma turma de 8º. Ano do Ensino Fundamental II, que seguia com muitas dificuldades em perceber a diferença entre medida de comprimento e medida de superfície. Foi tomado como unidade de área um quadrado de 1 cm^2 e como unidade de comprimento o segmento que representa o lado desse quadrado, ou seja, um segmento de 1 cm. De posse de um pedaço de papel quadriculado, o aluno deveria desenhar, em "pixel art"[14], uma figura com uma determinada área e informar o seu perímetro.

- Professora, esse desenho serve?

- Serve e está ótimo!

- Eu pensei em colocar uma linha aqui, para fazer as orelhas, cortando esse quadrado ao meio – e mostra uma linha que representa a diagonal de um dos quadrados de lado 1cm.

[13] Revista do Professor de Matemática 30, Séries Infinitas, artigo de Geraldo Ávila, disponível em <http://www.rpm.org.br/cdrpm/30/3.htm>, Acesso em 19 Nov. 2019

[14] O pixel art, ou arte pixel, é uma forma de arte digital na qual as imagens são criadas ou editadas tendo como elemento básico os pixels. Elementos gráficos provenientes de sistemas computacionais antigos, como consoles de video games e telefones celulares seria considerados como pixelados.

- Mas aí você teria problemas em informar o perímetro, visto que essa linha não mede 1cm, mede mais.
- Ah, é?
- Sim, ela mede raiz quadrada de 2 centímetros.
- Ué, raiz quadrada de 2 não é irracional? Como esse pedacinho de linha, que eu sei onde começa e termina, pode medir um valor infinito, que não termina nunca?

Há uma enorme confusão no pensamento matemático dos alunos quando o assunto é representação dos irracionais: a escrita infinita do número irracional e o "tamanho" dessa representação. O equívoco se dá pelo fato de não acontecer um processo dialético na construção desse conceito, que inclusive é recomendado nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Segundo os PCN (1997),

> Ao longo do ensino fundamental os conhecimentos numéricos são construídos e assimilados pelos alunos num processo dialético, em que intervêm como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas e como objetos que serão estudados, considerando-se suas propriedades, relações e o modo como se configuram historicamente.
> Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversas categorias numéricas criadas em função de diferentes problemas que a humanidade teve que enfrentar — números naturais, números inteiros positivos e negativos, números racionais (com representações fracionárias e decimais) e números irracionais. À medida que se deparar com situações-problema — envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação —, ele irá ampliando seu conceito de número. (BRASIL, 1997, p. 39)

A atividade em questão não tinha a intenção de elucidar o conceito de números irracionais. O trabalho foi proposto em um grupo de 6º. Ano do Ensino Fundamental e o conceito de números irracionais só começa a ser discutido no 8º. Ano. Mesmo sem vocabulário geométrico suficiente para entender plenamente o conceito, o estudante de 6º. Ano tem condições de entender porque, ao longo da história da humanidade, foi necessário se ampliar o conceito de conjuntos numéricos de forma que seja possível abarcar os irracionais, visto que esse aluno já estudou as raízes quadradas e sabe da existência de raízes não exatas, e já teve alguns contatos com outros números irracionais, como o π e o número de ouro.

Ainda sobre a questão dos irracionais, a confusão se deve também ao fato de não serem tratados a partir do conceito de incomensurabilidade. Stweart (2106) cita o $\sqrt{2}$ como o primeiro irracional conhecido, e diz que esse número levou os gregos a focarem nos comprimentos geométricos e ignorarem os números.

Sobre a incomensurabilidade dos irracionais, uma experiência pode ser enriquecedora e, tranquilamente, ser o desdobramento para a pergunta feita pelo aluno da cena 4: propor à turma que desenhasse quadrados de diversos tamanhos de lados e depois medissem as diagonais com uma régua. É fato que, conhecendo o Teorema de Pitágoras, sabe-se que o valor dessa diagonal sempre será correspondente à medida do lado multiplicada por $\sqrt{2}$ mas, mesmo que os alunos construam quadrados até de mesma medida de lado, dependendo do instrumento a ser usado na medida, essa diagonal não terá medida igual para todos os grupos. A descoberta dos irracionais na sala de aula pelas experimentação é tão assustadora quanto a feita pelos pitagóricos.

Kistemann Jr. (2008) nos diz que

> Essa descoberta destruiu a crença de que o universo era governado por números inteiros. Alguns historiadores associam o aparecimento de grandezas incomensuráveis com a aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo em que a hipotenusa é a diagonal de um quadrado e os catetos são os lados do quadrado. Aristóteles refere-se a uma demonstração onde se supõe que a diagonal e o lado são comensuráveis para se chegar num absurdo com a conclusão que um mesmo inteiro é par e ímpar. O raciocínio, por absurdo que seja, foi provavelmente concebido no meio da escola pitagórica. (JUNIOR, 2008, p. 53)

A demonstração apresentada por Aristóteles no artigo de Kestermann Jr pode ser descrita como, tomando-se um quadrado ABCD, com diagonal BD. Então, suponhamos que o lado AB e a diagonal BD sejam segmentos de reta comensuráveis. E forem, existe um segmento u e dois números inteiros m e n de modo que AB = um e DM = nu. Então, o segmento AB mede m e o segmento BD mede n.

Logo, pelo teorema de Pitágoras, $n^2 = m^2 + m^2$, ou seja, $n^2 = 2m^2$. Portanto, $(n/m)^2=2$. Seja a/b uma fração irredutível tal que $n/m=a/b$. Como $(a/b)^2=2$ então $a^2=2b^2$. Portanto a^2 é par e consequentemente a é par. Como a/b é irredutível, b deve ser ímpar. Como a é par, existe um inteiro k tal que $a=2k$. Como $a^2=2b^2$ então $4k^2=2b^2$. Logo b^2 é par. Conclui-se que b também é par. Absurdo, pois b é ímpar. Portanto, a diagonal DB é incomensurável.

Em resumo, para a pergunta em questão é necessário diferenciar a escrita infinita do número irracional do fato do conceito de incomensurabilidade. As práticas experimentais de sala de aula podem levar a essa conclusão, porém, tendo o grupo vocabulário algébrico para entender demonstrações, faz-se necessário sair do lugar da medida para a formalização algébrica, evitando assim que aproximações numéricas tomem o lugar do verdadeiro valor do número irracional discutido na experiência.

O assunto irracionais é introduzido no currículo escolar a partir do 8. Ano, e, é tomado de uma abstração que ainda surpreende muitos alunos. Normalmente, é apresentando através das inclusões entre os conjuntos, porém tal explicação não foi suficiente para contemplar essa pergunta. A professora autora explicou que, apesar da representação do número ser infinita, o número não é, pois representa uma determinada quantidade, que pode ser também representada por um ponto em uma reta numérica. Foi esclarecido ao aluno que um conceito é o da representação em formato de numeral infinito, outra coisa é a ideia de quantidade.

2.5 - "Se a reta é infinita e a Terra é redonda, então na verdade a reta não é uma reta, é uma circunferência?" – Geometria Euclidiana x Geometrias Não-euclidianas

Para vermos o azul, olhamos para o céu. A terra
é azul para quem a olha do céu.
Azul será uma cor em si,
Ou uma questão de distância?

Clarice Lispector[15]

Cena 5: A aula aconteceu em uma turma de 6º. Ano, de uma escola privada do Rio de Janeiro, e era sobre a relação entre a Geometria Plana e a Geometria Espacial, sobre entender o que vem a ser a palavra "planisfério" e por que o Ensino Fundamental II estuda primeiro a Geometria Espacial para depois estudar a Geometria Plana. Professor e turma conversavam sobre o fato de ponto, reta e plano não terem definição.

Como desejava-se falar sobre a relação entre plano e espacial, e a turma era de sexto ano, o assunto Projeções Cartográficas foi utilizado como suporte, pois é nesse mesmo ano que os estudantes são apresentados ao conceito de latitude e longitude.

[15] Do livro "A descoberta do mundo, "Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1984, p.13

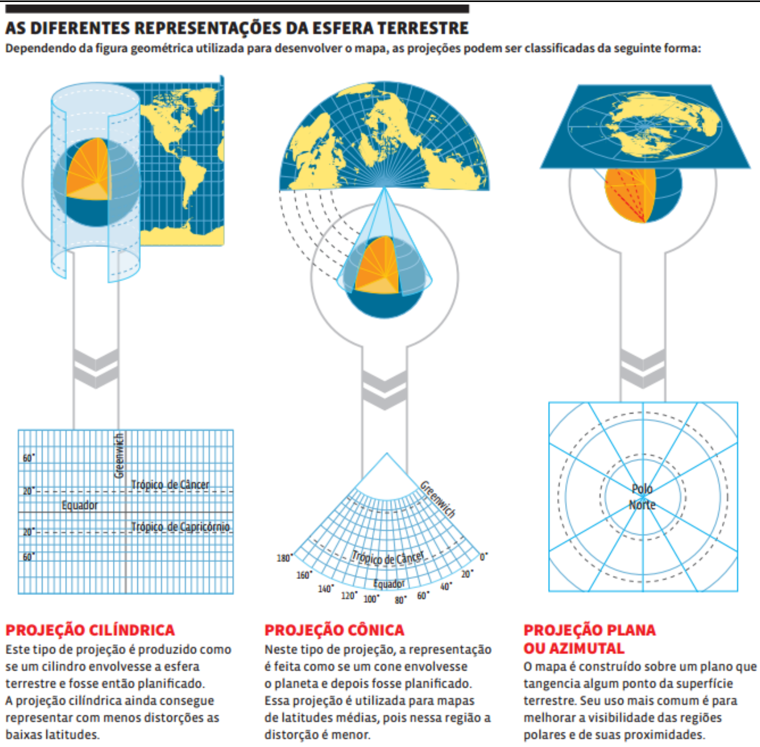


Imagem 9

Disponível em <https://guiadoestudante.abril.com.br/curso-enem-play/projecoes-as-formas-de-representar-o-espaco-geografico/ >

A aluna pergunta: "Se a reta é infinita e a Terra é redonda, então a reta não é infinita, e nem é reta, é uma circunferência?"

É da maior importância ressaltar que essa cena de cotidiano escolar, ocorrida em uma escola da rede privada do Rio de Janeiro, em uma turma do sexto ano, iniciou-se com a seguinte provocação.

"A RETA É UMA CURVA QUE NÃO SONHA."

Manoel de Barros

Diante dessa frase, desejava-se que os alunos tentassem definir uma reta, atitude inútil, visto que a reta, assim como o ponto e o plano, são elementos primitivos da

Geometria e, por isso, não possuem definição. Sendo essa a primeira aula de Geometria Plana nesse ano, visto que esses estudantes iniciam seus estudos de geometria pelos sólidos geométricos, naturalmente por serem ainda crianças e estarem em um nível de desenvolvimento cognitivo cujo universo de experimentação constrói através do concreto, essa transição do espaço tridimensional para o plano não é muito simples, pelo contrário, é muito abstrata.

Essa abstração passa ainda pela questão de os alunos não se conformarem com o fato de não existirem definições para ponto, reta e plano. Axiomas não são muito fáceis de serem aceitos pelas crianças. Elas sempre acham que existe uma forma de descrever ou definir algo. O discurso de sala de aula também deve passar pelo fato de o aluno entender o que é uma demonstração, e que para conseguir demonstrar algo, são necessárias premissas evidentes e verdadeiras, porém indemonstráveis.

Além disso, o mundo da criança em formação é muito concreto e, sempre que possível, a Matemática deve estar a serviço de uma leitura de mundo, para que os conceitos abstratos encontrem ancoragem para serem propostos em sala de aula. Pensando nisso e utilizando-se de uma proposta interdisciplinar, foi oferecida uma atividade que perpassou por conceitos da Geografia, como o de "planisfério" e o de "projeções cartográficas", para, por fim, chegar às ideias fundamentais da Geometria.

Durante a discussão sobre as projeções passarem por planificações de sólidos considerados corpos redondos e, por isso, ocorrerem aproximações e erros diante dessas aproximações, naturalmente a visualização dessas crianças passou pelo objeto curvo. Provavelmente, por isso, a aluna não se conformou com estarmos estudando uma geometria no plano e associou a espalho esférico.

O estudo de geometrias não-euclidianas na Educação Básica já é discutido em encontros de Educação Matemática e, de forma surpreendente, está incluído em programas curriculares de algumas prefeituras de estados brasileiros.

Segundo Kaleff (2010),

> A importância de se trabalhar as GNE, até mesmo na escola e, principalmente, no âmbito da licenciatura, reside no fato dessas teorias possibilitarem a quebra de paradigmas e padrões visuais, trazendo o visualmente inesperado para a sala de aula e a oportunidade de criação de novas imagens e conceitos. Ou seja, de possibilitar trazer padrões de desenhos e relacioná-los a expressões e palavras com outros significados

> além dos euclidianos, unindo-se aspectos geométricos aparentemente antagônicos, quando apresentados em diferentes linguagens e em outros registros gráficos de representação. (KALEFF, 2010, p. 10)

Não há determinações, de acordo com BNCC, para que o ensino de infinito matemático e de geometrias não euclidianas façam parte obrigatoriamente do currículo da Educação Básica. Porém, algumas secretarias estaduais de educação já sugerem esse estudo, como é o caso das secretarias do Paraná. Há escolas no estado que incluem a discussão das geometrias não euclidianas no seu currículo, porém, encontram enormes dificuldades em implementá-lo.

Em Gaiawoski e Bassoi (S/D)

> Por que não suspeitar que sejam os conteúdos recentemente propostos pelas diretrizes curriculares do Estado do Paraná? As Geometrias Não Euclidianas e os Fractais. É provável que poucos professores os conheçam profundamente. O livro didático adotado pela escola não contempla os assuntos. Além disso, historicamente, a Geometria sempre foi deixada de lado no ensino brasileiro privilegiando-se a Álgebra e a Aritmética. (GAIAWOSKI;BASSOI, S/D, p. 6)

A BNCC não faz menção ao estudo das geometrias não euclidianas, porém outras formas de se estudar geometria, que não a plana, são apontadas nos PCN.

2.6 - "Como o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números reais se o conjunto dos números naturais é infinito?" Há infinitos maiores que outros?" – O infinito dos números racionais x o infinito dos números reais

Que o amor é como o mar: sendo infinito,

espera ainda em outra água se completar."

Mia Couto[16]

Cena 6:

A discussão era sobre a existência de números racionais e irracionais e suas diferenças e aconteceu em uma turma de 8º. Ano do Ensino Fundamental II, em uma escola da Rede Privada de ensino, no Rio de Janeiro. Discutia-se sobre conjuntos que poderiam ser enumerados e os que não poderiam ser enumerados. A professora apresentou a representação decimal de 2/3 e de $\sqrt{2}$, utilizando uma calculadora. E discutiu-se sobre o fato de o resultados serem finitos na tela da máquina de calcular, por ser um espaço limitado, porém, os números decimais em questão possuíam

[16] No livro "Contos do Nascer da Terra",

infinitas casas decimais. No primeiro, a representação é periódica. No segundo, não. Daí, surge a pergunta, baseada no filme "A culpa é das estrelas", que havia sido exibido na TV na véspera da aula: "Há infinitos maiores que outros?"

A pergunta primeira é: qual é o tamanho do infinito? O que determina qual é a cardinalidade de um conjunto? Como se sabe se um conjunto infinito pode ser ou não mensurado? O símbolo do infinito representa o maior número que existe? Essas perguntas surgem com frequência na discussão sobre números reais, sobre intervalos numéricos, e, principalmente, em se tratando do recorte e destaque feitos ao números irracionais.

Segundo Giraldo (2018),

> A ideia de infinito tem causado espantamento ao longo de toda a história da humanidade. Até mesmo a noção mais elementar de contagem leva a conclusões surpreendentes quando se trata de conjuntos infinitos. É bastante razoável considerar que dois conjuntos têm a mesma quantidade de elementos quando é possível estabelecer uma correspondência um a um entre eles, de tal forma que não sobre ninguém em nenhum dos dois lados. Porém, com base nessa ideia elementar, pode-se concluir que existem tantos números naturais quanto pares. Mas como é possível dois conjuntos terem a mesma quantidade de elementos se um cabe inteiramente dentro do outro?
> Indo um pouco mais além, nós podemos perguntar se todos os conjuntos infinitos são equivalentes. Isto é, será que existem infinitos maiores do que outros? No caso dessa pergunta, tanto a resposta "sim" quanto a resposta "não" levam a conclusões ainda mais surpreendentes. (GIRALDO, 2018, vídeo CH)[17]

O professor Léo Akio, no seu artigo "Há infinito maiores que outros?", apresentado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática, em 2016, nos diz que

> Cantor consegue mostrar que existem infinitos maiores que outros! A começar pelo infinito dos números irracionais. Cantor prova que os irracionais não podem ser enumeráveis, portanto é um infinito estritamente maior que o infinito dos naturais. Outros resultados mostram que o infinito dos números reais é mais esquisito e contraintuitivo que o infinito dos números naturais, que já é esquisito. 1º fato impressionante: O intervalo (0,1) possui a mesma quantidade de pontos que qualquer segmento na reta real. 2º fato impressionante: O intervalo (0,1) possui a mesma quantidade de pontos que a reta real! 3º fato impressionante: O intervalo (0,1) possui a mesma quantidade de pontos que o quadrado de lado 1. 4º fato impressionante: O intervalo (0,1) possui a mesma quantidade de pontos que o cubo de lado 1. 5º fato impressionante: O intervalo (0,1) possui a mesma quantidade de pontos

[17] Fala transcrita do vídeo publicado na revista "Ciência Hoje On line", disponível no youtube – Endereço eletrônico nas referências bibliográficas.

> que qualquer espaço de dimensão n! 6º fato impressionante: Existem infinitos tipos de infinitos! (AKIO, 2016, p. 7)

No capítulo 3 desse texto, destinado à análise das respostas de professores sobre a História Cultural do Infinito, será possível notar que poucos se debruçaram a tentar responder a essa pergunta nos questionários e, os que responderam, divergiram sob o fato de existirem infinitos maiores que outros. Alguns disseram que sim. Outros disseram que não, que há, na verdades, diferentes tipos de infinitos. Essa divergência é muito interessante, visto que os professores que tentaram responder, em sua maioria, são professores que formam professores. Dos professores participantes, os que estão na base, nas salas de aula de Educação Básica, não quiserem se aprofundar nessa pergunta.

Fica aí um questionamento: por que o tamanho do infinito é tão evitado nas discussões de sala de aula?

2.7 - *“Se o π representa o comprimento de uma circunferência dividido pelo seu diâmetro, ou seja, é uma razão e por isso é racional, por que é representado por um número de infinitas casas e sem período?” Números Racionais x Números Irracionais*

Cena 7:

A cena ocorreu em uma turma de 8º. Ano do Ensino Fundamental II da rede privada de ensino. A professora pediu que os alunos trouxessem objetos cilíndricos de casa, que contornassem a borda o objeto com caneta sobre o papel, e depois envolvessem esse objeto com barbante, reproduzindo esse mesmo contorno. Depois, pediu que medissem o diâmetro da circunferência representada no papel e medisse o barbante, e dividissem o valor maior pelo valor menor.

