DAVID HILBERT E SUAS PRODUÇÕES ACADÊMICAS: *O GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE* COMO EXEMPLO DE SOLIDARIEDADE LÓGICA ENTRE A ARITMÉTICA E A GEOMETRIA

Daniel Felipe Neves Martins

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM HISTÓRIA DA CIENCIA E DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS

Aprovado por:

____

Prof. Ph.D. Ricardo Silva Kubrusly, IM-HCTE-UFRJ (Orientador)

____

Prof. Ph.D. Carlos Antônio de Moura, IME-UERJ

____

Prof.D.Sc. Carlos Benevenuto Guisard Koehler, HCTE-UFRJ

____

Prof. Ph.D. Carlos Silva Kubrusly, PUC-RIO

____

Prof. Dr. Sc. Milene Maria Drumond Pimenta, IM-UFF

____

Prof. Dr. Sc. Teresa Cristina de Carvalho Piva, HCTE-UFRJ

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JULHO DE 2011

*Ao querido velho **Daniel Martins**, senhor meu pai, e a minha queridíssima mãe **Cilene Neves Martins**, na atual encarnação, por terem me dado a chance de voltar a este mundo de provas e expiações, de viver em família, de estudar muito sem qualquer dificuldade ou atropelos, de ser um homem de bem e acima de tudo por terem educado a mim e meus irmãos, **Marcelo Martins** e **Raphael Martins**, mergulhados na **Doutrina Espírita**.*

*Ao meu mestre, professor **Ricardo Kubrusly**, figura sem a qual eu não teria concluído esta etapa importante na minha vida, com o respeito de um filho.*

*Aos meus pequeninos tesouros em forma de juventude e infância, **Bernardo Martins** e **Marina Martins**, por terem me ensinado e ensinado a minha gente, que o amor aos filhos é incondicional e que os familiares devem ser condutores morais de suas atuais crias.*

AGRADECIMENTOS

Ao professor e amigo Ricardo Kubrusly, meu orientador, por ter conduzido este trabalho com firmeza e por ter me oferecido a mão amiga ao longo desta jornada. Pelos excelentes encontros desde a Especialização em Matemática, passando pelo mestrado e agora no doutorado, onde as portas se abrem para, quem sabe, produzirmos algum trabalho juntos. Tenho por ele um carinho infinito e serei eternamente grato por ter me apresentado *Herr Professor David Hilbert*.

Aos professores Teresa Piva (excelente amiga por quase duas décadas!), Carlos Koehler, Carlos de Moura, Carlos Kubrusly e Milene Pimenta, por terem gentilmente aceito fazer parte da banca que julgará este trabalho. Todos foram convidados pela competência, atenção, carinho e certeza de que suas observações são e sempre serão de profundo valor à minha pesquisa e ao meu engrandecimento profissional.

Aos meus queridos professores de Matemática, de ontem, de hoje... de sempre, que contribuíram para a minha formação como professor: professora Heloisa Acácia da Motta e Albuquerque (nos bancos do último ano da escola primária), professores Vera Maria Ferreira Rodrigues, Neide da Fonseca Parracho Sant´Anna, Heliane Vieira Machado, Dario Souto, Milton Agostinho e Octávio Gitirana (nos bancos do Colégio Pedro II), professora Lucia Tinoco, Maria Aguieiras, Luis Filipe R. Cruz, Walcy Santos, José Paulo Carneiro, Charles Guimarães, Neyde Felisberto, Astréia Barreto, Maria José Maia, Victor Giraldo, Márcia Ceriolli, Tatiana Roque, Luis Pinguelli Rosa, Carlos Koehler e Ildeu de Castro Moreira (nos bancos da graduação, especialização, mestrado e doutorado na UFRJ).

A diretora do Colégio Pedro II, Unidade Escolar São Cristóvão II, professora Tereza Cristina de Paiva, por ter permitido que eu cumprisse uma carga horária de 22 tempos semanais em dois dias, durante dois anos, para cursar as disciplinas do doutorado no programa de HCTE da UFRJ em diferentes dias da semana.

A chefa do Departamento de Matemática do Colégio Pedro II e querida amiga, professora Maria de Lourdes Rocha de Assis Jeanrenaud, por sua cultura, pelo senso de justiça, pelas inúmeras conversas sobre Álgebra e Análise, sobre História da Matemática, e em especial por dividir comigo o tão precioso tempo de chefa, para debatermos sobre a História da Matemática Alemã nos séculos XIX e XX.

Aos meus amigos Anderson de Vargas (matemático), Érika Szaboo (minha cunhada historiadora), Thiago Monteiro (meu amigo geógrafo e parceiro de leituras mil), Raphael Martins (meu irmão acadêmico, historiador) e Vivian Zampa (minha doce amiga historiadora), por me deixarem "ver e sentir" através de seus olhos e de "ouvir" através de seus corações, a importância da academia e a dureza que é para nela nos manter de cabeça erguida, sem desistir. A vocês, excelentes amigos, professores, pesquisadores, mestres e futuros doutores, o meu abraço.

As minhas famílias, *os Neves* e *os Martins*, por verem em mim e em meus irmãos, referências. Por terem colocado em prática durante a minha infância e juventude, principalmente os *Neves*, o sentido verdadeiro da palavra amor.

Resumo da tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em HCTE-UFRJ como requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

DAVID HILBERT E SUAS PRODUÇÕES ACADÊMICAS: *O GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE* COMO EXEMPLO DE SOLIDARIEDADE LÓGICA ENTRE A ARITMÉTICA E A GEOMETRIA

Daniel Felipe Neves Martins

Julho/2011

Orientador: Ricardo S. Kubrusly

Programa de História da Ciência e das Técnicas e Epistemologia

Este trabalho faz uma descrição detalhada da vida de David Hilbert e suas produções acadêmicas desde o inicio de sua formação como matemático, porém destacando o período entre 1899 e 1902, momento em que deixa de publicar artigos e de pesquisar sobre a Teoria dos Invariantes Algébricos e a Teoria das Equações Integrais para *aparentemente* dedica-se somente aos Fundamentos da Geometria, uma "Matemática menor" aos olhos dos puristas e com muitos apelos à Filosofia. Apresentamos o método axiomático de Hilbert para a fundamentação da geometria euclidiana e destacamos o livro *Grundlagen der Geometrie* como exemplo canônico de aplicação do seu método que, em nosso entender, é resultado de uma solidariedade lógica entre a aritmética e a geometria. Apresentamos e discutimos com certa riqueza de detalhes os resultados mais importantes dos trabalhos dos matemáticos alemães e franceses do século XIX e inicio do século XX, pois são os referenciais teóricos para respondermos a questão que norteou esta pesquisa: Hilbert rompe de vez com a álgebra e a análise para dedicar-se à geometria? Sinalizamos ao leitor quais os desdobramentos que o trabalho de Hilbert gerou no meio acadêmico, como o seu livro. Mostra a universalidade do autor em termos matemáticos, o método no *Grundlagen*, as principais discussões sobre independência e incompatibilidade de axiomas e resultados e pensadores que conceberam os fundamentos da geometria de forma distinta da exposta por Hilbert.

Abstract of thesis presented to History of Science, Techniques and Epistemology Program at the UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

DAVID HILBERT AND HIS ACADEMIC PRODUCTIONS: THE *GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE* AS AN EXAMPLE OF LOGIC SOLIDARITY BETWEEN ARITHMETIC AND GEOMETRY

Daniel Felipe Neves Martins

Julho/2011

Orientador: Ricardo S. Kubrusly

Programa de História da Ciência e das Técnicas e Epistemologia

This reserch describes in details the David Hilbert´s life and his academic productions since his first years as an undergraduate mathematician student until his graduation and his mathematical work. We analyze the period between 1899 to 1902, when apparently stops to produce mathematics research papers in Invariant Theory and Integral Equations Theory to dedicate his efforts to the Foundation of Geometry, seen by the purists as a “minor mathematics” and too much linked to Philosophy. We present the Hilbert´s axiomatic to Euclidean geometry and we show that the *Grundlagen der Geometrie* is a canonical example of it. For us, it has seen as logic solidarity between arithmetic and geometry. The most important German and French mathematicians´ results of the last half of XIX´s and beginning of XX´s are presented ´cause their works has been theoretical basis to answer the question that we purpose in this research: “Hilbert breaks up with algebra and analysis to dedicate his effort into geometry?”. To answer it, we showed up Hilbert’s universality as mathematician, we studied the independence and incompatibility of axioms and we pointed out the discussions that Hilbert´s book provoked as well as thinkers that conceived geometry differently of him.

“(...) Entre tantos anos
Entre tantos outros
Que sorte a nossa hein?
Entre tantas paixões
Esse encontro
Nós dois, esse amor.
Entre tantos anos
Entre tantos séculos
Que sorte a nossa hein?
Entre tantas paixões
Esse encontro
Nós dois, esse amor.”

Vanessa da Mata & Liminha, AINDA BEM
http://letras.terra.com.br/vanessa-da-mata/102362/

ÍNDICE

Introdução

“Que triste não saber sonhar
Apenas ficar alerta o tempo inteiro
Contra tudo o que não é verdadeiro
com medo de um pensamento roubar a ideia.”

Olavo Duarte

Esta é uma tese em História. Traz um questionamento que é respondido segundo fatos históricos e segundo a aquisição e a construção do conhecimento de conteúdos por um matemático, de modo que a solidez, o domínio, a fundamentação e a genialidade, tornaram-se traços marcantes na vida acadêmica deste homem, além de contribuir definitivamente para a sucessão de resultados que fundamentam diferentes teorias matemáticas, filosóficas e físicas.

Diferente de uma tese em Matemática, onde encontramos a demonstração de um resultado inédito ou um olhar diferenciado, inovador e colaborativo sobre um assunto já existente, esta e muitas outras teses na área de História das Ciências têm como um de seus interesses ideológicos, elucidar pensamentos ou clarificar resultados, estudar ou encontrar a gênese do conhecimento ou mesmo apresentar a comunidade científica, em geral, uma maneira de pensar de um autor ou de uma escola, assim como revelar ao mundo os relevantes resultados que contribuíram ou deixaram frutos para o progresso dos homens e da ciência em si. Este trabalho em especial, tem base na historiografia da ciência alemã dos anos finais do século XIX e iniciais do século XX. Nela vamos apresentar as produções acadêmicas de David Hilbert enfatizando o período de 1898 a 1902, entendido por nós como um dos *períodos conceituais da Geometria;* faremos uma breve análise do livro *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria), visto por nós como exemplo canônico de aplicação do método axiomático baseado no formalismo e exemplo de *solidariedade lógica* (termo nosso) entre a aritmética e a geometria para finalmente responder ao questionamento que propusemos e cuja resposta constitui a tese deste trabalho: ***"David Hilbert rompeu com a álgebra e com a análise matemática para se dedicar aos estudos da geometria euclidiana e criou um novo método para provar a consistência da geometria via aritmética?"***

No **capitulo I** fazemos um apanhado biográfico de David Hilbert descrevendo o momento histórico ao qual ele pertence. Procuramos descrever com certa riqueza de detalhes fatos que contribuíram para a sua formação acadêmica como matemático desde a sua passagem pelas escolas elementares, até sua chegada a Universidade de Göttingen, se destacando ao lado de outros companheiros como Adolf Hurwitz e Minkowski. Apontamos seus professores, seus principais campos de pesquisas e interesses matemáticos. Descrevemos suas participações em grupos de estudos e parcerias com outros matemáticos de diferentes universidades alemãs e sua atuação em congressos fora da Alemanha, em especial, nos circuitos acadêmicos franceses. Comentamos que após voltar de uma longa viagem à França no ano de 1886, Hilbert trouxe consigo muitas ideias que o ajudaram concluir antigas questões matemáticas e propôs novos problemas em sua área de interesse de pesquisa na época, a Teoria dos Invariantes

Algébricos. Incluímos neste capítulo curiosidades históricas e descobertas feitas por historiadores da ciência e ou divulgadores científicos.

Ao estudar minuciosamente o homem e sua obra foi fácil entender (e atualmente, defender e justificar) porque David Hilbert foi sem sombra de dúvidas um dos matemáticos mais influentes no período que vai desde o final do século XIX até o princípio do século XX. Juntamente com Henri Poincaré (1854-1912), Hilbert ficou conhecido como o último grande universalista da Matemática. Em termos matemáticos, desde seus primeiros trabalhos, podemos observar a vocação de Hilbert para a Matemática Pura, centrada na Teoria dos Invariantes Algébricos e na Teoria dos Números. Em termos filosóficos e epistemológicos, o estruturalismo e formalismo sustentam as suas produções acadêmicas.

No **capitulo II** descrevemos as produções cientificas dos matemáticos alemães do século XIX e procuramos desmistificar o fato de que estas produções giravam somente em torno da Análise Matemática e da Teoria dos Números, como afirmam alguns historiadores. Apresentamos, caracterizamos, discutimos e justificamos o momento de transição do pensamento filosófico e prático da Matemática conhecido como *Movimento de aritmetização da Análise Matemática* e suas relações com os diferentes tipos de infinito: o atual e o potencial. Nesta parte de nossa pesquisa mostramos como se deu os diferentes processos de construção do conjunto dos números reais por matemáticos alemães e comparamos com o resultado obtido por Cauchy na França, por acreditarmos que há questões de naturezas epistêmicas importantes a serem apresentadas. Hoje porém, como historiadores da ciência, temos um outro olhar e uma outra justificativa para tais resultados terem genes de construções tão diferentes: cremos que estes genes venham da natureza íntima dos próprios matemáticos que os conceberam e da liberdade de espírito que a Matemática outorga ao matemático para que este crie *a sua Matemática,* sem amarras.

Ainda neste capítulo, descrevemos os primeiros passos de fundamentação da álgebra abstrata e os importantes resultados acerca dos números algébricos e das leis que regem o conjunto formado por estes números. Mostramos que os primeiros trabalhos de Hilbert envolvendo matemática dita elementar, como a geometria euclidiana, enfatizam a macroestrutura na qual um conjunto está inserido e a partir desta macroestrutura, apresenta a possibilidade de construção de resultados coerentes e consistentes. Uma caracteristica bem peculiar dos puristas.

Por fim, fazemos um apanhado sobre a visão das geometrias estudadas no circuito europeu da época. Procurando responder a vários questionamentos que foram surgindo em nossa mente a medida que escreviamos o trabalho, nos vimos de volta ao *Quatrocentto* renascentista italiano, onde repousam as bases empíricas, a nosso ver, da Gometria Projetiva. Nesta parte de nosso texto, demos uma atenção especial às questões intrigantes que a Geometria Projetiva apresentou aos matemáticos alemães. Hoje acreditarmos que seus fundamentos contém respostas à várias questões que nos propusemos responder, principalmente àquelas sobre o porque da proposta hilbertiana de axiomatização da geometria euclidiana. Desta forma, voltamos a viajar no tempo, saimos do *Quatrocentto e* nos reencontramos com a Matemática alemã através do *Erlangen Programme*, de Felix Klein.

No **capitulo III** procuramos voltar a figura de David Hilbert e apresentar suas pesquisas em teoria dos invariantes, teoria dos numeros, axiomatização da geometria, equações integrais, Física e uma pincelada sobre a concepção e a construção de seu Programa Formalista, pois este tema encontra-se fora do corte temporal de nosso trabalho, além de gerar uma série de questões de origem filosófica atreladas à lógica. Num segundo momento deste capítulo, mostramos *der klatsch-rack* que se originou no meio acadêmico desde a mudança radical de interesse matemático de Hilbert. Aparentemente Hilbert abandona a Matemática Pura em detrimento de '*questões menores'* como os Fundamentos da Matemática, em especial, pela geometria elementar. Comentamos e sustentamos que o *Grundlagen der Geometrie* surge como culminância das investigações geométricas de outros matemáticos como Riemann, Beltrami, Helmholtz, Klein, Lee, Pasch, Veronese sobre a geometria projetiva e as geometrias não euclidianas. Mostramos que a construção destas geometrias sob a óptica da axiomatização, em especial a axiomatização da geometria projetiva, permitiu fechar *rachaduras lógicas* existentes na geometria desde os tempos de Euclides. Pontuamos também que para a maioria dos geômetras alemães da época, a Geometria era uma ciência natural que objetivava estudar a forma externa dos objetos e cujas verdades são obtidas através de experiências empíricas. Neste altura de nosso texto, já esclarecemos ao leitor o que vem a ser o método axiomático proprimente dito, como se dá o processo de axiomatização da geometria, os trabalhos de Maurice Pasch, a axiomática proposta por Hilbert no *Grundlagen* e a análise do surgimento de possiveis paradoxos. Não avançamos no sentido de mostrar o Programa Formalista como culminância do processo de axiomatização da geometria por não concordarmos com a ideia de que o Teorema de Gödel tenha invalidado todo Programa Formalista proposto por Hilbert. Mas, esta afirmativa é uma outra tese a ser defendida, à margem da proposta de nosso trabalho.

O **capitulo IV** traz o método axiomático. Fazemos a sua descrição e destacamos os seus fundamentos e objetivos. Procuramos apresentar uma diferenciação entre o método genético e o método axiomático comparando-os e apontando suas respectivas falhas e acertos. A seguir, apresentamos o método *axiomático da geometria* e contamos como Hilbert compôs o capítulo I do *Grundlagen,* sempre muito fiel ao formalismo e ao estruturalismo, correntes filosóficas definidas no corpo deste trabalho.

No **capitulo V**, fazemos uma análise do *Grundlagen*, uma vez que nos propusemos a apresentá-lo como exemplo de texto mais bem sucedido do processo de axiomatização da geometria euclidiana, pós Euclides, pós Legendre e anterior aos indecidíveis. Fizemos um apanhado geral de cada um dos sete capítulos contidos na obra, centrando nos no capítulo 2, pois neste capítulo Hilbert descreve como concebeu o método que demonstra a compatibilidade e a independência dos diferentes axiomas apresentados. O leitor do nosso trabalho terá a oportunidade de conhecer sobre o que se trata cada um dos capítulos do *Grundlagen* e entender o porque da estrutura organizacional do livro. Também fizemos breves apontamentos sobre os apêndices contidos na obra após a 10a edição alemã. Soubemos, graças ao trabalho do matemático francês Paul Rossier, que a atual configuração do texto demorou a tomar forma e que a inserção dos apêndices e comentários, como por exemplo os de Paul Bernays, aluno e assistente de Hilbert esclareceram mais ainda a ideia original de Hilbert sobre o uso da equivalência lógica.

Durante a confecção deste capítulo, tivemos nas nosas mãos a cópia do texto original de Hilbert *Der Grundlagen der geometrie*, contido no *Mathematische Annalen.* Este material foi adquirido na Georg-August Universität-Göttingen, por ocasião de uma viagem nossa à Alemanha, em julho de 2009. Foi uma viagem difícil de ser realizada, pois foi inteiramente custeada sem o auxilio de órgãos de pesquisas brasileiros, porém os resultados foram muito proveitosos. Coletamos materiais importantes tivemos acesso a cenários até então conhecidos por nós somente através de livros e pudemos até imaginar como foram os anos de vida de Hilbert naquela instituição. Encontramos na biblioteca da Georg-August Universität-Göttingen as primeiras edições alemãs, americanas e francêsas do G*rundlagen.* Hoje, de posse de tal diversidade de fontes primárias podemos dizer que, a menos de vocábulos específicos de cada lingua, as diferentes edições são fidelíssimas ao texto original de Hilbert. Estamos tentando, até o presente momento, conseguir uma versão em lingua portuguesa do *Grundlagen*, editada em 2007, pela editora portuguesa Gradiva Editora, porém sem sucesso.

O **capitulo VI** trata das questões que antecederam o *Grundlagen* como fundamentação teórica para esta parte de nossa pesquisa. Procuramos nos ater aos artigos de Hilbert, em suas notas de aula, nas cartas trocadas com outros matemáticos e na sua própria *praxis* enquanto matemático, para assim justificar a criação do método elaborado por ele e explicar que tipo de pesquisas anteriores auxiliaram Hilbert na concepção do seu método axiomático.

No **capitulo VI** apresentamos um *breefing* dos capítulos restantes da obra de Hilbert, sem o interesse de justificá-los. Acreditamos que uma possivel explicação para suas presenças no corpo do texto tem a ver com a necessidade de mostrar a amplitude que as questões elementares que envolvem a geometria euclidiana podem alcançar, além de costurar os diferentes caminhos que uma mesma teoria pode percorrer, sendo estes caminhos compostos de mesmos elementos básicos.

Lançamos e respondemos um questionamento sobre o pensamento de Hilbert em relação a geometria fazendo um *link* entre sua primeira visão empirista da geometria até o admitirmos como fiel formalista e estruturalista.

Nas **Considerações Finais** procuramos costurar todo o trabalho reavaliando a postura de Hilbert frente a própria Matemática, criticar e propor soluções às questões de caráter epistemológico e responder à questão central a que nos propusemos. Queremos deixar claro com este trabalho que :

(1) temos uma opinião que difere da maioria dos Historiadores da Matemática atuais, o que justifica a originalidade desta tese,
(2) acreditamos ter contribuido para o entendimento de assuntos relativos à História da Matemática alemã no corte temporal que apresentamos, já que analisamos muitos documentos que serviram-nos de fundamentação teórica para o nosso trabalho na lingua original dos autores, evitando assim as possíveis dubiedades de interpretações, comuns nas traduções dos documentos em linguas germânicas para linguas latinas. Sabemos que as barreiras linguísticas naturais estabelecidas entre falantes de lingua portuguêsa brasileira e língua inglesa são inúmeras. A cultura tradicional das escolas de nível médio brasileiras ao ensinar inglês e espanhol, é ver estas línguas com um carárter instrumental focado na leitura. O alemão não é ensinado. Os cursos são caros e os alunos não pertentem às camadas sociais populares. Cremos que tais fatos refletem-se nos níveis mais elevados de escolaridade, como nos cursos de mestrado e doutorado, pois encontramos muitos simpatizantes da História da Matemática e da Lógica produzidas na Alemanha que desistiram de suas pesquisas, por não

lerem documentos originais, ficando apenas com as impressões e críticas de quem os leu. E por fim,

(3) acreditamos termos aberto caminho para que futuros pesquisadores da área de História das Ciências possam estudar questões epistemológicas, filosóficas ou historiográficas sobre a História da Matemática e Filosofia da Matemática alemãs do século XIX e do inicio do século XX, a nosso ver muito abrangentes, diversificadas e de grande valor científico, principalmente para o desenvolvimento da Matemática Aplicada, da Física e das Engenharias da atualidade.

Capítulo I

Herr David Hilbert

"Só deveria haver escolas para meninos-poetas,
onde cada um estudasse com todo o gosto e
vontade o que traz na cabeça e não o que está
escrito nos manuais"

Mário Quintana

Ao buscar informações sobre o nascimento de David Hilbert, o pesquisador interessado em conhecer a figura deste eminente matemático, filósofo da Matemática e um dos principais representantes da corrente axiomática, encontrará em quase totalidade dos textos que seu nascimento é datado em 23 de janeiro de 1862, na cidade de Königsberg[1], então capital da Prússia Ocidental. Porém há um comentário interessante em Reid (1996) que ao começar a coletar dados para escrever a biografia de Hilbert, a autora descobriu após enviar uma carta ao arquivo estatal de Geheimes (então Berlim Ocidental), para obter dados precisos contidos em seu registro de nascimento, que no registro, não consta que Hilbert nasceu em Könisberg precisamente.

[1] Fundada em 1255 pelos Cavaleiros Teutônicos sob o nome de *Königsberg* (montanha do rei), ela foi capital da Prússia, e depois fez parte do Império alemão a partir de 1871. Hoje é nomeada Kaliningrado, capital da província russa de Kaliningrado, enclave russo entre a Polônia e a Lituânia, na beira do Mar Báltico. É famosa por ter tido entre seus habitantes o filósofo Immanuel Kant. A cidade e sua população sofreram no final da Segunda Guerra Mundial os severos bombardeios aliados, e a seguir uma repressão intensa dos soviéticos, que tentaram exterminar ou expulsar a população. Foi rebatizada *Kaliningrado* (do nome do presidente do Comitê Central do Partido Comunista, Mikhail Kalinine) após a Segunda Guerra Mundial, quando a URSS anexou os territórios da região (região de Kaliningrado). A cidade também é célebre pelo problema das Sete pontes de Königsberg, resolvido por Euler em 1736.

No importante documento consta que o nascimento ocorreu à uma hora da tarde do dia 23 de janeiro de 1862 e que o pequenino filho do juiz de direito Otto Hilbert e Maria Thèrese Erdtmann Hilbert fora batizado na casa de seus avôs no dia 16 de março de 1862, em Könisberg. Este documento foi enviado à Constance Reid por Dr. Von Schroeder, então diretor do setor de registros de nascimentos do arquivo estatal e deixa dúvidas se Hilbert nasceu realmente em Könisberg ou se somente foi batizado nesta cidade. Complementando a carta, Von Schroeder diz ainda que seja possível que Hilbert tenha nascido em Whelau, pequena cidade onde seu pai era juiz, na época de seu nascimento. Whelau, hoje nomeada Znamesk, era uma província de Burg-Kirche Königsberg dominada pela reforma protestante. É interessante saber que na época do nascimento de Hilbert esta cidade não possuía uma igreja católica, fato que pode ter contribuído para que a família Hilbert tenha escolhido Königsberg para batizar o seu primogênito.

Após tomarmos conhecimento do conteúdo da carta de Von Schroeder e da inquietude de Constance Reid acerca do que havia pesquisado e publicado na primeira edição da biografia de Hilbert, concordamos com a autora ao escrever que David Hilbert nasceu em Whelau, perto de Königsberg, capital da Prússia Ocidental porque preferimos não adotar uma postura equivocada quanto à precisão do local de nascimento de Hilbert e guardamos o dia, mês e ano contidos em seu registro de nascimento como sendo os oficiais.

Antes da nova edição de seu livro em 1981, Constance Reid consulta o editor alemão Walter Kauffmann-Bühler, da Spring Verlag, para saber se deveria ou não rever os dados sobre o nascimento do homem cujo nome intitulava seu livro e o editor disse que estava clara a ambigüidade sobre a data e local de nascimento de

Hilbert, porém não havia necessidade de escrever nada além do que já havia sido publicado na edição anterior.

> "*The* fortuitous combination of genes that produces an unusually gifted individual was effected by Otto Hilbert and his wife Maria sometime in the spring of 1861 and January 1862, at one o´clock in the afternoon, their first child was born in Whelau, near Königsberg, the capital of East Prussia. They named David."
>
> (*Hilbert,* Constance Reid, 1970, p.1.)

Ainda de acordo com Reid (1996) há dados sobre os Hilbert registrados em uma autobiografia e crônicas de um membro da família radicado em Königsberg, cujo nome não foi citado. Estes textos permitiram a autora conhecer alguns fatos e peculiaridades sobre os antepassados da família paterna de David Hilbert.

A presença dos Hilbert é destacada desde o século XVII na Saxônia. Protestantes do ramo fundamentalista *Pietists*, eram identificados por serem piedosos, por terem uma postura extremamente humilde, serem tementes a Deus, por terem a fé como uma predisposição e atitude inerentes ao coração, por acreditarem que a regeneração e a santificação são resultados de uma prática da vida baseada em fazer o bem. Eram artesãos e pequenos comerciantes. Eles possuíam relativa educação escolar, incluindo as mulheres e as filhas, incomum na época. Os pietistas eram também conhecidos por liderarem um movimento de aumento da tolerância nas igrejas luteranas.

No século XVIII, há dados sobre a família Hilbert nos arredores da cidade de Brand, perto de Freiburg, onde Johanann Christian Hilbert despontava como um importante e distinto comerciante com mais de cem empregados. Seu filho Christian

David Hilbert foi barbeiro bem sucedido, prestou serviços militares como tal e no regresso de suas atividades na armada de Frederico, o Grande, largou o ofício para se dedicar à medicina na universidade local. Um dos filhos de Christian, David Fürchtegott Leberecht Hilbert, juiz eminente da cidade de Geheimrat, era o pai de Otto Hilbert, portanto avô de David Hilbert. Os outros membros da família de David Hilbert, como tios e primos eram além de comerciantes, professores e advogados conceituados.

Pouco se sabe sobre a família materna de Hilbert, a não ser que eram comerciantes da cidade de Königsberg e que o sangue huguenote que corria pelas veias da família poderia explicar o gosto de Maria Thèrese Hilbert pela filosofia, astronomia e números primos. Tal inclinação de Maria em direção à ciência pode ter estimulado David Hilbert encontrar os caminhos da Matemática, desde tenra idade.

1.1 – A infância em Königsberg e os primeiros passos de David Hilbert na escola elementar (1862-1880).

Königsberg era uma cidade pacata e agradável, com o odor típico do Báltico e a vida característica das cidades que cresceram e se desenvolveram ao redor dos portos. Sete grandes pontes colocaram o rio Pregel e a cidade de Könisberg na História da Matemática, através do famoso problema resolvido por Euler, conhecido como "O Problema das Pontes de Königsberg", um dos marcos dos estudos sobre o que conhecemos hoje em Matemática, por topologia. A notoriedade da cidade não vem somente das pontes, mas, sobretudo de outro ilustríssimo filho: Immanuel Kant, cujo nome, pensamentos e obras enchiam os lares de muitos habitantes de

Könisberg. Tal fato não exclui a família Hilbert, que tinha por hábito, segundo Reid (1996), ir à catedral de Königsberg render homenagens ao filósofo, aos 22 de abril, data de nascimento de Kant. Neste dia do ano havia missas em diversos horários e a cripta lateral da catedral onde hoje está o túmulo de Kant era aberta ao público para a realização de um ritual simbólico de oração e veneração ao filósofo.

Ao completar seis anos de idade David Hilbert deixa de ser o único filho de Otto e Maria Hilbert. Nasce Élise Hilbert, fato que acreditamos ter contribuído para a mudança da rotina da família Hilbert, uma vez que David só inicia a sua vida escolar aos oito anos, dois anos após o nascimento de sua irmã. David Hilbert é então matriculado na Vorschule, do Real Friedrickskolleg, uma escola privada de excelência, datada do século XVII e conhecida por ter sido a escola onde Kant iniciou seus estudos. Provavelmente, entre os seis e oito anos de idade, David Hilbert deve ter recebido suas primeiras instruções acadêmicas em casa, através de sua mãe. Era uma época conturbada em termos políticos em seu país, pois Bismarck iniciava o processo de unificação da nação e não temos informações sobre a regularidade do ano letivo nas escolas da região. Em termos familiares, lemos em Reid (1966) que Maria Thèrese Hilbert passou um longo período acamada, o que pode ter dificultado também a ida do pequeno David à escola primária.

Nos primeiros anos da vida escolar na Vorschule, David Hilbert teve contato com a expressão oral e escrita do alemão, escritos romanos, estudos bíblicos e aritmética simples.

Em 1872, conhece os Minkowskis, família judia imigrante de Alexoten, Rússia, cujo pai, grande comerciante, recomeça a vida em Könisberg por questões políticas advindas de seu país. Os filhos da família Minkowski são conhecidos em Königsberg pela educação e inteligência. Max, o mais velho, segue a carreira do pai, uma vez que na Rússia, não podia seguir estudos formais, pelo fato de ser judeu. Oscar torna-se médico de prestígio ao descobrir a relação entre o pâncreas e a insulina, sendo conhecido como o “pai da insulina”. Hermann tornou-se um prodigioso matemático cujas habilidades eram impressionantes e sempre reconhecidas pelos professores de matemática desde pequeno. Fanny Minkowski torna-se professora e escreve uma biografia romanceada dos irmãos, intitulada “Três Gênios Universais”. Esta família, em especial Hermann, terá um papel importantíssimo na vida de David Hilbert como matemático e filósofo da matemática. O contato de Hermann com David só não foi mais estreito durante o inicio de suas vidas acadêmicas porque estudaram em escolas diferentes. Hermann, Max, Willy Wien e Arnold Sommerfield frequentaram o Altsdat Gymnasium. Pelos nomes citados podemos perceber a grandiosidade do grupo de futuros pensadores de altíssimo gabarito que a cidade de Königsberg teria.

Hilbert não apresentava traços de genialidade em todas as matérias. Tinha dificuldades para decorar e interpretar textos, tanto em sua língua materna quanto em línguas estrangeiras, mas tais dificuldades nunca o deixaram em posição acadêmica inferior aos colegas. Hilbert era ligado às questões histórico-politicas de seu país e conhecia bem o sistema educacional Prussiano. Os anos na Vorschule de Friedrichkolleg não foram muito bons para Hilbert, sobretudo porque achava a matemática do colégio fraca e que este estabelecimento de ensino dava mais ênfase às disciplinas de humanidades e letras do que matemática e ciências. Em 1879, David é transferido para o Wilhelm Gymnasium, escola pública cuja característica era a notoriedade no ensino da matemática, em especial da geometria. Hilbert graduou-se na escola de nível médio e adquiriu o *Arbitur,* exame que atesta e qualifica o aluno a ingressar nas universidades da época com as menções “gutten” (bom) para alemão, latim, grego e física e “vorzüglish” (o mais alto escore concedido na época) para matemática. Pelo desempenho acadêmico, Hilbert é isento dos exames orais. No diploma de conclusão dos estudos de nível médio há uma recomendação acadêmica destacando que “Hilbert é um aluno cujos interesses os levariam às carreiras cientificas, em especial à Matemática, uma vez que durante os anos escolares ele gabaritou todo o material da disciplina de uma maneira prazerosa, agradável e ingênua”.

Paralelamente aos anos finais de conclusão do ensino médio de Hilbert, Hermann Minkowski entra na universidade, e segundo uma declaração futura de Hilbert, talvez com um tom de ironia à sua própria pessoa diz que “fora em virtude de sua esplêndida capacidade de memorização e de rápida compreensão na escola primária que Minkowski era mais adiantado do que ele nos estudos escolares”.

1.2 – A paixão de David Hilbert pela Universidade de Königsberg e sua formação acadêmica até a obtenção da habilitação de professor (1880-1884).

Embora Berlim fosse o centro pensante e cultural da Alemanha na época em que Hilbert inicia seus estudos universitários, Königsberg contava com muito prestígio das diversas camadas sociais, políticas, econômicas e acadêmicas de diferentes partes do país. Pela Universidade de Königsberg havia passado professores como: Jacobi, contemporâneo de Gauss, Richelot, Weirstass, Franz Neumann (fundador do Instituto de Física Teórica da Universidade de Königsberg e criador de palestras nos moldes dos seminários que conhecemos em nossos dias), Heinrich Weber, Ferdinand Von Lindemann, Adolf Hurwitz, entre outros.

David Hilbert ingressa na Universidade de Königsberg no outono de 1880 e não teve o apoio incondicional de seu pai para seguir a carreira de matemático, pois a tradição da família era de dedicação às leis. Nesta época, Weierstrass é o matemático mais notável de toda a Alemanha. Jacobi e Richelot já estavam mortos, mas Franz Neumann ainda ensinava. Com tanto incentivo à Matemática, Hilbert havia se encontrado e os tempos de tédio da escola elementar haviam ficado para trás. Nas universidades alemãs professores escolhiam quais assuntos queriam ensinar e os alunos o que queriam aprender. A *universität* privilegiava o desenvolvimento das potencialidades de seus alunos e contribuía positivamente para que todos apresentassem excelentes resultados nos exames finais. Uma tradição local era proporcionar aos alunos de graduação estudos de um ou mais semestres em diferentes universidades do país. Os jovens estudantes organizavam seus currículos acadêmicos segundo seus próprios interesses, que variavam entre ter aulas com mestres especialistas em determinados assuntos ou participar de uma comunidade acadêmica que proporcionasse uma maior rede de contato para trocas de trabalhos, relatos e experiências. Neste clima positivo e fecundo, aos dezoito anos, Hilbert pode como aluno da Faculdade de Filosofia da Universidade de Königsberg, se dedicar ao que mais queria, desejava e sabia fazer: Matemática. A matemática alemã era caracterizada pelo rigor e pela extrema precisão nos resultados. Em Halle, Gregor Cantor trabalhava sobre os Fundamentos da

Matemática, em especial na teoria dos conjuntos, focando-se nos infinitos cantorianos. Em todos os cantos e nas grandes universidades do país, a Matemática alemã mostrava-se grandiosa ao mundo em termos qualitativos, mas ainda sufocada pelo prestigio e intensa produtividade dos matemáticos franceses.

No primeiro semestre dos estudos universitários, Hilbert estuda cálculo integral, teoria dos determinantes e curvatura de superfícies. De acordo com a tradição citada acima, Hilbert passa o segundo semestre na Universidade de Heidelberg assistindo as aulas de Lazarus Fuchs. No terceiro semestre vai para a Universidade de Berlin, onde tem o privilégio de estudar com Weierstrass, Kummer, Kroneker e Helmholtz. No quarto semestre de estudos matemáticos, Hilbert retorna a Universidade de Könisberg para estudar teoria dos números, teoria das funções e teoria dos invariantes (assunto de ponta da época) com Heinrich Weber. No quinto semestre, primavera de 1882, Hilbert decide não mais sair de Universidade de Königsberg. Neste momento chega à Königsberg, após uma estadia de três semestres em Berlin, Hermann Minkowski.

Minkowski trabalhava sobre um problema proposto para o Grand Prix des Sciences Mathématiques de l´Académie de Paris: representar um dado número como a soma de cinco quadrados. Minkowski envia o seu resultado à academia que reconhece como correta a demonstração, porém o jovem matemático não recebe o prêmio, pois uma das regras havia sido quebrada. A Academia de Paris exigia que o artigo estivesse escrito em francês. Minkowski não teve tempo de traduzi-lo. Os jornais franceses e o círculo dos matemáticos ingleses denunciaram Minkowski e se posicionaram contra a entrega do prêmio ao matemático alemão, já que Henry Smith, matemático inglês, falecido na ocasião do resultado final do Grand Prix, havia também resolvido corretamente o problema, porém não tinha violado regra alguma do concurso. Para os denunciantes, Minkowski não merecia receber o prêmio. Apesar das pressões, a academia francesa não se intimidou e o prêmio foi entregue mais tarde ao jovem matemático alemão.

Hilbert fez amizade rapidamente com Minkowski nos cursos da Universidade de Königsberg e logo passou a compartilhar pensamentos com o amigo, entre eles o de que todo problema matemático deve necessariamente ser suscetível a um acordo: seja na forma em que a pergunta é feita, seja na prova da impossibilidade de suas soluções. Hilbert e Minkowski receberam certas influências de Lindemann, que torna-se mais conhecido após provar dois resultados importantes: a transcendência de π e a impossibilidade da quadratura do circulo. Lindemann tem alguma influência sobre Hilbert, mas nada comparada a Adolf Hurwitz, que chegou à Königsberg na primavera de 1884, vindo da Universidade de Göttingen. O matemático Hurwitz, de ascendência judaica, tem o seu primeiro trabalho publicado ainda como aluno do curso ginasial sob a orientação de Annibal Schubert, seu professor. Hurwitz teve como orientador de sua tese de doutorado, Félix Klein, e seu tema de pesquisa foi teoria das funções. Hurwitz dispensa grande parte do seu tempo a Hilbert e Minkowski. Participou de vários encontros com estes amigos, quase que diariamente, na Universidade de Königsberg. O trio da matemática alemã estava formado. Hurwitz, Hilbert e Minkowski exploraram quase todos os ramos da Matemática e tinham a certeza de que “as matemáticas” são inesgotáveis.

> "During innumerable walks, at times undertaken day after day," writes Hilbert in his obituary on Hurwitz, "we roamed in these eight years through all the corners of mathematical science, and Hurwitz with his extensive, firmly grounded and well ordered knowledge was for us always the leader.”
>
> *(David Hilbert and his mathematical work,* Hermann Weyl,1944, Bulletin of the American Mathematical Society, p.613)

Hilbert completa quatro anos de formação acadêmica e se prepara para o doutoramento. Ele deseja trabalhar com a generalização do problema das frações continuas, porém Lindemann, seu orientador acadêmico, o avisa que tal problema já havia sido resolvido por Jacobi e que trabalhar sobre este problema não seria nem original nem de relevância para a Matemática como ele mesmo esperava que fosse um trabalho desenvolvido por Hilbert. Lindemann reconhecia as potencialidades de seu aluno, por isso exigia de Hilbert um resultado matemático de maior contribuição e mais impactante nos círculos acadêmicos. Lindemann sugeriu a Hilbert que trabalhasse com um problema da Teoria dos

Invariantes Algébricos[2], cujas bases estão na geometria analítica do século XVII de Renée Descartes. A Teoria dos Invariantes era um campo muito profícuo para a Matemática da época, sobretudo com o desenvolvimento da geometria projetiva que permite o estudo dos invariantes algébricos sob a óptica dos grupos de transformação. Teoria inicialmente estudada e desenvolvida pelos ingleses Arthur Cayley e Joseph Sylvester, os invariantes algébricos passam a ter na matemática

---

[2] *O que vem a ser a Teoria dos invariantes*? Vamos responder a essa pergunta de forma bem simples para este momento do nosso trabalho, pois faremos uma formalização do conceito doravante. Estamos pensando principalmente no leitor que não possui formação matemática.

"Seja o plano cartesiano usual XOY onde os pares ordenados do tipo (x, y) são formados por números reais. Figuras geométricas podem ser descritas por equações algébricas e equações algébricas descrevem formas geométricas no plano XOY como pontos, retas, planos, esferas, etc. Com este processo de representação do mundo geométrico, ganhos são alcançados: idéias geométricas podem até tornar-se um pouco mais embaçadas pela névoa das equações, mas as truncadas idéias algébricas, altamente abstratas, tornam-se mais visíveis e para muitos, palpáveis graças à geometria. Além disso, as grandezas que descrevem as propriedades desses objetos são, por natureza, independentes do sistema de referência que escolhemos para estabelecermos cálculos com essas grandezas. A Teoria dos Invariantes estuda *os grupos que caracterizam as trocas de sistemas de referenciais que deixam as <u>propriedades</u> geométricas sem variação*. Esta teoria traz um ganho de generalidade nesta forma de analisar formas geométricas através de equações e vice versa, uma vez que os tamanhos, as formas e certas propriedades das figuras geométricas *não se alteram ao mudarem suas posições em relação aos novos eixos estabelecidos*. Estes *invariantes* servem para caracterizar a figura geométrica dada. A teoria dos invariantes estuda quais as figuras e quais são suas propriedades que não se alteram e sobre quais estruturas algébricas suas propriedades repousam".

alemã um acolhimento maior do que entre os ingleses. O jornal alemão *Mathematische Annalen* foi durante muitos anos um jornal quase que exclusivamente composto por artigos relacionados à Teoria dos Invariantes Algébricos. Hilbert resolve o problema proposto por Lindemann sem muitas dificuldades e seu orientador dá-se por satisfeito. Hilbert envia uma cópia de sua tese para Minkowski na cidade de Wiesbaden (para onde Minkowski se mudou com sua mãe após a morte de seu pai) e este afirma em carta-resposta que "nunca poderia imaginar um dia que um teorema tão bom pudesse ser obtido em Königsberg".

1.3- A defesa de tese de doutoramento de Hilbert e as objeções à teoria da natureza *a priori* de Immanuel Kant (1884-1886).

Em 11 de dezembro de 1884 Hilbert passa por um exame oral como primeira parte dos requisitos para a obtenção do titulo de doutor. Em 7 de fevereiro de 1885, no hall da universidade, Hilbert participa de um debate público obrigatório. Este debate público, conhecido como *Aula*, era um requisito parcial para a obtenção do grau de doutor. O candidato ao título de doutor escolhia dois temas para discursar e defender durante o debate. Dois outros colegas, em geral estudantes ilustres de matemática, eram apresentados oficialmente como seus oponentes. Os temas escolhidos por Hilbert eram de grande dificuldade e complexidade para os matemáticos, físicos e filósofos da época. O primeiro consistia em "determinar através da experimentação um método para calcular a resistência eletromagnética absoluta"[3] e o segundo tema pertencia ao ramo da Filosofia e pôs em evidência o

[3] Não conseguimos informações precisas sobre o desenvolvimento deste tema apresentado por David Hilbert durante a sua explanação na *Aula.* Nas diferentes bibliografias consultadas, dentro do corte temporal proposto em nosso trabalho (de1862 até 1898), não há alguma referência. A maioria dos

grande fantasma de Kant: a teoria da natureza *a priori* associada à geometria. Após o reconhecido sucesso em suas apresentações, o texto final de sua tese de doutorado foi entregue ao Departamento de Matemática da Universidade de Königsberg intitulado "*Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfuntionen",* sob a orientação do professor Carl Louis Lindemann.

1.3.1- O segundo tema desenvolvido por Hilbert na *Aula*

Para Kant o homem tem posse de certas noções que não são obtidas por suas experiências, como as noções *a posteriori*, mas sim, anteriormente, as noções *a priori*. Exemplos de conhecimentos matemáticos que podem ser classificados como *a priori* para Kant são os conceitos fundamentais da lógica, a aritmética e os axiomas da geometria Euclidiana. De acordo com Tomei (2006), "para o filosofo alemão Kant, no século XVIII, a geometria euclidiana estava embutida em nosso cérebro, e era uma das componentes fundamentais para fazer com que os sentidos pudessem colher informações sobre o real que pudesse ser elaborado racionalmente. (...) Para Kant, a geometria é mais do que uma linguagem, ela é nossa ferramenta básica para alcançarmos uma concepção do espaço".

---

autores estuda os trabalhos de Hilbert em Física, após 1905. Cremos que a associação de seus resultados à Teoria da Relatividade Geral impulsiona os pesquisadores da área a dedicarem seus estudos a este corte temporal. Indicamos a leitura de *"David Hilbert and the axiomatization of Physics (1898-1918): From Grundlagen der Geometry to Grundlagen der Physik",* Dordrecht: Kluwer (2004), ARCHIMEDES: New Studies in the History and Philosophy of science and Technology, volume 10. Este livro traça a trajetória da produção acadêmica de Hilbert após 1898 e sua transição natural em direção aos estudos dos Fundamentos da Física.

Vamos procurar descrever brevemente o pensamento kantiano a respeito da teoria da natureza a priori para entendermos a posição de Hilbert frente ao tema e como defendeu sua tese perante a comunidade acadêmica na *Aula.*

Segundo Cobra (1997), "durante o período de sua carreira acadêmica como professor, que se estendeu de 1747 a 1781, Kant, seguiu a filosofia então predominante na Alemanha, que era a forma modificada do racionalismo dogmático de Wolff[4] com fundamento em Leibniz. Porém, as aparentes contradições que ele (Kant) descobriu nas ciências físicas, e as conclusões a que Hume havia chegado quanto à análise do princípio de causa, dizendo que a relação de causa e efeito é uma questão de hábito e não uma "verdade de razão" como supunha Leibniz, acordaram-no para a necessidade de revisão ou criticismo de toda experiência humana do conhecimento, com o propósito de permitir um grau de certeza para as ciências físicas, e também para o propósito de colocar sobre uma fundação sólida as verdades metafísicas que o ceticismo fenomenalista de Hume tinha destruído. Kant achou que o velho racionalismo dogmático havia dado muita ênfase aos elementos *a*

---

[4] Christian Freiherr Von Wolff (1679-1754),nasceu a 24 de janeiro de 1679 em Breslau, Silesia (hoje Wroclaw, Polônia) e faleceu a 9 de Abril de 1754 em Halle, Prússia (hoje Alemanha). Filósofo, matemático, e cientista que se ocupou de muitos campos da ciência, é mais conhecido por ter sido o porta-voz alemão do Iluminismo, o movimento filosófico do século XVIII caracterizado pelo Racionalismo. Wolff foi educado nas universidades de Breslau, Jena, e Leipzig e foi aluno do filósofo e matemático Gottfried Wilhelm Leibniz. Por recomendação de Leibniz ele foi nomeado professor de matemática na Universidade de Halle em 1707, de onde, no entanto, foi expulso em 1723 devido a uma disputa teológica com os Pietistas. Tornou-se professor de matemática e filosofia na Universidade de Marburg, Hesse (1723-40) e, como conselheiro científico de Pedro o Grande (1716-25), ele ajudou a fundar a Academia de Ciências de São Petersburgo na Rússia. Após voltar para a Universidade de Halle, a pedido do rei da Prússia, Frederick II o Grande, ele tornou-se reitor (1741-1754). Wolff escreveu inúmeros trabalhos em filosofia, teologia, psicologia, botânica, e física, difundindo as teorias de Leibniz em forma popular. Distinguia entre psicologia racional e psicologia empírica já em 1732. Enfatizava que todo evento precisa de uma razão suficiente para acontecer ou alguma coisa poderia vir do nada. Ele valeu-se do pensamento racionalista dos iluministas, de Descartes e Leibniz, para desenvolver seu próprio sistema filosófico matemático e racionalista. Obras principais: *Philosophia Rationalis sive Logica* (1728); *Philosophia Prima sive Ontologia* (1729); *Cosmologia Generalis* (1731); *Psychologia Empirica* (1732); *Psycho1ogia Naturalis* (1734); *Theologia Rationalis* (1736-1737); *Jus Naturae* (1740 1748); *Jus Gentium* (1750); *Philosophia Aforoli* (1750-1753). *Aecconomica* (1750).

priori do conhecimento e que, por outro lado, a filosofia empírica de Hume tinha ido muito longe quando reduziu todo conhecimento a elementos empíricos ou *a posteriori*. Portanto, ele propõe passar o conhecimento em revista, em ordem a determinar quanto dele deve ser consignado aos fatores *a priori* ou estritamente racionais, e quanto aos fatores *a posteriori*, resultantes da experiência". Kant afirmava que o negócio da filosofia é responder a três questões: O que eu sei? O que eu devo fazer? O que eu devo esperar? No entanto, as respostas para a segunda e terceira perguntas dependem do que for respondido para a primeira pergunta. Isto é, nosso dever e nosso destino só podem ser determinados depois de um profundo estudo do conhecimento humano.

Responder a questão *"que é que existe?"* é o problema do qual a metafísica se ocupa. E quanto a essa questão fundamental, as principais correntes que no final do século XVIII Kant se propõe a conciliar são: o *realismo*, o seu oposto o *idealismo*, o *racionalismo* e seu oposto o *empirismo*.[5]

---

[5] O *realismo* sustenta que no conhecimento humano, os objetos do conhecimento são intuídos, vistos e apreendidos tais quais são em suas existências fora e independente da mente. Assim sendo, conhecer uma coisa significa encontrar a essência desta coisa. Se a isso acrescentamos os caracteres acidentais individuais da substância, então chegamos ao conhecimento pleno da realidade.

O *idealismo* se caracteriza pelo fato das coisas existirem conforme o resultado da criação mental, fazendo com que o existente seja aquilo que é conhecido para o homem nas dimensões mentais, na forma de idéias ou através das idéias. O *idealismo metafísico* embasa a idealidade da realidade, e o *idealismo epistemológico* afirma que os objetos da mente estão condicionados pela sua perceptibilidade no processo de construção do conhecimento.

O *racionalismo* tem a razão como suprema fonte e teste do conhecimento. Assegura que a realidade tem uma estrutura lógica inerente. Afirma existir uma classe de verdades que o intelecto pode intuir diretamente, além do alcance da percepção sensível. Ao racionalismo opõe-se o e*mpirismo*, que sustenta que todo conhecimento vem, e precisa ser testado, pela experiência sensível.

Já se vê que essa última corrente, o empirismo, tende a negar a Metafísica, porque esta trata das possibilidades de intuição, do conhecimento para além das coisas apreendidas pelos sentidos, para além da experiência, e testa se uma proposição à qual se chega assim, pelo raciocínio, pela razão, e que não expressa apenas a simples soma de dados da realidade concreta, pode ser verdadeira, e, A filosofia de Kant vai perpassar por todas as quatro correntes destacadas acima, renomeando e reclassificando alguns conceitos relativos às proposições metafísicas. Uma nova teoria, a gnosiologia (ou teoria do conhecimento humano), fundamenta sua filosofia.

Em sua nova teoria do conhecimento, Kant afirma que toda proposição ou juízo consiste num sujeito lógico do qual se diz algo, e num predicado, que é aquilo que se diz desse sujeito. Kant, como os filósofos aristotélicos, diferenciava as proposições ou juízos em *analíticos* e *sintéticos*. Os juízos *analíticos* são o resultado de se tomar parte do sujeito como predicado sem referência imediata à experiência. Leibniz denomina os juízos analíticos de Kant por "verdades de razão". Os juízos analíticos são *a priori*, porque a ligação e a coerência de sentidos neles são percebidas sem apelo à experiência. Os juízos analíticos são sempre verdadeiros, pois não dizem mais como predicado que aquilo que já está no sujeito mesmo, de tal forma que os juízos em questão consistem apenas em um processo de análise. Assim, nos juízos analíticos, dentro do conceito do sujeito, tem de estar os seus próprios predicados. Uma proposição analítica é uma na qual o predicado está contido no sujeito, por exemplo: "O professor de matemática é professor". Os juízos analíticos são universais porque o que dizem são independentes de tempo e lugar e são necessários porque não podem ser de outro modo (distinguem-se do conhecimento empírico pela universalidade e necessidade). São, pois, *a priori*, pois não fazem referência à experiência. Assim sendo é razão pura, uma vez que não tem sua *origem* na experiência.

---

neste caso, que princípios se pode tomar para verificar e garantir que tal proposição seja, de fato, verdadeira.

Mas, o que esta discussão tem a ver com a Matemática do período de Hilbert, em especial com as questões primeiras inerentes à Geometria? Vejamos...

A descoberta das geometrias não euclidianas na primeira metade do século XIX provocou um sério questionamento em relação a esta teoria de Kant. Tais geometrias mostram que mesmo negando-se um dos axiomas da geometria euclidiana ainda é possível construir uma geometria consistente como a geometria de Euclides. A partir de então, torna-se claro para Hilbert que o conhecimento contido nos axiomas da geometria euclidiana é de natureza *a posteriori* por experiência e não de natureza *a priori.*

Após este questionamento e a conclusão de Hilbert sobre a natureza da geometria, uma outra pergunta é colocada em pauta: os conceitos básicos de aritmética também são realmente de natureza *a priori*? Encontramos em Reid (1996) uma citação de Gauss que aparentemente se deparou com esta questão ao conceber a existência das geometrias não euclidianas.

> "I am profoundly convinced that the theory of space occupies an entirely different position with regard to our knowledge *a priori* from that of [arithmetic]; that perfect conviction of necessity and therefore the absolute truth which is characteristic of the letter is totally wanting in our knowledge of the former. We must confess, in all humility, that number is solely product of our mind, the laws that we cannot fully prescribe *a priori.*"
>
> (*Hilbert,* Constance Reid, 1996, p.17)

Cremos que Hilbert sustenta o segundo tema da *Aula* com um pensamento muito semelhante ao de Gauss já que para ele, as objeções à teoria do juízo *a priori* de Kant sobre a natureza dos julgamentos aritméticos é infundada. Além disso, acreditamos que seu oponente não teve argumentos convincentes nem uma boa fundamentação teórica para rebatê-lo. Hilbert era um estudioso destas questões filosóficas.

A exposição de Hilbert e a defesa dos temas escolhidos foram de altíssimo padrão, o que lhe rendeu, juntamente com a tese sobre teoria dos invariantes, o titulo de Doutor em Filosofia (o conhecido PhD, concedido por muitas universidades americanas, européias e asiáticas). No término da cerimônia foram proferidas palavras de seu orientador.

> "I ask you solemnly whether by the giving oath you undertake to promise and confirm conscientiously that you will defend in a mainly way true science, extend and embellish it, not for gain´s sake or for attaining a vain shine of glory, but in order that in light of God´s truth shine bright and expand."
>
> (Palavras de Lindemann para Hilbert, após a defesa oral, na *Aula,* apud. *Reid, 1996. p.17)*

1.3.2- Hilbert ainda não podia lecionar...

Após anos de estudos, uma tese escrita e defendida com louvor e após ser aprovado publicamente em a *Aula*, Hilbert ainda não podia lecionar nas universidades alemãs. O grau de doutor em filosofia não era suficiente para tal. Ele deveria escrever ainda um artigo original, apresentá-lo ao corpo docente da universidade para qual se candidataria como professor e por fim, proferir uma palestra sobre outro tema, específico de sua área de conhecimento. Só assim teria a posse do *"Habilitation"*, nome dado ao *brevet* para professor universitário na Alemanha. O *"Habilitation"* ainda hoje é a maior qualificação acadêmica que um cidadão pode receber em alguns países da Europa e Ásia. O artigo que o candidato deve apresentar no *"Habilitation"* deve ser mais complexo e de maior valor acadêmico do que o apresentado pelo candidato em sua tese de doutoramento. Em alguns casos, um livro publicado com alto cunho científico substitui o *"Habilitation"*. Uma vez sendo aprovado no *"Habilitation"*, o candidato ao cargo de professor universitário recebe o titulo *venia legendi* (em algumas universidades o titulo era *venia docenti*), do latim: permissão para lecionar.

Hilbert trabalhava duramente para receber a permissão para lecionar e consequentemente ser conduzido ao cargo de *Privatdozent*, isto é, um professor com habilitação, mas sem nenhuma cátedra de ensino oficial da universidade.

O *privatdozent* não recebe remuneração alguma por parte do governo, porém, é uma passagem obrigatória antes de obter a cátedra. O salário dos *privatdozents* são pagos por alunos da universidade que desejam cursar as disciplinas por eles ministradas. Em geral são disciplinas eletivas, extracurriculares ou de aprofundamento temático na área de interesse do aluno e do professor. Se há aluno, há salário, o que nos leva a crer que deve ter sido um momento delicado para Hilbert em termos financeiros. Assim, o mestre de Königsberg precisava se destacar como professor dando boas aulas, para futuramente atingir postos como: *extraordinarius, associate professor* ou *ordinariat*. Tais titulações pertenciam a mestres que se dedicavam à universidade em tempo integral e tinham salários mais atraentes e fixos.

Enquanto não chegava a um resultado substancial para ser apresentado ao *Habilitation,* Hilbert estudava para o *Staatlich Prüfung* (exame estatal) pelo qual ele passou em maio de 1885. Nesta época, o número de professores universitários aposentados ou mortos tinha aumentado bastante. Logo, as chances de Hilbert conseguir uma vaga como professor efetivo tinham aumentado consideravelmente.