Isso foi feito para objetos cilíndricos de diferentes diâmetros. Foram anotados os resultados em uma tabela, todos muito próximos de 3,14. Até que um aluno pergunta: “Professora, pi é 3,14? Porque se é, então ele é um decimal exato e não um irracional. Número irracional não é infinito e não periódico? Como que uma divisão pode representar um número irracional, se ele não pode ser uma razão entre dois números?”

A história se passou em uma turma de nono ano, onde desejava-se mostrar como calcular o comprimento de uma circunferência a partir do tamanho do seu diâmetro. Posteriormente, o mesmo tema seria aproveitado para o cálculo da superfície de um círculo.

É importante dizer que, no currículo atual de Matemática do Ensino Fundamental II das redes privadas de ensino cariocas, o conceito de número irracional já parte do planejamento de ensino para o 8º. Ano, e que os alunos desse grupo onde a pergunta ocorreu já conheciam os números irracionais e os racionais e sabem diferenciá-los de acordo com a sua apresentação decimal.

A experiência de medir o comprimento da circunferência e seu diâmetro e representar a razão entre os dois para chegar ao valor de π é muito utilizada nas aulas do ensino fundamental II. O debate se baseia na comparação de valores entre os números achados pelos alunos e da sua aproximação do valor 3,14, o que acaba induzindo os estudantes a um conceito errado. Muitos acreditam que o valor de π é exatamente 3,14 e isso será apresentado nesse texto no final deste capítulo.

Segundo Stewart (2016),

> A relação entre a circunferência e o diâmetro não é tão imediata. Se você desenhar um hexágono dentro de um círculo, poderá se convencer de que a circunferência é um pouco maior que o triplo do diâmetro. A figura mostra seis raios, que se juntam aos pares para formar três diâmetros. O hexágono tem o mesmo comprimento que seis raios – isso é, três diâmetros. E o círculo é claramente mais longo que o hexágono. (STWEART, 2016, p. 204)

O hexágono descrito por Stewart (2016) é como o ilustrado abaixo.

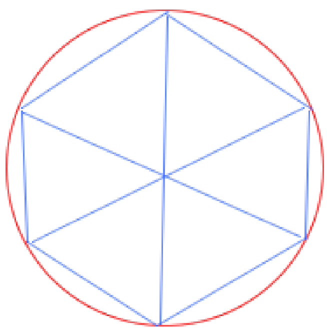


Imagem 10[18]

[18] Do livro "O fantástico mundo dos números, do zero ao infinito", p. 204

Apesar dos alunos esperarem que esse valor encontrado por todos seja idêntico, afinal qualquer circunferência é semelhante a outra e, por isso, suas medidas são proporcionais, o esperado não ocorre. E o questionamento permanece. Alguns suspeitam que mediram errado. Outros, que não acharam corretamente o centro da circunferência. Na maioria das vezes, ninguém pode imaginar que o π calculado nessa atividade jamais se aproximará do real, e muito menos imagina que a quantidade de casas decimais do número é infinita, e menos ainda que suspeita-se de que há alguma parte periódica nessa sequência infinita de algarismos da parte decimal, mas que ninguém conseguiu provar.

Como já citado na pergunta 2 anteriormente, o método de Eudoxo, ampliado por Arquimedes, foi utilizado para o cálculo de π. Na ilustração acima, fica claro que esse valor é próximo de 3. Mas o que está em questão na pergunta da cena 7 não é como pi foi calculado, é como o conceito de número racional está sendo utilizado para se chegar a um valor irracional. Partindo daí, é trazido para a discussão como é que está sendo definido para os alunos o que é um racional. Esse número é representado pela razão entre dois números inteiros. No caso do π, apesar de ser definido como a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, essas medidas nunca serão simultaneamente inteiras, daí o fato de π ser irracional, e não racional.

2.8 - *"Ao construírmos uma pipa teatrédrica (máquina voadora de Grahan Bell), sempre teremos uma nova face triangular que é formada por subdivisões de triângulos, com dobro da quantidade de triângulos da anterior. Até quantas vezes é possível subdividir esse triângulo dessa forma? - Triângulo de Sierpinsk, Poeira de Cantor e Geometria Fractal*

O que é feito de pedaços é para ser amado.

Manoel de Barros

Cena 8:

A aula acontecia no espaço "maker"[19] da escola, em uma turma de 6º. Ano da rede particular de ensino carioca. O objetivo da aula era construir uma pipa tetraédrica, como a máquina voadora de Graham Bell, utilizando 4 células tetraédricas, previamente confeccionadas pelos alunos dessa mesmo ano, que foram organizados em equipes.

Depois disso, quatro dessas pipas seriam aglomeradas para formarem uma nova pipa. A pergunta é quantas células tetraédricas seriam utilizadas? E se outras quatro pipas como essa nova formassem uma outra? E as respostas foram surgindo: 16, 64, ...

Depois, em uma brincadeira entre o plano e o espacial, perguntou-se o que acontecia com as faces da pipa. Observou-se que se subdividiam em muitos triângulos, na mesma quantidade de vezes que a quantidade de células tetraédricas necessárias para construir as pipas foi aumentando.

A pergunta surge no momento dos seminários posteriores à construção das pipas. Nesse seminário, um dos grupos ficou responsável por apresentar a relação entre a construção da pipa e o conceito de Geometria Fractal e o Triângulo de Sierpinski. E aí foi feita a pergunta: até quantas vezes esse triângulo poderá se subdividir?

Discutir outras geometrias, que não a geometria euclidiana, é um desafio a ser proposto aos professores da Educação Básica. Segundo as orientações do PCN (2002),

> "especialmente adequado mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da geometria com linguagens e raciocínios diferentes daqueles aprendidos no ensino fundamental com a geometria clássica euclidiana "(BRASIL, 2002, p.125)

. Sendo a Geometria uma ciência que tem o intuito de estudar as formas do ambiente, é da maior importância que as outras geometrias sejam trazidas para discussão da sala de aula, visto que o ambiente que vivemos apresenta irregularidades e espaços não planos, que não podem, por isso, ser contemplados pela geometria de Euclides. No caso da pergunta em questão, o assunto a ser conversado na sala de aula é a Geometria Fractal.

Segundo Kaleff(2010)

[19] O espaço "maker" é uma espécie de oficina de conhecimento, um espaço "mão na massa", onde os *alunos constroem objetos utilizando diversos materiais e fazem experiências com os mesmos.* Posteriormente, essa experiência é discutida por todos e, em equipes, os alunos realizam relatórios com suas conclusões a respeito do episódio científico experimentado.

> Após as descobertas iniciais, passaram-se muitos anos, para que outros conceitos surgissem e permitissem descrever melhor ainda os objetos de nossa realidade, ou seja, aqueles objetos naturais com formas repetitivas irregulares, tortuosas ou salientes. Em meados do século XX, o matemático Benoit Mandelbrot (1924 - 2010) inventou o conceito denominado fractal. Este termo vem de duas palavras latinas fractus e frangere que significam quebrar e partido, e refere-se às características naturais dos objetos que parecem fragmentados, irregulares e partidos, cuja dimensão pode ser expressa por um número não inteiro, fugindo da noção de duas e três dimensões referentes aos objetos do plano e do espaço euclidianos. Desde então, aquela geometria que trata mais propriamente dos objetos naturais é denominada geometria fractal e vem se consolidando como nova área da Matemática devido ao desenvolvimento dos computadores e de novas teorias advindas da Física, Biologia, Astronomia e outras Ciências. (KALEFF, 2010, p. 4)

Mandelbrot, matemático polonês, foi o primeiro a tratar fractais com uso de computação gráfica. O matemático é especialista em teoria das rugosidades e autossimilaridade. E é sobre o conceito de autossimilaridade que a provocação dessa atividade fala.

Stewart(2016) cita Manderlbrot quando define autossimilaridade

> Mandelbrot introduziu a palavra “fractal” para descrever qualquer figura que tenha uma estrutura intrincada, não importando quanto é ampliada. Se a estrutura em escalas pequenas é a mesma nas grandes, o fractal é autossimilar. Se apenas traços estatísticos se mantêm nas diferentes escalas, o fractal é dito estatisticamente autossimilar. Os fractais mais fáceis de entender são autossimilares. A junta de Sierpinski é um exemplo. Ela é feita de três cópias de si mesma, cada uma com metade do tamanho. (STEWART, 2016, p. 238)

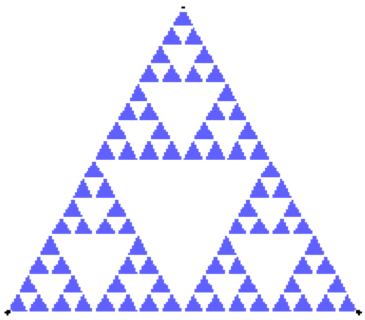


Imagem 11[20]

Sierpinski inventou esse conjunto fascinante no início do século XX, em 1915, embora já existissem formas parecidas com esta. O autor considera o a invenção, simultaneamente, cantoriana e jordaniana.

[20] Junta de Sierpinski, imagem extraída do site <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/sierpinsky.htm>, Acesso em 20 Nov. 2019

Para o melhor entendimento da atividade proposta e provocadora da pergunta sobre o os fractais e sobro o conceito de infinito, é apresentada a imagem abaixo, extraída do site do Clube de Matemática da OBMEP, sobre a publicação das Pipas Teatraédricas de Graham Bell.

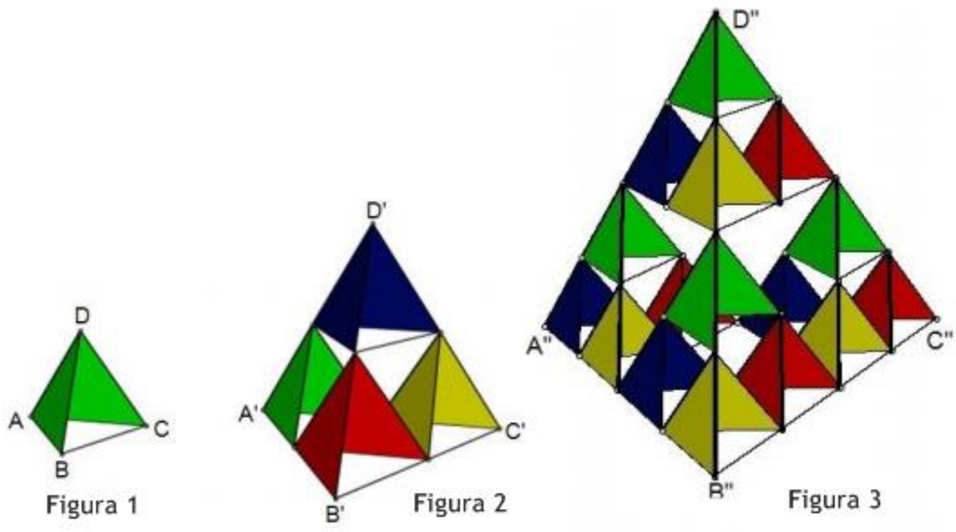


Imagem 12[21]

Os alunos foram organizados em grupos com 4 componentes. Cada componente do grupo ficou responsável por construir uma célula tetraédrica como a da figura 1. E cada equipe, ao juntar as suas células tetraédricas, formou uma pipa como a da figura 1. E cada quatro equipes construiu uma pipa como a da figura 3. A atividade pretendia explorar as propriedades do tetraedro e do triângulo equilátero. Analisando as quantidades de tetraedros utilizados ou de triângulos que apareciam em cada face, também havia o intuito de associar ao conceito de potenciação de base 2. Porém, a atividade evoluiu para além das expectativas e a discussão sobre Geometria Fractal se fez presente. Dessa forma, construiu-se uma pipa com uma estrutura muito próxima do modelo uma pirâmide de Sierpinsk em 3D.

Após as construção das pipas, os estudantes deveriam apresentar suas observações acerca de alguns conteúdos já estudados e suas relações com a elaboração das pipas. Com um vocabulário geométrico ainda muito básico, os estudantes conseguiram perceber a relação de potenciação presente na construção das células e suas quantidades à medida que a pipa se construía, e principalmente, de forma intuitiva,

[21] Imagem extraída do site do Clube de Matemática da OBMEP, sobra a atividade “Pipa, uma brincadeira séria.”

a ideia de que o volume desse objeto geométrico tinha um comportamento diferente dos já estudados nas aulas de Geometria Espacial.

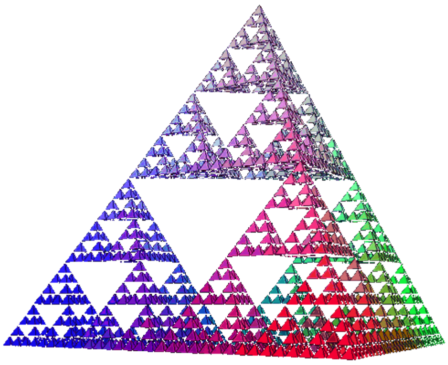


Imagem 13[22]

. Considerando a imagem dessa pirâmide, é correto afirmar que o seu volume tende a zero mas a superfície se mantém constante. A cada subdivisão n, o número de triângulos aumenta 3^n e a medida do lado do triângulo passa a ser $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

A partir da construção das pipas tetraédricas de Graham Bell, é possível discutir com os estudantes os conceitos de autossemelhança, autossimilaridade e iteração, todos relacionados às repetições de padrões, no caso, de triângulos semelhantes entre si, com lado medindo a metade do outro construído anteriormente.

Segundo Nunes(2006)

> A autosemelhança exacta só existe em figuras geradas por processos matemáticos em que, o conjunto total é formado por pequenas réplicas perfeitas delas mesmas, ou seja é formado através de um processo iterativo como é o caso, por exemplo, do triânngulo e do tapete de Sierpinsk. (NUNES, 2006, p. 29)

Ao longo dessa atividade, os alunos buscaram padrões tanto na quantidade de triângulos quanto na conservação das suas propriedades, a medida que a pipa ia aumentando de tamanho. De forma inversa, ao invés do objeto estudado ir se subdividindo, cada parte construída era uma parte autossemlhante à maior. A questão da iteração

Na ilustração a seguir temos o fractal chamado Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor. É um fractal muito interessante, considerado o primeiro de todos, e muito fácil de se entender, visto que consistem em pegar um segmento de tamanho 1, dividir em 3 partes, e retirar a parte do meio. Depois, pegar o segmento de reta que mede 1/3, dividir

[22] Pirâmide de Sierpinski 3D retiradas do site <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/sierpinsky.htm>, Acesso em 20 Nov. 2019

em novamente em 3 partes e retirar a do meio, e assim por diante. Essa imagem é muito útil para se associar a ideia de fractal à ideia de frações, de partes, à ideia de autossemelhança e também ao conceito de iteração. O resultado desse modelo será uma sucessão de pontos.

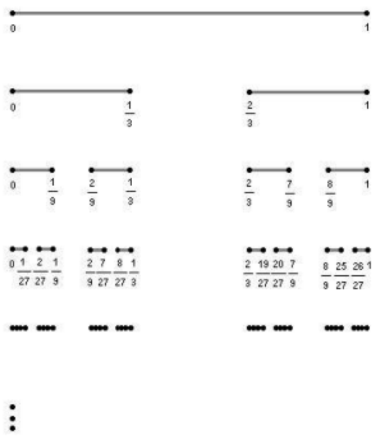


Figura 2.1: Conjunto de Cantor.

Figura 2.3: Esponja de Menger.

Imagem 14[23]

Outro fractal muito conhecido é a Esponja de Menger, ou Esponja de Sierpinsi-Nenger, que é uma expansão em 3D do Conjunto de Cantor e do Tapete de Sierpinski.

Janos (2008) nos diz que

> O termo autossemelhança é, intuitivamente, bastante claro e autoexplicativo. Entretanto, não é tão fácil dar uma definição matematicamente precisa sobre autossemelhança. Por exemplo, em um objeto autossemelhante como a couve-flor, a autossemelhança se dá até certo grau de redução no fator de escala. O Conjunto de Cantor é talvez o primeio objeto conhecido como fractal. Embora não possua o apelo visual da maioria dos fractais, este conjunto é a peça fundamental do estudo dos fractais e dos Sistemas Dinâmicos. (JANOS, 2008, p. 27)

Poranto, para a pergunta em questão, a resposta é infinita vezes, o que vai acarretar na construção de um tetraedro tão grande quanto for necessário, mas de volume nulo.

2.9 – ***"Se uma soma é um resultado exato de parcelas, como é possível calcular uma soma de infinitos termos de uma sequência numérica?" – Soma de uma progressão com infinitos termos***

"O suficiente é para quem não ama.

[23] Imagens retiradas da dissertação de Nunes(2009), relacionada nas referências

No amor só existem infinitos."
Mia Couto

Cena 9:

A aula é sobre progressões geométricas e ocorre em uma turma de 2ª. Série do Ensino Médio de um curso noturno, que é ministrado em uma escola da rede pública estadual de ensino carioca. Deseja-se trabalhar o conceito de soma de termos de uma PG infinita. Para isso, inúmeras sequências são apresentadas e questiona-se a sua regularidade, qual seria a razão da PG e o fato dela não ser finita. Um aluno não consegue conceber que uma coisa que não termina possa ser somada, visto que, no algoritmo da adição, a quantidade de parcelas sempre é conhecida. A cena se dá dentro dessa conjuntura. Por que essa soma tem um resultado? Como uma sequência que não termina nunca ter seus termos somados?

> Usando sua técnica refinada de raciocínio chamada de "método", Arquimedes (287- 212 A.C.) alcançou vários resultados importantes envolvendo áreas e volumes de várias figuras e sólidos. Na verdade, ele construiu vários exemplos e tentou explicar como somas infinitas poderiam ter resultados finitos. Dentre seus vários resultados estava que a área sob um arco parabólico é sempre dois terços da base vezes a altura. Seu trabalho não foi tão completo ou rigoroso, como daqueles matemáticos que vieram depois e desenvolveram seqüências e séries como Newton e Leibniz, mas foi tão impressionante quanto. Embora Arquimedes tenha sido obstruído pela falta de precisão e notação eficiente, foi capaz de descobrir muitos dos elementos da análise moderna de seqüências e séries. (COSTA, s/d, p. 7)

Aqui temos uma pergunta bastante pertinente, mas que já pode ser respondida fazendo-se referência a outras perguntas discutidas anteriormente. Da mesma forma que discutimos o Paradoxo de Zenão e a soma de frações do tipo $1/2^n$, podemos aproveitar a mesma ideia para responder ao estudante em questão que há possibilidade de se somar infinitos termos e chegar a um resultado inteiro. É bastante plausível, inclusive, apresentar representações geométricas, onde figuras semelhantes são organizadas de modo a formar uma unidade, como as representadas na p. 30. Os aspectos históricos, como os descritos na citação acima, também são de grande relevância e, como se pode notar, são associados aos paradoxos e a outros temas já relatados anteriormente no texto.

2.10 – 0,99999999... é infinito e 1 é finito. Por que 0,9999999... é igual a 1? Números Irracionais e Dízimas Periódicas

Repetir, repetir, até ficar diferente.

Repetir é um dom do estilo.

Manoel de Barros

Cena 10:

A cena ocorre em uma sala de aula de Ensino Fundamental, de uma turma de 8º. Ano, onde a professora está apresentando um método para transformar dízimas periódicas simples em fração. O espanto acontece quando se discute o número racional 0,99999999... que, ao ser representado como 9/9, por ser uma dízima periódica simples, com período contendo apenas um dígito, mostra-se que 0,99999... é igual a 1.

Um grupo de alunos não se conforma com essa demonstração e acredita ser contraditória, pois 0,9999999... não pode ser 1. Pode ser próximo, mas nunca 1. E a discussão parte daí.

A discussão aqui é muito próxima à que foi feita com os irracionais. A confusão entre o número e sua representação também surgem nessa pergunta. O que temos é a mesma quantidade, sendo representada de formas diferentes. Portanto, o trabalho que deve ser feito, nesse caso, é de diferenciar o conceito de número do conceito de numeral.

CAPÍTULO 3 – DAS RESPOSTAS A ESSAS PERGUNTAS E O QUE OS PROFESSORES PENSAM SOBRE O ENSINO DE HISTÓRIA CULTURAL DO INFINITO

"Eu tô te explicando pra te confundir,
Eu tô te confundindo pra te esclarecer,
Tô iluminado pra poder cegar,
Tô ficando cego pra poder guiar."

Tô – Tom Zé

Falar de História das Ciências na Educação Básica é um desafio? É, é um desafio e tanto. E quando essa história está relacionada ao conceito de Infinito, o desafio torna-se ainda maior. Esses universos limitados pelo tempo, chamados de ano letivo e de planejamento anual, não são muito parceiros dessa discussão. Garantir a grade curricular cumprida num curto espaço de tempo costuma ser o maior objetivo do Ensino Básico. É necessário cumprir os fundamentos. E os devaneios podem esperar a chegada o Ensino Superior. Será mesmo que a sala de aula do aluno protagonista pode esperar tanto tempo para que seus questionamentos aflorem? Claro que não. Por mais denso que seja o tema da pergunta, a busca de sua resposta deve ser garantida.

Nas experiências relatadas anteriormente, onde surgem as perguntas, a proposta de trabalho sempre está direcionada para a investigação e as práticas de laboratório. Esse espaço, diferente da aula expositiva, é um lugar que garante a ação do aluno como protagonista e dá espaço para os seus questionamentos. De acordo com as respostas que serão analisadas no capítulo 3, é fácil diferenciar qual é a sala de aula das perguntas das qual é a sala de aula da passividade. A sala de aula da investigação e das práticas laboratoriais é aquela que será o terreno fértil para as melhores perguntas e para o ir além de.

Na sala de aula da investigação, onde as perguntas são permitidas na sua forma mais espontânea, é necessário que se garanta que a forma de responder seja tão espontânea quanto. Há de se ter muito cuidado com a delicadeza dessa escuta, que nem sempre está disponível, e agora está lá porque a pergunta foi provocada. Nesse contexto, qual é o melhor jeito de se responder às perguntas sobre História Cultural do Infinito? Será que é discutindo extratos dos livros de história da Matemática? Lendo os boxes dos livros didáticos? Utilizando vídeos? Ou será que a contação de histórias e a poesia podem ser suas aliadas? Conversar com a criança requer adequação da linguagem. E a arte é uma forte aliada nesse aspecto. A arte comunica sem amarras, sem limites, instiga o olhar e o pensamento. Essa é a forma de se responder à questões tão filosóficas e tão profundas trazidas pelas crianças.

Sobre Infinito e Arte, Gonçalves, Ribeiro e Queiroga (2018) afirmam que

> A apresentação de uma cartografia do tempo e do infinito, com a relação espaço-tempo, através de objetos cartográficos mutantes, que se reconfiguram a cada montagem, não esgota as possibilidades de instalação. Os objetos, baseados em mapas e redes urbanas, também se apresentam de diversas formas, pois as cartografias mudam com a interação com o homem,

> como um organismo vivo pronto a se reconfigurar a cada intervenção. A cartografia, nesse caso, é um objeto transdisciplinar e, à luz do texto de Serres, promove uma filosofia mestiça, pois fala de História, fala de Política, fala de Poder, fala de Geografia, fala de Matemática, fala de História da Arte, ou seja, a característica mutante da cartografia permite que seu corpo vivo seja permeado pelos conhecimentos como corpos misturados. (GONÇALVES;RIBEIRO;QUEIROGA,2016,p. 7)

O que discutido pelas autoras nesse artigo vai de encontro às palavras de Deleuze e Guattari (2010) falam sobe as cores nas obras de arte e dizem que é como uma passagem do finito para o infinito, mas também do território para a desterritorialização. É bem o momento do infinito.

Considerando essas falas, a arte, a literatura e as demais expressões e comunicações devem estar a serviço da sala de aula que faz ciência, pois são janelas para uma comunicação que favorecem o ensino libertário. As misturas de saberes e de formas de comunicação devem estar a serviço de quem faz ciência na base.

3.1 – Resultados dos questionários submetidos aos professores da Educação Básica sobre o conceito de infinito

Ao longo dos últimos 4 meses de pesquisa, 28 professores de Matemática participaram da pesquisa sobre o ensino do conceito de infinito na Educação Básica. Desses professores, ´todos possuem pelo menos pós graduação strictu senso, 64 % possuem pelo menos mestrado, 2 possuem doutorado.

Desses professores, 36 % tiveram História da Matemática como disciplina no seu curso de Licenciatura e nenhum deles teve uma abordagem destinada a como ensinar Matemática utilizando a história na sala de aula.

Todos concordaram que os livros didáticos não abordam História da Matemática de forma satisfatória. A maioria - cerca de 70% dos participantes - diz não utilizar história da matemática na sua abordagem em sala de aula. Um respondeu que usa às vezes. A maioria não conhece nem nunca utilizou livro paradidático de história da Matemática nas suas aulas.

Praticamente 100% dos entrevistados disseram que seus alunos fazem perguntas em sala de aula sobre o conceito de Infinito. Dos participantes, apenas 2 disseram que essas perguntas nunca surgiram em suas aulas.

A lista de frases a seguir foi oferecida aos professores, acompanhada da seguinte pergunta:

“Na sua opinião, qual ou quais das frases a seguir causaria(m) maior polêmica nas suas aulas?”

( ) O número π representa a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, porém não é um número racional e sim irracional.

( ) É possível enumerar os números racionais mas não é possível enumerar os números reais.

( ) A terra não é plana.

( ) Uma reta é infinita.

( ) É possível somar os termos de uma sequência infinita de números.

( ) Um segmento de reta pode ter uma medida representada por um número irracional.

Dos itens descritos acima, três foram os mais selecionados:

. O número π representa a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, porém não é um número racional e sim irracional.

. É possível enumerar os números racionais mas não é possível enumerar os números reais.

. É possível somar os termos de uma sequência infinita de números.

3.2 – Conversas com professores que preparam professores

A lista de professores abaixo é composta por mestres e doutores formadores de professores de Matemática. Entendamos formadores de professores os profissionais que atuam em cursos de Licenciatura, possuem programas de formação continuada, prestam serviços para prefeituras atuando em formação de professores e, também, para orientadores de programas PIBID, de pós-graduação Latu Sensu ou Strictu Sensu. Há também nessa lista professores que atuam na educação básica e recebem alunos formandos de universidades públicas como estagiários.

Todos esses professores participaram de rodas de conversas ou enviaram questionários, via e-mail, contendo as questões a seguir. As questões já estarão acompanhadas com as respostas enviadas pelos professores participantes. Nota-se que nem todas as perguntas foram respondidas pelos professores. A maioria selecionou uma pergunta e desenvolveu uma resposta. Embora tenha sido de desejo da autora que a resposta fosse destinada aos alunos e, por isso, tivesse uma linguagem voltada para o ensino de Matemática na escola básica, muitos dos colegas responderam tecnicamente, como se a resposta fosse destinada a professores em formação continuada. Apenas um dos entrevistados se voltou para essa questão, inclusive desculpando-se pelo fato da inadequação dessa linguagem para o que a professora realmente desejava: uma resposta voltada para alunos, e não uma troca de experiência entre professores. Abaixo temos as perguntas e trechos das respostas oferecidas pelos colegas professores entrevistados.

PERGUNTA 1:
Na sua opinião, o conceito de Infinito Matemático é bem discutido na Educação Básica?

Professor 1:

Não. Na verdade esse assunto nem aparece nos PCN's nem na BNCC, nem em nenhum currículo brasileiro que eu conheça.

A justificativa é que:

- *A tendência é o professor fazer o que lhe foi ensinado no ensino básico.*
- *A formação inicial não incentiva a abordagem desse assunto.*

Professor 2:

Acho que não, a experiência que recebo dos alunos de licenciatura é de que se comenta o infinito em algumas situações, mas de maneira superficial.

Professor 3:

Minha percepção é que o infinito aparece na Educação Básica de forma periférica, sempre associado a um assunto principal (infinitos dígitos na representação decimal de números, soma dos infinitos termos de uma P.G., etc.).

Professor 4:

Não, o conceito de infinito matemático (sem maiúsculas , não vejo porque ele está em maiúsculas) é pessimamente compreendido.
Os professores não têm a menor ideia que como são definidos os conjuntos numéricos, fazem uma enorme confusão e passam essa confusão aos estudantes.

Em especial aos professores de educação matemática são em geral os que menos sabem matemática, e passam esse despreparo adiante.

A confusão começa confundindo o infinito enquanto número (ordinais e cardinais) com infinito enquanto tendência (limites).
Um limite ser infinito significa apenas que ele é uma operação que produz números reais arbitrariamente grandes, enquanto o infinito como cardinal e ordinal é realmente um número.

Eu diria que os professores não sabem ler as definições.

Professor 5:

Não! Nem o infinitamente grande e nem o infinitamente pequeno. Muitos alunos ainda acham que os racionais e os reais possuem a mesma cardinalidade, fato que os levam a pouco considerar os irracionais. Esse pensamento também chega na universidade. Talvez seja a pouca valorização dos números irracionais nos livros didáticos, uma questão de conveniência por parte dos autores.

Professor 6:

Não. Porque os professores que formam esses estudantes também não tem uma compreensão muito clara do conceito

Professor 7:

Não, pois os professores não se sentem habilitados a transformar um conceito "conplexo" para uma linguagem mais "básica".

Professor 8:

Não! O susto começa nos conjuntos numéricos. Poucos compreendem as diferenças entre as cardinalidades dos conjuntos numéricos, ou seja, que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais possuem a mesma cardinalidade e que a cardinalidade do conjunto dos números reis é exponencialmente maior. Poucos concebem a ideia do infinitamente grande ou pequeno.

Professor 9:

Não.

Professor 10:

Apesar de trabalhar o tempo todo como a ideia de infinito, este conceito não é bem discutido no Ensino Básico.

Professor 11:

Ele não é discutido, é romanceado.

PERGUNTA 2:

Você acha que os alunos chegam aos cursos de Matemática com esse conceito bem construído, de modo que tenha subsídios para entender os conceitos iniciais de Cálculo?

Professor 1:

Não. Justamente por não terem visto no ensino básico. A evidência disso é que a maioria dos ingressantes no ensino superior acredita que a quantidade de números pares é menor que a de naturais.

Professor 2:

Não só na licenciatura, em geral os estudantes ingressam na universidade entendendo, qdo entendem, a parte técnica de funções, mas sem entender esse conceito. É um desafio passar o conceito de infinitésimos, muitos saem do cálculo sem entender que foi esse conceito que deu origem ao cálculo diferencial e integral, embora entendam a diferença entre continuo e discreto. As vezes penso que seria bem interessante ensinar análise antes dos cálculos, mas não sei se seria producente.

Professor 3:

Não, eles não chegam com o conceito bem construído.

Professor 4:

Pessimamente construído.
Os professores (a não ser aqueles que frequentam boas universidades, em geral públicas) não têm a menor ideia , e os alunos muito menos. Tudo começa pelo fato de que os professores não conseguem ler as definições, como eu disse acima.
Pior ainda, nem sabem que os conceitos matemáticos tem definições muito claras e precisas.

Professor 7:

Não. Infelizmente a maioria dos alunos chegam ao curso de Matemática pensando que só estudarão números.

Professor 8:

Sim! Principalmente abordando paradoxos e teorias associadas ao matemático Georg Cantor.

Professor 9:

Nunca tive oportunidade de ministrar disciplinas para a Licenciatura que tratam desse conceito.

Professor 10:

Não. Talvez por isto os alunos apresentam grandes dificuldades no estudo de limite, em especial. Mas é claro que outros fatores influenciam também no baixo rendimento, mas a pouca relação com a ideia de infinito, apesar de o professor da escola básica trabalhar o tempo todo nas questões numéricas e geométricas, por exemplo, que envolvem a ideia do infinito, ainda este conceito não está bem estruturado para sustentar uma compreensão mais detalhada no ensino de cálculo.

Professor 11:

Absolutamente não, os estudantes tratam o infinito como se fosse um número,

a ponto de escreverem (bobagens como) $\frac{1}{0} = \infty$.

PERGUNTA 3:

Você costuma discutir historicamente o conceito de Infinito Matemático com os seus alunos da Licenciatura?

Professor 1:

Eu não atuo na licenciatura. O que tenho são licenciandos que fazem estágio no Colégio de Aplicação da UFRJ.

Nas vezes que abordei esse assunto eles somente assistiram às aulas.

Professor 2:

Sim, mesmo em disciplinas que não são de cálculo ou análise tento discutir o conceito de infinito e a questão da enumerabilidade dos reais, faço em matemática discreta, para que entendam a diferença entre discreto e contínuo, faço em funções holomorfas, na explicação da compactificação do plano, em teoria de grupos, no estudo de grupos simétricos infinitos e no porquê dos grupos Z e IR não serem isomorfos, em geometria nas medidas circulares. Digo que sempre há uma maneira de abordar o assunto com os alunos em sala de aula de maneira que tenham uma noção do conceito de infinito.

Professor 3:

Sim, o método da exaustão de Arquimedes e o trabalho de Cantor com o infinito são dois clássicos históricos.

Professor 4:

Sim, sempre.

Mostro os paradoxos ligados ao infinito, os pseudo-paradoxos, as provas de Cantor sobre não-enumerabilidade dos reais, sobre a enumerabilidade dos racionais, as construções básicas dos ordinais e cardinais, etc

Professor 7:

Não dou aula para curso de Licenciatura.

Professor 9:

Não

Professor 10:

Sim, principalmente no estudo da geometria. A discussão vem mais associada a ideia de continuidade da geometria sintética e os fractais.

Professor 11:

Sempre e profundamente.

PERGUNTA 4:

Há interesse por parte dos alunos formandos em perguntar sobre esse assunto?

Professor 1:

Os formandos do ensino médio e do fundamental têm muito interesse no momento que são apresentados ao tema, mas dificilmente têm a espontaneidade de perguntar sobre qualquer assunto.

Professor 2:

Acho que este é um tema que sempre desperta interesse, principalmente quando o entendem. Inclusive no estudo das paralelas, aquelas retas que se encontram no infinito na compactificação do plano se encontram de fato aí. Há colocações filosóficas, mas é um assunto que sempre dá pano pra manga.

Professor 3:

Certamente! O infinito sempre fascinam os alunos!

Professor 4:

Há muito interesse. Estudantes são fascinados pela questão do infinito, que é uma das mais importantes da racionalidade humana.

Professor 7:

Não, pois entendem como um conceito abstrato.

Professor 8:

Pouco! A maioria fica espantada quando se demonstra que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais possuem a mesma cardinalidade.

Professor 9:

Não

Professor 10:

Sim, sempre.

PERGUNTA 5 **Se o Pi é um número irracional, por que é definido como a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro?**

Professor 1:

Ele não é definido como comprimento da circunferência pelo diâmetro, pelo menos não no CAp UFRJ.

O que deixamos claro, para os estudantes, é que historicamente isso foi uma experiência e observou-se que algo estranho acontecia quando se calculava essa razão.

Acho que a prova da irracionalidade não deve ser assunto do ensino básico nos seus mínimos detalhes.

Professor 2:

É por conta dessa razão que temos a impressão que pi é construtível, mas nossa régua sempre comete um erro e na verdade encontramos uma aproximação.

Professor 4:

Porque ser racional ,por definição não é ser a razão entre duas coisas , mas ser a razão entre dois números inteiros.

O quociente entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro não define nenhum número racional, porque o comprimento da circunferência e seu diâmetro nunca são ao mesmo tempo números inteiros.
Substituir a palavra "quociente" aí em cima pela palavra "razão" não fabrica um número racional.
Pi também é o quociente entre 2.Pi e 2,
Isso não faz dele um racional simplesmente porque 2 pi não é um inteiro.

Professor 8:

Embora seja representado por meio de uma razão, ou o numerador ou o denominador ou os dois são obrigatoriamente um número múltiplo ou submúltiplo do número PI, isto é, se o raio é um número racional, tem-se que o comprimento (2.PI.raio) será um valor irracional e não poderá ser representado por meio de uma razão de números inteiros, ou se o comprimento for um número racional, tem-se que o raio (comprimento/2.PI) será um valor irracional e também não poderá ser representado por meio de uma razão de números inteiros. Se o comprimento e o raios forem números irracionais, logo, também, não poderão ser representados por meio de uma razão de números inteiros. Esse tipo de raciocínio que está vinculado ao *questionamento pode levar à indução ao erro se não for bem esclarecido. O mesmo ocorre quando afirmam que 3,14... é um número irracional. (Pode ser qualquer coisa)*

Professor 9:

As ferramentas que usamos para medir, nos dão medidas aproximadas de comprimento, devido a sua escala. Por exemplo,
uma régua escolar possui escala em milímetros, certo?! Todas as medidas que fizermos com esse instrumento não fara diferença precisa entre 3,1 cm, 3,14cm, 3,1415cm ou pi cm. De forma mais geral, todo instrumento de medida tem uma escala mínima que consegue detectar. Ou seja, as medidas dadas por um instrumento de medida são sempre aproximações das medidas reais, cujo número de casas decimais está relacionado a limitação do instrumento. Resumindo: como usamos instrumentos mecânicos para fazer medidas, nossas medidas serão sempre aproximadas por números racionais (mais precisamente, neste caso, números com uma quantidade limitada de casas decimais). Mas se lembrarmos que cada uma dessas medidas é apenas uma aproximação da medida real, não tem nenhum problema em Pi ser a razão entre o comprimento e o diâmetro de qualquer circunferência.

Professsor 10:
Sim, este ano alguns alunos vieram me procurar para discutir esta ideia do infinito na relação da sala de aula do ensino médio em especial.

Professor 11:

Todo número real é igual a ele mesmo dividido por 1, portanto todo número real pode ser reescrito em forma fracionária. Veja: $\pi = \frac{\pi}{1} = \frac{3\pi}{3}$ *ou ainda* $\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$.

Um número racional não é aquele que simplesmente pode ser escrito em forma fracionária, isso qualquer número real pode, como eu disse. Um número racional é aquele que pode ser escrito em forma fracionária com numerador e denominador inteiros, sendo esse último diferente de zero.

Quando dizemos que π *é irracional estamos dizendo que a medida do comprimento da circunferência e a medida do seu diâmetro (diante de uma mesma unidade de medida) jamais serão simultaneamente inteiras.*

PERGUNTA 6

Como é possível somar uma quantidade infinita de termos de uma PG, se ela não termina nunca?