Cassous-Noguès (2004) relata que na época havia um número muito pequeno de professores alemães bem sucedidos por classificação profissional nas universidades. Com a mais alta titulação na carreira de docente universitário, o correspondente ao professor titular livre-docente das universidades brasileiras, três professores estavam em Berlim, dois em Göttingen e somente um em Königsberg.

Hilbert sentiu necessidade de fazer contatos com outros companheiros matemáticos e decidiu fazer uma viagem de estudos para Leipzig nos meses finais de 1885. Teve contato com matemáticos como George Pick, Eduard Study (que também estudavam a teoria dos invariantes) e Sophus Lie.

Nesta viagem, Hilbert conhece Felix Klein. Em dezembro de 1885, um artigo de Hilbert sobre teoria dos invariantes algébricos é levado à sociedade cientifica por Klein, e Hilbert passa a fazer parte do seleto círculo de matemáticos da cidade de Leipzig. No retorno à Göttingen, Hilbert assiste algumas aulas e seminários promovidos por Klein, mas este já não produzia matemática como nos anos anteriores. Klein tinha a mente e corpo fisico um pouco debilitados decorrentes de uma forte depressão que o dominou anos anteriores, porém dedica-se vigorosamente e com grande êxito à adminstração do departamento de matemática da universidade transformando-o no centro das atenções matemáticas por toda a Alemanha e pelo mundo. Klein sente grande afeição por Hilbert como professor e matemático. Conta Reid (1996) que um dia após a apresentação de Hilbert em um de seus seminários, Klein[6] disse: “ quando eu o ouvi no dia anterior, soube que era um homem de matemática”, fazendo alusão ao futuro promissor de Hilbert frente à Matemática. Ainda em Göttingen, Klein convence Hilbert a passar um semestre estudando em Paris e ventila a possibilidade de Hilbert encontrar Poincaré. Hilbert inicia a viagem com Sophus Lie em março de 1886. Os dois companheiros puderam conversar muito sobre álgebra, e em especial, sobre uma nova teoria a emergir, da qual Lie se ocuparia por muitos anos de sua carreira e da qual Hilbert se serviria em muitos de seus resultados.

Hurwitz e Klein sabiam do potencial mais agressivo dos jovens matemáticos franceses, mas acreditavam que como representantes alemães de uma matemática cheia de rigor e purista, poderiam andar lado a lado da hegemônica matemática lutécia sem que houvesse nenhum sentimento de minoridade entre os alemães, em relação aos matemáticos franceses.

1.4 – Hilbert em contato com a matemática francesa (março/ junho 1886).

Em uma breve carta de agradecimento à Hurtwiz, Hilbert fala também de sua vida acadêmica na Sorbonne. Conta que tomou conhecimento da extensa

[6] Após o processo de recuperação da forte depressão pela qual Klein passou, ele recebeu convites para trabalhar nas Universidades Johns Hopkins e Göttingen, optando por Göttingen.

quantidade de artigos apresentados à Academia de Ciências por Poincaré, e que ainda não havia tido um encontro formal com ele. Hilbert, porém ouviu algumas palestras proferidas pelo eminente professor. Estas palestras eram estudos detalhados sobre Teoria Potencial e Mecânica dos Fluidos.

Procurando se envolver mais com a matemática francesa, Hilbert entra em contato com o alemão Edouard Study que estudava álgebra em Paris. Hilbert acreditava que Study poderia ser um bom canal para aproximar-se dos matemáticos Emmy Noether e Paul Gordan, que desenvolviam estudos importantes em Teoria dos Invariantes Algébricos. Durante os meses em que esteve em Paris, Hilbert conheceu Halphen, Mannheim, Picard, Bonnet, Maurice d´Ocagne, Sparre, Stieljes, Darboux, Jordan e Hermite. Hermite já estava com 64 anos e seu vigor deixou em Hilbert a impressão de ter conhecido um homem de temperamento mais simples e menos arrogante ao falar de matemática ou de assuntos quotidianos do que tantos outros que conhecera.Tal caracteristica de Hermite permitiu Hilbert aproveitar bastante os encontros com o mestre francês.

Hilbert não via graça nem interesse pessoal na matemática francesa que lhe fora apresentada até então. Permanecia envolvido com a Teoria dos Invariantes e seus problemas. O idioma alemão era também uma barreira a ser considerada, o que nos leva a crer que as conversações acerca da Matemática deveriam ser, muitas vezes, superficiais quanto à compreensão linguistica entre os interlocutores. Das pesquisas e trabalhos franceses estudados e analisados por Hilbert, os de Charles Hermite foram os que mais lhe agradaram.

Hermite, nos encontros que teve com os jovens matemáticos alemães, falou sobre as leis de reciprocidade na Teoria das Formas Binárias encorajando-os a extendê-las para as Teorias das Formas Ternárias, assunto que já era seu objeto de estudos há muitos anos[7]. Muito destas conversações giravam em torno da Teoria dos Invariantes Algébricos, tema de interesse de todos.

Hermite direciona Hilbert para o famoso e não resolvido “Problema de Gordan”, grande tópico da teoria dos invariantes. Hilbert começa a gostar de sua estadia na capital francesa. Após voltar para a Alemanha, Hilbert escreve uma carta para Hermite sobre um artigo que publicou no volume 38 do Mathematische Annalen.

> Pendant mon séjour à Paris, l'année dernière, vous avez eu la bonté de diriger mon attention sur l'analogie remarquable qui existe entre la théorie des invariants des formes binaires du quatrième, du cinquième degré, etc., et respectivement celle des formes cubiques ternaires, quaternaires, etc. Pour la forme binaire biquadratique et la forme ternaire cubique, cette analogie saute aux yeux le plus distinctement, aussitôt que nous nous servons pour la discussion de ces formes d'une certaine proposition générale que j'ai expliquée dans un travail dans les *Mathematische Annalen*, vol. XXVIII, p. 381.
>
> Dans ce qui suit j'ai l'honneur de vous communiquer, en peu de mots, comment la théorie de ces formes se montre sous ce point de vue.

(Introdução da carta de Hilbert endereçada à Charles Hermite. In: *Journal de mathématiques pures et appliquées* 4e série, tome 4 (1888), p.249.)

7 Encontramos no *Journal für die reine und angewandte Mathematik* , Jan 1850, Issue 40, Pages 173–177 um artigo de Hermite intitulado “Sur la théorie des formes quadratiques ternaires” o que nos mostra que o autor já vinha se dedicando aos estudos das formas ternárias há mais de três décadas.

Voilà une démonstration simple du théorème fondamental dans la théorie de la forme quaternaire cubique; mais cette méthode est susceptible de généralisation pour d'autres formes. Par exemple, on trouve au moyen des mêmes considérations, comme auparavant, que toute forme ternaire du cinquième degré se laisse exprimer toujours d'une manière et d'une seule manière comme une somme de sept puissances de formes linéaires.

Ainsi l'on voit que divers problèmes de la théorie des formes peuvent se traiter pareillement, si l'on se place sous le point de vue que nous venons d'exposer.

(Conclusão da carta de Hilbert endereçada à Charles Hermite. In: *Journal de mathématiques pures et appliquées* 4e série, tome 4 (1888), p.256.)

A conclusão desta carta nos mostra como Hilbert trabalha sobre um problema matemático. Sempre procurando ser completo, integral, cheio de "pureza original matemática" e abrangendo diferentes vertentes de um mesmo assunto. Hilbert procurava sempre ir além ao que lhe era proposto.

> "A characteristic feature of Hilbert´s method is a peculiarly *direct attack* on problems, unfettered by algorithms; he always goes back to the questions in their original simplicity. […] His strength, equally disdainful of the convulsion of the Herculean efforts and of surprising tricks and ruses, is combined with an uncompromising *purity."*
>
> *(David Hilbert and his mathematical work,* Hermann Weyl,1944, Bulletin of the American Mathematical Society, p.617).

Hilbert retorna à Alemaha em junho de 1886. Encontra-se com Klein em Göttingen e depois vai a Berlin para trocar impressões sobre a matemática francesa com Leopold Kronecker, na ocasião, membro da Academia de Berlin e professor efetivo da Universidade de Berlin. O encontro com Kronecker foi proveitoso, mas

Hilbert logo percebeu que o objeto de estudo deste matemático havia mudado radicalmente[8].

> "Kronecker´s work is undoubtedly of paramount importance for Hilbert in his algebraic period. But the old gentleman in Berlin, so it seemed to Hilbert, used his power and authority to stretch mathematics upon the Procrustean bed of arbitrary philosophical principles and to suppress such developments as did not confirm: Kronecker insisted that existence theorems should be proved by explicit construction, in terms of integers, while Hilbert was an early champion of Gregor Cantor´s general set-theoretic ideas. Personal reasons added to the bitter feelings."
>
> (***David Hilbert and his mathematical work.*** Hermann Weyl. Source: Bull. Amer. Math. Soc. Volume 50, Number 9 (1944), p.613.)

Kronecker estava altamente absorvido pelas questões filosóficas acerca da aritmética do continuum[9], assunto diretamente relacionado aos Fundamentos da

[8] Os olhares de Cauchy, Bolzano, Cantor e Dedekind sobre os números reais não satisfaziam a Kronecker, que defendia a tese de que "*a existência matemática de um ente matemático é de fato verificada, caso seja possível construí-lo com uma quantidade finita de números inteiros positivos".* Assim, para Kronecker, uma fração do todo existe como ente matemático porque são razões entre inteiros (com denominadores não-nulos) enquanto números irracionais transcendentes como o π, não existem, por serem expressos por uma série *infinita* de frações. Dai a famosa frase de Kronecker encontrada em uma carta endereçada a Lindermann sobre a prova da transcendência de π: "*Deus fez os números naturais, todo o resto é uma invenção humana."* Nesta carta, Kronecker confidencia a Lindermann que está elaborando um programa de aritmetização da matemática com o objetivo de eliminar dela todos os conceitos não construtiveis. Kronecker critica duramente os trabalhos de Weierstrass sobre análise e de Cantor relativos à teoria dos conjuntos. Encontramos no artigo de A. Schoenflies, "*Die Krisis in Cantors mathematischem Schaffen"*, Acta Math. Vol. 50 (1928) pp. 1-23 cartas de Cantor à Mittag-Leffler que mostram como Cantor está abalado e deprimido emocionalmente com as críticas violentas de Kronecker, pois acredita que este o impede de divulgar seus trabalhos e de ridicularizar a sua imagem nas universidades alemãs. Cantor via a universidade como um lugar onde matemáticos pudessem discutir livremente seus trabalhos e idéias.

[9] Entendemos por Continuum a totalidade dos números reais (racionais e irracionais) que estão em correspondência biunívoca com todos os pontos da reta.

Análise Matemática. De acordo com Edwards[10] (1980), o notório estilo de fazer uma matemática dificil de Kronecker era resultado de uma tentativa de algoritmizar explicitamente os assuntos sobre os quais ele trabalhava. Kronecker desejava encontrar um método comum para resolver todos os problemas que envolvessem as propriedades de um polinômio a um número finito de variáveis sobre um corpo dado (em geral o corpo dos racionais ou o corpo cujos elementos são quocientes de polinômios a várias váriáveis). Esse campo de conhecimento abrangeria toda a teoria dos números algébricos e a geometria algébrica, cujos "elementos base" eram os inteiros (no máximo os racionais) de um lado, e as variáveis de outro. O professor Harold Edwards, em tese, afirma que para Kronecker é mais fácil estudar problemas teóricos em álgebra, considerando uma equação e todas as suas raizes do que analisar uma situação particular. Por exemplo, é mais produtivo e completo em termos matemáticos, analisar $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ associados à equação $x^2 - 2 = 0$ do que simplesmente $\sqrt{2}$ como uma solução particular ou um ente matemático qualquer. Assim sendo, para Edwards, Kronecker não defendia a tese da inexistência dos números algébricos, mas cria ser contraprodutivo estudá-los sem considerar a equação que os definem. Queremos registrar esta nova visão ao nosso trabalho, pois ela foge do que se tornou verdade-histórico-matemática encontrada na literatura, referente ao fato de que Kronecker só admitia a existência dos inteiros. Acreditamos, depois de extensas leituras , que esta interpretação dada por Edwards é sustentada para tentar acabar de vez com o fato de Klein e Hilbert terem, um dia divulgado, que Kronecker desejava banir os irracionais da Matemática (ou considerar

[10] No artigo *The Genesis of ideal theory,* do professor Harold M. Edwards, da New York University, encontramos uma defesa ao trabalho de Kronecker e uma nova interpretação para o seu pensamento estritamente finitista.

somente a existência de inteiros e racionais) por razões puramente filosóficas. Percebemos inclusive que o entendimento do que venha a ser “ente matemático” pela dupla de matemáticos passa a ser questionado por Edwards, mas esta colocação está, para nós, confusa, já que encontramos nos trabalhos de Kronecker demonstrações que envolvem a ideia de encontrarmos conjuntos “ao redor” de uma raiz real de um polinômio. Ou seja, a existência de sequencias de intervalos encaixados tão perto quanto queiramos desta raiz real e contendo a própria raiz real. No caso da $\sqrt{2}$, temos a sequencia de intervalos abertos $]1.4\,, 1.5[$, $]1.41\,, 1.42[$, $]1.414\,, 1.415[$ etc.

Hilbert acreditava que os procedimentos algoritmicos sempre ofereciam obstáculos às demonstrações e nunca exprimiam claramente os resultados como os encontrados via deduções provenientes do método axiomático. É célebre a afirmação de Hilbert, dita por Klein no Congresso Internacional de Matemática de Chicago em 1893[11]: “Na história de uma teoria matemática três momentos distintos aparecem naturalmente e podem ser facilmente reconhecidas: o período ingênuo, o formal e o crítico”. Klein associa os nomes de Cayley e Sylvester como representantes do primeiro periodo, Clebsch e Gordan do segundo e ele mesmo do terceiro.

[11] Hilbert foi representado por Klein neste congresso. Não encontramos na literatura uma explicação para a ausência de Hilbert.

1.5 – Finalmente a licença para lecionar.

Em seu regresso à Alemanha, Hilbert precisava trabalhar sobre o tema que apresentaria no *Habilitation*. A única certeza de que tinha é que seu trabalho seria desenvolvido em Teoria dos Invariantes. Resolve então, obter um resultado muito mais ambicioso do que o obtido em sua tese de doutoramento, e consegue. Os matemáticos que compuseram a sua banca de avaliação reconheceram o trabalho como: original, mais maduro e mais complexo do que os que foram apresentados por Hilbert até então.

Com a primeira parte do processo para obter a licença concluida, Hilbert encara o último desafio: passar no exame oral. Este exame consistia em obter uma boa avaliação sobre um tema escolhido pelo corpo docente da universidade entre dois temas propostos pelo candidato. Hilbert enviou para a banca examinadora dois temas: *"A mais geral das funções periódicas"* e "*O conceito de grupo"*. A banca opta pelo primeiro tema, fato que agrada Hilbert, pois era o assunto que ele mais dominava.

Hilbert recebe menção aprovativa dos membros da banca examinadora e em 8 de julho de 1886 adquire o *Habilitation*, podendo definitivamente ser professor universitário e voltar à Königsberg.

Conta Reid (1996) que em uma carta escrita à Hilbert, Klein não concorda com a estadia do amigo em Königsberg por achar o ambiente pouco propício às atividades matemáticas e por desejar que este assuma um posto em Berlim. Hilbert reponde que está muito feliz com a sua volta para casa e por trabalhar diretamente com Lindemann e Hurwitz[12] e que não é de seu interesse ir para outro lugar.

Hilbert pretendia aprofundar ainda mais seus estudos em Teoria dos Invariantes, determinantes e hidrodinâmica, por sugestão de Minkowski, cujo *Habilitation* foi aplicado e aceito pela Universidade de Bonn. Minkowski e Hilbert trocam várias cartas durante este período. Minkowski mostra a Hilbert um grande interesse pela física matemática e a vontade de sair de Bonn e retornar a Königsberg, o que consegue meses depois. Hurwitz, Hilbert e Minkowski trabalham juntos novamente. Hilbert passa o primeiro ano de trabalho se dedicando a vários cursos na universidade incluindo teoria das equações harmônicas e equações numéricas. Acreditamos ser sensata a decisão de Hilbert ficar um tempo em Könisberg, uma vez que o recém chegado professor deveria estabelecer raizes e consolidar um grupo de estudos matemáticos, além de compensar o tempo em que esteve fora da cidade. Somente em março de 1888, Hilbert resolve fazer uma grande viagem com o objetivo de conhecer vinte e um matemáticos alemães e a primeira parada seria na Universidade de Erlangen-Nuremberg, onde Paul Albert Gordan, o conhecido “rei dos invariantes algébricos” trabalhava.

Gordan é um caso típico de matemático especialista que tendo domínio de um assunto de sua disciplina passou toda a vida profissional realizando pesquisas e obtendo inúmeros resultados envolvendo o mesmo assunto. Para muitos

---

[12] Segundo Zach (2001), em 1892 Hilbert passa a categoria de *Ausserordentlicher Professor* e finalmente em 1893 recebe o titulo de *Ordinarius Professor.* Em 1895, aceita o convite para a Universidade de Göttingen onde permanece até a sua aposentadoria, em 1930.

matemáticos, os resultados sobre a teoria dos invariantes já estavam esgotados, porém muitos avanços foram alcançados e a teooria foi abundante, além das inúmeras descobertas de relações que o assunto passou ter com diferentes ramos da Matemática.

Capitulo II

David Hilbert e a Matemática alemã do séc XIX

“A resposta certa, não importa nada: o essencial
é que as perguntas estejam certas.”

Mário Quintana

Compreendemos o que Cory (1996) quer dizer ao afirmar que David Hilbert foi sem dúvida um dos matemáticos mais influentes do século vinte e que juntamente com Henri Poincaré pode ser classificado como um dos últimos grandes universalistas da Matemática. Trabalhava em numerosos e diversos campos de investigações matemáticas que iam desde a teoria dos invariantes (como temos exposto neste trabalho desde o início), passando pela teoria das equações integrais, pela álgebra pura e discutindo os Fundamentos da Matemática e da Física. Veremos mais adiante que nem todos os trabalhos de Hilbert estão diretamente relacionados com a teoria dos invariantes algébricos, mas que esta teoria tem fortíssima influência em seus trabalhos, assim como a sua forma de “fazer matemática” está muito calcada na corrente estruturalista.

A Matemática nos parece tão familiar ao espírito de David Hilbert que suas habilidades chegam a descaracterizar ou redefinir o que vem a ser um bom matemático nos tempos atuais. Hilbert possui muitas pesquisas em cálculo das variações e sobre o que hoje conhecemos por análise funcional. Dedica-se a teoria dos números e é fonte inspiradora para que pesquisas em fundamentos da geometria fossem feitas além do olhar da Matemática, indo estes, em direção à Filosofia.

O interesse de Hilbert por Matemática “estrapola a normalidade”. Em muitos momentos de sua carreira se envolve e resolve problemas que estão completamente fora de seus interesses momentâneos. Sua versatilidade e compreensão amplas da Matemática fezem dele um matemático extremamente respeitado nos diferentes círculos acadêmicos da Europa e do mundo. Um exemplo clássico para estas últimas afirmativas é a prova que ele construiu para o Teorema de Waring[13] em 1909, período em que se dedicava à Teoria das Equações Integrais e à Fisica-Matemática, assuntos sem relação alguma com o teorema provado.

Falamos com bastante respeito sobre a Matemática e os ambientes matemáticos que rodeavam David Hilbert durante a sua formação acadêmica. Foram as universidades por onde passou, professores competentes, colegas de profissão, amigos particulares, viagens como propósitos de intercâmbios culturais, persistência,

---

[13] Edward Waring (23 de julho de 1734 — 15 de agosto de 1798) foi um matemático inglês que nasceu em Old Heath (perto de Shrewsbury), Shropshire, Inglaterra e morreu em Pontesbury, Shropshire, Inglaterra. Entrou Magdalene College, em Cambridge, e tornou-se *sizar Senior wrangler* em 1757. Ele foi eleito um *Fellow* do Magdalena College e, em 1760, tornou-se professor de Matemática na instituição, exercendo a função até a sua morte. Sua afirmação mais famosa ficou conhecida como problema de Waring. A afirmativa não possui prova e se encontra em *Meditationes Algebraicae* de 1770. Para muitos tornou-seuma conjectura. Waring foi eleito membro da Royal Society em 1763 e premiado com a Medalha Copley em 1784. O problema de Waring pergunta “se para todo número natural *k*, existe um número inteiro positivo *s* associado a ele, de modo que o número natural *k* seja a soma de, pelo menos, $s.k^n$ potências de números naturais”. Por exemplo: para n = 2 e k = 4 temos: $5 = 1^2 + 2^2$ e $14 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$. De 1782 a 1909 somente foi resolvida para n = 2, n = 3 e n = 4. Em 1909 Hilbert prova que esta afirmativa é um poderoso teorema. Depois de resolvida a questão, a afirmativa passa a ser conhecida por Teorema de Waring-Hilbert e no mundo acadêmico pertence a um grupo específico de interesse de muitos matemáticos: “Problemas de Warning e seus variantes”.

dedicação aos estudos e dom natural que contribuiram para que Hilbert exercitasse e desenvolvesse suas potencialidades como matemático.

Em seus trabalhos, Hilbert procurava dar uma nova roupagem aos resultados encontrados por outros matemáticos. Buscava sempre uma maneira mais elegante de demonstrar teoremas e procurava apresentar soluções de problemas de uma forma mais generalizada possivel. Muitos resultados obtidos por Hilbert vêm completar trabalhos iniciados e não terminados por outros matemáticos.

2.1 – Além de álgebra e de análise matemática

Estudantes de nivel médio de escolas brasileiras e muitos recém formados em Matemática entram nas universidades ou terminam os cursos de graduação acreditando que as grandes contribuições à Matemática vindo da Alemanha durante o século XIX estão ligadas somente a teoria dos números, álgebra e análise matemática. A menos do "somente", poderiamos dizer que a afirmativa está correta, não completa. Então qual foi a Matemática desenvolvida na Alemanha na segunda metade do seu período oitocentista? Os departamentos de matemática das universidades alemãs dedicavam-se exclusivamente à teoria dos números e à análise? Qual o diferencial de Hilbert como matemático para a comunidade matemática? São questionamentos importantes e através das respostas dadas a eles, nos permite compreender o impacto que a matemática alemã do século XIX produziu no pensamento matemático e na Matemática em si.

É indiscutível a excelência de resultados dos matemáticos alemães em álgebra, análise e teoria dos números, mas não podemos deixar de caracterizar o período em questão como um caldeirão que continha: os genes da teoria dos conjuntos e da teoria dos números, da formulação dos conceitos das grandes estruturas sobre as quais podemos caracterizar comportamentos das operações matemáticas e do nascimento da álgebra abstrata moderna. É relevante destacar o abstracionismo da escola analítica de Berlin, a tentativa inicial de aritmetização da análise e as infindáveis discussões sobre a natureza do infinito. É também deste período as riquissimas abordagens que conceituam e constroem o conjunto dos números reais.

> "Cada vez que a história da Matemática aproxima-se do século XX, o número de descobertas, de soluções dos problemas na teoria dos números aumenta. É muita ousadia dizer com precisão quais são as marcas dessa grandeza, e especialmente no século XIX. Apesar disso, algumas observações são: teoria algébrica dos números começou a ser concebida por Dedekind, teoria analítica dos números foi solidamente fundada com a resolução da conjectura de Gauss e Legedre, teoria algébrica dos números foi formalizada com a publicação do *Zalhbericht*, conceitos básicos da teoria geométrica dos números foram publicadas por Minkowski, a revolução p-ádica começou com Hensel e nasceram Hardy, Hecke, Mordell, Siegel e Artin cujos nomes ficaram marcados na teoria dos números do século XX."
>
> (Uma breve história da teoria dos números no século XX, S. Shokranian, p. 145, Editora Ciência Moderna, 2010)

Foi neste mesmo período que vimos nascer uma verdadeira revolução no pensamento geométrico através de matemáticos que apresentaram formalmente ao mundo acadêmico, geometrias diferentes da geometria de Euclides. É comum dizer que tais geometrias surgem a partir da negação do quinto postulado da geometria euclidiana, mas esta é uma afirmativa que discutiremos mais a diante.

A Matemática produzida na Alemanha no período oitocentista foi muito mais além do que chamamos neste trabalho de *álgebra e análise duras*. Sua produção acadêmica em totalidade foi também, para outras direções, diferentes destas duas áreas do conhecimento matemático. Encontramos inúmeros trabalhos em dois grandes grupos de pesquisadores: os *geômetras* e os *logicistas*. Estes últimos, exercendo papéis importantissimos nos estudos relativos aos Fundamentos da Matemática.

As demonstrações feitas no século XVIII por G. Saccheri e posteriormente por J.-H. Lambert tentaram substituir o quinto postulado da geometria euclidiana, mas foram contestadas. O problema se veste de um novo corpo a partir dos trabalhos de Karl Friedrich Gauss, de Wolfgang e Janos Bolyai, de Lobatchvski e posteriormente de Riemann. Mesmo apresentando geometrias mais elaboradas e de maneiras mais racionais, uma questão ainda estava em aberto no meio acadêmico: existia ou não uma contradição interna na geometria?

2.1.1 – O grupo dos analistas: a aritmetização da análise e o limite de sequências de números racionais

Desde o século XVIII, matemáticos vinham usando séries de números racionais para aproximarem números reais dados. Um exemplo bem conhecido é a série que determina o valor de π (pi) com uma precisão decimal tal qual se queira.

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{2n+1}$$

Esta aproximação, por meio de uma série de números racionais, permite também avaliar um número real fixo a partir de considerações específicas. Desta forma, uma série de racionais é vista como um procedimento de cálculo para a determinação de um número real. A novidade que os puristas traziam é que tais aproximações e procedimentos não estavam mais atrelados às tradicionais construções geométricas.

A figura mais emblemática que caracteriza o grupo dos analistas da época é sem dúvida Karl Weierstrass (1815-1897), professor da Universidade de Berlin entre os anos de 1864 e 1897. A partir de sua definição para número irracional[14], Weierstrass impregna a análise matemática de rigor. O trabalho de Weierstrass se caracterizou por utilizar as séries de números racionais para *definir* um número real dado e não mais para calcular um número real como se vinha fazendo até o momento.

[14] Relembrando que Weierstrass define os irracionais como limites de séries convergentes.

A concepção de Weierstrass retira o paradigma geométrico existente na fundamentação do Cálculo e da Análise, concebendo uma definição de limite de função em termos aritméticos[15].

Nascimento (2009) nos informa que o Teorema de Bolzano-Weierstrass afirma que se S é um conjunto limitado em um espaço métrico[16] E contendo infinitos pontos, então S terá ao menos um ponto de acumulação[17] em E, o que nos garante a existência do limite da série.

Pela teoria dos números reais de Weierstrass, os novos números, que também são chamados de quantidades numéricas, são interpretados como limites de sequencias ordenadas de agregados de números racionais, previamente definidos por suas classes de equivalência.

---

[15] Albert Coffa nos diz em seu livro: "Kant, Bolzano and the emergence of logicism", de 1982, que "A prova do Teorema do Valor intermediário em 1817 por Bernard Bolzano foi uma das primeiras tentativas para provar que a Análise não precisava da intuição ou de conceitos geométricos". Ao provar o Teorema do Valor Intermediário por meios analíticos, a partir de sua definição de continuidade, Bolzano desejava mostrar que a intuição não desempenhava qualquer papel nas provas dos teoremas da Análise Matemática.

[16] Dizemos que um conjunto X, cujos elementos chamaremos pontos, é um espaço métrico se, a cada dois pontos p e q de X, está associado um número real d(p, q), chamado distância de p a q, tal que:
(a) $d(p, q) > 0$ se $p \neq q$; $d(p, p) = 0$;
(b) $d(p, q) = d(q, p)$;
(c) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$, qualquer que seja r pertencente à X.

[17] No conjunto dos números reais, *a* é um ponto de acumulação de um conjunto *X* quanto toda vizinhança do intervalo aberto de centro *a*, $(a - \varepsilon , a + \varepsilon)$ contém algum elemento de *X - { a }*. Um ponto de acumulação de um conjunto pode ou não pertencer a esse conjunto.O conjunto dos pontos de acumulação de X é também conhecido por *conjunto derivado* de *X* e é representado por X'. Lima (1989), nos afirma que a condição para um ponto *a* pertencer ao conjunto dos pontos de acumulação X' é expresso simbolicamente por $\forall \varepsilon \rangle 0 \ \exists x \in X; \quad 0 \langle \left| x - a \right| \langle \ \varepsilon.$

"A vantagem desta teoria é que a existência de limites pode ser provada. Isto quer dizer que através de uma construção real podemos provar que existe um número que é o limite de certa série satisfazendo a condição de "finitude" ou "convergência". É importante observar que na sua teoria dos números irracionais, Weierstrass não faz nenhuma associação dos números reais com pontos da reta, ao contrário de Cantor que enunciou o seguinte axioma: *A todo número real corresponde um ponto da reta tendo este número por abscissa.*

Cantor chamou esse enunciado de axioma, justificando que, por sua natureza ele não pode ser demonstrado, já que nada nos garante que possam existir irracionais que não estejam representados na reta. Por outro lado, a recíproca, isto é, que todo ponto da reta é representado por um número real, é verdadeira, bastando para isso pensar na distância deste ponto à origem (representada pelo número zero), se ele estiver à direita da origem e o simétrico da distância, se este ponto estiver à esquerda.

Dedekind também fez esta associação entre os números reais e a reta real, por isso, esse axioma ficou conhecido como Axioma Cantor-Dedekind."

(Nascimento, 2009, p.32)

Observamos que a caracterização de Weierstrass por limites de funções *substitui* o conceito de limite e de continuidade de funções ligado ao *paradigma geométrico*[18], recolocando em seu lugar uma nova definição, em que não aparecem o movimento, o tempo e a noção de "tender a". Outros matemáticos também trabalharam na tentativa de construir formalmente o conjunto dos números reais IR.

---

[18]Mudança do Paradigma Geométrico a partir dos trabalhos de Weierstrass:

1- ao plano euclidiano deixa de ser visto como o local onde gráficos de funções matemáticas são representadas. A função matemática deixa de ser uma curva no plano cartesiano;

2- a caracterização geométrica de Newton para o cálculo, em termos de uma seqüência de secantes que têm uma tangente por limite desaparece e

3- a curva não é mais compreendida como resultado de movimento e continuidade.

No livro *Continuity and Irrational Numbers,* de 1872, Richard Dedekind (1831-1916), define irracionais por meio de cortes[19] de números racionais. É claro que a aritmetização sugerida por Dedekind só foi possível de ser realizada porque os números racionais e suas propriedades ficam bem definidos por uma maneira puramente aritmética.

Se a definição dos números racionais e as provas de suas propriedades dependessem de intuições geométricas, o processo de aritmetização da análise proposto por Dedekind estaria fadado ao fracasso, já que a Análise Matemática dependeria da geometria, e esta não seria uma ciência autônoma. Para garantir esta autonomia, havia a necessidade de definir os números racionais assim como caracterizar e demonstrar as suas propriedades por meios puramente aritméticos[20].

---

[19]O método dos cortes de Dedekind é um método que consiste em partir o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais e construir um corpo ordenado completo. Se A é um subconjunto dos números racionais, dizemos que A é um corte se:

1. $\emptyset \neq A \neq \mathbb{Q}$;
2. Se $p \in A$ e $q \in \mathbb{Q}$ é tal que $q < p$, então temos que $q \in A$;
3. Se $p \in A$, então $\exists q \in A$, com $p < q$.

Intuitivamente um corte pode ser imaginado como uma semi-reta racional que se estende a *menos infinito* que não tem maior elemento.

[20] Há muitas maneiras de definir os números racionais e suas propriedades por meios puramente aritméticos. Preferimos a apresentação proposta pelo matemático alemão Edmund Landau (1877-1938), que após assumir os postulados de Dedekind-Peano e provar uma série de resultados sobre os números naturais, apresenta no capítulo II de seu livro *Foundations of Analysis* os racionais de maneira formal. O capítulo é intitulado Fractions. Neste capítulo o autor define frações e classe de equivalência e estabelece critérios para comparar frações. Como assume o primeiro número natural como sendo 1, Landau não vê necessidade de restrição dos denominadores das frações que aparecem em seu trabalho. A seguir define adição e multiplicação e caracteriza suas propriedades, trabalhando com uma estrutura algébrica (veremos mais adiante o que significa) munida destas duas operações e bastante rica em termos matemáticos. No final do capítulo, Landau define números racionais positivos (o conjunto de todas as frações equivalentes a uma fração dada) a partir dos

Este processo de aritmetização da Análise não foi homogêneo na Alemanha. Duas correntes se opuseram durante todo o processo de consolidação do movimento. De um lado, matemáticos como Leopold Kronecker[21] (1823-1891) satisfeitos com a autonomia adquirida pela Aritmética e pela Análise, embora alguns pesquisadores ainda aceitassem a intuição não geométrica para a construção de conceitos aritméticos. De outro lado, matemáticos como Bolzano, Gottlob Frege (1848-1925) e Dedekind que desejavam acabar de vez com qualquer tipo de intuição na aritmética, seja esta intuição geométrica ou não.

O empecilho ao processo de aritmetização da Análise imposto a esse segundo grupo de matemáticos residia na argumentação Kantiana de que embora a Matemática Pura não dependesse de fatos empíricos para provar que os seus teoremas, eles eram dependentes de intuições puras, como as intuições de espaço e de tempo. Assim sendo, a Matemática é sintética *a priori* e a Aritmética dos números naturais, dependentes de algum tipo de intuição[22].

Os matemáticos precisavam demonstrar que a Aritmética dos números naturais não dependia de nenhuma intuição <u>ou</u> deveriam provar como reduzir a aritmética dos números naturais a algo mais básico, onde não coubessem de forma

---

inteiros (o conjunto de todas as frações equivalentes a uma fração com o denominador igual a 1) e prepara o leitor para o conceito de *corte* que irá apresentar no capítulo III, de título: Cuts.

[21] Kronecker é considerado como o precursor do intuicionismo matemático. Acreditava que os números naturais poderiam ser acessados através da intuição direta e que a partir dos naturais, os demais números poderiam ser construídos.

[22] Em nossas parcas leituras sobre os trabalhos de Kant, não nos foi possível concluir se para ele a aritmética dependeria somente da intuição temporal, ou se também dependia da intuição espacial, já que a infinidade de números naturais é adquirida pela pura intuição do tempo.

alguma, apelos implícitos ou explícitos à intuição. O triunfo desta segunda afirmativa foi alcançado através do logicismo de Gottlob Frege.

Contemporaneamente, na França, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) também desenvolveu a Análise Matemática sob a prática do rigor. Cremos ser relevante e importante descrever esta pesquisa sistemática de Cauchy em nosso trabalho porque é comum encontrarmos em livros usuais de Análise Matemática para os cursos de graduação em Matemática, a construção dos números reais segundo a axiomática estruturalista, de acordo com a teoria proposta por Dedekind ou através da idéia de limites de sequencias, tradicionalmente conhecida por método das sequencias de Cauchy. Todas estas apresentações são cheias de formalismos e rigores que a Matemática como disciplina naturalmente exige e se caracteriza.

De acordo com Vianna (2009), para um matemático do século XIX o conceito de rigor em análise trazia a ideia de que:

1- todo conceito teria que ser definido explicitamente em termos de outros conceitos cujas naturezas fossem solidamente conhecidas e bem fundamentadas;

2- os teoremas teriam que ser provados, sendo que cada passo deveria ser justificado: por um outro teorema previamente provado, ou por uma definição ou por um axioma explicitamente declarado (isso significava em particular que a derivação de um resultado por manipulação de símbolos não provaria um resultado, e nem o desenho de um diagrama provaria afirmações sobre curvas contínuas)

3- as definições escolhidas e os teoremas provados teriam que ser suficientemente amplos para suportar a estrutura inteira de resultados válidos pertencentes à matéria.

Cauchy criou a noção moderna de continuidade para as funções de variável real ou complexa. Mostrou a importância da convergência das séries inteiras, com as quais seu nome está ligado. Fez definições precisas das noções de limite e integral definida, transformando-as em notável instrumento para o estudo das funções complexas.

O conceito de limite[23] nos trabalhos de Cauchy se tornou incontestavelmente aritmético em vez de geométrico. Tal conceito pôde ser entendido por meio de desigualdades. Um exemplo para esta afirmativa está na própria definição de sequencia de Cauchy.

Uma sequencia (x_n) de números reais é de Cauchy, se satisfaz a condição:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ |n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$$

Notemos que esta condição não é somente necessária, mas também suficiente para a convergência de uma sequência de números reais.

[23] Conceito de limite por Cauchy no *Cours d'analyse de l'École Polytechnique; 1re partie – Analyse algébrique*: "Quando os valores atribuídos sucessivamente a uma determinada variável se aproximam indefinidamente de um valor fixado, de modo que a diferença entre eles seja tão pequena quanto desejarmos, tal valor é chamado *limite* de todos os demais". (p.4).

"Chega então o momento de Cauchy introduzir o conceito de limite. Ora, é pacífico que Cauchy herdou a ideia de basear seu cálculo no conceito de limite de muitos dos seus antecessores, como Newton, d'Alembert e Lacroix. Mas todos eles deixaram de fundamentar efetivamente os seus resultados com tal conceito. (...) Cauchy teria sido o que primeiro entendeu plenamente o conceito de limite e o que primeiro aplicou tal conceito no cálculo com sucesso. Sobre tal afirmação, contudo, há controvérsias. De acordo com Schubring, o autor da primeira tentativa de abordagem para uma elaboração algébrica do conceito de limite foi o matemático português Francisco de Borja Garção Stockler (1759-1829). Ele publicou em 1794 seu "Compêndio da Theoria dos Limites, ou Introdução ao Método das Fluxões", onde, com seus fundamentos conceituais, desenvolveu uma concepção puramente algébrica de operação com variados limites. (...) É importante ressaltar que o conceito de limite funciona na análise de modo análogo ao conceito de quantidade em relação à matemática como um todo. Ele é o conceito básico essencial, que o "enciclopedista" d´Alembert mencionava como sendo a base da *vraie métaphysique* do cálculo diferencial. Muito embora o mesmo d'Alembert, e também l'Huilier e Lacroix, tivessem preparado o terreno para Cauchy, popularizando a idéia de limite em seus trabalhos, essa concepção permanecia, até então, amplamente geométrica. Com efeito, o exemplo dado por d'Alembert fora o da circunferência e os polígonos regulares inscritos e circunscritos aproximando-se dela".

(Vianna, 2009, p.66-67)

A partir do conceito aritmético de limite dado por Cauchy, todo o cálculo pôde ser baseado em limites e por meio disso, os resultados obtidos previamente sobre as funções contínuas, séries infinitas, derivadas e integrais transformaram-se em teoremas na sua nova análise rigorosa.

A partir da definição de sequência de Cauchy, notamos que os termos estão cada vez mais próximos uns dos outros e parecem se concentrar ao redor de um único ponto. Em geral este limite não existe no conjunto dos números racionais. Tomemos por exemplo a série que determina o valor de π (pi) vista anteriormente. Esta série converge para um valor que não é racional mesmo sendo os seus termos números racionais. É este fato que nos intui aceitar um número irracional como o limite, no infinito, de uma sequência de racionais.

Anteriormente a Cauchy e Weierstrass, os matemáticos trabalhavam com a ideia de número real, sem que houvesse tido a formalização do conceito e sem nenhuma precisão ou rigor. Estes números eram vistos somente como coordenadas de pontos da reta, o que impedia dar a eles um tratamento mais formal. Desde a aplicação do conceito de limite, vindo dos analistas alemães e franceses do século XIX, pode-se definir número real sem que esta definição esteja associada à medida em geometria. Assim, os conceitos gregos de comensurabilidade e incomensurabilidade, e consequentemente a suposição da existência do infinito potencial ficam definitivamente descartados do processo de construção formal dos números reais.

A igualdade entre números reais foi outra questão gerada com o processo de aritmetização da Análise, já que números reais só podem ser comparados se pudermos mensurar os valores de convergência das sequencias de racionais que os definem. Para isso, temos que supor que tais sequencias existam *em si* e a partir de cálculos, verificar se convergem para valores iguais ou desiguais. Ou seja, é necessário supor que a infinidade de termos da sequencia de racionais que determina o número real existe em ato, isto é, é necessário assumir a existência do infinito atual.

Belna (2000) nos afirma que Cantor aprimora os trabalhos de Cauchy e Weierstrass desenvolvendo entre os anos de 1870 e 1880 uma teoria dos conjuntos que faz do infinito atual um objeto explícito do pensamento matemático. O infinito atual começava a gerar desconfortos nos Fundamentos da Matemática.

Kronecker critica severamente as pesquisas de Weierstrass e de Cantor, pois seu desejo é eliminar de uma vez por todas o infinito atual da matemática. É célebre a suposta afirmativa atribuída a ele: “Deus criou os números inteiros e os homens fizeram o resto.” Para Kronecker, a teoria dos conjuntos desenvolvida por Cantor e a análise desenvolvida por Weierstrass produziam resultados falsos para a Matemática.

Tomando a finitude humana por base, Kronecker afirma que um objeto matemático só existe se for construído por um procedimento que tenha como princípio os números inteiros e um número finito de passos nessa construção. O conceito de limite de séries adotado por Weierstrass não passa de uma quimera na avaliação de Kronecker, que chega a afirmar que os matemáticos perdem tempo quando se dedicam ao estudo de “entes matemáticos” inexistentes como, por exemplo, os números irracionais. A resposta de Weierstrass às criticas de Kronecker não é conhecida, mas Cantor recorre à Filosofia para responder as acusações imputadas aos analistas. Cantor evoca a presença do infinito atual na natureza, como a infinidade de objetos existentes e em nosso próprio espírito, como a infinidade de pensamentos que o homem já produziu.

Dedekind faz um ensaio sobre uma prova para a existência do infinito em um artigo intitulado *"O que são e o que devem ser os números?".* Neste artigo, Dedekind considera o conjunto de todos os pensamentos P e define uma função *f(x)* tal que um pensamento é associado ao pensamento deste pensamento. Dado um pensamento p_n, $f(p_n)$ representa o pensamento de seu pensamento *e* $f(f(p_n))$ o pensamento do pensamento de seu pensamento. Há um pensamento original p_0 que não foi gerado por nenhum outro e cada elemento do conjunto dos pensamentos é levado por *f(x)* ao conjunto dos pensamentos dos pensamentos. O conjunto dos pensamentos dos pensamentos está contido no conjunto dos pensamentos e é um subconjunto próprio do conjunto dos pensamentos, pois há pelo menos um pensamento original p_0, que não é pensamento de nenhum outro pensamento. Esta associação de idéias construída por Dedekind é equivalente a definição de conjuntos infinitos[24] que adquirimos nos cursos de análise matemática e mostra que o infinito, representado pelo conjunto dos pensamentos é um vir a ser existente somente em nosso espírito.

Lindemann foi outro matemático duramente criticado por Kronecker, já que seus estudos se concentravam na prova da transcendência do número π (pi), utilizando o conceito de infinito atual. Kronecker afirmou que Lindemann perdera muito tempo ao se dedicar a tal prova, "*uma vez que os números irracionais não*

[24] Seja I_n o conjunto de todos os números naturais de 1 até n. Um conjunto *X* chama-se *finito* quando é vazio ou quando existe, para algum número natural *n*, uma bijeção de I_n em *X.* Um conjunto *X´*, é chamado de conjunto infinito quando não existe a bijeção de I_n em *X.* Notemos que, intuitivamente, a bijeção de I_n em *X* significa uma contagem dos elementos de *X.*

existiam", pelo menos da maneira que tais números eram apresentados na Matemática.

Algumas destas críticas de Kronecker estão no artigo "*On the concept of number"*, onde é possível encontrar um esboço de um projeto de reforma da Matemática. Neste projeto, teoremas são vistos como: (1) propriedades dos números inteiros, (2) propriedades dos números racionais e (3) números que são soluções de equações polinomiais com coeficientes racionais (números algébricos), sob certas condições.

Este momento da História da Matemática foi muito rico e com muitos resultados importantes para a Matemática. Foi também um momento gerador de ricas discussões em filosofia da disciplina.

2.1.2 – O grupo dos algebristas: as estruturas algébricas

Dedekind e Kronecker continuam sendo os matemáticos mais eminentes em produções acadêmicas. Mesmo possuindo visões diferentes sobre a natureza dos números e consequentemente usando métodos diferentes de abordagem de problemas, os dois matemáticos obtém resultados muito semelhantes, em Álgebra, durante os anos de 1860 e1880. O nascimento da Álgebra Abstrata é um marco para a Matemática alemã da época.

Cassou-Noguès (2004) nos conta que os resultados de Dedekind em álgebra tiveram a sua origem em 1854, data de seu *habilitation.* Dedekind acreditava que o progresso matemático consistia em admitir a existência de extenções numéricas sucessivas a partir do conjunto dos números naturais IN, com o objetivo de eliminar as restrições impostas seja pela própria natureza dos números seja pela ausência de propriedades das operações. De início, temos elementos de um conjunto E que possuem restrições sobre a aplicabilidade de uma determinada operação sobre eles. Este dominio é extendido a partir *da introdução de novos objetos* (por exemplo, números de outra natureza), *de elementos ideais* e *da generalização da(s) operação(ões)* conferida(s) à ele com o objetivo de tornar suas leis internas mais simples e consequentemente aumentar o poder de manipulação interna de seus elementos.

Estas extenções admitem um mesmo princípio: a existência de um outro dominio E_2 que sempre corrige "as imperfeições" do dominio E_1 original, de modo que E_1 esteja contido em E_2, sem ser E_2.

A partir da ideia de extenção dos conjuntos numéricos, Dedekind chega, assim como Cauchy, à uma definição para números reais.

Ao aprofundar seus estudos sobre a teoria dos polinômios e a teoria dos inteiros algébricos, Dedekind chega a importantes resultados sobre números algébricos e sobre as leis que regem o conjunto formado por estes números. Para caracterizar o comportamento destas operações sobre os reais, Dedekind define anéis, ideais e corpos como estruturas algébricas[25].

[25] ANEL – É uma estrutura algébrica que consiste num conjunto munido de duas operações binárias (normalmente chamado de adição e multiplicação), onde cada operação combina dois elementos para formar um terceiro elemento. Para se caracterizar como um anel, o conjunto deve satisfazer às seguintes propriedades: 1- Em relação à adição: associatividade, existência dos elementos neutro e simétrico. 2- Em relação à multiplicação: a distributividade em relação à adição tanto a esquerda quanto à direita, a associatividade e a existência do 1, como elemento neutro. O conjunto deve ser

Ideais foram propostos por Dedekind em 1876 na terceira edição do seu livro *Vorlesungen über Zahlentheorie* (*Seminários em Teoria dos Números*). Os resultados ali contidos foram uma espécie de generalização para o conceito de número ideal desenvolvido por Ernst Kummer. Mais tarde, o conceito foi expandido por David Hilbert e especialmente por Emmy Noether[26].

A álgebra que emergiu dos estudos de Dedekind pode ser entendida como ideia basilar e geradora de futuros conceitos específicos e complexos pertencentes ao campo de estudo da Álgebra Abstrata.

No artigo *"Toward a Philosophy of Real Mathematics"* de David Corfield, publicado em 2003, lemos que Dedekind e H. Weber se dedicaram ao estudo das estruturas algébricas e que as propriedades que as caracterizam também podem ser aplicadas ao conjunto das funções[27], sem perda de generalidades. Operações e

---

um grupo abeliano sob a adição e um monoide (semigrupo com um elemento neutro) sob a multiplicação, que se distribui em relação à adição.

CORPO – Um anel comutativo F, com unidade é chamado de corpo, se existe um elemento y em F, tal que para um elemento x de F não nulo, x.y=1. Isto é, há inverso multiplicativo de x, ambos não nulos

IDEAL – É um subconjunto dos anéis comutativos A. Um ideal J é um subgrupo em relação à adição e possui a seguinte propriedade: o produto entre um elemento de A e de J, é um elemento de J.

[26] O termo anel (Zahlring) como conhecemos amplamente nos dias de hoje foi consolidado por David Hilbert no artigo *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereiningung*, Vol. 4, 1897. A primeira definição axiomática de anéis foi dada por Adolf Fraenkel em um ensaio no *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (A. L. Crelle), vol. 145, 1914. Em 1921, Emmy Noether (1882-1935) criou a primeira fundação axiomática da teoria de anéis comutativos em seu monumental trabalho *Ideal Theory in Rings*.

[27] Este conjunto formado por funções tem a mesma estrutura dos conjuntos numéricos. As operações seguem as mesmas regras. Esta analogia permite aplicar ao conjunto das funções algébricas, os teoremas aplicados aos conjuntos numéricos.

propriedades sobre o conjunto das funções (adição, multiplicação, comutatividade, associatividade, distributividade e existência do inverso, por exemplo) permitem caracterizá-lo como uma estrutura algébrica.

Modernamente, entendemos uma estrutura algébrica, sem ambiguidades, como sendo um conjunto associado a uma ou mais operações sobre este conjunto, de modo que estas operações devam satisfazer alguns axiomas. Para muitos, o conceito de estrutura algébrica é considerado sinônimo de Álgebra. Por isso, dizer que um conjunto G possui uma álgebra, é equivalente a dizer que G é uma estrutura algébrica[28]. É importante que fique claro que, uma estrutura algébrica não depende dos objetos submetidos às operações, mas *das regras que determinam as operações.*

Podemos assim concluir que, uma das preocupações da álgebra alemã da época era caracterizar os conjuntos numéricos através de estruturas algébricas. Desta forma, o foco é dado na estrutura sobre a qual o conjunto numérico repousa e não sobre os elementos do conjunto numérico simplesmente. Este pensamento permite aplicar sobre o conjunto numérico, teoremas obtidos em outras áreas do conhecimento matemático, como a teoria das funções.

Os primeiros trabalhos de Hilbert envolvendo matemática elementar seguem este movimento: o pensamento matemático sobre a macroestrutura na qual um

---

[28] Em algumas estruturas algébricas, além do conjunto principal, existe mais um conjunto denominado *conjunto dos escalares*. Neste caso a estrutura terá dois tipos de operações: operações internas (que operam os objetos principais entre si) e operações externas (que representam ações dos escalares sob elementos do conjunto principal). Um exemplo clássico é o conjunto dos vetores em IR^3, que pode assumir dois tipos de produto: o produto vetorial, cujo resultado é um outro vetor, e o produto escalar, cujo resultado é um número real.

conjunto está inserido e a partir desta macroestrutura, construir resultados consistentes.

> "(...). Ce point de vue, qui est naissant dans les années 1880 et reste anonyme ou inconscient, engage à étudier les structures pour elles-mêmes, de façon abstraite, sans spécifier la nature des leurs elements, la nature des objets soumis aux operations don't on décrit les règles."
>
> (*Hilbert,* Cassou-Noguès, Les Belles Lettres Ed. p.27)

2.1.3 – O grupo dos geômetras: um panorama da geometria no século XIX, a geometria na Alemanha e o início da crise dos fundamentos

Como vimos, a matemática alemã no final do século XIX estava em ebulição. De uma ponta estavam os membros da escola algébrico-analítica de Berlin, representados pelos rivais Kronecker e Weierstrass e de outra ponta os membros da escola geométrica de Félix Klein que se recusam veementemente a aceitar o programa de aritmetização da Matemática propostos pelos algebristas e analistas.

Weierstrass entendia que o processo aritmetização da Matemática significava apoiar-se sobre a definição de número real e o seu objetivo neste movimento era tornar possíveis (e matematicamente corretas) as mais variadas demonstrações em Análise Matemática que se serviam do infinito atual. Kronecker, como já dissemos, deseja acabar de vez com a ideia de infinito atual contida nas demonstrações da Análise, principalmente com aquelas que envolviam limites de sequencias e de séries de números reais que caracterizavam números não racionais. Apesar das divergências, ambos concordavam em um ponto: havia a necessidade de eliminar a intuição de continuidade presente na geometria.

Os geômetras, que não viam nos dois grupos soluções para o problema do contínuo presente na geometria, acreditavam que a intuição geométrica acerca do infinito nunca desapareceria do corpo da geometria e por isso, a geometria deveria constituir uma disciplina à parte, independente da aritmética. Com isso, a Análise deveria torna-se um campo matemático autônomo e as provas de seus teoremas que fossem embasadas em intuições geométricas ou nas evidências geométricas desapareceriam naturalmente.

Acreditamos que o pensamento sobre o continuo na geometria euclidiana se caracterizava de forma muito arraigada a ela, pelo fato de ser a única geometria amplamente conhecida, reconhecida e estudada. Sua apresentação como disciplina acadêmica era a mesma difundida por Euclides e por seus seguidores desde o século III a.C.. Mario Bunge prefaciando *"Lendo Euclides: a matemática e a geometria sob um olhar renovador"*, do matemático italiano, naturalizado argentino, Beppo Levi nos diz que, "talvez a geometria euclidiana tenha sobrevivido tanto tempo intocável por ter sido a primeira teoria propriamente dita registrada pela História". Ressalta que foi o primeiro sistema hipotético-dedutivo conhecido e que antes de Euclides, a Matemática era um amontoado de resultados soltos. Esta fala vai ao encontro do nosso pensamento sobre o comportamento dos geômetras em relação à intuição geométrica do continuo em geometria. Levi também afirma que depois de Euclides, a Matemática foi se convertendo em um super sistema de sistemas relacionados entre si.

> “Mais precisamente, Euclides introduziu explicitamente o formato (também chamado de método) axiomático, que consiste em começar listando os conceitos básicos e os postulados – ou seja, ideias não deriváveis de outras ideias no mesmo sistema – e derivar (definir ou deduzir) os demais a partir deles.
>
> A axiomática serve de parâmetro para a organização racional e econômica de qualquer corpo de conhecimentos, sejam matemáticos, físicos, econômicos, filosóficos ou outros. Spinoza, por exemplo, a utilizou em sua grande obra *Ética*. Hoje, os filósofos a empregam para esclarecer, sistematizar e provar ideias em qualquer ramo da filosofia.”
>
> Mário Bunge
>
> (*Lendo Euclides: a matemática e a geometria sob um olhar Renovador,* Beppo Levi, p.8, Ed. Civilização Brasileira)

Os leitores menos atentos de *Os Elementos* ou alunos que estudaram geometria somente nas escolas de níveis fundamental e médio, são categóricos em defender e justificar a importância da geometria euclidiana, pois constataram que há inúmeras possibilidades de aplicações deste conhecimento à vida cotidiana e à técnica. O fato dos livros didáticos apresentarem dezenas de problemas com soluções geométricas mais interessantes do que as soluções algébricas e a ausência do rigor das demonstrações também atraem os alunos. São soluções mais sintéticas e que proporcionam possibilidades de raciocinar, explorar e deduzir. Ainda há o fato de que a possibilidade de esboçar a solução de um problema através de uma figura auxilia muito pessoas que raciocinam de forma eminentemente geométrica. Para muitos, as noções geométricas são inatas ao homem, daí maior facilidade em lidar com o raciocínio geométrico ao raciocínio algébrico. Porém, estes mesmos leitores (sejam eles menos atentos ou não geômetras de profissão) não são expostos aos problemas importantes e delicados que concernem ao campo dos Fundamentos da Geometria.

A lógica da geometria contida nos Elementos de Euclides suscitou admiração desde o seu aparecimento devido sua sistemática e coerência[29]. Durante séculos, a imagem de Euclides ficou imaculada e as verdades acerca de sua geometria, foram exemplos de construção de uma teoria sem contradição interna.

> "Uma das características dos *Elementos* (...) é a conduta lógico-formal da exposição, que lembra a teoria aristotélica do silogismo: divisão sistemática por proposições. Em cada proposição, primeiro a enunciação de uma tese em termos gerais, logo uma nova anunciação aplicada a uma figura particular. Finalmente uma demonstração sobre a figura. A demonstração dividida em uma série de conclusões particulares em cadeia e terminando regularmente co a afirmação 'como queríamos demonstrar'. (...) Valia a pena mostrar como é diferente o resultado quando se parte de axiomas claros e unívocos. A maravilha dos *Elementos* consistia precisamente em demonstrar, como o exemplo, como a inteligência do homem podia, guiada pelo raciocínio rigoroso, chegar a partir de poucas premissas simples, às verdades que o secular conhecimento empírico podia ter ensinado."
>
> (*Lendo Euclides: a matemática e a geometria sob um olhar Renovador,* Beppo Levi, p.84-85, Ed. Civilização Brasileira)

Bons matemáticos e logicistas chegaram a pensar que o 5º postulado era, na verdade, um teorema, e que por sua vez poderia ser demonstrado já que as 31 primeiras proposições do Livro I de *Os Elementos* podiam ser provadas usando somente os quatro primeiros postulados. A 31ª proposição diz que "por um ponto fora da reta passa pelo menos uma reta paralela que não a intercepta". É interessante notar que a prova da unicidade desta reta não independe do 5º postulado.

---

[29] É bem verdade que a criação do sistema axiomático assim como o seu uso corrente é atribuído à Eudoxo de Cndido (408aC – 355aC), que transportou para a Matemática a teoria das afirmações de Aristóteles, feita para a Filosofia e baseada em: noções comuns, noções especiais e definições. Euclides se serve deste conhecimento.

Andrade (2007) afirma que com o acréscimo do 5º postulado o homem elaborou o primeiro e o mais duradouro modelo de espaço físico, já que um modelo físico deve ser entendido como um conjunto de leis que regem a estrutura de um sistema físico do qual procura-se, a partir deles, explicitar dedutivamente as propriedades do sistema: *"o sistema considerado na geometria euclidiana é o espaço físico e as leis são os postulados".*

Ainda em Andrade (2007), encontramos uma reflexão importante sobre o método axiomático ao afirmar que: *"a simplicidade dos postulados reflete um enorme esforço mental desprendido para realizar tal síntese"*. O fato é que esta simplicidade faz emergir: (1) a questão do contínuo na geometria, uma vez que o 2º postulado intui que as retas e os planos são ilimitados e (2) o fato dos postulados representarem as experiências locais num nível exacerbado das experiências humanas, já que os quatro primeiros postulados conduzem-nos ao conceito de isotropia[30].