Professor 1:

O melhor exemplo é a soma 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^n + ... relacionando-a com um quadrado de lado 1, cuja área é 1. Dividindo-se ao meio e ao meio, ... chega-se à conclusão que essa soma infinita não pode divergir, portanto converge.

Professor 2:

É possível porque a partir de certo ponto a parcela a ser somada se aproxima de zero, não sei se é uma explicação que os alunos entenderiam, uma opção seria encontrar um certo número de termos cuja soma já estaria bem próxima do valor da soma infinita.

Professor 4:

Porque a soma da PG é o limite de uma série de números inteiros (a saber, o limite das somas parciais) .O ponto fundamental aí é o conceito de limite que foi criado no século 19 e mudou a cara da matemática.

Professor 8:

Mostraria por meio de números decimais periódicos, que estes constituem uma PG infinita, entretanto, representados por meio frações com numeradores e denominadores de números inteiros positivos ou negativos, se for o caso.

Professor 9:

A noção de soma que conhecemos soma de dois em dois termos. Por exemplo: para somar 125 + 314 + 118, somamos 125 + 314 e depois o resultado com 118 (podemos somar de outras formas, pois a ordem não importa mas sempre de dois em dois termos). Usando essa ideia, de fato não é possível somar infinitos termos. Eu concordo! Precisamos pensar um outra forma. Essa forma consiste em somar os termos *dois a dois, e observar o que está acontecendo com o resultado. Será que o resultado está se aproximando de algum número? Caso esteja, é bastante razoável acreditar que esse número é uma boa forma de definir essa soma infinita.*

Professor 10:

Esta é uma questão bastante relevante. Este exemplo é uma ótima opção para se trabalhar com a ideia de limite. Partiria do paradoxo da corrida de Aquiles e a Tartaruga. Depois partiria para o conceito de sequências e somas finitas de sequências, expandindo para a ideia de limite. Já fiz um trabalho deste com alunos do ensino médio e foi muito interessante a compreensão que tiveram.

Professor 11:

Há uma diferença fundamental entre as imagens referentes ao processo de adições sucessivas e aquelas imagens referentes ao produto final desse processo (a soma). Se você julga ser impossível alcançar o resultado, é porque se imagina conduzindo/vivendo/executando o processo, passo a passo, gastando tempo em cada etapa. Imagine a situação de forma total, não linear.

PERGUNTA 7

Se uma reta é infinita “para os dois lados” e a Terra é redonda, a reta é mesmo reta ou é uma circunferência?

Professor 1:

Não existe definição para reta. Ela é uma abstração da mente humana.

Pode-se pensar que a reta é uma circunferência de raio infinito.

A reta não ter curvatura (conceito de geometria diferencial), já a circunferência sim.

Professor 2:

Essa eu gostei! Na verdade depende do espaço ambiente em que está, uma opção seria explicar via projeção estereográfica, porque nesse caso se vê perfeitamente que a reta infinita na esfera é um círculo máximo com extremos no infinito.

Professor 4:

O que tem uma reta ver com a Terra?

O universo é finito, e a reta se estende indefinidamente para um lado e para o outro. Isso não tem nada a ver com o mundo físico.

A reta é um constructo mental, assim como o ponto e não tem nada a ver, em princípio com a realidade física.

Professor 8:

Primeiro "mostraria" que a Terra está contida no espaço, que a reta está contida num plano e que o plano não "envolve" a Terra, logo as extremidades não podem se encontrar. Também falaria de outras geometrias, a exemplo, a esférica, onde justificaria tal raciocínio, além de comentários sobre outras geometrias não eucilianas

Professor 9:

Uma coisa é uma coisa, outra coisa é outra coisa. Nem tudo que parecer ser, é, não é verdade?! Imagine uma circulo com um raio bem grande, tipo a linha imaginária do Equador da Terra. Imagine que fosse possível andar de carro pela linha do Equador. Eu acharia que estaria andando sobre uma reta, mas depois de algum tempo (na verdade muitoooo tempo), retornaria ao mesmo lugar. Resumindo: tudo é uma questão de referencial. A circunferência continua circunferência (afinal eu retornaria para o mesmo lugar no final) mas a minha sensação de estar andando sobre uma reta também estaria correta (o raio da circunferência é muito maior que as dimensões do carro).

Professor 11:

Você vai traçar sua reta no chão ou na cabeça? Vamos conversar sobre isso...

PERGUNTA 8

É possível aumentar infinitamente o número de lados de um polígono, a ponto do comprimento do seu lado desaparecer, os vértices consecutivos se unirem, e ele se tornar uma circunferência?

Professor 1:

Um polígono regular de infinitos lados pode ser também uma definição para circunferência.

Professor 2:

Acho que fazendo vários polígonos com número de lados aumentando talvez se convencessem disto.

Professor 4:

Novamente isso é um processo de limite, uma construção mental.

Na prática há barreiras para que isso aconteça, mas a matemática é um procedimento mental, e não de desenho geométrico.

Professor 8:

Mostraria essa impossibilidade por meio da inscrição e circunscrição de polígonos numa mesma circunferência, o que ocorre de fato, é uma aproximação, por mais que o lado do polígono possa diminuir tanto quanto se queira.

Professor 11:

Não, você pode aumentar o quanto quiser o número de lados e, no caso, os lados tornar-se-ão tão pequenos quanto você queira, mas jamais desaparecerão. A circunferência que você cita será, no máximo, a sua imagem mental sobre o limite da situação, quando a sua paciência para prosseguir chegar ao fim diante da retumbante, óbvia e inevitável percepção de que, muito em breve, não fará mais a menor diferença prosseguir.

PERGUNTA 9

Até quantas vezes podemos subdividir o Triângulo de Sierpinski?

Professor 1:

Infinitas.

Professor 2:

A olho nu depende do tamanho do triângulo inicial, mas em teoria a divisão pode ser infinita.

Professor 3:

(Essa pergunta não foi selecionada para ser respondida por esse professor.)

Professor 4:

Indefinidamente.

Não podemos desenhar tudo, mas isso é outro problema.

Professor 8:

Infinitas. Mostraria, por exemplo, que entre dois números racionais é sempre possível determinar tantos quanto se queira. Também poderia seguir o caminho pelo que se conhece como "Poeira de Cantor", trançando um segmento de comprimento 1, dividindo-o em três partes e depois retirando a parte central e, assim sucessivamente.

Professor 11:

Resposta análoga à resposta dada acima.[24]

[24] O professor se refere à sua resposta à questão 7.

PERGUNTA 10

Como raiz quadrada de dois, que é um número irracional, e por isso infinito, pode representar a medida de um segmento de reta, que é finito?

Professor 1:

A representação decimal de raiz de 2 é infinita, não sua medida na reta numérica.

Professor 2:

Raiz de 2 não é infinito e é construtível.

Professor 3:

Eu explicaria que, aqui, é preciso tomar cuidado com o uso das palavras finito e infinito. De fato, o que é infinito não é o número raiz quadrada de dois, mas, sim, a quantidade de dígitos em sua representação decimal. Desse modo, é preciso ter mente as diferenças entre um conceito matemático (o número raiz quadrada de dois) e suas representações (representação decimal). Para induzir a reflexão, perguntaria para os alunos: um segmento de reta tem comprimento finito, mas é composto de infinitos pontos que tem comprimento zero.

Professor 4:

A raiz quadrada de 2 não é de maneira nenhuma um " número infinito".
Ela tem uma infinidade de casas decimais, o que é completamente diferente.

O fato de haver um segmento de ter o tamanho de raiz de dois não oferece nenhum problema , porque os segmentos não precisam ter comprimentos racionais.

Há ai um claro desentendimento da definição de número irracional.

Professor 8:

Considerando que os alunos já tenham tido um primeiro contato com números irracionais, comentaria que trata-se apenas de uma representação aproximada, que em hipótese alguma seria possível traçar um segmento com dimensão raiz de dois, visto que ponto não tem "dimensão". Para tanto, mostraria que para atingir o raiz de 2 é necessário atingir antes 1,4.

Professor 9:

A medida do segmento não precisa ser finita. Os nossos instrumentos de medida que possuem limitações. O problema não está com o segmento, que pode ter um comprimento irracional, o problema está com o instrumento de medida.

Professor 11:

A afirmação de que raiz de 2 é infinita é falsa: a raiz de 2, assim como ocorre com todo número, é finito. O que é infinita é a imagem evocada por uma parte de sua representação decimal, seguida de reticências ($\sqrt{2}$ = 1,4142...). Não confunda a imagem evocada por uma representação com o número em si. Se você representar o número racional 1/3 na base 10, você escreverá 0,333... Agora, se você representar esse mesmo número na base 3, então você escreverá 0,1. O que será engraçado nesse ponto, é que, talvez, você diga que a representação "0,333..." é infinita, mas isso é, stricto sensu, uma mentira... Nela há apenas 8 símbolos (um "zero", uma "vírgula", três "três" e três "pontos"). O que é infinita é a imagem que ela busca evocar na sua cabeça: um zero, uma vírgula e um bando infinito de três, que se perdem de vista numa fila de dar inveja aos indianos. O que você deve perceber é que a sua dúvida mora na incompatibilidade de duas imagens: uma evoca o produto final, finito. A outra sugere um processo que, abreviado laconicamente embaixo das saias das reticências.

PERGUNTA 11:

Por que 0,99999999... é igual a 1?

Professor 1:

Pense num número entre esses dois....Pois é, não existe! Portanto são iguais.

Professor 2:

Na verdade essa é uma aproximação.

Professor 4:

Precisamente porque a soma da progressão geométrica de termos 9/10^n para n maior que 1, e 1.

Professo 8:

Pelos meios da resposta da pergunta 6.

Professor 10:

Poderia ter escolhido esta também, que cai no mesmo caso da questão que escolhi.[25]

Professor 11:

0,999... e 1 são duas representações diferentes, para um mesmo número. Novamente: você deve distinguir um número de sua representação (numeral). Se você olhar o seu livro didático, ele fará algo semelhante ao seguinte: Se x = 0,999..., então 10x = 9,999... Assim, 9x = 10x – x = 9,999... – 0,999... = 9. Daí você obtém x =1. Agora, há um ponto profundo na igualdade 9,999... – 0,999... = 9, sobre o qual ninguém fala: você saberia me dizer qual? O seu livro didático não falará sobre isso.

PERGUNTA 12:

Há infinitos maiores que outros?

Professor 1:

Sim. O Infinito dos Reais é maior que dos Naturais. E provamos esse fato para nossos estudantes do CAp-UFRJ.

[25] O professor aqui se refere à pergunta 6.

Professor 2:

Há infinitos distintos, por exemplo os de Z e de IR são diferentes, não sei se é fácil explicar isto via bijeção. Quanto à ordem entre eles é outra viagem.

Professor 7:

Para responder eu usaria exemplos de manuais de equipamentos para o entendimento de aproximação. E faria um jogo usando aproximações na calculadora.

Professor 11:

Eu diria que há infinitos comparáveis e infinitos não comparáveis. Entenda "comparáveis" por "ser possível estabelecer entre eles uma correspondência biunívoca"

Alguns professores atuantes na Educação Básica, e que também atuam ou desejam atuar na Educação Superior, foram interpelados nessa pesquisa. Abaixo temos recortes de suas falas.

Professora A.

"*Não, meus alunos não perguntam. Não perguntam nada. Absolutamente nada sobre infinito matemático. Sim, eu estou fazendo um curso de Cálculo Zero com o grupo de terceiro ano aqui do colégio. Já estamos em Integral. E mesmo assim não perguntam. Só executam e resolvem os exercícios."*

Professor C.

"Sobre ensinar Infinito Matemático na Educação Básica? Sou contra! Não se ensina aquilo que não se sabe. E eu sei que os professores que estão na base não sabem ensinar Infinito. O que a gente deveria discutir com os licenciandos sobre infinito? Deveríamos começar pela diferença entre Infinito Atual e Infinito Potencial. É por aí que começa. E aí eu te pergunto: vale a pena? Meus alunos da licenciatura estão chegando sem saber resolver a Equação do Segundo Grau. Como é possível ensinar a como ensinar Infinito?"

"*A discussão sobre História da Matemática e a construção do conceito de Infinito é fantástica, mas você precisa de ver como é o curso de história de Matemática do curso que eu trabalho. Não tem essa discussão. Daí eu volto á fala inicial: não se ensina o que não se sabe. Se um professor hoje for obrigado a ensinar isso no seu curso, será uma discussão rasa, porque ele não foi preparado para esse desafio. Até os cursos de Análise para a licenciatura não são mais os mesmos. Essa discussão é pertinente, mas não é a nossa realidade. Deveríamos ter uma grande reformulação na formação de professores para que essa base fosse garantida."*

Professor P.

"A discussão sobre os irracionais é importantíssima. Eu te confesso que tenho dificuldade de ensinar a incomensurabilidade dos números irracionais. Não, não sei como dizer aos meus alunos porque Pi é irracional, mas a definição passa pelo conceito de razão. É por isso que minha dissertação de Mestrado é sobre o Conjunto dos Números Reais. Eu me interesso por esse tema e acho relevante."

Professor G.

"Fui professor de oitavo ano por muito tempo, série onde se introduz o conceito de número irracional e se apresenta o conjunto dos números reais. Agora estou no nono ano. Sei que com a BNCC essa apresentação volta ser responsabilidade do professor que está no final do segmento Fundamental II. Se os alunos perguntam sobre o infinito? Perguntam. Perguntam muito. E eu tento responder. Muitas vezes eu percebo que o meu discurso está acima do entendimento deles, mas eu tento não deixa-los sem resposta. Sim, acho que o programa de Ensino Fundamental II deveria abordar mais a História da Matemática e, nela, a discussão do conceito de Infinito. Dessa forma, os alunos que escolhem a carreira de exatas entenderiam melhor os cursos de cálculo."

Professora R.

"Os alunos se limitam em dizer que conjunto infinito é o que tem reticências. Não... eles não têm a menor ideia que possa existir um infinito maior que outro. Não consigo garantir essa discussão na minha aula. O programa é extenso e o tempo não permite. Acho importante, mas, como professora de sexto ano, essas perguntas ficam no limbo. Não temos vocabulário matemático para garantir que crianças recém chegadas ao segmento Fundamental II consigam entender. Sobre História da Matemática no ensino,

eu acho válido sim. Meu curso de Licenciatura não teve História da Matemática. O pouco que sei foi o que eu aprendi por minha conta, e o que vem escrito nos livros didáticos e paradidáticos que recebemos para trabalhar.”

Professor B.

“História Cultural do Infinito? Nunca ouvi falar, mas vou dar um chute: é como cada cultura vê o conceito de Infinito. Por exemplo, em uma escola da região metropolitana se entende o conceito de História do Infinito diferente do que se entende em uma escola de campo. Acertei?

Sim, acho pertinente e importante responder a essas questões que você apresenta. Eu inclusive apresento aos alunos o conceito de somatório, quando aparecem perguntas sobre essa soma de termos da PG de razão ½ aparece nas minhas aulas. Eles curtem. É legal!”

Professor W:

Existe uma tendência atual ao anticientificismo, e uma dúvida na ciência que se mostra em bobagens como terraplanismo, negacionismo do clima, e pseudo-refutações por parte de pseudo-filósofos como Olavo de Carvalho refutando as provas de Georg Cantor.

Em geral isso parte de gente que não consegue entender a ciência, e tenta inventar uma ciência "mais fácil " que eles consigam entender.

Tenho visto essa tendência até na matemática, com essas confusões sobre o infinito, sobre paradoxos, sobre o zero, etc. Precisamos combater isso.

3.3 – Resultados e Análise

Diante dessas respostas, é possível constatar, de uma forma geral, que:

- Todos os professores concordam no sentido de que o conceito não é bem trabalhado na Educação Básica. Alguns, inclusive, se opõem ao trabalho desse conceito, visto que percebem ser muito abstrato para o aluno em formação e que, também, não conseguem imaginar de que forma esse trabalho poderia ser realizado de maneira satisfatória.

- Os professores entrevistados divergem em alguns conceitos. É possível destacar a forma como abordam a estrutura dos irracionais e o número π.

- Sobre o tema “há infinitos maiores que outros” também há divergências, pois alguns dizem que há sim infinitos maiores que outros e outros dizem, na verdade, haver infinitos diferentes.

- A maioria diz que o tema é sim de grande interesse dos alunos da educação superior, e que fazem perguntas a respeito.

- As respostas sobre Geometria Fractal, em sua maioria, são bastante superficiais. Alguns não quiseram responder sobre o tema, porque, de fato, não é um assunto muito discutido nas formações iniciais da licenciatura e muito menos na Educação Básica.

- Os professores não se sentem seguros em definir o que seria História Cultural do Infinito, nem conseguem associar esse conceito à sua própria prática de sala de aula.

Segundo orientações dos PCN

> O conhecimento matemático é fruto de um processo de que fazem parte a imaginação, os contra-exemplos, as conjecturas, as críticas, os erros e os acertos. Mas ele é apresentado de forma descontextualizada, atemporal e geral, porque é preocupação do matemático comunicar resultados e não o processo pelo qual os produziu.
> A Matemática desenvolve-se, desse modo, mediante um processo conflitivo entre muitos elementos contrastantes: o concreto e o abstrato, o particular e o geral, o formal e o informal, o finito e o infinito, o discreto e o contínuo. Curioso notar que tais conflitos encontram-se também no âmbito do ensino dessa disciplina. (PCN, 2002, p. 24)

A constatação baseada na resposta dos professores é reforçada pelo texto extraído dos PCN. Há uma preocupação focada na formação de conceito, com o cumprimento do currículo, a espetacularização do erro, o não espaço para os devaneios. Seria de grande valor que os professores da Educação Básica estivessem prontos ou, pelo menos, disponíveis para discussões não planejadas e fora do currículo imposto, porém os obstáculos encontrados vão além dessa força de vontade. Discutir o conceito de infinito na Educação Básica requer uma quebra de paradigmas.

Segundo Kuhn(1962),

> E quando isto ocorre – isto é, quando os membros da profissão não podem mais esquivar-se das anomalias que subvertem a tradição existente da prática

> científica – então começam as investigações extraordinárias que finalmente conduzem a profissão a um novo conjunto de compromissos, a uma nova base para a prática da ciência. (KUHN, 1962, p. 25)

Dessa forma, para que professores consigam defender um currículo livre de amarras, que permita a presença de devaneios, uma pedagogia dialógica, que respeita as epistemes tanto do professor quanto do aluno, é necessário que reúnam forças e mostrem a necessidade dessa liberdade de transpor velhos paradigmas para a construção de um conceito tão fluído, que permeia práticas pedagógicas e aflora no imaginário dos jovens. É um desperdício não aproveitar a curiosidade das crianças e a proatividade adolescente a serviço da prática científica na Educação Básica.

3.4 – Tabulação das respostas dos questionários submetidos aos alunos sobre conceitos relacionados ao infinito e o ensino de Matemática com e através da História.

A ambição da ciência não é abrir a porta do saber infinito,

mas pôr um limite ao erro infinito.