Na tentativa de mostrar que o quinto postulado é um teorema, alguns matemáticos tentaram construir uma prova por absurdo negaram-no, para construírem uma prova por absurdo. Esta atitude gerou outros tipos de geometrias com resultados e interpretações próprias, mas que em nada mancharam a grandiosidade da geometria do velho Euclides. Entretanto, a questão já levantada anteriormente, ainda se mantinha: havia ou não uma contradição interna nesta ciência?

---

[30] O espaço é igual a si mesmo em todos os seus pontos.

Desde 1868[31], o matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900), através de seus trabalhos com a pseudo esfera[32], Félix Klein, e seus estudos sobre a geometria cayleyiana[33] e Henri Poincaré demonstraram que a procura pela contradição iria em direção ao nada. Tais matemáticos mostraram que havia um isomorfismo lógico entre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas. Isto quer dizer que qualquer contradição em uma das geometrias implicaria em uma contradição na outra.

Acreditamos que o surgimento das geometrias não euclidianas e o seu mapeamento bijetivo lógico com a geometria de Euclides parece não ter sido devidamente compreendido por matemáticos não geômetras da época. Defendemos

---

[31] Como nesta seção estamos nos dedicando ao período oitocentista da Matemática alemã, não nos focamos em trabalhos anteriores a este período. Muitos matemáticos e físicos como Kepler, John Wallis, Saccheri, Legendre, Bolyai, Simon Klügel, Lambert, entre outros já haviam explorado o campo das geometrias não euclidianas na tentativa de mostrar que o 5º postulado era um teorema. Recomendamos a leitura do artigo *"De Euclides à Poincaré"*, de Plácido F. A. Andrade, da Universidade Federal do Ceará.

[32] Beltrami trabalhava com um modelo de superfícies de curvaturas negativas (superfícies tais que planos tangentes a elas em um dado ponto P, dividem esta superfície em duas regiões opostas, isto é, haverá sempre pontos da superfície do lado direito e do lado esquerdo do plano). Bons exemplos de superfícies de curvatura negativa são as selas. A geometria cujo espaço é modelado por tais superfícies é conhecida por geometria hiperbólica. Beltrami usou outra superfície de curvatura negativa, mais conveniente que a sela, para representar o espaço hiperbólico. Ele chamou essa superfície de pseudo-esfera (obtida pela revolução da tractriz em torno de um eixo) e mostrou que ela exibe as propriedades requeridas pela geometria hiperbólica de curvatura negativa. Isto é, em qualquer ponto da pseudo-esfera, do mesmo modo que na sela, curvas se cruzam com curvaturas em sentidos opostos. A pseudo-esfera de Beltrami é interessante, mas não é a melhor maneira de se visualizar a geometria hiperbólica. Duas características que dificultam o estudo do espaço hiperbólico sobre a pseudo-esfera são: (1) as "retas" sobre ela nem sempre são infinitas como deveriam ser; (2) existem círculos nela que não podem ser encolhidos até virarem pontos.

[33] É a geometria analítica que se opõe à geometria infinitesimal. Os cálculos feitos sobre as coordenadas não são provenientes do cálculo diferencial. Nesta geometria há a introdução de pontos no infinito, fato que para muitos, há uma possibilidade de classificá-la como uma geometria pertencente ao plano afim-projetivo. Os pontos no infinito, de coordenadas complexas, permitem encontrar novas propriedades e formas de figuras geométricas. Gaston Darboux (1842-1917) estudou especificamente a geometria Cayleyana e escreveu o livro "Principes de géometrie analytique" (publicado em 1917) cujo volume 4, intitulado *"Geometrie Cayleyenne"* é inteiramente dedicado à ela.

a tese de que este fato deveria ser de interesse de todo matemático. Dizemos isso porque acreditamos que a concepção destas geometrias expressa a liberdade do espírito humano para criar o campo do conhecimento que lhe aprouver, mas este mesmo campo do conhecimento pode mostrar que "verdades intuitivas" e contradições, podem caminhar lado a lado.

Durante o século XIX, o interesse escolar elementar era pela geometria clássica de Euclides. O desenvolvimento dos métodos analíticos, a Analisys Situs de Poincaré, métodos diferenciais, a geometria projetiva e o sucesso da mecânica racional do contínuo não estimulavam os matemáticos a estudarem questões relativas aos fundamentos da geometria elementar. Nos países de língua inglesa ainda reinavam Euclides e *Os Elementos*. A escola francesa influenciava o mundo desde 1794, data da primeira publicação de *Éléments de Géométrie* de Legendre. Entre 1817 e 1889, ano da 21ª edição da obra, dez edições[34] foram publicadas. Cremos que o respeito creditado à obra de Legendre e o seu amplo uso, tem a ver com a apresentação clássica, clara e mais moderna do método axiomático. Para Legendre a geometria repousa sobre certos axiomas, muitas afirmativas são consideradas evidentes por elas mesmas e se a geometria for admitida como pura e verdadeira, uma afirmativa sempre excluirá naturalmente a outra. Como vemos, seu texto era menos árido para alunos e mestres. A força de seu texto conseguiu cobrir de névoa os *Élements de Géometrie,* de Clairaut (1741) e o *Dévéloppement nouveau de La partie élementaire des mathématiques,* de Louis Bértrand (1778), obras que na segunda metade do século XVIII, trouxeram em seu bojo a reflexão

[34] Atualmente, a obra de Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) é de domínio público e facilmente encontrada no sítio da Bibliothèque Nationalle de France Gallica Bibliothèque Numérique http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29403p.r=g%C3%A9om%C3%A9trie.langPT.textePage

sobre a necessidade de observar o mundo exterior e experimentá-lo, para que através da aplicação da razão pudéssemos chegar à demonstrações de teoremas. Esta era uma proposta inovadora para época, porém não era de interesse dos matemáticos, cremos que por pertencer aos fundamentos filosóficos da Geometria.

Mesmo com a solidez inabalável gerada pela geometria de Euclides, o mundo matemático não podia fechar os olhos para as geometrias não euclidianas que se fortaleciam como campo de conhecimento matemático. O conceito de paralelismo no espaço Riemanniano chocava o mundo, assim como o conceito de geometrias multidimensionais. O confronto entre a rigidez dos conceitos advindos da clássica geometria de Euclides e os novos pensamentos sobre espaços diferentes dos euclidianos mostravam que certos problemas que faziam parte dos fundamentos da geometria elementar estavam mal formulados e que a origem deste conflito residia na concepção, na escolha e no tratamento interpretativo dado aos axiomas.

Encontramos em *"Using history to teach mathematics – an International Perspective",* MAA vol. 51, que Jules Hoüel (1868 – 1881) publicou em 1867 o texto "*Essai critique sur les príncipes fondamentaux de la géometrie"* onde combate fortemente a qualidade de verdade atribuída aos axiomas da geometria euclidiana. Hoüel insiste em defender que a experiência do mundo exterior deve contribuir para a escolha de axiomas de uma geometria e faz um paralelo entre a geometria euclidiana e as não euclidianas, defendendo a primeira, por crer que esta expressa melhor o mundo físico através do qual a própria geometria se põe como objeto. Isto é, a geometria euclidiana, *dá conta* de modelar o nosso mundo, levando em consideração sua dimensão, em comparando com a dimensão humana. Além disso, para Hoüel, muitos fenômenos físicos foram modelados e verificados positivamente através desta geometria de Euclides.

Em oposição à proposta de apresentação da geometria por Hoüel estava Charles Méray, que em 1874 publica *Nouveaux élements de géometrie.* Sua obra traz uma novidade: o estudo da Geometria Espacial antes da plana. A partir desta proposta inovadora e pouco tradicional para a época, Méray explicita quarenta axiomas, muito diferentes dos apresentados na obra de Legendre. Seu texto mostra segurança e a consciência de que muitos dos axiomas destacados não eram independentes. Tal fato é interpretado por muitos matemáticos como um descuido lógico, mas acreditamos que a obra não surgiu com o intuito de fazer uma crítica à lógica e sim apresentar somente uma nova forma didática de apresentar a disciplina e assim escapar do domínio editorial de Legendre.

O matemático alemão Moritz Pasch (1843 – 1930) retoma uma tradição interrompida há muito nas universidades de seu país: o oferecimento de disciplinas nos cursos de graduação sobre dos fundamentos da geometria. Suas notas de aula, guardadas após ministrar cursos de geometria na Universidade de Giessen foram transformadas no livro *Vorlesungen über neure Geometrie*, em 1882. Esta obra explicita bem a sua preferência e habilidades matemáticas nas áreas de geometria projetiva e análise matemática. As obras *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung* e *Grundlagen der Analysis* publicadas nos anos de 1882 e 1908, respectivamente, também apresentam à comunidade acadêmica o gosto de Pasch pela matemática pura. Muitas de suas orientações a alunos de doutorado assim como artigos e livros publicados sobre Fundamentos de Matemática foram concluídos em torno de seus oitenta anos de idade. Entre tantas obras, podemos destacar: *Der Ursprung des Zahlbegriffs* (1921); *Über zentrische Kollineation* (1923); *Betrachtungen zur Begründung der Mathematik* (1924); *Die natürliche Geometrie* (1924) e *Betrachtungen zur Begründung der Mathematik* (1926).

A importância de trazer este matemático e suas contribuições para o nosso trabalho reside no fato dele ter antecipado muitos estudos que foram atribuídos à Hilbert como o precursor. Para aqueles que admitem David Hilbert como o pai da geometria moderna, podem seguramente admitir Moritz Pasch de maneira descontraída, porém respeitosa, como o avó da geometria moderna, por ele ter levantado questões acerca da axiomatização da geometria projetiva e da caracterização de sua estrutura antes de Hilbert.

Moritz Pasch foi o primeiro matemático a *explicitar todos os conceitos básicos e axiomas necessários* para a construção de um modelo axiomático para a geometria projetiva. Seu extenso trabalho dá continuidade aos trabalhos de Jean Victor Poncelet (1788 – 1867), publicados a partir de 1822. Os resultados de Poncelet foram muito acolhidos na Europa, sobretudo na Alemanha. Além dos resultados interessantes e diferentes daqueles obtidos pela geometria de Euclides e de novos teoremas que iam se agregando ao corpo da geometria projetiva, o número de questionamentos acerca dos fundamentos da disciplina crescia a cada dia, principalmente em relação à continuidade das demonstrações de seus teoremas centrais. Uma das principais dúvidas era verificar a possibilidade de provar se a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas poderiam ser vistas como derivativas da Geometria Projetiva. Caso a afirmativa fosse verdadeira, o passo seguinte seria construir uma métrica que servisse às três geometrias em questão, sem se servir de conceitos derivados da tradicional geometria de Euclides.

Posteriormente, Klein resolve esta questão através do conceito de *"razão cruzada entre quatro pontos"*[35], que é um invariante projetivo. Esta solução dada por Klein tem sua origem nos trabalhos de Arthur Cayley sobre invariantes quadráticos. Interessante frisar que Klein consegue estender seus resultados em direção às Geometrias Não Euclidianas. Foi puramente intencional, nada ao acaso, já que Cayley não acreditava em tais geometrias. Desta forma, Cayley desconsiderou possíveis aplicabilidades de seus resultados nelas. A partir de então, muitos matemáticos decidiram examinar cuidadosamente e esclarecer pontos obscuros que se apresentavam nas estruturas dedutivas do corpo de conhecimentos da Geometria Projetiva. Um exemplo foi a necessidade de inclusão dos axiomas de continuidade para fundamentar conceitos, como o próprio conceito de razão cruzada em termos puramente projetivos.

> "Pasch was very concerned with the correctness of thinking which he considered equivalent to the presentation in a precise language. He was mainly concerned with the axiomatic development of mathematics. His main interests were the foundations of projective geometry and of analysis. He was devoted to what he called delicate (heikle) mathematics, as opposed to coarse (derbe) mathematics which is being practiced by many mathematicians."
>
> (*Hyperfrier Projectiver Ebenenabschluss*. Geometrike Colloquium, Ellers, E. W.1971,Technicial Universitat Munchën, Ins. Für Geometrie,p.5-8)

> "A watershed in the development of the foundations of geometry. Drawing on the work of his predecessors, Pasch was the first to explicitly state all the basic concepts and axioms necessary for his construction of projective geometry."
>
> (*Von Pasch zu Hilbert*, W S Contro, *Arch. History Exact Sci.* **15** (3) (1975/76), p. 283-295.)

[35] Chamaremos de razão cruzada (ou razão dupla ou ainda, razão anarmônica) de quatro pontos A, B, C, D de uma reta orientada r a relação DB:AD / CB:AC, envolvendo os segmentos orientados *AC, CB,AD* e *DB* , sobre a reta r. A razão cruzada aparece pela primeira vez na Coleção Matemática de Papus. O moderno desenvolvimento do conceito se deu com Chasles, Möebius, Von Staudt e Carnot.

Durante os primeiros dezessete anos de carreira, Pasch dedicou-se ao estudo da geometria algébrica e durante os quarenta e oito anos seguintes, dedicou-se ao estudo profundo de *Os Elementos*. Ao longo destes anos encontrou uma série de afirmativas ocultas na obra de Euclides que nenhum outro matemático tinha identificado, mostrado, discutido ou sugerido como complemento ao compêndio grego. A nosso ver, a proposta de Pasch com a sua tentativa de axiomatização da geometria projetiva era eliminar, de vez, a intuição presente nas construções geométricas e na própria forma de fazer geometria.

Ao construir a Geometria Projetiva, a partir de seus termos, Pasch tomou cuidado especial em nunca se referir às propriedades dos diagramas relevantes e trabalhou somente com inferências dedutivas advindas dos axiomas. Para Pasch o significado dos axiomas é de natureza geométrica, nunca puramente formal, o que torna o seu significado incompreensível quando não há uma figura geométrica associada a ele. A dedução de teoremas não pode, nem deve apoiar-se em figuras, apesar do significado do teorema ser estritamente referente a eles.

> “Pasch's analysis relating to the order of points on a line and in the plane is both striking and pertinent to its understanding. Every student can draw diagrams and see that if a point B is between A and a point C, then C is not between A and B, or that every line divides a plane into two parts. But no one before Pasch had laid a basis for dealing logically with such observations. These matters may have been considered too obvious; but the result of such neglect is the need to refer constantly to intuition, so that the logical status of what is being done cannot become clear.”
>
> (A Seidenberg, Biography in *Dictionary of Scientific Biography* ,
>
> New York 1970-1990).

Em *Vorlesungen über neuere Geometrie,* de 1882, Pasch intuiu que a geometria da época estava muito atrelada à Física e isso deveria mudar. Pudemos apreender na leitura de *Vorlesugen,* que ele acreditava que “um argumento matemático, não deveria depender de uma interpretação física”. O matemático garante que o princípio da dualidade contradiz a intuição física sobre pontos e linhas. Axiomatização, rigor, dedução e matemática formal são palavras chave presentes nos trabalhos de Moritz Pasch. Estas ideias influenciaram Hilbert. Vejamos um resumo sobre elas.

> “The educational value of mathematics lies as much in its method as in its results. The most important part of the method is deduction. Rigorous reasoning appears to be the most desirable aspect in mathematical education. Pasch explains the axiomatic method in mathematics in great detail. According to Pasch, the mathematical language is often not clear, enough. Mathematical proofs sometimes leave gaps which are very often difficult to fill. He proposes that very detailed and careful deduction should prevail in teaching of mathematics.”
>
> (*Über den Bildungswert der Mathematik*, M. Pasch, *Mitt. Math. Sem. Giessen* No. 146 (1980), 20-39.

> “Ao final do século XIX, a axiomatização de sistemas matemáticos diversos, surgidas na esteira da grande liberdade matemática inaugurada com a criação da geometria não euclidiana (1829) e das álgebras não convencionais (anos 1840), já era uma realidade substancial. (...) Obviamente o processo de aritmetização da análise, com a axiomatização dos sistemas numéricos, não pode ser desvinculado desse movimento. (...) Pasch percebeu claramente que os conceitos iniciais da geometria não deveriam ser definidos, como Euclides o fizera, para evitar o atrelamento da matemática a conceitos físicos e um “retorno ao infinito”. Assim, calcou sua geometria em alguns conceitos primitivos e fez dos axiomas que introduziu apenas enunciados formais que serviam para caracterizar implicitamente esses conceitos. E se os axiomas podiam ser ditados, de alguma maneira, pela experiência, as demonstrações que se seguiam em hipótese alguma deveriam ter qualquer conotação material.”
>
> *“A Demonstração ao longo dos séculos”*, Hygino H. Domingues, Bolema, 19, 2002, p.62)

Para Pasch os axiomas são obtidos após a observação do mundo exterior e os classificam em: (1) proposições que concernem à reta e (2) proposições que concernem ao plano. Estes dois grupos de proposições, juntos, permitem estabelecer o essencial das geometrias projetiva e afim. Introduzindo um terceiro grupo, (3) o grupo das figuras congruentes, obtém-se a geometria ordinária. Por fim, estabelece (4) uma relação de ordem a partir de pontos sobre uma reta. Para o assunto ordenação, Pasch se dedica bastante. A ordenação de pontos sobre a reta era um assunto relativamente novo na época, mas muito familiar à Pasch o que lhe permite obter uma geometria ordenada no plano sem muitos problemas. Antes de Pasch, o uso do axioma era freqüente, porém de maneira implícita.

Domingues (2002) afirma que “tendo em vista o nível de axiomatização que a Matemática alcançara e a constatação de que as geometrias, embora possivelmente criadas pelo homem com inspiração no espaço físico, não tinham que ser necessariamente idealizações desse espaço, era de esperar que até o paradigma euclidiano passasse por um reexame mais profundo”. O autor completa sua fala, dizendo que o primeiro matemático a realizar um trabalho significativo nos Fundamentos da Geometria com essa nova visão foi Pasch.

Com a consolidação das Geometrias Não Euclidianas, Pasch mostra que as geometrias em geral são construções feitas pelo homem e que podem ter alguma relação com o mundo real, mas não necessariamente servir de modelo representativo para ele. Desta forma, concluiu que a geometria euclidiana precisava ser retocada em vários aspectos, caso ela ainda quisesse ser o ponto de partida para a concepção de outras geometrias. Havia uma perspectiva empirista na geometria de Pasch. É a experienciação do espaço imerso na natureza que fornecem as noções primitivas.

Pasch foi um dos primeiros a publicar que as noções comuns: ponto, reta e plano eram mal postos[36]. Ele sabia que não admitiam definições, mas na forma que eram apresentados no texto original de Euclides não permitiam qualquer entendimento, de maneira clara, da parte de um leitor crítico. Por exemplo: dizer que um ponto é o que não tem parte, não explicita o que é um ponto, uma vez que não foi definido parte. Em seu texto chega a afirmar que os axiomas de Euclides não são verdades evidentes.

Giuseppe Peano em seu livro, *I principi di geometria logicamente esposti*, de 1889, aperfeiçoou o sistema de axiomas de Pasch, reduzindo o número de axiomas nele contidos. Peano mostra em sua obra que o problema da independência dos axiomas é bem posto e discorre sobre a questão.

No primeiro ano da última década do século XIX, Giuseppe Veronese publica "*Fondamenti di Geometria a piu dimensionali e a piu specie di unità rettelinee, sposa in forma elementare"*. Nela o autor apresenta os fundamentos da geometria fazendo uma distinção precisa entre as ciências lógicas e as ciências experimentais. Para Veronese, as ciências lógicas apresentam uma exatidão por serem coerentes internamente já as ciências experimentais estão sempre expostas ao controle da observação do mundo exterior. Além disso, Veronese insiste sobre o fato de que toda hipótese ou todo axioma que não estiver em contradição com uma proposição

[36] Aristóteles já tinha levantado tal questão e Peacock e Boole sustentavam que alguns conceitos deveriam manter-se indefinidos.

anterior pode ser admitida no sistema. A geometria para Veronese é multidimensional e a sua limitação a um espaço tridimensional é imposta por um axioma de caráter acidental ou contingente, o axioma das paralelas. Dá a geometria o pontapé inicial para a crise nos Fundamentos da Matemática?

2.1.4 – As questões que envolveram a geometria projetiva e o Programa de Erlangen proposto por Felix Klein.

Diversos autores afirmam que após o grande *boom* no início do século XIX, caracterizado pelo nascimento das geometrias não euclidianas, desponta a geometria projetiva. Acreditamos que tais autores querem dizer que muitos geômetras se dedicaram com *mais intensidade* ao estudo dos Fundamentos da Geometria, em especial da Geometria Projetiva, a partir do final da primeira metade do século XIX. Dizemos isto porque decerto que a Geometria Projetiva se caracteriza por acrescentar ao espaço euclidiano, uma região que contém pontos situados no infinito, mas este conceito, segundo Le Goff (2005), já era trabalhado desde o século XVII através da ciência da perspectiva. Além disso, o que não se sabe bem por muitos autores é que a emergência das geometrias não euclidianas só se tornou possível depois do desenvolvimento da Geometria Projetiva e que esta tem seus genes oriundos da conjunção da perspectiva, das necessidades práticas do dia a dia para as representações tridimensionais em espaços bidimensionais e da teoria das cônicas de Euclides e Apolônio de Perga.

> "Em resumo, a invenção da perspectiva central e suas consequencias geométricas possibilitaram o aparecimento e a assimilação de elementos propriamente infinitos na geometria euclidiana, além de fornecer uma moldura geométrica dentro da qual é possível visualizar diferentes sistemas de axiomas.
>
> A evolução das ideias relativas ao infinito geométrico passou pela questão da perspectiva. (...) Um momento crucial nesse desenvolvimento foi a invenção, na Renascença, da perspectiva linear."
>
> *"Da perspectiva ao infinito geométrico",* Jean Pierre Le Goff et al.,
> As diferentes faces do infinito, 2005, p.26

2.1.4.1 – De que se ocupa a geometria linear ou projetiva?

É o estudo das propriedades descritivas das figuras geométricas utilizando-se de elementos ideais no infinito, onde há uma simetria notável entre pontos e retas. Enquanto a geometria euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos, a geometria projetiva se ocupa do mundo "que vemos"[37]. Esta geometria foi chamada durante muitos anos de geometria linear, pois pode ser desenvolvida usando somente uma régua não graduada e por ter como base a perspectiva linear. Através dessa perspectiva é que podemos afirmar, no âmbito da geometria projetiva, que duas retas sempre se interceptam. A geometria projetiva é, em linhas gerais, um modelo para uma geometria bidimensional, sem retas paralelas.

---

[37] Quando nos encontramos em uma longa estrada cujos lados são assumidamente paralelos, temos a impressão de que eles se encontram "num ponto muito distante". Neste ponto, as duas retas que representam as guias da estrada, se encontram. Este ponto é chamado ponto de fuga. Se existe uma outra estrada em linha reta cortando a primeira, ao olharmos em direção desta outra, o fenômeno vai ocorrer novamente, agora com um ponto de fuga diferente. Este fenômeno é captado por uma fotografia ou uma pintura e nos sugere pensar que, a geometria euclidiana descreve um modelo de realidade não tão fiel *às nossas sensações*, como estamos acostumados a pensar.

A perspectiva linear[38] é também conhecida pelos matemáticos por perspectiva central[39] ou perspectiva cônica. Tal perspectiva consiste em projetar elementos do espaço sobre um plano P traçando linhas retilíneas imaginárias que vão do objeto O, representado por um ponto exterior a P. Cada ponto M do espaço tem por imagem um ponto m, dado pela intersecção, quando esta existe, da reta OM com o plano P. O ponto O representa o centro de projeção e corresponde, na vida prática, a um olho pontual, situado acima do plano do solo (plano geometral). A pirâmide (ou cone visual) é formada pelas semirretas que partem de O (chamadas de linhas visuais) e se apóiam sobre a moldura do quadro que é parte do plano de projeção P.

O plano onde se encontra o objeto (quadro) e o plano geometral tem como intersecção uma reta conhecida por *linha de terra*. A linha visual principal é perpendicular ao quadro e determina sobre ele um ponto F que estabelece a altura com a linha do horizonte e é chamado de ponto de fuga principal. A linha do

---

[38] Jean Pierre Le Goff nos informa que por meio da perspectiva linear, o espaço como extensão verdadeiramente infinita encontrou uma primeira representação nos desenhos pictórico ou técnico, antes mesmo de ser pensado de modo explicito: ele aparece indicado, as vezes, desenhado sobre o horizonte ou na maior parte dos casos, disfarçados por uma parede ou uma porta. Na perspectiva linear um conjunto de retas paralelas no espaço, recebe por projeção, no plano do quadro, um conjunto de retas *às vezes* paralelas (quando todas são paralelas ao próprio quadro), mas em geral concorrentes. Tomando um feixe de paralelas entre si e perpendiculares ao plano do quadro: as imagens desta reta formam, sobre o quadro, um conjunto de retas que se encontram em um ponto, o *ponto de fuga central*, assim definido por Leon Batista Alberti (1404-1472). Foram os pintores e arquitetos do período Renascentista (Fillipo Brunelleschi, Albercht Dürer, Johannes Werner, entre outros), o *Quattocento*, que inauguraram o uso convencional e geometrizado da perspectiva. Através da representação geométrica de um ponto de encontro para retas paralelas, os renascentistas deram o primeiro exemplo de representação visual de um infinito real. O ponto de fuga passa representar, um ponto em que a realidade se situa no infinito, onde as paralelas se encontram.

[39] Uma figura F em um plano α é dita uma *projeção central* de uma figura Ω contida em outro plano β se existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de F e os pontos de Ω, de modo que as retas ligando pontos correspondentes são concorrentes em um mesmo ponto *P* do espaço, denominado o de *centro da projeção.* É interessante notar que ao estudar figuras invariantes por esse tipo de projeção, não há distinção entre parábolas, elipses e hipérboles.

horizonte, paralela a linha de terra, passa pelo ponto de fuga central F. O plano que passa por O e é paralelo o quadro denomina-se *plano neutro*[40].

Esta perspectiva consegue representar o ponto de encontro das retas paralelas, no infinito. LeGoff (2005) nos afirma que “elementos no infinito foram, por muito tempo, vistos com desconfiança. Hoje em dia, sabe-se que uma parábola (curva aberta) pode tornar-se, em perspectiva, uma elipse (curva fechada): seus dois ramos infinitos encontram-se em um ponto no horizonte, sobre a reta horizontal que representa o infinito e é comum aos diversos planos horizontais. No quadro, portanto, esse ponto infinito situa-se a uma distância finita do observador”.

Embora amplamente utilizada desde a Renascença, as leis que determinavam as construções das projeções por perspectiva linear ainda não estavam muito bem definidas nem organizadas. Esta multiplicidade de representações visuais do infinito real conduz, no começo do século XVII, na França, uma revolução no campo conceitual da geometria, liderado por Gérard Désargues (1591-1661), matemático e engenheiro nascido na cidade de Lyon.

Désargues teoriza que “a perspectiva identifica a intersecção das retas e dos planos no quadro ao paralelismo dos correspondentes objetos representados. Este paralelismo aparece como intersecção no infinito e as retas paralelas nada mais são do que retas que se encontram no infinito”. Estas ideias estão contidas no livro *“Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan”* , que teve uma tiragem única de 50 exemplares, no ano de 1639.

---

[40] Um ponto N ou N´ num plano neutro não possui imagem n ou n´ situada a distância finita dentro do quadro. Em geometria projetiva, diz-se que a direção dos planos paralelos ao quadro é a reta situada no infinito do quadro.

As ideias de Désargues acerca da geometria somente foram estudadas porque Phillipe de La Hire (1640-1718) havia uma cópia manuscrita do texto original. O único exemplar original do *Brouillon* foi redescoberto no ano de 1864 e republicado em 1951 por René Taton, juntamente com a coletânea *L´ouevre Mathématiques de Désargues"*.

No *Brouillon*, Désargues rompe com a concepção finitista herdada dos gregos ao falar de linhas retas, superfícies planas e de sólidos geométricos. Estuda as involutas de seis pontos, dá um tratamento rigoroso quando fala de "distâncias no infinito" e por fim estuda as curvas cônicas apresentando-as em termos de propriedades que são invariantes por projeção.

Désargues pensa as cônicas como curvas geradas pela intersecção entre um cone de base circular e um plano. As secções obtidas, a saber: circunferência, elipse, hipérbole e a parábola suscitavam na época, renovado interesse devido aos estudos de órbitas planetárias elípticas, da construção de espelhos parabólicos e da classificação algébrica das curvas de segundo grau. Vejamos o comentário de LeGoff no texto *"Da perspectiva ao infinito geométrico".*

“É bem verdade que Kepler em sua obra *Óptica*, já havia observado que uma parábola não passa de uma elipse em que um dos focos tende ao infinito. A curva assim, abre-se indefinidamente, e se transforma por fim em uma hipérbole, no momento em que essa abertura fica limitada por duas retas assintóticas. Tal transformação, ainda segundo Kepler, acontecia ao variar o ângulo de inclinação do plano que intersecta um cone (ilimitado, mas com uma folha apenas). Essa concepção inovadora que reintroduzia a noção de movimento na definição das curvas, certamente influenciou Désargues. O geômetra lionês, porém, foi mais longe: ele superou o infinito potencial de Kepler e propôs trabalhar com o cone, diretamente como superfície infinita de duas folhas (uma de cada lado do vértice).

Além disso, ao considerar feixe de retas, Désargues foi conduzido à idéia de que estas nada mais são que circunferências de raio infinito: uma vez fixada essa circunferência, seu centro deveria ser concebido como um ponto infinitamente distante. Percebeu também que um cilindro de base circular pode ser considerado um cone com o vértice no infinito (um plano, ao cortar o cilindro, também produz cônicas: círculos e elipses).”

(De La perspective à l´infini géometrique, J.P. Le Goff, In Pour La Science, Ed. Française de Scientifique American, ed. Spécial Les Infinis, 2000, p.24-31)

Karl Georg Christian Von Staudt[41] (1798-1867), através de suas obras *Geometrie der Large*, de 1847 e *Beiträge zur Geometrie der Lage*, escrita entre os anos de 1856 e 1860, propôs algumas soluções aos problemas geométricos, porém de forma insipiente. Foi Pasch quem aperfeiçoou seus resultados, dando a eles um caráter mais acadêmico.

O matemático italiano, nascido em Livorno, Frederigo Enriques (1871-1946), publica em 1898 o livro "*Lezioni di geometria projettiva"*, onde explicita claramente os axiomas da geometria projetiva divididos em três grupos. Um fato curioso é que os grupos de axiomas constituídos por ele são caracterizados pelas relações que eles estabelecem e não para as figuras as quais eles se referem. O trabalho de Enriques é muito parecido com a proposta axiomática apresentada por Hilbert. Muitos leitores podem até questionar se Hilbert foi influenciado por Enriques, mas descartamos esta hipótese, uma vez que *as primeiras reflexões* sobre os fundamentos da geometria acenadas por Hilbert foram publicadas bem antes das obras de Enriques.

Modernamente, muitos autores apresentam o estudo da geometria projetiva a partir do estudo do plano projetivo. Alguns adotam como definição para o plano projetivo como sendo o par (**P**, **R**) quando valem os seguintes axiomas:

[41] Von Staudt foi um matemático alemão nascido em Rothenbourg (hoje, Rothenbourg ob der Tauber). Estudou na Universidade de Göttingen de 1818 a 1922, mas doutorou-se pela Universidade de Erlangen com uma tese que determinava a órbita de um cometa. Foi o primeiro matemático a desenvolver uma teoria puramente sintética sobre pontos imaginários, linhas e planos da geometria projetiva. Não se fala muito de Staudt, a não ser pesquisadores que se ocupam em estudar os fundamentos da geometria projetiva. Informações mais completas sobre Von Staudt, suas obras e resultados podem ser encontradas nos catálogos da Biblioteca Nacional Alemã (Deutschen Nationalbibliothek).

E_1 = Quaisquer que sejam os pontos A e B distintos, existe uma reta que os contém

E_2 = Quaisquer que sejam os pontos distintos A e B e as retas *a* e *b*, se A e B pertencem à *a* e à *b*, então a=b

$E_3 = \forall a \, \forall b \, (a \neq b \rightarrow \exists A \, (A \in a \cap b))$

$E_4 = \exists A_1 \, \exists A_2 \, \exists A_3 \, \exists A_4 \, \forall a \left(A_i \notin a \, V \, A_j \notin a \, V \, A_k \notin a \right) \wedge (1 \leq i,j,k \leq 4) \wedge (i \neq j \neq k \neq i)$

Notemos que neste modelo de geometria há a possibilidade de existência de quatro pontos[42], quatro a quatro não colineares.

Segundo Castrucci (1991), podemos também definir plano projetivo através de um par de conjuntos **P** e **R** e com uma relação $I \subset$ **P** $\times$ **R** (indica-se < **P**, **R**, I >), de modo que sejam válidos os seguintes axiomas:

E_1. $\forall A \, \forall B \, \exists a \, (A \neq B \rightarrow AIa \wedge BIb)$

E_2. $\forall A \, \forall B \, \forall a \, \forall b \, (A \neq B \wedge A,B \, Ia \wedge A,BIb \longrightarrow a = b)$

E_3. $\forall a \, \forall b \, (a \neq b \rightarrow \exists A \, (AIa \wedge AIb)$

E_4. $\exists A_1 \, \exists A_2 \, \exists A_3 \, \exists A_4 \, \forall a \left(\sim A_i \, Ia \vee \sim A_j \, Ia \sim A_k \, Ia\right) \wedge (1 \leq i,j,k \leq 4) \wedge (i \neq j \neq k \neq i))$.

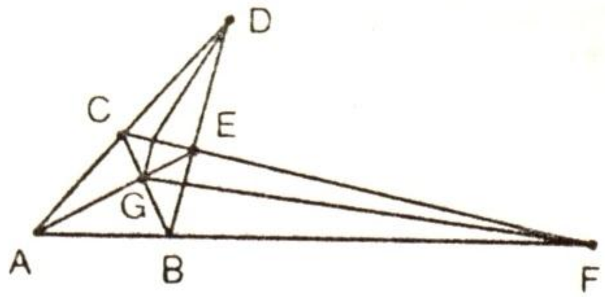
[42] O leitor pode estar achando estranho falar de pontos, retas ou até mesmo plano em um conjunto diferente dos habituais conjuntos de pontos retas e planos do plano euclidiano, mas entendendo as ideias de estrutura e de método axiomático mais adiante, estes conceitos esclarecer-se-ão.

São exemplos de modelos de planos projetivos:

1. Sejam **P** = {A, B, C, D, E, F, G} e R = {{A, D, C}, {B, D, E}, {C, E, B}, {D, F,C}, {E.G. D}, {F, A, E}, {G, B, F}}. Uma forma mais rápida e de fácil visualização é dispor os elementos do modelo proposto numa matriz como a matriz abaixo. Nela, os conjuntos dos elementos das colunas são as retas.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G \\ C & D & E & F & G & A & B \\ D & E & F & G & A & B & C \end{pmatrix}$$

É de imediata verificação (para matemáticos ou estudantes de Matemática ou logicistas) a validade dos axiomas que definem o plano projetivo acima descrito no modelo apresentado. Um gráfico dessa estrutura, tomando o plano euclidiano como o plano usual de representação, pode ser apresentado através do esboço abaixo:



2- Sejam P = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13} e R constituído pelos conjuntos de pontos das colunas da matriz apresentada abaixo. Os axiomas do plano projetivo são válidos neste modelo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3- Seja uma superfície esférica. Seja P o conjunto dos pares de pontos da superfície diametralmente opostos. Retas são as circunferências máximas. Este modelo também constitui um modelo onde se verificam os axiomas do plano projetivo.

Notemos que todos os modelos de planos projetivos apresentados são extremamente abstratos e independem da natureza de seus elementos. É sobre isso que iremos comentar: o conceito de *estrutura.*

2.1.4.2 – Uma nova interpretação da geometria proposta por Klein

Felix Klein propõe em 1872, na Universidade de Erlangen, um programa de pesquisa publicado no artigo com pouco mais de cem folhas, intitulado: “*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“* (Estudo comparado das diferentes pesquisas recentes em geometria) cujo objetivo principal era fazer um estudo comparativo das geometrias vigentes no século XIX a fim de encontrar pontos de convergências e divergências entre elas, e assim, poder distinguir claramente a geometria afim, a geometria projetiva, a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas a partir de uma visão global de todas elas e da maneira mais abstrata possivel. Esta proposta ousada e inovadora despertou muito interesse dos matemáticos da época, porém Klein explica que ele mesmo não esperava a atenção que fôra dada ao programa.

> "My Programme, had a but a limited circulation at first. With this I could be satisfied more easily, as the views developed in the Programme could not be expected at first to receive much attention. But now that the general development of Mathematics has taken, in the meanwhile, the direction corresponding precisely to these views, and particularly since *Lie* has begun the publication in extended form of this *Theorie der Transformationgruppen*, it seems proper to give a wider circulation to the expositions in my Programme."
>
> "*A comparative review of recent researchers in geometry.* Klein, F., p. 215-240, Bulletin of New York Mathematical Society, volume 2, 1892-1893. Trad. M.W. Haskell, UCLA)

A caracteristica deste programa é tratar a geometria sob os fundamentos da teoria dos invariantes e da teoria dos grupos. Sob esta óptica, a geometria euclidiana pode ser vista como o estudo dos invariantes em relação a um grupo de transformação (a simetria, por exemplo). Esta transformação garante que ao mover uma figura no plano, as distâncias entre os pontos que a compõem, permanecem as mesmas. A partir de um espaço, um dominio de ação e um grupo de transformação, Klein afirma ser possivel caracterizar qualquer geometria, uma vez que esta se ocupará das propriedades espaciais que não são alteradas pelas transformações do grupo proposto. Klein explica que tantas geometrias euclidiana e não euclidiana podem ser unificadas na moldura da teoria dos grupos. Em resumo, é a ação de um grupo G sobre um conjunto X. Um objeto geométrico é definido como o lugar dos pontos de X, invariante por um subgrupo isotrópico de G. A partir desta noção, é possivel encontrar uma classe de objetos invariantes pela ação induzida do grupo G, que forma um novo espaço sobre o qual G opera. Assim sendo, é possivel classificar os objetos em G através da operação definida ou tomar um subgrupo de G e comparar as geometrias obtidas. Como exemplo, podemos tomar o plano euclidiano

X e três grupos : o grupo afim, o grupo das isometrias e o grupo das semelhanças afins de X. Estes grupos operam transitivamente sobre X e definem três diferentes geometrias.

Para Klein, a diferença fundamental entre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas não é o fato do postulado das paralalelas ser admitido ou não, mas o grupo das transformações que decide quais propriedades invariantes serão estudadas.

A nova definição que Klein dá para a Geometria marca uma ruptura com os velhos modelos embasados em cálculos enfadonhos vindos das representações por coordenadas cartesianas reais. Há uma ruptura com a Análise, se assim podemos dizer, permitindo tratar a noção de *grupo operando sobre um conjunto* de uma forma ainda mais abstrata, como já se esperava.

Os trabalhos posteriores de Sophus Lie em álgebra ajudaram a consolidar as ideias e os ideais do programa de Klein. Desde 1870 Lie já havia ventilado a possibilidade de *grupificar* a geometria. Este pensamento domina a teoria dos números até os nossos dias.

Lie trabalhava com grupos cujas operações associadas a eles eram funções contínuas. Os grupos contínuos são muitos, e em geral, geométricos. Tais grupos são conhecidos modernamente por *Grupos de Lie.* Lie expande também seus resultados à teoria das equações diferenciais o que deu origem ao que hoje conhecemos por *Grupos de Lie solúveis.*

O programa de Erlangen consegue explicar as particularidades de cada geometria. Por exemplo, a geometria projetiva dá conta em caracterizar as seções cônicas (elipse, hipérbole e parábola), mas não dos circulos, ângulos e distâncias porque estes últimos não são invariantes pelas transformações projetivas. Segundo o programa, compreender a ligação entre os diferentes tipos de geometria, nos leva

aconsiderar um subgrupo do grupo das simetrias.

O programa de Klein faz uma correspondência entre as principais geometrias vigentes no século XIX e as ações dos grupos sobre elas.

Veja o quadro :

GEOMETRIA	ESPAÇO	GRUPO	INVARIANTES
Afim	Espaço afim IR^n	dos isomorfismos afins de IR^n	Subespaço afim
Euclidiana	Espaço euclidiano IR^n	das isometrias afins de IR^n	Subespaço afim, esferas
Esférica	Esfera euclidiana S^n	Grupo ortogonal	Grandes círculos
Projetiva	Espaços projetivos reais $P_n IR$	Grupo projetivo	Subespaço Projetivo
Eliptica	Espaço projetivo real P_nIR	Grupo projetivo ortogonal	Subespaços Projetivos

Uma outra ideia ousada e original de Klein consistia em mergulhar as geometrias na geometria projetiva, isto é, mostrar que era possivel contruir um caminho pelo qual todas as outras geometrias pudessem ser fundamentadas, construidas a partir da geometria projetiva. Como fazer? Fixando-se uma figura do espaço projetivo e em seguida, derivando-se uma segunda figura a partir dessa ou de uma figura associada a esta (o grupo de transformação projetiva que a deixa estável) e logo a seguir procurar os invariantes e determinar as propriedades que permitem classificá-los sob a ação do grupo de transformação projetiva definido.

Da maneira descrita, obtém-se as principais geometrias clássicas : a geometria afim, a euclidiana, a esférica, a elíptica, a hiperbólica e a geometria conforme. Como a geometria projetiva pode ser baseada na álgebra linear, todas estas geometrias clássicas admitem modelos baseados na álgebra linear, o que a torna uma ferramenta poderosa no estudo de tais geometrias. Com isso, esclarecemos nossa afirmativa no primeiro parágrafo da seção 2.1.4 do presente texto. Ou seja, entendemos que os fundamentos das geometrias não euclidianas tomam corpo e tornam-se objetos reais de estudos, por que a geometria projetiva se firmou e se desenvolveu e não pela pura busca frenética de uma prova para o fato de o quinto postulado de Euclides ser ou não um teorema.

Klein não vislumbrou nem dimensionou o impacto que seu programa causaria na Matemática de seu tempo e tão pouco nas Matemáticas futuras. Muito se conservou do traço original do programa de Erlangen durante oséculo XX, mas muitas adaptações foram feitas ao longo dos anos a partir da emergência de novos conceitos como o de variedades algébricas e o de variedades diferenciais.

O programa de Erlangen dá muitas contribuições a geometria diferencial, ao estudo dos grupos fundamentais de espaços topológicos, às variedades riemannianas e simpléticas, à teoria dos pseudogrupos de transformação e aos espaços tangentes.

Na Física o impacto do programa de Erlangen também foi muito grande, pois ajudou esclarecer as relações entre a Física Newtoniana e a Teoria da Relatividade a partir da teoria de grupos.

Acreditamos que Hilbert, através de suas viagens, cartas e longas conversas com companheiros matemáticos como Klein e Minkowski, ficou impregnado de novas ideias, tendo estas, norteado grande parte de seus trabalhos. Em contato com o programa de Klein, Hilbert e outros matemáticos têm a possibilidade de ver pela primeira vez a efetivação da ideia de uma possivel construção de uma Matemática única. Cremos também que muitos questionamentos feitos por ele, como o quarto problema de sua famosa lista de problemas[43] já eram vistos como membros de um caldeirão potencial que associa diferentes ramos do saber matemático.

[43] Construir todos os espaços métricos em que todas as linhas são geodésicas. Este problema é considerado vago demais para ser considerado como resolvido ou não.

> “Le 4ème problème provait aussi de la géométrie élementaire, mais les recherches ultérieures mirent en évidence son caractére vague. En étudiant le travail de son amie Minkowski, Il (Hilbert) avait remarqué qu´il existait une géométrie dans laquelle tous les axiomes euclidiens sont valides, mais ou le concept de distance est un peu affaibli et ou Il n´est plus vrai que, dans um triangle a deux angles égaux .De nouveaux, Hilbert expliquait pourquoi il ne s´agissait pas d´une curiosité fortuite, mais d´un fait fértile en implications non seulement pour la géométrie des surfaces mais aussi pour la théorie des nombres”.
>
> “*Le défi de Hilbert, um siècle de mathématiques.* Gray, J.Jay., Edition Dunod 2000, p. 64)

Um forte indício que direciona nosso pensamento a tais conclusões, é o fato de Hilbert ter obtido resultados muito significativos envolvendo as formas quadráticas, que são casos particulares das formas simétricas e bilineares. Os inúmeros trabalhos sobre este tema gera o décimo primero problema, que consiste em classificar as fórmas quadráticas a coeficientes nos anéis algébricos dos inteiros. A aritmética de formas quadráticas[44] se manifesta na ocasião em estudos sobre a representação de um dado número inteiro por uma dada forma quadrática.

O legado da teoria clássica dos números provenientes dos séculos XVIII e XIX permitiu aos matemáticos de conhecer muitas coisas sobre os inteiros que poderiam ser escritos sob a forma $2x^2 + -3xy + y^2$, por exemplo, se x=2 e y=1, o valor numérico da forma quadrática em questão é 3.

---

[44] Uma *k-forma* é um polinômio homogêneo de *n* variáveis, e de grau *k*, de modo que $n \leq k$. Ser homogêneo de grau *k* quer dizer que para todo número nao nulo λ vale a seguinte igualdade: $q(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^k q(x_1, x_2, ..., x_n)$. Quando n = 2, uma 2-forma é chamada de forma quadrática binária ou *forma binária.* Neste caso, o polinômio quadrático $ax^2 + bxy + cy^2$ define uma forma binária.

A generalização do resultado consiste em mostrar que o valor numérico da forma dada, segue a mesma natureza dos valores de x e de y. Se estes são inteiros então $2x^2 + -3xy + y^2$ tem valor numérico inteiro. Isto é, o valor numerico segue a natureza de seus coeficientes.

A nós cabe comentar que o pensar matematicamente para Hilbert , durante a sua vida acadêmica, esteve bem próximo ao que Klein propõe no programa de Erlangen... em essência, produzir sobre as bases do estruturalismo.

Capitulo III

David Hilbert e suas produções acadêmicas

"A álgebra é generosa; frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu."

D´Alembert

Após alguns anos de pesquisas e leituras, acreditamos que há um terno de palavras que pode descrever os trabalhos de Hilbert em todos os campos em que atuou: clareza, aprofundamento e rigor. *Clareza* por ter apresentado à comunidade acadêmica resultados de extrema relevância, muito bem redigidos e fundamentados em uma Matemática sólida, que Hilbert dominava perfeitamente. *Aprofundamento* por não se contentar somente com o problema proposto e sim com os possíveis desdobramentos que os resultados alcançados poderiam atingir, gerando sempre novos questionamentos, e consequentemente, novas verdades. Por fim, *rigor*, baseado na própria necessidade de construir suas matemáticas sob a égide de modelos estruturais, manipulando pequenas verdades, para a obtenção de outras verdades mais complexas, no sentido da compreensão matemática em si mesma, através do que conhecemos por provas formais (demonstrações).

Sua simplicidade, destreza e intimidade com a Matemática combinam com seu estado permanente de lucidez em *enxergar conexões múltiplas* com um dado assunto. Ao contrário de muitos matemáticos da época, Hilbert registrava seus resultados, procurava sempre uma melhor estética para suas demonstrações e não era conciso em suas escrituras e explicações. Lançava-se. Criava. Sugeria. Propunha. Solucionava o mesmo problema de variadas maneiras.

Hilbert influenciou muitos matemáticos de sua geração e os tantos outros que vieram depois dele. Ele foi um grande incentivador da arte de resolver problemas. Para Hilbert a Matemática precisava de problemas para sempre existir e para fortalecer os espíritos dos matemáticos. Para lograr êxito, sobretudo nas questões que não seriam resolvidas facilmente em seu tempo[45], Hilbert entendia que o matemático precisava entender a Matemática como um grande bloco. Para ele, a compreensão da unidade metodológica da Matemática se fazia necessária, para se "fazer Matemática". Isso não era somente uma crença, era resultado de sua experiência como matemático que nunca buscava algoritmos para resolver problemas, mas que os atacava em suas simplicidades originais.

> "A characteristic feature of Hilbert´s method is a peculiarly direct attack on problems, unfettered by algorithms. He always goes back to the questions in their original simplicity. (…) His strength, equally disdainful of the convulsion of the herculean efforts and of surprising tricks and ruses, is combined with an uncompromising purity."
>
> *("David Hilbert and his mathematical work",* Weyl H., p.617)

[45] Falamos aqui dos 23 problemas propostos por Hilbert, no Congresso de Paris de 1900.

A dedicação de Hilbert à Matemática é conhecida e reconhecida em todos os círculos atuais de matemáticos (em especial os especialistas em topologia e análise funcional) e de historiadores da Matemática. Enquanto estava se dedicando ao estudo da teoria dos números, a teoria dos números se tornava tudo para ele; mudando de interesse, o seu foco também mudava e igualmente dedicava-se a este novo assunto com muito afinco, obtendo resultados surpreendentemente bons e de relevância para a comunidade acadêmica e para toda Matemática. Acreditamos que este sim seja o fato sobre o qual o titulo de universalista, a ele conferido, se repousa, e não somente pela quantidade e variedade de suas produções acadêmicas. Estamos, neste momento, em defesa da qualidade indiscutível de seu trabalho como matemático (sobretudo em teoria dos invariantes, teoria dos números e estudo das equações integrais) e de sua postura honestíssima perante a própria Matemática.

3.1 – Das produções acadêmicas de destaque de David Hilbert

3.1.1 – Obras que merecem destaque

Hilbert contribui com três obras completas importantes para a literatura Matemática e que merecem especial destaque:

1- ***Gesammelle Abhandlungen***.

Ensaios Formais é uma coletânea de artigos publicados em três volumes por J. Springer, em Berlim, durante os anos de 1932 e 1935. A edição de 1935 contém o famoso ***Zalhbericht*.**[46]

Shokranian (2010) nos conta que no ano de 1896, durante o 1º encontro da Deutsche Mathematiker-Vereinigung[47] (Sociedade Matemática Alemã), Hilbert e Minkowski foram convidados para escrever um relatório completo sobre a situação da teoria dos números naquele tempo, num período máximo de dois anos. Hilbert ficou responsável por escrever sobre a teoria algébrica dos números e Minkowski sobre a teoria clássica dos números. Quase no final da data limite para entrega do trabalho, Minkowski nada tinha produzido, mas Hilbert já estava quase terminando a sua parte. Minkowski abandona o projeto e Hilbert o termina sozinho. *Zalhbericht*, como foi intitulado, ficou muito bem escrito. Não se mostrou como um simples relatório, mas como um livro completo sobre a situação da teoria dos números da época.

[46] Em "*David Hilbert and his mathematical work",* Hermann Weyl conta que foi estudar em Göttingen após receber do diretor de seu colégio uma carta de recomendação. Descreve que ficou extremamente contente ao ver anunciado que Hilbert daria um curso sobre *a noção de número e a quadratura do círculo*. Weyl diz que um novo mundo se descortinou a sua frente e que saiu da aula de Hilbert com o *Zahlbericht* debaixo dos braços e que o "devorou" durante todo o verão, compreendendo todo o texto, mesmo sem nenhum conhecimento prévio de teoria dos números, tão pouco da Teoria de Galois. Isto nos faz acreditar na clareza e na objetividade do texto de Hilbert.

[47] Desde 1870 havia uma vontade coletiva de criar a Sociedade Matemática Alemã, mas somente em 1890 a Deutsche Mathematiker-Vereinigung foi criada, tendo Georg Cantor, como o seu primeiro presidente. A criação desta sociedade refletiu uma tendência internacional de criar sociedades e jornais especializados em Matemática. Esta foi uma característica muito especial da escola matemática alemã: a criação de jornais especializados, como o *Jahrsbericht den Deutscen mathematiker Vereinigung*. A partir do ano de 1896 a Deutsche Mathematiker-Vereinigung, ficou responsável por organizar congressos internacionais de Matemática a cada quatro anos. O primeiro ocorreu em Zurich e o famoso 2º congresso de 1900, ocorreu em Paris. Em 1900, Hilbert já era um matemático de muito prestigio nos círculos acadêmicos da Matemática.

2- ***Grundlagen der Geometrie****.*

Publicado em 1899, *Fundamentos da Geometria*, faz uma apresentação rigorosa de uma axiomática adequada ao desenvolvimento lógico-dedutivo da geometria euclidiana e discute pontos importantes das novas geometrias emergentes. Desta obra, nos ocuparemos com mais detalhe futuramente, uma vez que ela é usada como um importante texto que fundamenta teoricamente a tese que defendemos neste trabalho.

3- Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.

Publicado em 1912, *Esboço de uma teoria geral das Equações Integrais,* foi reeditado em 1992 pela Cornell University Library, na série Library Digital Collections. Cremos que, por ocasião do 80º aniversário da obra.

Encontramos em Weyl (1944) a informação de que na coletânea de artigos de Hilbert há resultados importantes de B. L. Van der Waerden, H. Hasse, A. Schmidt, Paul Bernays e E. Hellinger e que tais resultados exemplificam os diferentes caminhos que as pesquisas de Hilbert ofereceram aos matemáticos da época[48].

[48] Indicamos a leitura do artigo de L. Bieberbach, *Ueber den Einsfluss Von Hilberts Pariser Vortag über Mathematische Probleme auf die Entwicklung der Mathematik in den letzen dreissig Jahren"*, p. 1101-1111. Die Naturwissenchaften, vol.18, 1930. Uma outra dica é o artigo dedicado aos trabalhos de Hilbert anteriores a 1922, na mesma revista, vol. 10, p.65-104.

3.1.2 – Obras em parceria

Hilbert escreve quatro livros com a parceria de Ackermann, Courant, Cohn-Vossen e Paul Bernays. Courant e Ackerman tiveram suas teses de doutoramento orientadas por Hilbert, nos respectivos anos de 1910 e 1925. Estes textos começam a apontar os novos interesses de Hilbert na Matemática.

1- *Grunzünge der theoretichen Logik*.

Fundamentos Teóricos da Lógica ou Princípios de Lógica Matemática foi publicado em 1928 com a coautoria de Whilhelm Ackermann. É conhecido por ser o primeiro texto elementar que apresenta de maneira clara o que hoje conhecemos por lógica de primeira ordem.

Os autores formalizaram o cálculo de primeira ordem e contribuíram diretamente para a compreensão dos trabalhos sobre aritmética de Peano, principalmente aqueles relativos à teoria axiomática dos conjuntos, resolução dos problemas de tomada de decisão (*Entscheidungsproblem)* e em problemas de álgebra relacional. A edição americana de 1950, tradução da 2ª edição alemã de 1938, é tida por especialistas como a melhor das edições do famoso e clássico texto de Hilbert.

2- ***Methoden der mathematischen Physik*.**

Métodos de Física Matemática é uma obra com cerca de mil páginas e foi publicada em parceria com Richard Courant em 1924, em dois volumes.

Este livro apresenta um tratamento global dos métodos existentes em física matemática da época, sendo o segundo tomo inteiramente dedicado às equações diferenciais parciais.

O texto traz o propedêutico do método de elementos finitos, no qual Courant se dedicou futuramente. A origem primária do texto é um conjunto de notas de aulas de Hilbert. A segunda edição do volume 1 foi publicada em 1931. Esta nova edição se difere da primeira por haver questionamentos sobre o cerne da física teórica da época: a teoria quântica.

O volume 2 foi reeditado em 1937 e as técnicas de Hilbert e Courant foram impactantes em direção à nova mecânica ondulatória. Houve uma terceira edição alemã em 1968 e a versão americana do volume 1, de 1956 foi revisada pessoalmente por Courant. Alunos e professores do Institut Courant de Matemática da New York University trabalharam arduamente na revisão do volume 2, o que garantiu rapidamente ao texto a reputação de *texto clássico* em física matemática.

3- *Anschauliche Geometrie*,

É um texto produzido em parceria com Stephan Cohn-Vossen. Foi publicado em 1932 por Julius Springer, em Berlin. A edição americana é a mais difundida, desde a sua tradução do alemão. Veja o que Hilbert fala a respeito da concepção de seu texto com Cohn-Vossen:

> ‘‘The basis for this book was a course of lectures, given four times weekly, called *Anschauliche Geometrie*, which I gave at Göttingen in the winter of 1920-21 and for which W. Rosemann worked out notes. In essence, the outline and contents of that course have been retained for this book, but S. Cohn-Vossen has re-worked many details, and has supplemented the material in quite a few places.”
>
> *(Geometry and Imagination,* Hilbert, D, and S. Cohn-Vossen
> Chelsea Publishing Co, NY, 1952)

A obra ficou mundialmente conhecida após a sua tradução para o inglês sob o titulo *Geometry and Imagination.*

No prefácio, Hilbert diz que um dos intuitos dos autores é apresentar a geometria de forma visual e intuitiva. Ele mostra a sua preocupação com o rumo que o estudo da geometria estava tomando e caracterizou logo no primeiro parágrafo da introdução, as duas grandes tendências que caracterizavam o ensino da geometria na época: os que valorizavam o abstracionismo e a dureza de um estudo da geometria pautado na lógica e os que valorizavam o intuicionismo, sem formalidades.

No corpo do texto há espaço para a geometria euclidiana, geometria diferencial, geometria riemaniana, geometria algébrica e topologia, entre outros assuntos correlatos. Quando necessário, para justificar alguns resultados, Hilbert recorre à teoria dos números. Para muitos matemáticos o livro é a síntese de uma explosão de ideias de Hilbert e permanece atual. Foi usado como texto em cursos de graduação em universidades americanas por mais de cinqüenta anos e como bibliografia oficial de muitas disciplinas em diversas universidades devido a sua abrangência, elegância e clareza textual. No Brasil, devido às grades menos flexíveis existentes nos cursos de graduação em Matemática, os estudantes tomam conhecimento da obra, na maioria das vezes, em cursos de pós graduação ou em disciplinas de ementa livre de cursos *strictu sensu*.

No nosso entender, o livro é de uma beleza impar, porém longe de ser uma leitura fácil. Muitas provas são apoiadas na habilidade de Hilbert em trabalhar com conjuntos de cardinalidade infinita. Nesta obra, Hilbert aplica a sua *estratégia* de fazer Matemática: dá um caráter formal ao intuicionismo, conduzindo ao leitor à compreensão do resultado apresentado, sem expô-lo à dureza da demonstração matemática em si, até porque muitas delas têm suas bases na análise real ou até mesmo na análise complexa. Há muitos encaminhamentos para a compreensão de esboços das demonstrações formais, aparecendo várias vezes, ao longo do texto, a frase *“we would use analysis to show...”*

“In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward abstraction seeks to crystallize the *logical* relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward *intuitive understanding* fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live *rapport* with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations.