Bertolt Brecht

3.4.1 – Das perguntas com respostas fechadas

No questionário que foi submetido aos alunos da Educação Básica, a respeito do conceito de infinito, temos respostas classificadas como verdadeiras ou falsas para algumas afirmativas.

Na tabela a seguir, tabulamos as afirmativas e as quantidades de respostas verdadeiras ou falsas para cada uma delas. A seguir, temos a tabulação da resposta de 32 alunos de 8º. Ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada.

Tabela 1

Afirmativa	**Verdadeira**	**Falsa**	**Percentual de acertos**
“É possível contar um conjunto com infinitos números.”	13	20	39%

“A medida de um segmento de reta pode ser representada por um número com infinitas casas decimais.”	21	12	63%
“Há infinitos que são maiores que outros.”[26]	9	23	28%
“Uma reta é infinita.”	24	8	75%
“É possível somar uma sequência infinita de números.” [27]	14	18	44%
“O número π é exatamente igual a 3,14.”[28]	9	23	28%

3.4.2 – Das perguntas com respostas abertas

Sobre o conceito de infinito, foi possível construir a nuvem de palavras representada na imagem abaixo:

Imagem 15[29]

[26] Um aluno disse não saber responder a esse item.
[27] Um aluno deixou de responder a essa pergunta. Por isso, temos uma quantidade diferente de resposta para esse item, em relação aos demais itens da tabela.
[28] Essa pergunta também deixou de ser respondida por um aluno.

As palavras mais citadas quando relacionadas ao conceito de infinito – matemático ou não – foram “números”, “além”, “eterno” e “espaço”. Percebemos a grande frequência de palavras não relacionadas ao infinito matemático, ainda mais presentes na pesquisa do que às relacionadas a esse conceito.

A respeito de conteúdos matemáticos relacionados ao conceito de infinito, que já tenham sido parte dos conteúdos ministrados nas aulas dos estudantes participantes da pesquisa, temos o destaque para os conjuntos numéricos, e especial os dos números naturais e dos números racionais, para as dízimas periódicas e, surpreendentemente, o Hotel de Hilbert. Um aluno disse se lembrar do professor ter ensinado que existem infinitos números entre 0 e 1. Um aluno mencionou o número irracional pi. Fora do conceito matemático, alguns mencionaram como conteúdo estudado sobre infinito o universo e as galáxias.

Constatou-se, também, que um bom número de alunos disse não ter estudado nada sobre infinito fora da Matemática, e que um grupo pequeno não saberia responder quais conceitos matemáticos estariam relacionados ao infinito.

Sobre acreditar que conhecer a história dos conceitos matemáticos faria com que o estudante se interessasse mais pelas aulas, dos alunos 32 alunos do 8º. Ano que participaram da pesquisa, 14 alunos responderam SIM, 16 responderam NÃO e 2 não responderam.

Os estudantes que responderam sim apresentaram as seguintes justificativas:

“*Porque vou saber de onde veio a Matemática.”*

“Eu acho que aula ficaria mais interessante”

“Porque aprenderia melhor.”

“Eu acho legal saber de onde veio essa forma de somar ou multiplicar. Eu acho interessante.”

“Pois sabendo história vou procurar saber mais.”

[29] Nuvem de palavras elaborada a partir das respostas da primeira pergunta da parte II dos questionários oferecidos aos alunos da educação básica – grupo 2 – 8º. Ano do Ensino Fundamental II – rede privada – escola 2

"Pois conhecer os conceitos me daria curiosidades que deixaria a aula mais legal."

"Porque é interessante."

"Eu acho que seria uma aula mais profunda, que interessa às pessoas."

" Não sei bem por que."

"A Matemática é introduzida de uma forma muito direta e eu acho que faltam informações."

"Uma aula que conta uma história é certamente mais interessante do que uma aula que fazer contas!"

"Mas por mais que eu me interesse não acho que aprenderia melhor."

Os estudantes que responderam NÃO, apresentaram as justificativas a seguir:

"*Pois eu não gosto disso."*

"Eu conheço a história de alguns conceitos matemáticos e não me interesso."

"Eu não quero saber."

"Não tenho justificativa, só não é do meu intresse."

"Eu não me identifico muito com a matéria."

"É mais chato ainda. Mais conceitos."

"Eu não gosto de Matemática."

"Não gosto muito."

"Não acho que a magia da Matemática esteja em sua história. Decorar nomes e acontecimentos não combina com a Matemática."

"Pois odeio Matemática, de todos os jeitos, é entediante para mim e me faz ficar com baixa autoestima."

"Pois eu não gosto de Matemática."

"Acho que seria chato e cansativo."

"Não sei se seria melhor."

Percebemos, ao analisar as respostas, que até mesmo o conceito do que seria o estudo da História é equivocado por parte dos alunos. Estudar História não é decorar nomes e acontecimentos. Mesmo os que responderam sim se posicionam a favor do lado lúdico, da questão de despertar o interessa, não necessariamente focando sua resposta no fato da História estar a favor do ensino da Matemática.

É surpreendente que essas respostas tenham aparecido visto que, esse mesmo grupo de alunos, dois anos atrás, fez nas suas aulas parte das perguntas relatadas no capítulo I. Cabe aqui um outro questionamento: o que acontece ao longo do ensino de Matemática no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio que as perguntas aparecem menos, que a interesse pelos fatos históricos relacionados à ciência passam a ser uma questão periférica?

Foram também entrevistados 46 alunos da terceira série do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro.

Tabela 2

Afirmativa	**Verdadeira**	**Falsa**	**Percentual de acertos**
"É possível contar um conjunto com infinitos números."	15	31	33%
"A medida de um segmento de reta pode ser representada por um número com infinitas casas decimais."[30]	30	13	65%
"Há infinitos que são maiores que outros."	13	33	28%
"Uma reta é infinita."[31]	19	26	42%

[30] Houve 3 omissões de resposta nesse item.
[31] Um aluno criou o item "não necessariamente" para essa pergunta.

"É possível somar uma sequência infinita de números."	20	26	43%
"O número π é exatamente igual a 3,14."	28	18	39%

Ao serem analisados dessa resposta, é surpreendente que os alunos imaginem que o número pi possa ser exatamente igual a 3,14, ou seja, um decimal exato. Por outro lado, é surpreendente que eles tenham, na sua maioria, acertado sobre um número com infinitas casas decimais poder representar um segmento de reta, pois contrasta com o grupo pesquisado anteriormente. A maioria também respondeu que a reta não é infinita e que não há infinitos maiores que outros. Esse grupo tem, claramente, uma má construção do conceito de conjuntos numéricos, principalmente em se tratando de números irracionais.

Sobre as respostas ao item 1 da parte II do questionário destinado aos alunos, que diz respeito às 3 palavras associadas ao conceito de infinito, foi gerado a seguinte nuvem de palavras com os itens respondidos:

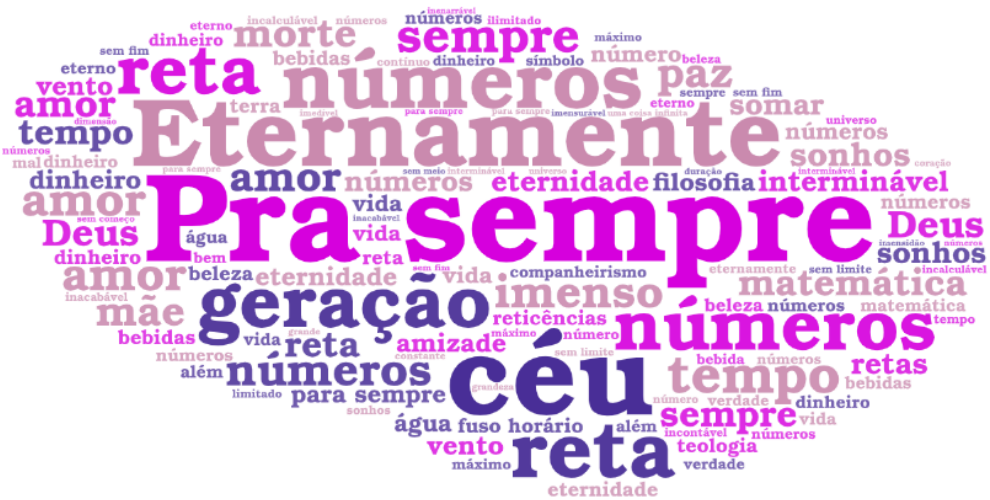


Imagem 16[32]

[32] Nuvem de palavras elaborada a partir das respostas da primeira pergunta da parte II dos questionários oferecidos aos alunos da educação básica – grupo 1 – 3a.série do Ensino Médio – rede pública – escola 1

As expressões que mais apareceram foram “para sempre”, “números”, “sonhos”. De forma surpreendente, também surgiram algumas vezes as palavras “dinheiro”, “bebida”, “beleza”. Também foram mencionadas as palavras “Deus” e “vento”. Percebemos uma presença maior de palavras não relacionadas ao conceito matemático nesse grupo de estudantes.

Sobre o fato de conhecer a história dos conceitos matemáticos fazer ou não diferença no interesse pelas aulas, dos 46 estudantes participantes, 11 responderam NÃO, 33 responderam SIM e 2 não responderam.

Os estudantes que responderam sim apresentaram as seguintes justificativas:

“O conhecimento é instigante quando se tem uma compreensão geral do conteúdo em si.”

“Por ser uma forma melhor de aprender, pois o aluno teria interesse.”

“Quando aprendemos a história de alguma coisa, ficamos mais interessados em aprender e acaba que nos incentivamos mais.”

“Porque sabendo a história vamos poder adquirir mais conhecimento e automaticamente iremos nos interessar pelas aulas.”

“Porque com o conhecimento melhor do conceito, eu saberia a forma do infinito na Matemática.”

“Sim, porque quando você passa a entender aprofundadamente sobre determinada coisa, se torna algo mais interessante.”

“Sim, porque me esclareceria os conceitos e também porque os cálculos são importantes e necessários nas escolas e eu teria uma base do que estou aprendendo e seus benefícios.”

“Porque faria com que eu conseguisse entender mais a Matemática, e assim não seria tão difícil de entender.”

“Porque com a sabedoria vem o conhecimento.”

“Ninguém se interessa por algo que não conhece.”

“Saber de onde veio, como tudo surgiu, como surgiram os cálculos, os matemáticos, como se importaram com isso. “

“Sim, na minha opinião, conhecer os conceitos matemáticos faria as pessoas ter mais interesse pelas aulas.”

“Não sei.”

“Porque eu gosto de História.”

“Pois conhecendo a História você conhece a Matemática.”

“Não damos a importância devida à matéria.”

“Sim, pois ficaria mais fácil, saber os passo a passo com as histórias contadas.”

“Porque seria uma forma de deixar mais explicado, de saber mais.”

“Porque saberia debater com o professor.”

“Conhecendo as origens e sabendo em que podemos utilizar a matemática para nos ajudar teria mais interesse.”

“Acho que seu eu conhecesse mais a História, eu certamente me interessaria no assunto.”

“Seria interessante sabeis mais sobre os pensamentos acerca dos conceitos.”

Os estudantes que responderam não justificaram da seguinte forma:

“Com os exemplos que eu tenho, aliar mais conteúdo à Matemática faria a matéria mais complicada, tornando-a menos interessante.

“Tem pessoas que, por mais que a aula seja a mais interessante e divertida, ela não se interessa, então por isso eu acho que não.”

“Não. Eu não gosto muito de Matemática, por isso eu não me interesso.”

“Prefiro estudar números.”

“Porque não me familiarizo com a matéria em si.”

A respeito de conteúdos estudados, em Matemática ou não, sobre o conceito de infinito, a maioria disse que sim, que já estudou algum conceito relacionado a infinito fora da Matemática, mas que não se recorda. Alguns disseram estudar infinito em Filosfia e História. Um aluno respondeu que estudou as reticências em Língua Portuguesa, e que isso para ele lembra infinito. Os que responderam que se recordam de algo relacionado à Matemática, falaram das dízimas periódicas, dos números em geral (sic.), reta numérica, que "os números são infinitos", conjuntos infinitos e pontos.

Esse grupo de alunos se interessou em escreve um pequeno texto sobre o que considerava infinito fora do contexto escolar. Eis algumas respostas oferecidas por esses alunos:

"O amor pela minha mãe é infinito, pelo meu pai."

"Na minha opinião, as relações, os acontecimentos e os pensamentos se tornam infinitos, mesmo após a morte. O que você fez na sua trajetória fica marcado em algum lugar ou e alguém, através das geração que se passam."

"O dinheiro, ele nunca acaba. É uma coisa infinita. É dele que precisamos para comprarmos nossas coisas."

"Na minha opinião, o infinito é um universo de coisas e oportunidade que o ser humano criou, então existe sim um infinito para quem crer, tanto no amor quanto em diversas coisas."

"Todo espalho, fica um pouco difícil imaginar, um ponto onde acaba o espaço sideral. Ao meu ponto de vista, é difícil saber o fim de algo quando sabemos tão pouco a respeito de um determinado, há infinitas informações para serem descobertas a respeito de tudo e de todos."

"Sim, a salvação de nossas almas, isso é algo infinito. Dependendo pra onde for, vai ser infinito a sua escolha."

"Sonhos são infinitos, porque cada vez que conquistamos algo queremos cada vez mais."

“Família, porque apesar dos acontecidos, de cada folha e erro, sempre vai permanecer família, sempre vai ter o amor entre um e outro (mesmo sendo diferente ou tendo uma forma diferente de amar.)

“Eu acho o universo infinito, acho também que o espaço seja infinito. São lugares que não foram explorados por completo.”

“O universo é muito “infinito”, são coisas que fogem da nossa capacidade de compreensão, que passa a ser infinito. Queria muito conhecer “infinitos” por aí.”

“Os sonhos, pois são uma forma infinita de sonhar.”

“As oportunidades que temos, as escolhas que temos são infinitas. Só devemos prestar bastante atenção para não errar o caminho. Devemos saber aonde (sic.) queremos chegar, nunca é tarde demais para correr atrás e não devemos desistir jamais.”

“Dinheiro, fuso horário, os dias, o mar e as areias.”

“Sim, a população, pois acho que cada vez mais está se reproduzindo, mesmo que morra bastante gente por dia, também nasce muita gente, então a nossa geração vai se multiplicando e crescendo cada vez mais.”

“A constelação é algo infinito.”

“A existência de todo, desde o espaço e tempo até a própria existência de vida / inteligência.”

CAPÍTULO 4 – DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O CONCEITO DE HISTÓRIA CULTURAL DO INFINITO

“*O zero é a maior metáfora.*

O infinito, a maior analogia.

A existência, o maior símbolo”

Fernando Pessoa

4.1 – História Cultural do Infinito?

A Base Curricular Comum, documento que norteia atualmente os currículos de sala de aula da Educação Básica, com obrigatoriedade de cumprimento de currículo básico regido à sua regra a partir de 2020, orienta o uso da história da Matemática como insumo para um bom desenvolvimento metodológico em sala de aula. Na BNCC é dito que

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.
>
> (BNCC, 2019, p. 298)

De acordo com o texto da BNCC, ensinar história da Matemática por ensinar não levará os alunos ao aprendizado de Matemática sob uma perspectiva reflexiva e crítica, objetivo das aulas defendido por uma prática onde as epistemes de professores e alunos estejam em constante troca. Há de se ter cuidado com a forma de abordagem dessa história, visto que o contexto deve vir a serviço do ensino, em não apenas como um periférico. No entanto, para que o professor tenha condições de considerar e, posteriormente, aplicar em sua prática métodos de ensino que utilizem a história como viés, é necessário que ele conheça essa história e que a mesma tenha feito parte da sua formação profissional.

A partir da análise dos questionários oferecidos para os professores, obtivemos as seguintes informações:

- 48 % dos professores entrevistados disseram não ter estudado História da Matemática em seu curso de Licenciatura.

- 78 % dos professores entrevistados afirmam não ter sido abordado, nos cursos de didática, como a História poderia servir como ferramenta de ensino para a sala de aula.

Acerca do que os professores imaginam ser um ensino de Matemática com um aporte histórico, e se esse despertaria maior interesse em seus alunos pela aprendizagem da disciplina, o grupo pesquisado foi unânime em dizer que sim, os alunos estariam mais interessados pelo aprendizado e o mesmo se tornaria mais prazeroso. Foram destacadas as seguintes respostas:

- *"Eu, enquanto aluno, achava super interessante o contexto histórico das descobertas matemáticas, e, na medida do possível, tento abordar nas minhas aulas."*

- *"Temos um conteúdo programático muito extenso para cumprir. E, através dos anos iniciais, a proposta da história dos conceitos matemáticos facilitaria ao longo do processo de ensino-aprendizagem."*

- *"No meu entender, apresentar os conceitos matemáticos atrelados à história evidencia as demandas e anseios da sociedade à época, que justificam os resultados matemáticos obtidos."*

- *"Muitos alunos se interessam pela origem dos fatos; ao "fantasiarem" essa origem, eles ficam mais encantados com a situação e acabam assimilando com mais facilidade"*

- *Sim, pois fundamenta a parte conceitual do conteúdo.*

Embora os professores estejam, na sua maioria, preocupados em como utilizar a História da Matemática para que os alunos sejam atraídos para o ensino, é da maior importância ressaltar que a história, assim como os recursos e ferramentas de ensino-aprendizagem matemática, não devem ser aproveitados como coadjuvantes no aprendizado. Ainda segundo a BNCC

> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. (BNCC, 2019, p. 299)

Dessa forma, enquanto professores formadores de professores, pois os mesmos estão em constantes trocas de experiências e pertencemos a um mundo onde o aprendizado ocorre de forma constante e coletiva, é necessário que o professor esteja preocupado a abstração desses conceitos matemáticos mas não apenas com essa abstração, e sim em como oferecer aos estudantes caminhos para chegar até essa abstração. A História da Matemática como recurso didático favorece esse caminho.

Para que esse aprendizado ocorra, segundo Miguel et all(2009), é necessário que o professor "saiba profundamente matemática". Mas o que seria saber profundamente Matemática?

> Entendemos 'saber profundamente' em um sentido que vai além de o professor demonstrar com exatidão teoremas, lidar com linguagem matemática de modelo mecânico e ter algum conhecimento sobre quem e em que época tal teorema ou propriedade matemática 'foi descoberta'. Para nós, o professor 'saber profundamente Matemática" significa que, além de conhecer teoremas, consegue relacionar diferentes campos desse conhecimento, refletir sobre os fundamentos da Matemática, perceber o seu dinamismo interno e suas relações com outros campos do saber, transitar nos diferentes sistemas de registros de representação e, principalmente, entender o conhecimento matemático como um saber que coloca muitas questões acerca das concepções da verdade, de rigor, de demonstração, de definições, e de sistemas de registro de representação em Geometria, ou seja, nos incita a profundar nossas reflexões enquanto professores de Matemática que se propõem educadores. (MIGUEL ET ALL, 2009, p. 16)

Diante desse fato, nota-se que o grande nó está na formação docente e nas políticas públicas para a formação docente em Matemática. Os professores não possuem acesso à bibliografia de qualidade, a maioria dos livros didáticos e paradidáticos são muito superficiais em se tratando de informações históricas sobre a Matemática e a sua história não é tratada culturalmente nessas bibliografias.