As to geometry, in particular, the abstract tendency has here led to the magnificent systematic theories of Algebraic Geometry, of Riemannian Geometry, and of Topology; these theories make extensive use of abstract reasoning and symbolic calculation in the sense of algebra. Notwithstanding this, it is still as true today as it ever was that *intuitive* understanding plays a major role in geometry. And such concrete intuition is of great value not only for the research worker, but also for anyone who wishes to study and appreciate the results of research in geometry.

In this book, it is our purpose to give a presentation of geometry, as it stands today, in its visual, intuitive aspects. With the aid of visual imagination we can illuminate the manifold facts and problems of geometry, and beyond this, it is possible in many cases to depict the geometric outline of the methods of investigation and proof, without necessarily entering into the details connected with the strict definitions of concepts and with the actual calculations. For example, the proof of the fact that a sphere with a hole can always be bent - no matter how small the hole or of the fact that two different toroidal surfaces can not in general be wrapped onto each other conformally, can be treated in such a fashion that even one who does not wish to follow the details of the analytical arguments, may still gain an insight into how and why the proof works’’.

(Geometry and Imagination, Hilbert, D, and S. Cohn-Vossen
Chelsea Publishing Co, NY, 1952)

4- ***Grundlagen der Mathematik***.

Fundamentos da Matemática é originalmente composto por dois volumes. O volume 1 foi publicado em 1934 e o volume 2 em 1939, ambos em parceria de Paul Bernays. A obra descreve uma nova abordagem dada por Hilbert e Bernays acerca dos Fundamentos da Matemática, introduzindo a aritmética de segunda ordem. Nos estudos de lógica matemática, a aritmética de segunda ordem é uma extensão da lógica (aritmética) de primeira ordem, que é uma extensão da lógica proposicional. Dizemos que a lógica de segunda ordem é extensão da lógica de primeira ordem devido à adição de variáveis e quantificadores sobre variáveis ou conjuntos ou até mesmo funções. O símbolo desta lógica, introduzido por Hilbert é Z_2[49].

A lógica ou aritmética de segunda ordem é uma coleção de sistemas axiomáticos que formalizam o conjunto dos números naturais e seus subconjuntos. É uma alternativa à abordagem axiomática da teoria dos conjuntos para uma grande parte dos ramos da Matemática, mas não para toda a Matemática. Hilbert lança mão desta aritmética de segunda ordem para formalizar a Matemática devido à natureza do conjunto dos números reais IR, infinito e não enumerável. Através dela (da lógica de segunda ordem) é possível escrever *sistemas formais que trabalham com domínios finitos* (toda função injetora de domínio nele mesmo é sobrejetora) ou *domínios de cardinalidade enumerável* (possibilidade de construção de bijeções entre conjuntos infinitos com domínios em IN). A sintaxe da lógica de segunda ordem diz quais expressões são *fórmulas bem formadas.*

---

[49] Acreditamos que o símbolo venha da palavra *Zahl*, número em alemão, seguido do número 2, para referenciar à lógica de segunda ordem.

Nesta obra, Hilbert se ocupa com duas questões: a formalização das teorias matemáticas e a demonstração da não contradição (ou da consistência) das teorias formalizadas.

3.1.3 – Períodos e produções associadas

Apesar dos trabalhos de Hilbert perpassarem por diferentes ramos da Matemática e da Física-Matemática em diferentes momentos da história da Matemática, não há datas que marquem precisamente o início ou o fim de um período. O que aqui faremos é destacar, para *efeitos didáticos* e de *compreensão históriográfica da História da Matemática,* seis grandes blocos de produções acadêmicas mais intensas entre o fim do século XIX e o início do século XX, associando a eles datas que estão ligadas a um determinado evento, artigo publicado, livro lançado ou problema resolvido. Eis os períodos e as áreas de interesse de David Hilbert em cada um deles:

1º período: de 1885 a 1893 – Teoria dos Invariantes;

2º período: de 1893 a 1898 – Teoria dos Números Algébricos;

3º período: de 1898 a 1902 – Fundamentos da Geometria;

4º período: de 1902 a 1912 - Teoria das Equações Integrais e Análise Funcional;

5º período: de 1910 a 1922 - Física

6º período: de 1922 a 1930 – Fundamentos da Matemática.

Nosso trabalho possui um corte histórico que abrange os três primeiros periodos. Nos esforçaremos para que o leitor perceba no decorrer de nossos registros, a importância e a boa influência matemática que a produção de Hilbert, entre os anos de 1885 e 1898, contribuiu para embasar seus estudos relativos aos fundamentos da geometria.

A quase totalidade de fontes primárias sobre os trabalhos de Hilbert encontra-se na Alemanha. Segundo Toepell (1986), os manuscritos dos planos de aula de Hilbert ainda existem. Em 1967 todo o material que estava sob a guarda do Instituto de Matemática da Universidade de Göttingen foi doado para a Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek[50]. Todo o acervo foi catalogado e hoje os materiais nele contido são acessíveis à consulta pública. O catálogo da biblioteca da universidade conta com 741 ítens. Na rica coleção há cerca de 500 correspondências e mais de 50 manuscritos dos apontamentos das aulas. Há também notas de palestras e cursos ministrados por Hilbert em diversos períodos e em diversas universidades alemãs.

Queremos destacar a existência dos manuscritos que deram origem às famosas e importantes obras, como:

---

[50] Biblioteca Geral da Universidade de Göttingen, que pode ser acessada através do sítio http://www.sub.uni-goettingen.de/. Através deste sítio percebemos que há vários papers de pesquisadores da Matemática Pura, da Lógica e da História da Matemática revisando os estudos de Hilbert acerca de seu programa sobre a axiomática. Destacamos o texto: *The autonomy of mathematical knowledge: Hilbert's programre visited*, de Curtis Franks, publicado pela Cambridge University Press, em 2009. Foi através deste mesmo sitio que soubemos da existência da obra de Pierre Cassou-Noguès, *Hilbert*, Coleção Figures du Savoir, da editora francesa *Les belles lettres*. Esta obra nos auxiliou muito na compreensão do método axiomático e do programa formalista de Hilbert propriamente dito, sob a óptica da filosofia do infinito.

1- O curso de verão de 1891, *Notas de aula sobre geometria projetiva*;

2- O cuso iniciado no verão de 1894, *Notas sobre os fundamentos da geometria*;

3- O curso ministrado no feriado de páscoa de 1898, que deu origem ao texto *Über den Begriff des Unendlichen* e

4- O curso iniciado no inverno de 1898[51], extendendo-se até 1899, com o sugestivo nome de *Fundamentos da Geometria Euclidiana*.

Há ainda um extenso material de propriedade do professor Otto Volk, na cidade de Würzburg. Este material pemitiu ao professor Michaell-Markus Toepell, da Universidade de Leipzig demonstrar as origens da contribuição de Hilbert para o Festschrift como também reconstruir os passos omitidos por Hilbert em suas publicações acerca da aplicação do método axiomático na Matemática.

Muitas conclusões poderiam ser obtidas através das correspondências de Hilbert com os matemáticos da época, se tais cartas não estivessem tão espalhadas e muitas delas perdidas. Pensamos até que seja possível fazer uma reconstrução da gênese do conceito de *fundamentos* para a geometria Euclidiana segundo a contribuição formalista hilbertiana. Glymour and Herman (1978) afirmam que as correspondências mais preservadas são aquelas que foram trocadas com Einstein, pois estão guardadas com a coleção de papers e documentos históricos sobre a

[51] Este curso é de muita importância. Ele é o propedêutico do *Grudlagen der Geometrie.* A partir deste curso, o Von Schaper, assistente de Hilbert, prepara o texto *Elementos de Geometria Euclidiana* (março de 1899). Em junho do mesmo ano, Hilbert apresenta o seu *Grundlagen* no Festschrift.

Teoria da Relatividade. Toepell (1986) nos informa que durante a sua pesquisa para o seu doutoramento não encontrou com facilidade as correspondências de Hilbert com datas anteriores a 1900. Tal fato nos faz concluir que os historiadores da Matemática formulam hipóteses sobre as obras de Hilbert a partir dos desdobramentos e implicações históricas, filosóficas e matemáticas que estas obras produziram em um determinado corte histórico e não a partir da análise de materiais originais como as cartas.

Os principais correspondentes de Hilbert foram: Minkowski, Hurwitz, Lindemann e Klein. Dentre estes, Minkowski foi o matemático que mais se comunicou com Hilbert através de cartas. Há mais de cem correspondências de Minkowski endereçadas à Hilbert. Elas foram publicadas em 1973, sob o título *Hermann Minkowski Briefe an David Hilbert* , por L. Rudenberg e H. Zassenhaus[52], da Springer-Verlag.

Com Klein, Hilbert estabeleceu estreitos laços matemáticos e desenvolveu complexos estudos, assim como participou de longas discussões sobre geometria. Tais estudos foram publicados em 1985 com o título *Der Briefwechsel David Hilbert-Feliz Klein (1886-1918): Mit Anmerkungen herausgegeben von Günther frei Göttinggen,* por Vandenhoeck e Ruprecht.

As correspondências com Lindemann e Hurwitz estão no acervo da Universidade de Göttingen. São correspondências que ainda não foram publicadas

[52] Somente encontramos a edição em alemão. Em nossas pesquisas, não achamos qualquer menção sobre traduções para outras línguas, apesar de acreditarmos na existência, devido a importância do conteúdo.

na íntegra. Não temos ainda conhecimento de algum pesquisador que tenha se interessado em organizá-las para estudos.

Encontramos na obra de Gottlob Frege[53] intitulada *“On the foundations of geometry and formal theories of aritmetic”* vários trechos de cartas trocadas entre Frege, Hilbert e Korselt acerca da natureza da geometria. Esta série de correspondências é datada do início de 1903 e é entendida por muitos historiadores da matemática e da lógica como gênese de uma série de estudos sobre os fundamentos da Matemática. A série de artigos de Frege contidos no livro pode ser dividida em dois grupos: um datado de 1903, que constitui a apresentação pública do pensar de Frege sobre os escritos de Hilbert no Festschrift e o segundo, datado de 1906, que apresenta a réplica de Korselt, em defesa de Hilbert e de sua obra.

Acreditamos que a leitura do texto de Frege torna-se mais significativo, se acompanhada de uma leitura minuciosa do artigo *On formal theories of arithmetic*, também de sua autoria. Os textos se completam e o segundo esclarece muito o pensamento do autor sobre o assunto. Há quem ainda sugira o texto de Husserl, *Philosophy of Arithmetic*, que a nosso ver é denso e caminha mais pelos aspectos da lógica propriamente ditos do que pelos fundamentos da Matemática, como esperávamos.

Ainda na obra de Frege que citamos, encontramos na parte I um texto muito interessante. É uma carta de Frege para Liebmann escrita aos 25 de agosto de

[53] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 –1925) foi um matemático alemão que tornou-se filósofo e lógicista. Fundador da lógica moderna, Frege é tido por muitos como o maior contribuinte para os fundamentos da Matemática. Como filósofo escreveu trabalhos em filosofia da linguagem e filosofia da Matemática, os quais conferiram-no o título de pai da filosofia analítica. Giuseppe Peano e Bertrand Russell foram os principais divulgadores de sua obra.

1900, em Bad Steben. Hoje, além da importância histórica deste documento para o estudo dos fundamentos da Matemática, esta carta nos mostra também a diversidade e complexidade filosófica dos tópicos abordados em seu conteúdo. Nela há uma exposição informal feita por Frege acerca das relações entre as lógicas de primeira e segunda ordem para justificar o que, no seu ponto de vista, seriam os equivocos cometidos por Hilbert no seu Festschrift, o *Grundlagen der Geometrie*. O contato com este texto, nos ventilou a possibilidade de Hilbert ter caminhando em direção a um terreno minado ao dedicar seus esforços na tentativa de mostrar que a Matemática, como um todo, não admitia contradições internas. Neste ponto da História da Matemática, acreditamos fortemente que, por alguma razão, faltou a Hilbert uma compreesão de *caráter filosófico* acerca da *completude* e esta falta de compreensão passa pelo fato de não ter lançado mão, com segurança, da metamatemática. Esta afirmativa, extremamente forte, nos ocorreu assim que conhecemos as objeções de Frege ao programa de Hilbert, escritas por Eike-Henner W. Klunge, na introdução da edição inglesa de 1971 de *On the foundations of geometry and formal theories of arithmetic*, de Frege. As objeções são classificadas em dois grupos: as objeções sistemáticas (contra a natureza e a construção do sistema propriamente dito) e as objeções metodológicas (sobre a prova da independência dos axiomas).

3.2 – A dedicação de Hilbert à Matemática

Faremos uma breve descrição das pesquisas de David Hilbert em cada um dos periodos citados acima, pois algumas argumenções futuras estarão embasadas na forma em que tais assuntos foram desenvolvidos por ele. Poderemos perceber nas linhas futuras que Hilbert acreditava realmente que um bom matemático conjectura, propõe e resolve problemas e o que ele quis dizer que são os problemas que fazem a Matemática ser mais dinâmica e interessante.

3.2.1 – 1º Período: A Teoria dos Invariantes Algébricos e o Problema de Gordan.

Durante seus primeiros anos como professor, Hilbert se educava para não repetir cursos e mostrava aos alunos a importância de assistir um número diversificado de disciplinas em Matemática a fim de que eles aprimorassem suas formações e aumentassem seus campos de atuação como matemáticos. Era comum encontrar nas universidades alemãs, alunos que estavam cursando uma determinada disciplina mais de uma vez, com diferentes professores.

Durante alguns períodos do inicio de sua carreira, Hilbert lecionou diversos tópicos sobre determinantes, hidrodinâmica, harmônicos esféricos (funções harmônicas que representam a variação espacial de um conjunto ortogonal de equações de Laplace, quando a solução é expressa em coordenadas esféricas) e principalmente Teoria dos Invariantes. Apesar da grande diversidade de assuntos ministrados por Hilbert em suas aulas, era em Teoria dos Invariantes algébricos, a sua significativa produção acadêmica.

O que é um invariante algébrico? Há uma definição matemática, porém simples? Vejamos:

Consideremos uma equação E, definida por um polinômio P à *n* variáveis, homogêneo, de grau *m*, com coeficientes complexos. Os termos de P são da forma $a_{i,j,\ldots}x_1^i.x_2^j. \ldots$ de modo que i + j + ... = m e $a_{i,j,\ldots}$ seja um número complexo. Seja a equação E escrita como $\Sigma\ a_{i,j,\ldots}x_1^i.x_2^j. \ldots=0$. Para toda transformação linear U notaremos $(x_1´,x_2´,\ldots) = U\ (x_1,x_2,\ldots)$ e $P´(x) = P(U.x) = \Sigma\ a´_{i,j,\ldots}x_1^i.x_2^j$.

Um invariante é um polinômio I em $a_{i,j,\ldots}$ tal que, por qualquer transformação linear U, de determinante 1, temos $I\ (a´_{i,j,\ldots}) = I\ (a_{i,j,\ldots})$.

Paul Gordan, vinte e cinco anos mais velho que Hilbert e professor da Universidade de Erlangen, foi o matemático que mais se dedicou ao estudo dos invariantes algébricos no fim do secúlo XIX. Sendo completamente apaixonado pelo tema e, consequentemente com inúmeras publicações, Gordan era conhecido nos circuitos acadêmicos como *O Rei dos Invariantes.* Durante os primeiros anos, Gordan dedicou-se a encontrar uma lei que governasse de uma maneira bem abrangente, a estrutura dos invariantes. Anos mais tarde Gordan se ocupou com a classificação dos invariantes estudados e percebeu que um esboço contendo cálculos com invariantes algébricos poderia conter de quinze a vinte páginas de fórmulas. O problema de Gordan sobre os invariantes algébricos consiste em reconhecer ou construir identidades polinomiais imutáveis via mudanças de variáveis lineares. Por exemplo, podemos analisar a equação $Ax^2+2Bxy+Cy^2 = 1$. Podemos interpretar esta curva como uma curva do plano. Esta mesma curva “girada” em torno da origem, nos mostra uma nova equação $A'x^2+2B'xy+C'y^2 = 1$. Esta equação tem a mesma forma da equação original dada, porém com coeficientes diferentes. O que é interessante neste resultado é que os determinantes $B^2 – AC$ e $B´^2 – A´C´$ das duas curvas, respectivamente, são iguais. Tal fato nos leva a conclusão de que o determinante não se altera por rotações com centro na origem ou por qualquer outra transformação linear. É um invariante algébrico. O problema conhecido como “O problema de Gordon” consistia em mostrar que todos os invariantes podiam ser expressos como combinações de um conjunto finito de invariantes. Gordan resolveu o problema para duas variáveis e parcialmente para três, elaborando um método muito extenso e trabalhoso.

Hilbert mostra que estes invariantes algébricos possuem uma base finita composta pelos polinômios $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_p$ e que todo invariante se escreve como um polinômio de $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_p$.

O problema clássico é um caso especial do problema geral da teoria dos invariantes, em que as transformações lineares de determinante 1 que pertencem a um grupo arbitrário Γ e que são levadas a uma certa transformação linear é uma representação deste grupo Γ.

Os estudos anteriores ao virtuoso trabalho de Hilbert provaram o resultado somente para casos específicos e não de maneira completa e geral como a demonstração de Hilbert. Algebristas já haviam chegado a dois teoremas importantes: “que os invariantes possuiam uma base finita de integração” e “que os invariantes possuiam uma base infinita composta por ideais”, mas ambos resultados, com restrições. Weyl[54] (1944) diz que é grande a probabilidade de Hilbert ter provado primeiramente, de maneira mais completa e geral o segundo teorema, e comenta, a partir desta observação, a construção do resultado obtido por Hilbert. Em

[54] Definição de invariante algébrico, por Hermann Weyl no artigo *Hilbert and his mathematical work:* “Let J be one polinômio tal que $J=(x_1, \ldots, x_n)$ depending on the coeficients $x_1, \ldots, x_n$ o fone of several ground forms of given numbers of arguments $\eta_1, \ldots, \eta_g$. Any linear substitution *s* of determinant 1 of the *g* arguments induces a certain linear transformation *U(s)* of the variable coefficients $x_1, \ldots, x_n$, x

seu artigo, Weyl elucida todos os desdobramentos algébricos do resultado alcançados por Hilbert.

Queremos destacar que o resultado provado por Hilbert, conhecido por *Hilbert Nullstellensatz* é a base para a Teoria Algébrica das Variedades[55]. O *Nullstellensatz* de Hilbert é conhecido, em português, por "Teorema dos Zeros de Hilbert" . É um teorema[56] da geometria algébrica que relaciona variedades e ideais em anéis de polinômios sobre corpos algebricamente fechados.

3.2.3 – 2º período: A teoria dos números algébricos

Hilbert dedica o período entre 1893 a 1897 ao estudo a teoria dos números, sendo artigo *"Die Theorie der algebraischen Zahlkörpen"*, de 1896 (com prefácio de 1987) o seu trabalho de real impacto. Esta teoria teve início com Kummer[57], por volta

[55] Em Matemática, mais especificamente em geometria e topologia, uma variedade é um espaço que em escala tão pequena quanto se queira, "comporta-se como" o espaço euclidiano com uma dimensão específica, chamada dimensão da variedade. Assim, uma linha ou um círculo são elementos de uma variedade de dimensão 1, um plano de dimensão 2 e assim por diante. Todo ponto de uma variedade n-dimensional tem a vizinhança homeomórfica ao IR^n.

[56] Enunciado do Teorema dos Zeros de Hilbert: "Seja K um corpo algebricamente fechado (como o dos números complexos), considera-se o anel de polinômios $K[X_1, X_2,..., X_n]$ e seja I um ideal neste anel. A variedade afim $V(I)$ definida por este ideal consiste de todas as n-tuplas $x = (x_1,..., x_n)$ em K^n tal que $f(x) = 0$ para todo f en I. O teorema dos zeros de Hilbert nos diz que se p é um polinômio em $k[X_1, X_2,... , X_n]$ que se anula na variedade $V(I)$, i.e. $p(x) = 0$ para todo x em $V(I)$, então existe um número natural r tal que p^r está em I.

Um corolário imediato é o "teorema fraco dos zeros": se I é um ideal próprio em $K[X_1,X_2,... , X_n]$, então $V(I)$ não pode ser vazio, isto é, existe um zero comum para todos os polinômios do ideal. Esta é a razão para o nome do teorema; que é facilmente demonstrável nesta forma "fraca". Notar que ao assumir que K seja algebricamente fechado é essencial aqui: o ideal próprio $(X^2 + 1)$ em $R[X]$ não tem um zero comum.

[57] Kummer tentou resolver durante algum tempo a equação de Fermat, que permaneceu esquecida por alguns anos. Algumas tentativas isoladas de resolução ocorreram, como o caso de Dirichlet, que apresentou à comunidade que, para acadêmica que para n=14, a equação não apresenta solução. Em suas diversas tentativas, Kummer resolve estudar a equação de Fermat a partir da decomposição do polinômio $x^n + y^n$ como fatores lineares e sua ideia serviu de base para a resolução do último teorema de Fermat, em nossos dias. Para o historiador da Matemática H. M. Edwards a inspiração de

de 1840 e depois aprimorada por Kronecker e Dedekind, a partir dos estudos envolvendo a teoria dos divisores ideais, entre os anos de 1860 e1880. Foram os resultados destes dois matemáticos que chamaram atenção de Hilbert, já que na época, a teoria dos invariantes era também utilizada para estudar determinados conjuntos contidos no corpo dos números algébricos. Hilbert também teve interesse em estudar os trabalhos destes dois autores por reconhecer que os resultados por eles alcançados, além de serem extremamente importantes para o corpo da teoria dos números, foram construídos através de métodos completamente diferentes.

Naquele momento Hilbert percebeu que a teoria dos corpos algébricos precisava ter uma unidade e que um dos objetivos do *Zahlbericht,* seria unificar esta teoria.

Ao escrever o *Zahlbericht,* Hilbert faz uma apresentação da teoria dos corpos algébricos cheia de rigor e ao mesmo tempo sintética, procura descrever e desenvolver os tópicos mais relevantes, assim como os métodos mais diretos contidos na teoria. De acordo com Shokranian (2010) “pode-se dizer que, por pelo menos 70 anos, este livro foi um guia para mostrar o caminho de estudos sobre a teoria algébrica dos números, e nele ainda dá para ler e aprender os pensamentos daquela época”.

Kummer para trabalhar com a teoria dos números não tinha sido a equação de Fermat, mas a tentativa de generalizar o trabalho de Gauss sobre reciprocidades quadráticas. Segundo o historiador, somente a partir do momento em que Kummer descobriu uma relação entre as reciprocidades quadráticas e o teorema de Fermat é que seus trabalhos convergiram para o assunto. A lei de Gauss de reciprocidade quadrática afirma que se p e q são primos há uma relação direta entre p ser quadrado módulo q e q ser quadrado módulo p. Este teorema fornece um rápido algoritmo para determinar se a é quadrado módulo p onde a é um inteiro e p um número primo. Há outros resultados de Kummer muito importantes que contribuíram para o desenvolvimento da teoria dos números como a Superficie de Kummer (no estudo de variedades abelianas) e a criação de corpos ciclotômicos. Kummer trabalha no assunto com o francês Liouville que já havia descoberto que certos inteiros ciclotômicos podiam ser fatorados de várias maneiras, consequentemente, invalidado os trabalhos de cauchy e Lamé.

Os resultados e a metodologia na abordagem de Hilbert ao pesquisar números algébricos é tão singular que para muitos historiadores da Matemática, o texto "*Die Theorie der algebraischen Zahlkörpen" (*A teoria dos corpos algébricos*)* é aquele que aponta a nova direção do novo pensar da Matemática do século XX. Emmy Noether e seus seguidores são exemplos de matemáticos que desenvolveram a proposta inicial de Hilbert durante os anos de 1920 com maestria, perfeita compreensão e ampla clareza.

Hilbert também teve a tarefa de escrever provas mais simplificadas sobre a transcendência de π e do número de Euler. Este assunto aproximou bastante Hilbert de outros matemáticos alemães do século XIX por ser um assunto sobre o qual muitos deles se dedicavam.

De Gauss a Kummer e Kronecker, passando por Dirichlet e Dedekind, e posteriormente por Hilbert e Minkowski, a teoria dos números era definitivamente uma especialidade dos alemães, em especial os da antiga região da Prússia. O estudo da teoria dos números, desde a publicação em 1801 de *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, era amplamente difundido nos círculos universitários; e os matemáticos o relacionavam amplamente com outros ramos da Matemática (como a geometria) e com a Física. Hilbert porém, era o matemático que possuia a maior facilidade em "lidar" com textos antigos, sempre fazendo uma releitura do texto original e reescrevendo os resultados à sua maneira. Muitas vezes, como já dissemos em outro momento, completando ou generalizando teoremas.

Em relação ao período que estamos descrevendo já haviamos comentado que a palavra *aritmetização* vigorava. Havia um forte grupo que trabalhava na tentativa de reduzir os conceitos fundamentais da análise matemática aos da aritmética. Neste momento histórico, Hilbert pontuou que a aritmética estava presente na geometria quando se fazia o estudo moderno das geometrias não euclidianas e que através da rigorosa estrutura lógica da aritmética seria possivel mostrar a presença incontestável dos números nos diferentes processos de geometrização.

Esta abordagem adotada por Hilbert tem um carater conceitual e filosófico muito importantes para a compreensão da geometria organizada sobre bases sólidas, bastava então mostrar que havia uma correspondência dois à dois entre a geometria e a aritmética.

> “Néanmoins, la contribution essentielle de Hilbert fut de résumer le sujet de telle sorte que la connaissance de son histoire et la familiarité avec les textes anciens n´était plus indispensables aux lecteurs novices . Il proceda de differentes façons, dont une fut d´introduire des idées de laThéorie de Galois (...) Hilbert l´invisageait comme príncipe organisateur d´une théorie des nombres algébriques (...). La forme conceptuelle du sujet devenait ainsi plus Claire et, de plus , la liaisons entre la théorie des nombres et la cyclotomie étaient élucidées. C´était, en fait, un modele des bienfaits de la porsuite d´une explication profonde qui couronna un siècle de tentatives d´élargissement de la définition de l´entier, au point que le concept general d´entier algébrique devenait primordial et que les entiers ordinaires eurent besoin d´un adjectif qualificatif (les “entiers rationnels”, expression un peu gauche).
>
> (...) Il nota qu´un certain nombre de problèmes en théorie des nombres dépendaient de la thérie des fonctions complexes et que la théorie des fonctions algébriques et des corps des nombres algébriques se rejoignaient en de nombreux points.”
>
> *Le défi de Hilbert.Un siècle de mathématiques.* Gray, J.J, P.48, Éd. Dunod., 2000.)

3.2.4 – 3º período: Fundamentos da Geometria

> “There could not have been a more complete break than the one dividing Hilbert´s last paper on the theory of number fields from his classical book, *Grundlagen der Geometrie*, published in 1899. It is only forerunner is a note of the year 1895 on the straight line as the shortest way. But O. Blumenthal records that as early as 1891 Hilbert, discussing a paper on the role of Desargues´ and Pappus´ theorem read by H. Weiner at a mathematical meeting, made a remark which contains the axiomatic standpoint in a nutshell: “It must be possible to replace the words *point, lne, plane* by *table, chair, mug.”*
>
> *(David Hilbert and his mathematical work.*Weyl, H. p.635)

Este periodo é o mais polêmico e o que gerou a maior quantidade de questionamentos a cerca do futro da vida profissional e das escolhas matemáticas de Hilbert. Muitas perguntas de origem filosóficas também foram estabelecidas na tentativa de explicar, ou mesmo compreender, porque Hilbert deixa de se dedicar à Matemática das Teorias dos Invariantes e dos Números, e passa a se dedicar aos Fundamentos da Matemática, em especial, aos Fundamentos da Geometria.

No ano de 1898, Hilbert decide dar um curso de geometria euclidiana na Universidade de Göttingen, intitulado Fundamentos da Geometria. Neste curso Hilbert consegue colocar em prática o *método axiomático* da geometria moderna: Isola as proposições primeiras e a partir de um conjunto de verdades admitidas sem a necessidade da prova, os axiomas, encontra premissas de valor lógivo verdadeiro, decorrentes de deduções lógicas do tipo: *“ se a→b e b→c entâo a→c”.* O método axiomático usado por Hilbert permite fazer uma abstração do conteúdo do que se está analisando ou mesmo abstrair a natureza dos objetos da teoria em questão.

Os gregos conceberam a Geometria como uma ciência dedutiva em que alguns poucos axiomas foram estabelecidos. Tanto Euclides quanto Hilbert foram dedicados à geometria para suas épocas e atingiram seus objetivos. Contudo, a lista de Euclides estava longe de ser uma lista completa. Já a lista de Hilbert, além de completar a de Euclides, não apresentava *gaps* em suas deduções. Enquanto Euclides faz descrições de objetos espaciais básicos e estabelecia relações com os axiomas, Hilbert as obtinha quase por tentativas, apenas buscando-as nos próprios axiomas.