Sobre o que seria História Cultural do Infinito, a maioria dos professores entrevistados não considerou conhecer o que seria história cultural, muito menos história cultural do infinito. Segundo Burke (2009), a história cultural não se preocupa diretamente com a história política ou com a história oficial de países o regiões, nem tampouco com uma rigidez cronológica. História Cultural dedica-se as diferenças, debates e conflitos das tradições compartilhadas em culturas inteiras.

Segundo Maor (1991), sobre história cultural do infinito podemos dizer que

> O infinito tem muitas faces. O leigo frequentemente percebe que é um tipo de "número" maior que todos os números. Para algumas tribos primitivas, o infinito começa no três, pois qualquer coisa maior é "muitas" e, portanto, incontável. O infinito do fotógrafo começa a poucos metros da lente de sua câmera, enquanto que para o astrônomo – ou eu deveria chamar cosmólogo –

todo o universo não é amplo o suficiente para abranger o infinito, pois não é conhecido atualmente. Se nosso artista tem sua imagem própria do infinito, por vezes concebendo-o, como fez Van Gogh, como um vasto e interminável plano em que sua imaginação é livre, noutras vezes a repetição é sem fim. E depois há o filósofo, cujo infinito é a eternidade, o reino divinicista, pois é na Matemática que o conceito tem suas raízes mais profundas, onde foi moldado e remodelado inúmeras vezes, e onde finalmente celebrou o seu maior triunfo. (MAOR, 1991, p. 2, traduzido pela autora)[33]

Dessa forma, o infinito é fruto da cultura, está associado ao conhecimento de mundo de um grupo e, portando, ao ser estudada a História do Infinito, na verdade, estuda-se uma História Cultural, visto que seu conceito depende de qual grupo se está investigando e em qual contexto o mesmo está inserido, e não depende, necessariamente, de uma cronologia.

Para finalizar, em suas rodas de conversa de sala de aula, nas diversas matérias que aborda a História Cultural do Infinito, Kubrusly (2019) nos diz que

> Penso que toda história é, um pouco, cultural.Começa-se sempre com algo "sólido" que provavelmente vem de uma cultura antiga,ancestral, que solidificou-se em um passado remoto, que não pertence ao tempo histórico, mas a um certo tempo de lendas, quando os animais falavam como gente, quando tudo era gente como a gente, onde as vozes que se escutavam eram sempre dos mitos e dos encantamento. Essa cultura passada, solidificada, torna-se fato concreto e daí seguem-se as histórias propriamente ditas, todas culturais.
>
> No caso do infinito, o fato de origem,concreto, é,de fato, abstrato, ou melhor, sentimental; é a nossa percepção da morte. A origem "concreta" de todo e qq infinito é a consciência da morte. É ela q provoca no humano a angústia que só será resolvida com a invenção criação de infinitos. As histórias culturais destes infinitos se manifestam por meio das artes, religiões, Ciências, matemáticas e literaturas. Cada uma dessas nossas permanentes atividades são em si, sempre, histórias culturais de infinitos .
>
> No caso do infinito matemático, nosso fato "arqueológico" é o processo de contagem e a percepção de sua (do processo em si) infinitude. As muitas culturas matemáticas vão, a partir daí inventando possibilidades que em si moldam uma cultura dominante da matemática que se torna,de certa maneira, modelada pela história do infinito, como no mais, todas as nossas atividades verdadeiramente humano-criativas.

[33] Versão original em Inglês: “Infinity has many faces. The layman often perceives ir as a kind of "number" larger than all numbers. For some primitive tribes, infinity begins at three, for anything larger is "many" and therefore uncountable. The photographer's infinty begins at thisty feet from the lens of this camera, while for the astronomer - or should I sau the cosmologist - the entire universe many not be larg enough to encompass infinity, for it is not at present known whether our artist has his own image of the infinite, sometimes conceiving it, as van Gogh did, as a vast, unending plane on which his imagination is given free rein, at other times as the endless repetition. And then there is the philosopher, whose infinity is eternity, divintician's realm, for it is ins mathematics that the concept has its deepest roots, where it has been shaped and reshaped innumerable times, and where ir finaly celebrated its greatest triumph.”

4.2 – As diversas definições de História Cultural do Infinito oferecidas pelos professores

Alguns professores se arriscaram em responder, mesmo sem saber ao certo sobe o que seria esse conceito. Das respostas oferecidas, destacadas as considerações abaixo.

- *“Talvez seja como foi encarado ou trabalhado o conceito através da história.”*

- *“Análise aprofundada e transversal dos aspectos históricos e metodológicos do infinito enquanto elemento matemático.*

- “*Depende da análise:*

Sentido Metafórico – ao mostrar as “infinitas” aplicações matemática

Sentido Demonstrativo – estudo específico sobre os conjuntos numéricos”

- *“Seria preconizar um conceito falho de infinito e estender para a multiplicidade desse olhar*.”

Ao longo da análise das respostas dos colegas professores, nota-se que muitos não se sentem seguros para definir o termo “História Cultural do Infinito” e nem conseguem vislumbrar o quão importante seria se a história do conceito de infinito perpassasse a sua prática escolar cotidiana.

Muitos colegas entrevistados se recusaram a responder, por não saberem ao certo do que se trata. Alguns, antes de responderem, acharam o termo curioso e perguntaram o que a pesquisa desejava, de fato, explorar sobre esse conceito. E alguns ainda não viram possibilidade da pesquisa trazer alguma mudança para as questões do discurso de sala de sala de aula, tamanhos são os obstáculos epistemológicos.

Segundo Bachelard (2005),

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos. (BACHELARD, 2005, p. 17)

Quais seriam então os obstáculos epistemológicos encontrados pelos professores, em se tratando do ensino de infinito na Educação Básica? Voltando às respostas relatadas anteriormente, os maiores obstáculos estão na formação docente, que, em sua maioria, não conhece a fundo o conceito; na falta de profundidade de conhecimento histórico sobre o tema; na espetacularização do erro, e do não aproveitamento de sua discussão como caminho didático; no currículo engessado; na não crença dos alunos no conceito de infinito.

CAPÍTULO 5– DA HISTÓRIA À CONTAÇÃO DE HISTÓRIAS – Potencialidades e dificuldades

“A ficção faz com que o mundo não se limite ao infinito.”

Arthur Hisoka

De todas as colocações feitas pelos professores que participaram das conversas que balizaram a escrita dessa dissertação, a que mais inquietou a todos é a que se refere ao fato de não existir uma bibliografia que alcance uma linguagem adequada aos alunos da Educação Básica ou a dos professores em formação. Na maioria das conversas, os professores se queixaram da escrita densa dos livros de História da Matemática, da forma resumida como se apresentam os conteúdos de História nos livros didáticos de Matemática e da falta de apelo estético que essa linguagem tem em relação aos jovens alunos que demonstram interesse pelo tema.

Diante dessa conjuntura, é necessário buscarmos em bibliografias textos que possam viabilizar o nosso diálogo com os estudantes, e trazer possibilidades para os professores que desejam discutir Infinito e sua História Cultural em sala de aula.

Serão relatados, a seguir, três textos que fazem menção à História Cultural do Infinito. Um fala dos transfinitos de Cantor. Os outros, a um dos paradoxos de Zenão, que se refere a uma série que converge para 1.

Em *O Fantástico Mundo os Números – A matemática do zero ao infinito*, de Stewart (2016), temos o seguinte texto sobre os transfinitos de Cantor

> Como disse antes, os matemáticos nunca pararam de fazer uma coisa só porque é impossível. Se for muito interessante, eles acham meios de torna-la possível. Não existe algo como o maior número inteiro. Os números continuam para sempre. Todo mundo sabia disso. Mas quando Georg Cantor resolveu perguntar quão grande era aquele conceito particular de “para sempre”, deparou com um método novo

> para dar sentido a números infinitamente grandes. Uma consequência é que alguns infinitos são maiores que outros. Muitos dos seus contemporâneos acharam que ele estava louco. Mas havia um método na loucura de Cantor, e seus novos números transfinitos acabaram se revelando sensatos e importantes. Só era preciso acostumar-se a les. O que não é fácil. (STEWART, 2016, p. 357)

Em Gödel, Escher, Bach, de Hofstadter (2000), foi publicado um texto supostamente escrito por Lewis Carroll, autor de “Alice no país das Maravilhas”, onde há um texto chamado “O que a Tartaruta disse a Aquiles?”

> Aquiles alcançara a Tartaruga e sentara-se confortavelmente nas suas costas.
>
> - Então já chegou ao fim da nossa corrida, embora ela consista RELAMENTE numa série infinita de distâncias – perguntou a Tartarura. – Pensei que um sabichão tinha demonstrado que a proeza não podia ser realizada!
>
> - Pode ser realizada – disse Aquiles. – Foi realizada*! Solvitur ambulando*. Não viu que as distâncias estavam a diminuir constantemente? Então...
>
> - E se estivessem a aumentar constantemente? – interrompeu a Tartaruga. – Como seria?
>
> - Então eu não estaria aqui – respondeu modestamente Aquiles –, e você já teria dado várias voltas ao mundo!
>
> - Está a lisonjear-me, isto é, a ACHATAR-ME! – disse a Tartaruga – porque você é mesmo um peso-pesado, não há dúvida! Pois bem, gostaria de ouvir falar de uma pista de corrida que a maioria das pessoas acha que pode percorrer em dois ou três passos, mas que REALMENTE consiste num número infinito de distâncias, cada qual maior que a anterior?
>
> - Com muito prazer! – disse o guerreiro grego, retirando do elmo (poucos guerreiros tinham bolsos naqueles tempos) um enorme caderno e lápis – Prossiga! E devagar, por favor! A ESTENOGRAFIA ainda não foi inventada!
>
> - Que bonita a primeira proposição de Euclices! – murmurou a Tartaruga em tom sonhador. Admira Euclides?
>
> - Apaixonadamente! Até agora, pelo menos na medida em que é possível admirar um tratado que só será publicado daqui a um século!
>
> - Muito bem! Tomemos então uma pequena parte da argumentação dessa primeira proposição – só dois passos e a conclusão será retirada. Por favor, anote no seu caderno. E para que possamos referir-nos convenientemente a eles, chamemos-lhes de A, B e Z:
>
> (A) Coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si.
>
> (B) Os dois lados deste triângulo são coisas que são iguais a uma terceira.

> (Z) Os dois lados deste triângulo são iguais entre si. (...) (HOFSTADTER, 2000, p. 47)

Agora, por último, de Goldsmith(2016), do livro “Do zero ao infinito(e além), o texto de um dos mini-texto do livro, cujo título é “Um depois do outro”

> Na Matemática, uma linha ordenada de números é chamada de sequência. Sequências normalmente possuem um padrão, ou uma regra, que permite deduzir o próximo número. Uma contagem coloca os números na sequência mais simples que existe. Na sequência a seguir, é adicionado 1 ao número anterior:
>
> 1, 2, 3, 4, ...
>
> Quando os números de uma sequência são somados de forma intinita, o resultado é chamado de série:
>
> $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$
>
> Essa série se encaminha para o número 1. A soma dos dois primeiros termos é $\frac{3}{4}$. Adicionando o seguinte, $\frac{1}{8}$ a $\frac{3}{4}$, obtém-se $\frac{7}{8}$. Depois $\frac{7}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$ e assim por diante. (GOLDSMITH, 2016, p. 33)

É possível perceber escritas diferentes nos exemplos extraídos de livros que cotam histórias relacionadas à História Cultural do Infinito. Um é uma narrativa. O outro, um diálogo. O terceiro, um texto descritivo, que não termina seu objetivo científico de informar, mas deixa uma provocação. Em todos os casos, a escrita facilita a comunicação do professor com o aluno sobre os transfinitos de Cantor, o paradoxo de Zenão de Aquiles e a Tartaruga e a soma de termos de uma série infinita. Os três textos fazem menção a episódios importantes que fomentam a ideia de infinito, porém, com uma estética branda, diferente das encontradas nos livros tradicionais de História da Matemática. Esse já é um caminho para que professores estabeleçam um canal de diálogo com alunos: a facilidade de comunicação. Embora os textos não se aprofundem no conteúdo, fato esse que pode ser resolvido a posteriori, a intenção de ser claro na comunicação e atrair a curiosidade do outro já encaminha os trabalhos para a proatividade e um aprofundamento mais à frente.

É da maior importância trazer a contação de histórias para o diálogo entre os alunos e a ciência. Alguns exemplos são os da história da “A biblioteca de Babel”, o “ Hotel de Hilbert” e o Pi do seu Armando.

Há também alguns textos clássicos que podem ser trabalhados em sala de aula. Um deles é sobre o Hotel de Hilbert, mencionado por Akio(2016)

> Hotel de Hilbert – Todos os quartos ocupados, mas sempre há uma vaga para você! O Hotel de Hilbert é um experimento mental matemático sobre conjuntos infinitos, criado pelo matemático alemão David Hilbert. Esse hotel possui infinitos quartos individuais. Cada nova situação, que se apresenta, parece ser impossível solucioná-la. Daí vem a riqueza desta atividade. Os participantes precisam pensar em novas formas e maneiras de resolução, pois a anterior já não dá conta.
>
> 1ª situação: Chegam infinitos hóspedes querendo se hospedar. Solução: Acomoda-se cada hóspede em um único quarto, sem problemas. Todos os quartos ficam ocupados.
>
> 2ª situação: Chega 1 hóspede e todos os quartos estão ocupados. Solução: Acomoda-se este novo hóspede no quarto 1 e todos os outros, já acomodados, passam para o quarto n+1.
>
> 3ª situação: Chegam 10 hóspedes e todos os quartos estão ocupados. Solução: Acomoda-se este novo hóspede no quarto 1 e todos os outros, já acomodados, passam para o quarto n+10.
>
> 4ª situação: Chegam infinitos hóspedes e todos os quartos estão ocupados. Solução: Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto 2n, ficando livres todos os quartos ímpares!
>
> 5ª situação: Chegam 2 ônibus com infinitos hóspedes em cada, e todos os quartos estão ocupados. Solução: Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto 3n, ficando livres todos os quartos não múltiplos de 3! Os integrantes do 1º ônibus ocuparão os quartos 1, 4, ... 3n – 2. Os integrantes do 2º ônibus ocuparão os quartos 2, 5, ... 3n - 1
>
> 6ª situação: Chegam infinitos ônibus com infinitos hóspedes em cada, e todos os quartos estavão ocupados. Solução: Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto 2n , ocupando assim todos os quartos de potência 2. Os integrantes do 1º ônibus ocuparão os quartos 3n . Os integrantes do 2º ônibus ocuparão os quartos 5n . Os integrantes do 3º ônibus ocuparão os quartos 7n . Ou seja, toma-se todos os números primos, que são infinitos, e para cada primo associa-se um ônibus, e cada integrante dos ônibus são alocados no quarto de número enésima potência do número primo correspondente! Em todas as situações o gerente do Hotel consegue hospedar todos os novos visitantes e, além disso, no final, sobram infinitos quartos! (AKIO, 2016, p. 5)

Atualmente tem sido empregada a metodologia ativa ‘storytelling” como suporte para o emprego daa contação de histórias como recurso para as aulas de Matemática.

Ainda sobre “storytelling”

> Histórias de Matemática têm propósitos adicionais. Podem introduzir ou explicar conceitos inesquecíveis e envolver estudantes de atividade matemática. Podem trazer um elemento humano a um assunto que é muitas percebido como seco e técnico. (...) Podem atualizar e apoiar uma atmosfera criativa, proporcionando conhecimento. E mesmo que o entretenimento seja raramente mencionado como objetivo em um contexto educacional, seu valor em apoiar um ambiente produtivo de aprendizado não deve ser esquecido. (ZASKIS, LILJEDAHL, 2009, p. 26 – Tradução da autora)[34]

Como mencionado anteriormente nos resultados das pesquisas realizadas entre os professores de Matemática participantes das rodas de conversa, a maioria não teve curso de História da Matemática na sua graduação e muitos fizeram a disciplina como optativa. Ainda nas rodas de conversa os professores afirmaram encontrar dificuldade em conseguir textos que possam ser adaptados para o uso de História da Matemática na sala de aula, com uma linguagem que se aproxime da Contação de Histórias. Principalmente para os alunos do primeiro segmento do Ensino Fundamental II, a metolgia storytelling é muito adequada, pois, nessa faixa etária, o aluno tem muita dificuldade de escuta, e está se adaptando a uma nova realidade educacional. Esta metodologia pode ser uma grande aliada na questão da atenção e das interpretações de texto matemático. Embora alguns dos próprios alunos questionem o emprego da metologia – muitas vezes até perguntam se aula é mesmo de Matemática ou não, porque parece aula de Língua Portuguesa ou de História – todo professor de Matemática tem apreço por ensino de linguagem, afinal, modelar matematicamente um problema é trabalhar com linguagem.

Dessa forma, a metologia *storytelling* é uma grande aliada do ensino de Matemática através e com o conceito de História Cultural do Infinito, pois pode ser um grande aliado para transpor o obstáculo metodológico da linguagem no ensino da disciplina.

---

[34] Texto Original: Mathematics stories have additional purposes. They can introduce or explain hard concepts in a memorable fashion and involve students in mathematical activ ity. They can bring a human e lement to a subject that is too often perceived as dry and technical. They can bring to the mathematics classroom unexpected novelty and a change of activity. They can refresh and support the creative atmosphere and provide entertainment. And even though entertainment is rarely entioned as a goal in an educational context, its value in supporting a productive learning environment should not be overlooked

CAPÍTULO 6 – BNCC E O ESTUDO DE INFINITO NA EDUCAÇÃO BÁSICA – BREVE ANÁLISE

´O documento da Base Nacional Curricular Comum, aprovado nesse ano de 2019, representa um norteador para a matriz curricular na Educação Básica, de cunho obrigatório a partir de 2020. Porém, ao ser solicitada a busca textual expressão “infinito” nesse documento, não surge ocorrência alguma para o termo, como pode ser comprovado na imagem a seguir.

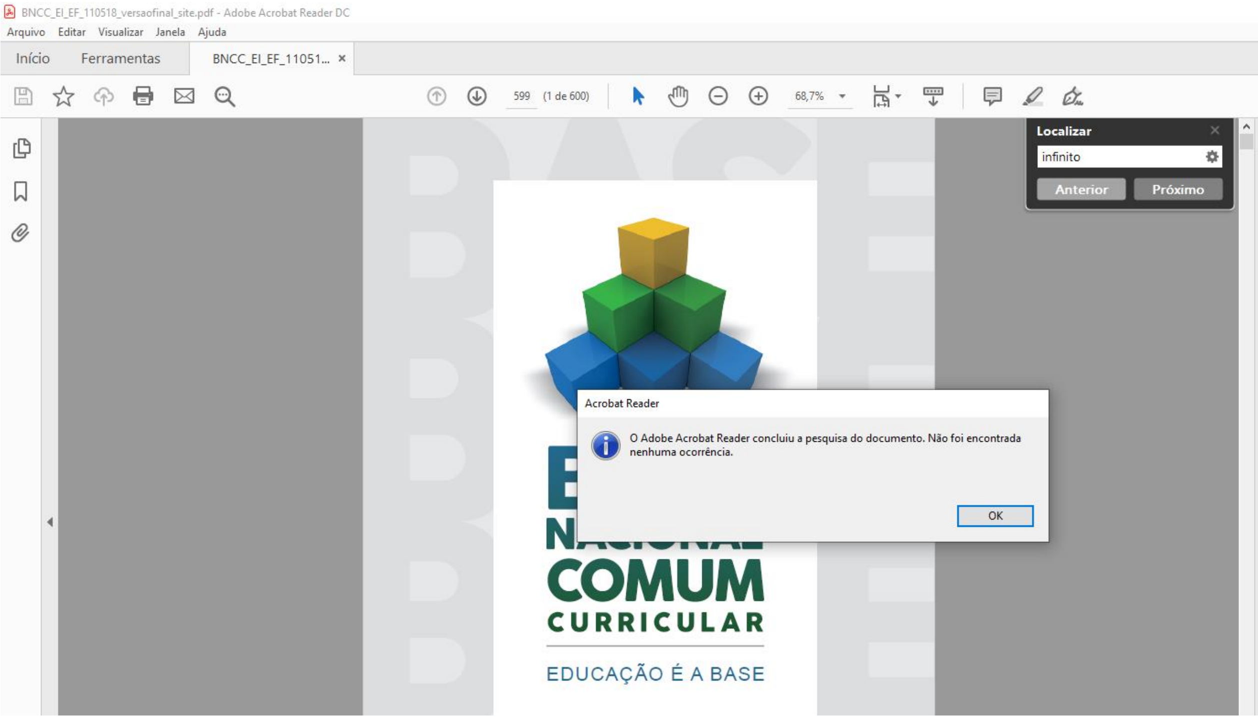


Imagem 16[35]

De forma surpreendente, a expressão não aparece em nenhum local do texto, inclusive em orientações que não dizem respeito à Matemática. Dessa forma, partiu-se para outros termos relacionados ao conceito de infinito matemático e sobre como essas palavras aparecem no documento e quais orientações elas elucidam sobre o ensino de conceitos relacionados ao infinito, estudado na Matemática da Educação Básica.

35 Imagem recuperada da tela após busca textual da palavra “Infinito” no arquivo da Base Nacional Curricular Comum.

Nas Competências Específicas de Matemática no Ensino Fundamental, destacam-se duas que podem ser relacionadas ao ensino de História Cultural do Infinito. São elas:

> 1 - Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
>
> 2 - Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes. (BNCC, 2019, p. 267)

As competências relatadas acima confluem com a definição de História Cultural do Infinito, descritas no capítulo 3, no que diz respeito à ser uma prática cultural e investigativa trabalhar a história relacionada ao conceito de infinito.

Outras expressões aparecem no texto da BNCC como “reta numérica”, “irracionais”, “dízimas periódicas”, “plano”. A expressão “dízima periódica” aparece uma única vez, com indicação para ser atrelada ao ensino de Matemática do 8º. Ano. A expressão “irracionais” aparece duas vezes, relacionada ao currículo do 9.o. Ano. A expressão “racionais” aparece diversas vezes, assim como “reta numérica” e “plano”.

Em relação ao ensino de Geometria, a base nos recomenda

> Ao tratar do conceito de espaço, estimula-se o desenvolvimento das relações espaciais topológicas, projetivas e euclidianas, além do raciocínio geográfico, importantes para o processo de alfabetização cartográfica e a aprendizagem com as várias linguagens (formas de representação e pensamento espacial). (BNCC, 2019, p. 362)

Nesse caso, a atividade descrita no capítulo 1, sobre Geometrias Não-euclidianas dialoga com a proposta da BNCC e vai além, trazendo a discussão sobre outras geometrias para a sala de aula.

Sobre o ensino de números irracionais, temos como uma das habilidades a serem trabalhadas com os alunos do 9º. Ano do Ensino Fundamental

> Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). (BNCC, 2019, p. 317)

Mas então, por que é necessário discutir o conceito de infinito na Educação Básica? Segundo Giraldo (2019),

> Um aspecto bastante importante nessa discussão diz respeito ao ensino de infinito na escola básica. A ideia de infinito tem sido muitas vezes evitada da Matemática da escola básica, talvez porque ela não caiba em procedimentos rotineiros. Mas é justamente aí que está a sua potencialidade: ela pode produzir um ensino de Matemática menos comprometido com a oposição entre o erro e o acerto e mais orientado para a produção de ideias novas e para a criatividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

“das coisas
que eu fiz a metro
todos saberão
quantos quilômetros
são
aquelas em centímetros
sentimentos mínimos
ímpetos infinitos
não?”

Paulo Leminski em “Caprichos e Relaxos”[36]

Quando os artigos que precederam a escrita dessa dissertação foram apresentados em congressos e encontros pelo Brasil, muitos questionamentos foram feitos. Os mais comuns foram o porquê estudar um tema que nem é defendido nas políticas que delineiam o currículo da escola básica. Outro questionamento muito pertinente foi se os alunos tinham condições de ouvir as respostas, visto que elas exigem uma abstração grande e vocabulário matemático que, na maioria das vezes, não está ao alcance deles. Porém, de todos os questionamentos, o que mais incomodou foi o seguinte: qual é a sala de aula da criança que pergunta? E por que, na maioria das vezes, ela não pergunta? Isso sim é um questionamento que se deve considerar. Será que a escola tem permitido o devaneio das nossas crianças? Será que os professores estão “com tempo” para abrir espaço para as questões dos seus alunos? O que é prioridade, então: cumprir o programa ou ouvir as demandas dos estudantes? Essas são questões bastante relevantes, mais ainda do que decidir se deve-se ou não discutir infinito matemático com uma turma de 6º. Ano.

A sala de aula que pergunta é a sala de aula livre. Não está sendo defendida uma sala de aula sem limites. O que está sendo dito aqui é o mesmo que diz Bakunin: “A liberdade do outro estende a minha ao infinito.” Como é que podemos levar aos bancos universitários para estudarem ciência alunos que não conseguem devanear ou muito

[36] Poema sem nome, Caprichos e Relaxos, livro de 1983.

menos questionar a existência ou não dos fatos? Esse texto deseja ir de encontro ao desejo de uma sala de aula onde o aluno fala e ouve, e seu professor também.

Outro grande obstáculo é a dicotomia entre a formação docente e as demandas da sala de aula. E o eterno estereótipo do professor de Matemática que não gosta de História. Discutir história e historiografia nas aulas de Matemática é ferramenta. A História é nossa aliada. Há de se desconstruir esse obstáculo que é o professor que se coloca hermeticamente dentro da sua disciplina.

Sobre os recursos a serem utilizados e a metodologia para que a aula "tenha perguntas", defende-se a sala de aula investigativa e laboral, com o trabalho, defendido por Freinet (1996), como o pano de fundo da pesquisa. A protagonização do aluno na sala de aula é fundamental para o espaço do questionamento.

Há de se ter também uma reformulação nas licenciaturas, para que conteúdos como geometrias não euclidianas não causem espanto quando surgirem como propostas para a sala de aula. O universo da criança é como é: tem curvas, tem cores, tem formas diferentes das geometrias de Euclides. Da mesma forma, os infinitos vistos são diferentes, e precisam ser contemplados na discussão de sala.

Se é desejo dos professores formadores de futuros cientistas que esses assim sejam, pesquisadores, questionadores, investigadores, a primeira episteme que deve ser garantida em sala de aula é a episteme do ouvir. E esse ouvir deve ser ampliado nos diversos espectros: ouvir o aluno, ouvir o colega professor, ouvir o colega formador de professor, ouvir o colega de outra área do conhecimento. A inteligência coletiva, defendida por Pierre Lévy, não é um desserviço. As políticas de aprendizado no ciberespaço não devem anular a escuta diária, o "tête à tête" diário. Esse é um desafio do professor do século XXI, garantir que a comunicação de sala de aula aconteça com a perspectiva do ouvir.

É de desejo da autora, como desdobramento dessa dissertação, escrever sobre relações existentes entre essas práticas e perguntas. Por exemplo, é possível perceber a relação entre a soma de termos de uma Progressão Geométrica de razão ½, mencionada na pergunta que faz alusão ao Paradoxo de Zernão sobre Aquiles e a Tartaruga, e a quantidade de tetraedros utilizados na pipa construída pelos alunos. Também é possível fazer uma ponte entre a pergunta sobre "Há infinitos maiores que outros?" e a incomensurabilidade dos racionais. Embora as observações tenham surgido em séries diferentes, em escolas com conjunturas diferentes, com propostas também diferentes de trabalho, é muito interessante perceber que essas inquietações dos estudantes conversam entre si.

Por fim, é necessário que os professores democratizem as suas informações, e trabalhem produzindo textos sobre suas experiências e divida com os seus. O infinito trabalhado em sala de aula, no miudinho, nas pequenas atividades, deve ganhar o macro e ecoar nas práticas universitárias, formando alunos que sejam capazes de estar confortáveis nessa discussão. E, para finaliza, o mais importante de tudo: as misturas. Sempre as misturas a serviço da produção científica. Ave Serres!

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIRO, Helle. OLE, Skovsmose. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática. Coleção Tendências em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ALEXANDER, Amir. **Infinitesimal - A teoria matemática que mudou o mundo.** Rio de Janeiro: Zahar, 2016

ALMEIDA, Manoel Campos de. **A Matemática na Idade da Pedra – Filosofia, Epistemologia, Neuropsicologia e Pré-história da Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física: 2017

ARAÚJO, Marcos Paulo Ferreira de. **"Introdução ao conceito de números reais: uma proposta didática baseada na História da Matemática.** " Dissetação de Mestrado. (Ver formatação) Disponível em: < http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/34%20Marcos%20Paulo%20Araujo.pdf>

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico – contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.

BARALDI, Ivete Maria. **Matemática na escola: que ciência é esta?**. Bauru: EdUSC, 1999.

BELLOS, Alex. **Alex através do espelho – como a vida reflete os números e como os números refletem a vida.** Tradução de Paulo Geiger. São Paulo: Companhia das Letras, 2005.

_____________. **Alex no país dos números – uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática.** São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

BERTOLUCCI, Cristina Carvalho. **Noções de Infinito Matemático em adolescentes e adultos. 98f.** Dissertação. Programa de Pós Graduação em Educação, UFRS. Porto Alegre, 2009

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Educação Matemática**. São Paulo: Centauro, 2005

______________________________. **Filosofia da Educação Matemática – Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. São Paulo: Ed. UNESP, 2010.

BRITTO, Mauro Luiz Borsói – **O professor de Matemática que lia poesia**. In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba, PR. Anais Eletrônicos: Curitiba, UFPR, 2013. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2417_1032_ID.pdf>, Acesso em 18 Out. 2019

BRITO, Sicleidi Valente dos Santos. **A jusfitifação finitista da noção de infinito atual por David Hilbert**., 2018, 58f. Dissertação (Mestrado em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia). Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ

______________________________. **Contando o Infinito: A Natureza Paradoxal da Infinidade.** Anais do 15º. Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia. Florianópolis, Santa Catarina, 216. Disponível em: < https://www.15snhct.sbhc.org.br/resources/anais/12/1473907010_ARQUIVO_congressodehistoriadasciencias.pdf>, Acesso em 12 Out. 2019

______________________________, GONÇALVES, Ana Paula. **A poesia dos Números Reais Barros, Pessoa, Green, seus vazios e seus infinitos.** Anais do 15º. Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia. Florianópolis, Santa Catarina, 216

BURKE, Peter. **O que é História Cultural?** Trad. Sergio Goes de Paula 2ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora. 2008.

CAFEZEIRO, Isabel. KUBRUSLY, Ricardo da Silva. MARQUES, Ivan da Costa. SOUZA, Narrira Lemos, BRITO, Sicleidi Valente dos Santos. **Crises e Incompletudes, Multi-histórias Matemáticas.** Revista Eletrônica de Educação matemática. Disponível em < https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11nespp162>, Acesso em 22 Nov. 2019

CHACÓN, Inés Maria Gomes. **Matemática Emocional**. Porto Alegra: ARTMED,2003

CHALMERS, Alan F. **O que é ciência afinal?.** Brasília: Editora Brasiliense, 1993

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar Matemáticas – O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Porto Alegre: ARTMED, 2001

CUNHA, Cleber Luiz da. RUIZ, Adriano Rodrigues. **O infinito nos distúrbios do processo ensino/aprendizado de alunos ingressantes nos cursos de ciências exatas.** Encontro de Ensino, Pesquisa e Extensão, Presidente Prudente, 21 a 24 de outubro, 2013, **Colloquium Humanarum**, vol. 10, n. Especial, Jul–Dez, 2013, p. 1093-1098. ISSN: 1809-8207. DOI: 10.5747/ch.2013.v10.nesp.

CRUZ, Lídia de Souza. **História da Matemática e Conjunto dos Números Racionais – uma proposta de trabalho para a sala de aula da educação básica**.

CZEL, Amir.**O Mistério do Alef: A Matemática, a Cabala e a Procura do Infinito**. SãoPaulo: Editora Globo, 2003

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação – reflexões sobre Educação e Matemática.** Campinas: Summus Editoria, 1986.

DELFINO, Hudson Sathler. **Conceito de Infinito: uma abordagem para a Educação Básica**.

DORE, Lucas Esteves. CLARETO, Sônia Maria. **Números mudados: uma poética dos números. Intentar números em uma aula de Matemática inventa currículo?** (

DU SAUTOY, Marcus. **Os mistérios dos números – Uma viagem pelos grandes enigmas da Matemática (que até hoje ninguém foi capaz de resolver)**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

ECO, Humberto. **Como se faz uma tese**. Tradução de Gilson César Cardoso de Souza. São Paulo: Perspectiva, 2016.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Ed. Unicamp, 1997.

FEYERABEND, Paul. **A Ciência em uma sociedade livre**. São Paulo: Editora UNESP, 2011.

FREINET, Célestin, **Pedagogia do Bom Senso**. São Paulo: Martins Fontes,1996.

GARLAND, Trudi Hammel**. Fascinating Fibonacis – Mystery and magic in numbers**. Dale Seymour Publications

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. **Matemática Escolar e Matemática da Vida Cotidiana. Coleção Polêmicas do nosso tempo.** Campinas: Autores associados, 1999.

GIRALDO, Victor. YOKOYAMA, Léo Akio. **O infinito existe?** Ciência Hoje das Crianças. Disponível em: <http://chc.org.br/artigo/o-infinito-existe/>

GOLDSMITH, Mike. **Do zero ao infinito (e além) . Tudo o que você sempre quis saber sobre Matemática e tinha vergonha de perguntar**. São Paulo: Bemvirá, 2016

GRANDO, Neiva Ignês. **Processos de pesquisa no ensino fundamental e médio**. Passo Fundo: Ed. Unijuí, 2009

HADAMARD, Jacques. **Psicologia da invenção matemática.** Rio de Janeiro: Contraponto, 2009.

HOFSTADTER, **Douglas R. Gödel, Escher, Bach, Laços Eternos – Uma fuga metafórica sobre mentes e máquinas, no espírito de Lewis Carroll.** Gradiva: Lisboa, 2000.

HOOKS, Bell. **Ensinando a transgredir – A educação como prática de liberdade**. São Paulo: Martins Fontes, 2017

IFRAH, Georges. **Os números – a história de uma grande invenção**. São Paulo: Globo, 1998.

GIRALDO, Victor Augusto. **Interatividade CH: Infinito**. Revista Ciência Hoje On Line. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Kgz9MTy8PQk&fbclid=IwAR1wciAcaXeBidRNZAZy-pCLsdZWeoPYOqJFltu8WqxqNhdCZlX67QFokLQ>, Acesso em 20 Nov. 2019

GLIORI, Sonia Barbosa Camargo. **A noção de obstáculo epistemológico e a educação matemática.** In: Educação Matemática – uma (nova) introdução. Machado, S. (Org.) São Paulo: Ed. Da PUC-SP, 2002.

JANOS, Michel. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008

KALEFF, Ana Maria Martensen Rolland. **Geometrias não euclidianas na escola básica – utopia ou possibilidade?**. In: Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador, BA. Anais Eletrônicos. Salvador: UFBA, 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra21.pdf>, Acesso em 19 Abr. 2019.

KINDEL, Dora Soraia; FRANT, Janete Bolite. **Diálogos de alunos sobre o Infinito**. São Paulo: Appris, 2015

___________________. **Investigações em sala de aula de Matemática: A Geometria Fractal e as sequências numéricas infinitas**

KONDER, Leandro . **O que é dialética**?. São Paulo: Brasiliense, 1981

KUBRUSLY, Ricardo da Silva. **O zero como espelho do mundo: A Matemática como ordenadora de todas as coisas**.

__________________________. O tamanho do infinito. Disponível em< http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/diversos/tamanho.html>

KUHN, Thomas S. **A estrutura das revoluções científicas**. São Paulo: Perspectiva, 1998.

LEVY, Pierre. **A inteligência coletiva: por uma antropologia do ciberespaço (1994).** 3. ed. São Paulo: Loyola, 2000

LÍVIO, Mário. **Razão Áurea – A História de Fi**. Rio de Janeiro: Record, 2015.

LORIN, João Henrique; REZENDE, Veridiana. **Os alagon: uma história dos números irracionais.** Anais do V Encontro Interdisciplinar de Educação. http://www.fecilcam.br/anais/v_enieduc/data/uploads/mat/trabscompletos/mat0077862490 0.pdf

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna (Análise de uma impregnação mútua)**. São Paulo: Cortez, 1993.

_____________________. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Cortez, 1997

MACHADO, Roberto. **Deleuze, a arte e a filosofia**. Rio de Janeiro, Zahar: 2009.

MAOR, Eli. **To infinity and beyond: A Cultural History of Infinty**. New Jersey: Princeton University, 1991.

MARCONDES, Nilsen Aparecida Vieira; BRISOLA, Elisa Maria Andrade. **Análise por triangulação de métodos: um referencial para pesquisas qualitativas**. Revista Univap – revista.univap.br São José dos Campos-SP-Brasil, v. 20, n. 35, jul.2014.

MARTINEAU, John. **Quadrivium – As quarto artes liberais clássicas da Aritmética, da Geometria, da Música e da Cosmologia**. São Paulo: É Realizações, 2014

MENDES, Iran Abreu. **Números – O simbólico e o racional na Históri**a. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006

__________________. CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática – Fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMAT, 2016

MENEGUETTI, Renata Cristina Geromel. **Educação Matemática – Vivências Refletidas**. São Paulo: Centauro, 2006

MIGUEL, Antonio. BRITO, Arlete de Jesus. CARVALHO, Dione de Lucchesi. MENDES, Iran Abreu. **História da Matemática em atividades didáticas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MILIES, Francisco César Polcino; BUSSAB, José Hugo de Oliveira. **A Geometria na Antiguidade Clássica**. São Paulo: FTD, 1999

MINAYO, M.C.S. ASSIS, S.G. SOUZA, E.R. **Avaliação por triangulação de métodos: abordagem de programas sociais.** Rio de Janeiro: FioCruz, 2010

MONTEIRO, Lúcia Cristina Silveira. **O conceito de Infinito e a percepção de Movimento**. In: Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife, PE. Anais Eletrônicos. Recife: UFPE, 2004. Disponível em <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/09/CC33207518400.pdf>, acesso em 22 Mar. 2019

MORIN, Edgar. CIURANA, Emilio-Roger. MOTTA, Raúl Domingo. **Educar na era planetária – O pensamento complexo como método de aprendizagem pelo erro e incerteza humana.** São Paulo: Cortez, 2003.

NEFFA, Elza; RITTO, Antônio Carlos. **Percepção Transdisciplinar – uma construção coletiva.** Rio de Janeiro: EdUERJ, 2010

NOGUEIRA, Tiago Sanches. **Ensaios sobre um infinito: música e psicanalise**. São Paulo: Zagadoni, 2013. Disponível em: < https://www.larpsi.com.br/media/mconnect_uploadfiles/9/7/9788564250581-tiago.pdf>

NOGUEIRA, Salvador. **“Infinito, esse troço que não acaba.”**, Revista Super Interessante. Disponível em: <https://super.abril.com.br/ciencia/infinito-esse-troco-que-nao-acaba/>

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006, 78f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Faculdade de Ciência, Departamento de Matemática Pura, Universidade do Porto, Porto, Portugal.

OLIVEIRA, Ivanilde Apoluceno de. **Epistemologia e Educação – Bases conceituais e racionalidades científicas e históricas.** Petrópolis: Vozes, 2016.

PASTOR, J. Rey; BABINI, J. **Historia de la Matemática**. Buenos Aires: Editora Espasa-Calpe, 1951

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática – o estudo do erro no ensino da Matemática Elementar**. São Paulo: Papirus, 2000.

RODRIGUES, Tatiana Miguel; MUCHERONI, Laís Fernandes. **Geometria Fractal e alguns exemplos clássicos**. In: Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional – SUDESTE, 2013, Bauru, SP. Anais Eletrônicos. Bauru: UNESP, 2013. Disponível em <http://www.sbmac.org.br/cmacs/cmac-se/2013/trabalhos/PDF/6738.pdf>, Acesso em 19 Abr, 2019.

POINCARÉ, Henri. **Ensaios Fundamentais**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2017

_______________.**O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

SANTOS, Boaventura de Souza. **Renovar a teoria crítica e reinventar a emancipação social**. São Paulo: Boitempo, 2007

SANTOS JUNIOR, Clovis Lisboa dos**. A História da Matemática no Processo Educativo: concepções e perspectivas**. In: XVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2013, Vitória, ES. Anais Eletrônicos. Vitória: UFES, 2013. Disponível em <http://ocs.ifes.edu.br/index.php/ebrapem/xvii_ebrapem/paper/view/1039>, Acesso em 19 Abr. 2019

SCIENTIFIC AMERICAN – **As diferentes faces do infinito: formas que a Física e a Matemática descobriram para trabalhar com um conceito misterioso e essencial para o desenvolvimento do pensamento científico**

STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números – A Matemática do zero ao infinito.** Rio de Janeiro: Zahar, 2016

SERRES, Michel. **Os cinco sentidos: filosofia dos corpos misturados.** Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2001.

_______________. **Variações sobre o Corpo**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2004.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007

SILVEIRA FILHO, Jairo Luiz. **Intuição e Imaginação na aprendizagem do Infinito.** (Ver como citar a dissertação.)

RODRIGUES, Carla Gonçalves. **Em que a filosofia da diferença e a arte contemporânea podem servir à formação de professores de matemática?.** ZETETIKÉ – FE – Unicamp – v. 18, Número Temático 2010

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. São Paulo, Zahar, 2012.

TINOCO, Lúcia; GIRALDO, Victor. **Geometria Euclidiana por meio de resolução de problemas.** Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 1999.

VELOSO, Eduardo. **Há vida na geometria para além dos prismas, paralelepípedos, cubos, esferas, cilindros e cones**. Educação e Matemática: revista da associação de professores de matemática. Lisboa, n. 96, p. 18-19, fev. 2008. Disponível em <http://www.apm.pt/files/_18-19_lq_47cbddeee4f8b.pdf>, Acesso em 29 Nov. 2019.

VILELA, Denise Silva; MONTEIRO, Alexandrina. **Paradoxos do infinito e os limites da linguagem**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016

YOKOYAMA, Léo Akio. **“Há infinitos maiores que outros?”.** Anais do XIII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo, 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4823_2689_ID.pdf>

THOMAZ, Mara Lucia, FRANCO, Valdeni Solliani. **GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA/ GEOMETRIA ESFÉRICA.** Secretaria de Educação e Esporte do Paraná. Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/233-4.pdf>, Acesso em 19 Nov. 2019

APÊNDICE

Apêndice I – Questionários respondidos por alunos da Educação Básica e professores da Educação Básica e da Educação Superior

1) Questionário oferecido para os alunos da Educação Básica:

PESQUISA – CONCEITO DE INFINITO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

(ALUNOS)

Parte I - IDENTIFICAÇÃO

Nome (OPCIONAL):____

Sexo: (   ) feminino   (   ) masculino   Idade: ___________

SEGMENTO: (   ) Ensino Fundamental   (   ) Ensino Médio   ANO/ SÉRIE ATUAL: _____

Nome da Escola: ____

Sua escola é: (   ) Pública   (   ) Privada

Parte II – Investigando o conceito de Infinito

Informe três palavras que, para você, estão associadas ao conceito de infinito:

_____________, ________________, ______________

Na escola, você se recorda de algum conteúdo associado ao conceito de infinito? Qual?
____

E nas aulas de Matemática? Você já estudou algum conteúdo associado ao conceito de Infinito? Qual? ____

Diga, na sua opinião, se as alternativas abaixo são verdadeiras ou falsas:

1) “É possível contar um conjunto com infinitos números.”

(   ) Verdadeiro   (   ) Falso

2) “A medida de um segmento de reta pode ser representada por um número com infinitas casas decimais.”

( ) Verdadeiro ( ) Falso

3) “Há infinitos que são maiores que outros.”

( ) Verdadeiro ( ) Falso

4) “Uma reta é infinita.”

( ) Verdadeiro ( ) Falso

5) “É possível somar uma sequência infinita de números.”

( ) Verdaeiro ( ) Falso

6) “O número π é exatamente igual a 3,14.”

( ) Verdadeiro ( ) Falso

Parte III – História e Matemática

Na sua opinião, conhecer a História dos conceitos matemáticos faria com que você se interessasse mais pelas aulas? ( ) SIM ( ) NÃO

Justifique brevemente a sua resposta:

____
____
____

Parte IV – Considerações Finais

Há algo, fora do contexto escolar, que você considere INFINITO e queira descrever com mais detalhes? Faça um breve texto no espaço abaixo:

____
____
____
____
____
____

Muito obrigada pela sua colaboração!

----

2) Questionário oferecido para os professores da Educação Básica

CAPES UFRJ

hcte história das ciências e das técnicas e epistemologia HCTE - UFRJ

PESQUISA – CONCEITO DE INFINITO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

(PROFESSOR)

Parte I - IDENTIFICAÇÃO

Nome (OPCIONAL):____

Sexo: (   ) feminino   (   ) masculino   Idade: ___________   Ano de formação: __________

SEGMENTO: (   ) Ensino Fundamental   (   ) Ensino Médio

É professor da rede: (   ) Pública   (   ) Privada

Grau de formação atual:

(   ) Licenciatura (   ) Especialização (   ) Mestrado (   ) Doutorado

Parte II – FORMAÇÃO SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Ao longo do seu curso de Licenciatura em Matemática você estudou História da Matemática?

(   ) SIM   (   ) NÃO

Durante o seu curso, houve alguma abordagem sobre como utilizar a História da Matemática na prática da sala de aula?

(   ) SIM   (   )NÃO

Na sua opinião, apresentar a história dos conceitos matemáticos despertaria maior interesse nos seus alunos pelas aulas? (   ) SIM   (   ) NÃO

Justifique brevemente a sua resposta:

____
____
____
____
____
____

Parte III – PRÁTICA DE SALA DE AULA

1) Você utiliza abordagem histórica na sua prática em sala de aula?

( ) SIM ( ) NÃO

2) Na sua análise, os livros didáticos atuais abordam de forma satisfatória a História da Matemática?

( ) SIM ( ) NÃO

3) Você conhece ou já utilizou algum livro paradidático sobre História da Matemática com suas turmas?

( )SIM ( ) NÃO

Parte IV – INFINITO

1) Na sua opinião, o que seria "História Cultural do Infinito"?

____

2) Na sua prática de sala de aula, seus alunos costumam fazer perguntas sobre o conceito de Infinito?

( ) SIM ( ) NÃO

3) Na sua opinião, qual ou quais das frases a seguir causariam maior polêmica nas suas aulas?

( ) O número π representa a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, porém não é um número racional e sim irracional.

( ) É possível enumerar os números racionais mas não é possível enumerar os números reais.

( ) A terra não é plana.

( ) Uma reta é infinita.

( ) É possível somar os termos de uma sequência infinita de números.

( ) Um segmento de reta pode ter uma medida representada por um número irracional.

Muito obrigada pela sua colaboração!

---

3) **Questionário enviado por e-mail para professores que formam professores**

- PERGUNTA 1: Na sua opinião, o conceito de Infinito Matemático é bem discutido na Educação Básica?

- PERGUNTA 2: O senhor acha que os alunos chegam aos cursos de Matemática com esse conceito bem construído, de modo que tenha subsídios para entender os conceitos iniciais de Cálculo?

- PERGUNTA 3 O senhor costuma discutir historicamente o conceito de Infinito Matemático com os seus alunos da Licenciatura?

- PERGUNTA 4: Há interesse por parte dos alunos formandos em perguntar sobre esse assunto?

- Escolha pelo menos uma das perguntas a seguir nos diga como responderia a um aluno da educação básica:

a) PERGUNTA 5: Se o Pi é um número irracional, por que é definido como a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro?

b) PERGUNTA 6: Como é possível somar uma quantidade infinita de termos de uma PG, se ela não termina nunca?

c) PERGUNTA 7:Se uma reta é infinita para os dois lados e a Terra é redonda, a reta é mesmo reta ou é uma circunferência?

d) PERGUNTA 8: É possível aumentar infinitamente o número de lados de um polígono, a ponto do comprimento do seu lado desaparecer, os vértices consecutivos se unirem, e ele se tornar uma circunferência?

e) PERGUNTA 9:Até quantas vezes podemos subdividir o Triângulo de Sierpinski?

f) PERGUNTA 10: Como raiz quadrada de dois, que é um número irracional, e por isso infinito, pode representar a medida de um segmento de reta, que é finito?

g) PERGUNTA 11: Por que 0,99999999... é igual a 1?

h) PERGUNTA 12: Há infinitos maiores que outros?

Apêndice II – Algumas atividades que provocaram as perguntas sobre História Cultural do Infinito

1) Atividade provocadora da pergunta sobre Paradoxo de Zernão – Arquiles e a Tartaruga

A atividade abaixo foi a atividade motivadora da Pergunta 3, descrita no Capítulo 2 dessa dissertação. Esta atividade foi elaborada em colaboração com a professora Neide da Silva Coelho, foi implementada, pela primeira vez, em escolas da rede privada de ensino da Zona Oeste do Rio de Janeiro, no início dos anos 2000.

O conjunto dos números racionais e o som das notas musicais

Você sabia que o conjunto que reúne os números inteiros e as frações é chamado de conjunto dos números racionais? Esse nome vem da palavra razão que, em Matemática, quer dizer divisão entre duas grandezas, dois valores. E nós sabemos que as frações representam uma divisão entre o numerador e o denominador, lembra?

Atividade I

1) Sua equipe recebeu quatro copos e deverá enchê-los com água, obedecendo a seguinte seqüência:
1º copo – encher até a borda
2º copo – encher até a metade
3º copo – encher até a metade da metade
4º copo – encher até a metade da metade da metade

2) Cole em cada copo uma fita adesiva, desde a sua base até o nível da água.
Retire as tiras de fita adesiva e cole-as na mesa, na mesma ordem dos copos e observe: Qual é a relação entre o comprimento das mesmas? Se achar necessário, use régua.

____
____
____

Atividade II

Bata nos copos com a caneta e responda:

a) Os copos emitem o mesmo som? Por que será? Tente organizar uma justificativa com a sua equipe.

____
____
____
____

b) Quando enchemos o copo até a borda utilizamos ______ ml de água.
A fita adesiva colada nesse copo tem ____ cm de comprimento.

c) Quando enchemos o copo até a metade utilizamos ______ ml de água.
A fita adesiva colada nesse copo tem ____ cm de comprimento.

d) Quando enchemos o copo até a metade da metade utilizamos ______ ml de água.
A fita adesiva colada nesse copo tem ____ cm de comprimento.

e) Quando enchemos o copo até a metade da metade da metade utilizamos ______ ml de água.
A fita adesiva colada nesse copo tem ____ cm de comprimento.

Analise as respostas anteriores e "amarre as idéias": qual é a relação entre a quantidade de água em ml contida no copo e o comprimento da fita colada até o nível da água, no mesmo copo?

____
____
____
____
____

Atividade III: Frações e porcentagem

Quando representamos quantidades menores que um inteiro, utilizamos as frações __________ para tal. Se quisermos representar uma porcentagem, devemos representar essa quantidade com denominador igual a ____. Represente as quantidades dos copos por meio de frações, seguindo a seguinte ordem: fração ordinária, fração decimal e porcentagem.

a) Copo cheio até a borda: ____ = ____ = ____

b) Copo cheio até a metade: ____ = ____ = ____

c) Copo cheio até a metade da metade: ____ = ____ = ____

d) Copo cheio até a metade da metade da metade: ____ = ____ = ____

Atividade IV: Redução de frações a um mesmo denominador

a) Agora você deverá representar todas as frações ordinárias da atividade III utilizando o mesmo denominador, sendo ele o MENOR possível.

- Que denominador será esse?

- Que cálculo entre os denominadores você utilizou para calcular esse número?

b) E como ficariam essas frações, usando esse denominador? Utilize seus conhecimentos sobre frações equivalentes.

Copo 1: ____ Copo 2: ____ Copo 3: ____ Copo 4: ____

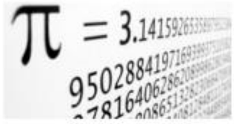
Junte os conteúdos dos copos 2, 3 e 4 num único copo e depois responda:

c) O copo ficou totalmente cheio? Quantos ml de água estão contidos nesse copo?

d) Que fração de um copo cheio representa essa quantidade de água?

e) Desafio: Represente essa fração como uma soma de outras frações.

2) Atividade provocadora da pergunta sobre π ser ou não um número irracional.



Ação 1: Relembrando a atividade de Robótica

Em março desenvolvemos uma atividade onde um robô com leitor de cor percorria uma trajetória circular. O objetivo era perceber o valor de π, dividindo o comprimento da circunferência correspondente à trajetória pelo diâmetro. Cada equipe encontrou um valor aproximado para π. A tabela abaixo mostra a experiência registrada por um dos grupos do 8º. Ano:

Robô / Equipe	Velocidade do Robô	Comprimento da circunferência da trajetória (C)	Diâmetro da Trajetória (D) cm	C : D
[illegible]	- 52 e - 31	68,64 x 2	38,5 e 44	3,12
[illegible]	- 44 e - 25	51,52 x 2	28 ou 33,5	3,08
BBS	- 40 e - 20	52,94 x 2	29 ou 35	3,03
[illegible]	- 52 e - 30	65,36 x 2	36 ou 42	3,11
[illegible]	- 44 e - 19	46,92 x 2	25 ou 31	3,03

a) Qual das equipes dessa turma conseguiu uma razão C:D mais próxima do valor de π?

____

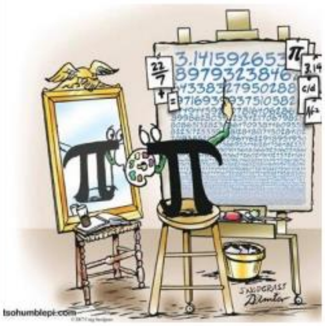
b) Explique por que nenhuma das representações escritas na tabela representam o valor do π e são, na verdade, aproximações desse valor.

____

____

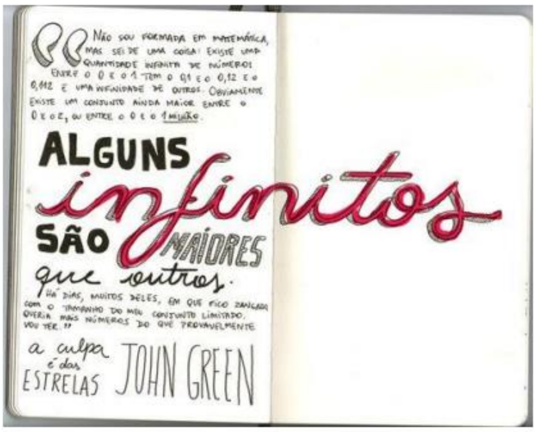
____

c) O valor do π é um número decimal periódico? Justifique com base na ilustração abaixo.



Ação 4: A culpa é das estrelas

Na aula de Matemática sobre números reais, quando a professora lembrou do conceito de infinito, alguns alunos citaram a frase no texto do livro / filme "A culpa é das estrelas".



a) Localizar um número entre dois outros números foi uma atividade realizada em sala de aula. Partindo dessa ideia, dê um exemplo de um número racional localizado entre a $\sqrt{20}$ e a $\sqrt{24}$.

b) É possível enumerar todos os números inteiros existentes **entre** -3 e 8? Quais são eles?

c) O mesmo pode ser feito para os números reais existentes entre esses números? Justifique a sua resposta.

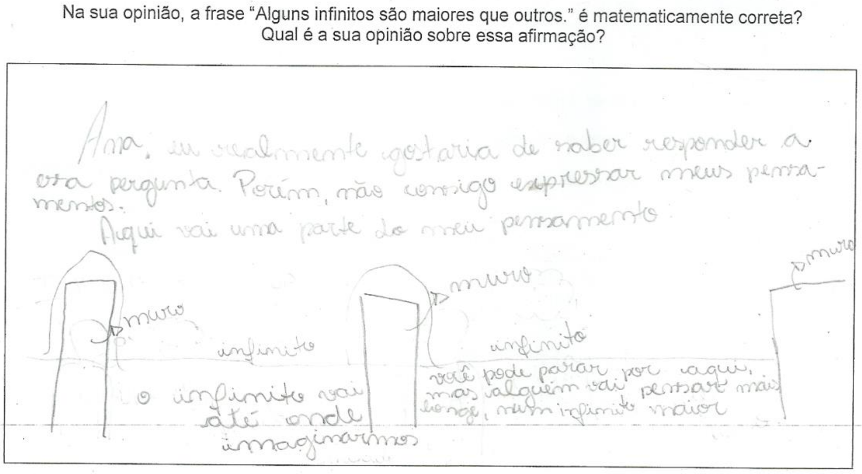
____
____
____

<u>Filosofia e Matemática (Só para refletir. Não vale pontos.)</u>

Na sua opinião, a *frase "Alguns infinitos são maiores que outros."* é matematicamente correta?
Qual é a sua opinião sobre essa afirmação?

Algumas respostas de alunos para esse questionamento:

Resposta da aluna M.



Resposta do aluno S.