O que nos chama atenção em particular, e o que gostariamos de partilhar é que: antes do *insight* que nos permitiu entender que usar o método axiomático significa não errar quando se tem dominio da técnica, há necessidade de sentir e compreender que diferentes teorias da Matemática quando centradas no método axiomático estão concentradas nos enunciados de seus axiomas. Seus axiomas contém as noções mais primitivas e claras que a teoria possui.

Ao usar o método axiomático para fundamentar a geometria, Hilbert aplicou dois conceitos importantes: a abstração do conteúdo usual e a abstração da suposta natureza do objeto matemático. Assim, conseguiu demonstrar teoremas usando somente as "ferramentas básicas" da teoria. Desta maneira foi possível deduzir verdades e fazer pontuações acerca da teoria sobre a qual as verdades do corpo teórico repousavam.

Os axiomas, por terem as mesmas funções de premissas nas demonstrações matemáticas podem, segundo Hilbert, ser vistos como uma espécie de conjunto de definições disfarsadas de conceitos, pois fixam as propriedades existentes entre os objetos. A escolha das proposições que serão consideradas premissas deve estar atenta à necessidade de finitude do elo dedutivo (deve ser provada em um número finito de passos, com base nas premissas) e evitar a circularidade (sem usar afirmações já empregadas em passos anteriores). Esta peculiaridade de demonstrar segundo o método axiomático justifica a necessidade de criação de um pequeno número de afirmações, tidas como verdadeiras, sem a necessidade de justificá-las. É por isso que encontramos no método axiomático, proposições que se justificam perante um processo lógico-dedutivo e outras proposições sem a necessidade desta justificativa, os axiomas (ou postulados).

Comparando um corpo de axiomas com a álgebra, os axiomas determinam uma estrutura análoga às estruturas algébricas, porém com uma outra conotação filosófica. A diferença básica segundo esta conotação é que uma estrutura algébrica, como já mostrada anteriormente, se caracteriza por *explicitar a estrutura de campo de objetos* supostamente conhecidos: os números ou os invariantes, por exemplo. Já o método axiomático procura *definir um campo de atuação do objeto*, dado a estrutura sobre a qual ele reside. O objetivo da abstração no método axiomático é recriar um campo de objetos dados e não somente explicitá-lo. É por isso que partilhamos da ideia de que o método axiomático radicaliza o método abstrato da lógica e mesmo da álgebra, completando-os.

Ao conceituar um modelo chamado Plano de Hilbert de acordo como o método axiomático, Hilbert conceitua termos indefinidos, cria relações indefinidas e analisa as proposições que derivam de cada axioma ou de cada grupo de axiomas que tenham sido incorporados ao modelo. Hilbert estabelece um modelo algébrico para este sistema e interpreta o conjunto de axiomas segundo o modelo. A novidade para a Matemática foi a dedução lógica de que propriedades satisfeitas no Plano de Hilbert, também eram válidas em um modelo algébrico. A aplicação do método axiomático em uma teoria matemática deu valor de verdade à teoria pelo fato da Matemática não ser uma ciência oriunda do experimento. Assim, o método axiomático *justifica* as afirmações matemáticas desde que estas sejam *demonstradas* de maneira dedutiva.

Estudiosos da História da Matemática do final do século XIX que fizerem uma leitura linear e cronológica da produção matemática de Hilbert pode acreditar que enquanto preparava o *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert rompeu com a questão dos fundamentos e retorna à análise para resolver o *Problema de Dirichlet*[58].

---

[58] Em Matemática, um problema de Dirichlet é o problema de encontar-se uma função que resolva uma equação diferencial parcial específica, no interior de uma região específica que toma valores prescritos na fronteira desta região. O problema de Dirichlet pode ser resolvido por muitas EDPs, embora originalmente ele era representado por uma equação de Laplace. Nesse caso, o problema pode ser apresentado como segue:

> Dada uma função *f* que tem valores em todos os lugares no contorno de uma região do R^n, existe uma única função contínua *u* diferenciável continuamente duas vezes no interior e contínua no contorno, tal que *u* é harmônica no interior e *u* = *f* no contorno?

Esta exigência é chamada de condição de contorno de Dirichlet. A questão principal é provar a existência de uma solução; a singularidade pode ser provada usando-se o princípio do máximo. A questão afirma que dado uma curva fechda no espaço, existe uma superfície de menor energia que a recobre, pois toda superfície envolvida pela curva adota uma configuração que exige o mínimo de energia. Mais precisamente, dado umafunção continua sobre o bordo, exste uma função harmônica definida sobre toda a superficie e igual a função dada sobre o bordo.

O problema de Dirichlet é nomeado em homenagem a Johann Peter GustavLejeune Dirichlet (1805-1859), que propôs uma solução para um método variacional que tornou-se conhecido como princípio de Dirichlet. A existência de uma única solução é muito plausível pelo 'argumento físico': qualquer distribuição de carga no contorno deveria, pelas leis da eletrostática, determinar um potencial elétrico como solução. Entretanto, Weierstrass encontrou uma falha no argumento de Dirichlet, e uma rigorosa prova de existência foi encontrada somente em 1900 por Hilbert. Ocorre que a existência de uma solução depende da suavidade sufciente do contorno e de dados prescritos bem definidos.

Queremos explicar aqui que é uma ruptura aparente, pois sem sombra de dúvidas, Hilbert queria aplicar o método axiomático dedutivo que usava na geometria, na análise matemática. Assim, aplicar o método axiomático na análise matemática significava para Hilbert apresentá-la ao meio acadêmico como um campo do conhecimento matemático extremamente rigoroso, como sempre desejou Weierstrass. O caminho pensado por Hilbert foi o de associar cada número real a um ponto da reta do plano euclidiano, desta maneira, a tarefa de axiomatizar a Geometria poderia ter sido reduzida ao fato de axiomatizar a teoria dos números reais. Esta última tarefa não seria fácil, pois ao axiomatizar a análise, assuntos como a convergência de séries, que passa pela teoria das funções, e que por sua vez tem a sua teoria calcada nos números reais requereria a inclusão de axiomas suplementares.

O interesse de Hilbert pela geometria não foi repentino. Ele já havia trabalhado algumas questões sobre geometria projetiva em Königsberg, porém achava que não tinha muito a dizer sobre o tema. O curso não teve grande procura. Chegou a lecionar para três alunos (sendo um deles o diretor da Escola Real de Artes da Alemanha). Durante o curso, Hilbert fez questão de mostrar que a geometria projetiva poderia ser vista de duas formas: uma sob o olhar da *álgebra* ao estudar as curvas definidas por equações polinomiais e outra muito parecida com as argumentações contidas na *apresentação axiomá*tica de Euclides, conhecida por *geometria sintética*. Este segundo olhar para a geometria projetiva nos fez perceber que ela se desenvolve em blocos como a geometria de Euclides (estudo de retas, dos triângulos, quadriláteros, círculos, etc) e pode ser entendida como a mais fundamental das geometrias. Por quê? Ora, se toda geometria consiste em um espaço e possui um grupo de transformação associado a ela e segundo Klein, a geometria projetiva é aquela que possui o maior dos grupos de transformação, então ela é a mais fundamental dentre todas as geometrias por conter os grupos de transformação das outras geometrias. Além disso, suas bases estão sobre o menor número de premissas iniciais. As outras geometrias são obtidas a partir de junções de hipóteses suplementares às premissas iniciais da geometria projetiva. Este raciocínio nos leva a conclusão de que as junções de hipóteses geram restrições sobre o grupo de transformação sobre o qual se define as outras geometrias. Assim, quanto maior o número de hipóteses para fundamentar uma geometria, “menor” é a atuação do grupo de transformação sobre esta geometria. Esta é uma questão delicada e complexa que pode ser entendida através de reflexões da Filosofia da Matemática, porém dificílima de ser provada. E ainda é objeto de estudos e de reflexões de diversos matemáticos e filósofos da matemática.

Segundo Gray (2004), Hilbert foi um dos matemáticos que percebeu rapidamente que os próprios especialistas da geometria projetiva[59] não se

---

[59] A geometria projetiva baseia-se em duas noções indefinidas, *ponto* e *linha* e duas relações indefinidas, *incidência* e *separação*. Os axiomas estão divididos em três grupos: axiomas de *incidência*, de *separação* e de *continuidade*. Para a compreensão destes axiomas, devemos ter em conta as seguintes definições:

Def 1: Pontos incidentes com a mesma linha dizem-se *colineares*; o conjunto dos pontos incidentes com uma linha diz-se o *pontual* da linha.

Def 2: Duas linhas que têm um ponto em comum dizem-se *concorrentes*.

Def 3: Chama-se *feixe (de retas)* de centro num ponto *O* ao conjunto de todas as retas incidentes com *O.*

Def 4: Um *plano* é o conjunto formado pelos pontos incidentes com as retas de um feixe, juntamente com as retas determinadas por pares desses mesmos pontos.

Def 5: Pontos ou retas *coplanares* são os que estão no mesmo plano.

Poder-se-ia pensar, por analogia com o que vimos no capítulo anterior, ser possível obter a geometria projetiva plana modificando da maneira óbvia os axiomas de incidência. O fato disso não ser verdade é uma das surpresas da Geometria Projetiva; se fizermos essa modificação, obtemos um entendiam. Em particular quanto ao fato de saber quais os teoremas faziam parte do corpo central da teoria e quais os que geravam uma natural controvérsia.

Em 1891, Hilbert assiste a uma conferência de Hermann Winner em que o expositor propõe uma axiomatização para a geometria projetiva a partir do Teorema de Pascal e do Teorema de Désargues. Hilbert se entusiasma muito pela questão e compreende que palavras como ponto, reta e plano não precisavam ser entendidas de maneira tão literal como era feita no plano euclidiano, mas podiam representar sempre quaisquer elementos de uma geometria (bastava que fossem definidos). O importante para Hilbert passou a ser a validade que a estrutura lógica dos argumentos decorrentes destas palavras passava a ter. Assim, o ponto, a reta e o plano, poderiam ser perfeitamente substituídos por mesa, cadeira e caneca de cerveja que não alterariam em nada a validade e a grandeza do sistema.

O ano de 1894 foi um ano em que Hilbert se dedicou muito aos estudos da geometria e em janeiro de 1898 leu uma carta de Friedrich Schur endereçada a Klein que ventilava a possibilidade de demonstrar o Teorema de Pappus sem usar o axioma arquimediano. Os pensamentos contidos na carta de Schur indicavam que uma nova geometria estava por vir: a geometria não arquimediana. Hilbert se interessou tanto pelo conteúdo da carta que preparou no inverno deste mesmo ano, um curso sobre geometria não arquimediana em Göttingen. Este curso chamou

---

sistema axiomático fraco, onde não é possível provar certas proposições importantes (os teoremas de Désargues e Pappus, por exemplo), como se mostra recorrendo a modelos. Assim, é conveniente juntar como axioma uma destas proposições (ou outra que lhe seja equivalente); para complicar a situação, o sistema obtido por adjunção da propriedade de Pappus é *estritamente mais forte* que o sistema resultante da adjunção da propriedade de Désargues. Prova-se, no entanto, que estas situações bizarras não podem ocorrer num plano projetivo contido num espaço projetivo tridimensional.

muito a atenção dos matemáticos alemães. Teria Hilbert largado de vez os invariantes algébricos e a Teoria dos Números?

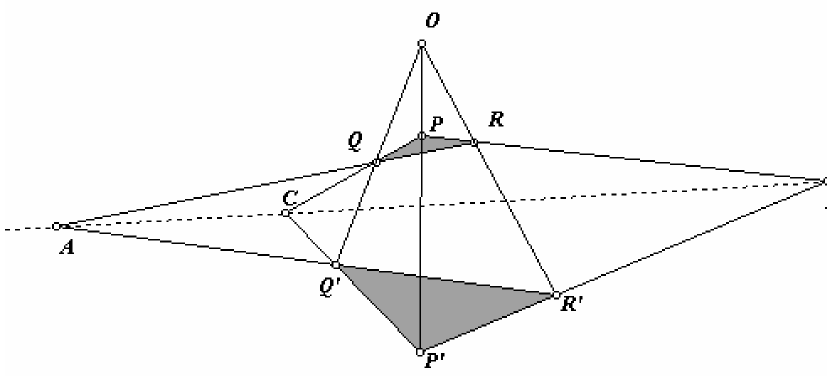
Em 1899 uma segunda surpresa mexia com a comunidade matemática mundial. A publicação do *Grundlagen der Geometrie* por ocasião da inauguração das estátuas comemorativas dos nascimentos de Gauss e Weber, em Göttingen. O livro contém as idéias de Hilbert sobre o método axiomático aplicado à Geometria, contendo uma visão geral de Hilbert sobre a Matemática, porém em uma linguagem mais acessível do que a tradicional. A apresentação foi intencional, pois o objetivo era apresentar de maneira clara um assunto elementar.

A obra foi duramente criticada devido a pequenos erros de natureza filosófica matemática. Após apresentar e nomear os elementos primitivos Hilbert apresenta os cinco grupos de axiomas (incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade) que permitem dar às afirmações, valores lógicos verdadeiros a partir deles. Seu objetivo é mostrar a cada etapa, que os teoremas das geometrias são decorrentes das manipulações lógicas dos axiomas apresentados e que estes axiomas são independentes e consistentes.

Para muitos estudiosos e isto nos inclui, Hilbert não conseguiu demonstrar claramente a independência dos axiomas, o que para a maioria é uma falta não muito importante já que a beleza e a clareza com que mostrou que o Teorema de Pappus é independente do Teorema de Désargues mostram a competência do autor, já que a adoção ou não do axioma arquimediano[60] tem um efeito decisivo na validade do Teorema de Pappus.

TEOREMA DE DÉSARGUES:

Se dois triângulos PQR e P´Q´R estão em perspectiva a partir de um ponto O e A é a intersecção de RQ com R´Q´, C é a intersecção entre PQ e P´Q´ e B a intersecção entre PR e P´R´, então os pontos A, C e B, são colineares.



O **Teorema de Pappus** afirma que se os pontos A, B e C estão sobre uma reta e os pontos A´, B´e C´sobre uma outra e se os pares de retas AB´ e A´B, BC´e B´C, CA´e CÁ, se cruzam respectivamente nos pontos R, P e Q, então estes pontos são colineares.

O **Teorema de Pascal** afirma que se os pontos A, B, C A´, B´, e C´ estão sobre uma mesma cônica e se os pares de retas AB´e A´B, BC´e B´C, CA´e AC´, se cruzam respectivamente nos pontos R, P e Q, então estes três pontos são colineares.

[60] Dados duas quantidades x e y, de modo que x < y, existe um número n tal que n.x > y. Isto quer dizer que se existe um n tal que podemos multiplicar x de maneira que o novo número seja sempre maior do que y.

Hilbert usa a aritmética dos segmentos unitários em uma boa parte do livro e os Teoremas de Pascal e de Pappus o oferecem condições de usar amplamente a adição e a multiplicação destes segmentos unitários para a construção de outros segmentos e para a construção de argumentos lógicos para as suas demonstrações. Hilbert usa o sistema de coordenadas cartesianas (com as coordenadas do par ordenado (x,y) reais) para que as operações definidas em IR e suas propriedades o auxiliem nas justificaivas matemáticas de suas construções. Com efeito, ele mostra que quando o Teorema de Pappus é verdadeiro, as coordenadas cartesianas que definem as figuras têm que pertencer a um sistema onde a multiplicação admite a propriedade comutativa, já o Teorema de Désargues não necessita de que esta propriedade seja admitida. Hilbert também dá um exemplo de uma geometria (plana) onde o Teorema de Désargues não é válido.

A teoria das superficies planas[61] é desenvolvida por Hilbert em seu livro após ter inserido dois axiomas suplementares sobre congruência. Essa inserção de axiomas permitiu explorar o assunto sem recorrer à análise matemática.

Na quarta parte de seu livro, Hilbert discute a possibilidade de resolver uma antiga questão: quais os problemas geométricos poderiam ser resolvidos com o auxilio de uma régua não graduada e um compasso? A nova solução proposta por Hlbert chamava atenção dos matemáticos.

[61] Nesta parte do texto, Hilbert ensina como construir modelos de geometrias em que o axioma arquimediano é falso (geometrias não arquimedianas) e faz uma alusão aos trabalhos de Veronese.

Certo de que a Teoria de Galois[62] já havia resolvido a questão do ponto de vista algébrico, Hilbert apresenta um outro tipo de solução para o problema*: uma solução puramente geométrica.* Tomando um segmento unitário e uma régua não graduada, Hilbert mostra que as coordenadas dos pontos construtiveis são expressões racionais de números obtidos através da extração da raiz quadrada da soma de dois quadrados, um número finito de vezes.

Sabemos que através do Teorema de Pitágoras é possivel encontrar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados medem 1 (a medida do segmento unitário) e ω (um número construtível qualquer), a saber: $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$. O que mais nos chamou atenção foi termos percebido a aparição de uma extensão algébrica não muito comum formada por estes números. Hilbert comenta sobre esta sequencia de números mais adiante. Ele mostra que se for possível construir o

[62] A Teoria de Galois é um ramo da álgebra abstrata. No nível mais básico, ela usa grupo de permutações para descrever como as várias raízes de uma certa equação polinomial estão relacionadas umas com as outras. Este foi o ponto-de-vista original de Évariste Galois. A abordagem moderna da Teoria de Galois, desenvolvida por Richard Dedekind, Leopold Kronecker e Emil Artin, entre outros, envolve o estudo de automorfismos de extensões de corpos. Uma abstração além da Teoria de Galois é conseguida pela teoria das conexões de Galois. O nascimento da teoria de Galois foi originalmente motivado pela seguinte questão, que é conhecida como o teorema de Abel-Ruffini

"Porque não existe uma fórmula para as raizes de uma equação polinomial de quinta ordem (ou maior) em termos de coeficiente de polinômios, usando somente as operações algébricas usuais (adição, subtração, multiplicação, divisão) e aplicação de radicais (raiz quadrada, raiz cúbica, etc)?"

A teoria de Galois não somente provê um bela resposta para essa questão. Ela também explica em detalhes porque *é* possível resolver equações de grau 4 ou menores da forma descrita acima e porque suas soluções assumem as formas que têm. A teoria de Galois dá uma clara explicação a questões referentes a problemas de construção com régua e compasso. Caracteriza de forma elegante as construções que podem ser executadas com este método. Usando esta teoria, torna-se relativamente fácil responder perguntas da geometria clássica tais como:*"Quais polígonos regulares são polígonos construtíveis ?", "Por que não é possível a trissecção de um dado ângulo ?","Por que não é possível a quadratura do círculo?","Por que não é possível a duplicação do cubo?"* As últimas três perguntas referem-se aos problemas clássicos de construção com régua e compasso, que Galois conseguiu responder com sua teoria, utilizando as noções de números algébricos e transcendentes.

número $a+\sqrt{b}$, também é possível construir o seu conjugado $a-\sqrt{b}$. Porém, no triângulo retângulo de hipotenusa igual a 1 e um dos catetos com medida igual a $|\sqrt{2}|-1$, o seu terceiro lado mede $\sqrt{2.|\sqrt{2}|-2}$ e o seu conjugado mede $\sqrt{-2.|\sqrt{2}|-2}$, que é um número complexo. Hilbert assegura que as construções destes números, quando obtidas por meio de régua e segmentos unitários, são muito diferentes de suas construções com o uso de régua e compasso. As construções a partir de segmentos unitários, causaram no matemático uma estranheza natural,

e Hilbert direciona seus estudos para os teoremas da teoria dos corpos a fim de entender por que da ocorrência deste resultado. Em especial, dedica-se àqueles problemas em que todos os elementos positivos são escritos como soma de quadrados. Este tema reaparecerá no meio matemático ao apresentar o 17º problema[63] de sua lista de problemas. Minkowski foi o primeiro matemático que se viu envolvido com este enunciado e resolveu-o em sua tese de doutorado. Mostrou que dado um polinômio com várias variáveis que admite todos os seus valores positivos, este polinômio não poderia ser expresso como soma de quadrados.

Gray (2004) afirma que Hilbert percebe que a aparição dos radicais com radicandos negativos chama a atenção dos matemáticos e os desviam da beleza e da pureza dos métodos usados em seu *Grundlagen*, exemplificados através da clareza com que cada axioma se apresenta, ilustra e justifica o seu método. O método de axiomatização da geometria proposto por Hilbert deixava claro que outros

[63] *Funções como somas de quadrados*. O problema consistia em demonstrar que uma função racional positiva pode ser escrita sob a forma de soma de quadrados de funções racionais. Este problema foi resolvido por Emil Artin, em 1927.

ramos da Matemática poderiam se servir dele. Alguns físicos e fisico-matemáticos pensavam o mesmo a respeito do processo, e consequentemente, obter sucesso na construção de um modelo que desse conta da axiomatização da Física.

Temos que destacar que em 1904, Hilbert se apoia sobre a sua teoria axiomática para dar o primeiro esboço de um programa que tinha como objetivo fundamentar *toda* a Matemática.

3.2.5 – 4º período: Teoria das Equações Integrais e Análise Funcional

Assim como o problema de Dirichlet, o poblema que envolvia as oscilações de corpos elásticos chamava a atenção de físicos e matemáticos. O problema consistia em determinar a forma, em função do tempo, de certos corpos submetidos à oscilações como, por exemplo, uma corda vibrante ou as ondas formadas num lago, após o lançamento de uma pedra. Hilbert tentou usar os resultados obtidos ao resolver o problema de Dirichlet, mas ao entrar em contato com os trabalhos do matemático sueco Erik Ivar Feldhom[64] (1866-1927), percebeu que existia uma analogia entre a teoria das equações integrais e alguns resultados em álgebra. Neste mesmo periodo, Hilbert consegue decompor funções em séries, e assim

[64] Fredholm consolidou a teoria moderna das equações integrais. Seu artigo de 1903, publicado no *Acta Mathematica* é considerado referência primeira no estudo de Teoria dos Operadores. Ele tem muitos resultados em Teoria Espectral, que desenvolve paralelamente a Hilbert. Este incorpora a Teoria dos Autovalores aos trabalhos de Fredholm sobre equações integrais e percebe uma ligação direta com a concepção dos espaços vetoriais infinitos munidos de produto escalar. Teoria Espectral criada por Fredholm surge na tentativa de resolução de equações integrais. Por essa contribuição, Fredholm recebe vários prêmios, incluindo o V A Wallmarks Prize, em 1903 e o Prêmio Poncelet, em 1908. Em 1909 recebeu o titulo de doutor *honoris causa* da Universidade de Leipzig. Os artigos de Fredholm publicados entre 1901 e 1908 foram agrupados em uma memória intitulada *Elementos para uma teoria completa das equações integrais lineares.*

generalizar o método das Transformadas de Fourier. O estudo dos espaços de funções torna-se um campo de interesse de um número muito expressivo de matemáticos e a análise funcional se afirma como importante ramo da análise matemática. A análise funcional faz uso de muitos conceitos da álgebra linear, e pode ser considerada, até certo ponto, como o estudo de espaços normados de dimensão infinita. A palavra f*uncional*, porém, remonta ao cálculo das variações, e para muitos historiadores da Matemática é um vocábulo criado pelo matemático italiano VittoVolterra ao mostrar em um artigo de 1897, as aplicações da teoria da equações integrais aos problemas de física-matemática. Volterra estudouo problema da invertibilidade das integrais definidas.

A teoria sobre a qual se ambasa os Espaços de Hilbert (nome dado originalmente por Von Neumann: *"der abstrakte Hilbertsche Raum" ,* em 1929), ganha destaque em análise funcional e torna-se ferramenta importantíssima para a compreensão da nova mecânica que emergia, a mecânica quântica. O espaço de Hilbert é bem acolhido por este ramo da Física por poder ser interpretado como uma generalização do espaço Euclidiano sem precisar estar restrito a um número finito de dimensões. Além disso, as noções de medições de distâncias, assim como as medições de ângulos, estão presentes devido ao fato de um espaço de Hilbert conter produto interno.

Um dos grandes resultados atribuidos a Hilbert foi ter mostrado que esse espaço obedece uma relação de completude e que garante que os limites existem quando esperados, o que permite e facilita diversas definições da Análise. Os espaços de Hilbert permitem que, de certa maneira, noções intuitivas sejam aplicadas em espaços funcionais. Por exemplo, com eles podemos generalizar os conceitos de séries de Fourier em termos de polinômios ortogonais.

Hilbert trabalha por cerca de dez anos em análise funcional. Muitos teoremas vindos deste período tão rico da Matemática pura, compõem o que modernamente conhecemos por Teoria dos Operadores.

3.2.6 - 5º período: Física

Entre os anos de 1910 e 1912 Hilbert dedicou-se a tarefa de verfificar se o método axiomático que aplicou à geometria, teria o mesmo suceso se aplicado à Fisica. A partir de 1912, pôs seus planos em ação, vindo a culminar com o enunciado do problema número 6[65] de sua lista de problemas. Da mesma maneira que o realisado em geometria, Hilbert tenta isolar as proposições primeiras da teoria Física e chegar a conclusões puramente lógicas a partir de uma quantidade finita de passos. Os experimentos deveriam comprovar os resultados do corpo teórico. A axiomatização proposta por Hilbert deveria explicitar a estrutura matemática e os postulados empiricos das diversas teorias da Física. Particularmente, não conseguimos associar seus resultados anteriores, mesmo em relação aos fundamentos da geometria, com o desejo de axiomatizar a Física, porém vemos com clareza que a grande contibuição de Hilbert à Fisica vem de seus grandiosos resultados em teoria das equações integrais e análise funcional,pelo fato de se aplicarem à mecânica quantica.

---

[65] O sexto problema consistiu em apresentar um método que axiomatizasse a Física. A mecânica quântica foi axiomatizada por Hamel em 1903. A termodinâmica foi axiomatizada por Carathéodory em 1909. A relatividade restrita por Robb em 1914, e por Carathéodory, no mesmo ano, de maneira independente. A teoria das probabilidades foi axiomatizada por Kolmogorov em 1930 e vinte anos depois, Wightam axiomatiza a teoria quântica dos campos.

Hilbert inspira muitos fisicos-matemáticos como Courant, Von Neuman e Weyl. Seus resultados matemáticos ajudam muito a esclarecer os fenômenos físicos. Bohr e Eisenberg chegam a afirmar a importância da teoria das equações integrais de Hilbert e afirmam que a mecânica quântica é o real ramo da Física onde uma teoria matemática se aplica integralmente. Hilbert trabalha com Bohr, Born, Heinsenberg, Jordan e Pauli. A Física se rende à análise funcional e a obra de Hilbert e Courant *Métodos de Física Matemática* passa a ser o texto de referência no assunto. Neste mesmo período, Hilbert estuda teoria cinética dos gazes como área de aplicação das equações integrais.

Hilbert se aventura nos estudos sobre a teoria da relatividade restrita de Einstein, porém a sua reformulação, de caráter teórico-matemático, não é útil à Física.

3.2.7 - 6º período: Fundamentos da Matemática.

Após a primeira guerra mundial, havia a necessidade de se recompor os quadros politicos, administrativos e sociais da Alemanha e de quase toda a Europa. Os pesquisadores e professores que haviam deixado seus postos estavam retornando às suas universidades de origem. Órgãos de fomento tentavam investir, mesmo que insipidamente, em pesquisas. A Universidade de Göttingen já não tinha mais Klein como professor, pois ele havia se aposentado e o Instituto de Matemática tinha a figura solitária de Hilbert como representante dos áureos tempos. Muitos jovens matemáticos alemães, morreram na guerra e poucos voltaram para completar seus estudos. Gray (2004) nos informa que cerca de 40% dos jovens francêses e alemães que cursavam carreiras científicas nas universidades dos dois paises foram convocados e mortos durante a guerra.

A guerra contribuiu muito negativamente para a formação de uma nova elite intelectual dos paises europeus. Em uma entrevista no ano de 1986, Jean Dieudonné diz que o número de jovens capazes de reconduzirem a Europa ao posto de alta produtividade em Matemática estava reduzido a quase zero com o término da guerra. Na França, havia somente os famosos seminários de Jacques Hadamard. A Matemática se via enfraquecida e sem ícones. Nenhum dos matemáticos notórios se dedicavam ao estudo dos fundamentos da Matemática ou a teoria da prova.

No pós guerra, a Inglaterra despontava como o país que começava a ter resultados expressivos em funções complexas e geometria algébrica, sobretudo em Cambridge. Geômetras inglêses também compunham um quadro de excelência neste período. Com opassar dos anos, a análise matemática também ressurge com força na Inglaterra e a Matemática vai tomando o seu lugar de destaque no cenário europeu.

Nos Estados Unidos, Harvard deixava de ser um centro de ensino para assumir a caracteristica de um núcleo de pesquisas em Matemática. Olivier Dimon Kellog, ex aluno de Hilbert assume a pesquisa em teoria do potecial. Joseph Leonard Walsh e Marston Morse se destacam nos estudos relativos a aplicação da topologia na teoria das variedades. Chicago, Yale e Princeton ainda não tinham pesquisas de ponta. O Massachussets Institute of Technology começou a crescer e a despontar como centro de pesquisa, a partir de 1929. O M.I.T. tinha em seu quadro de pesquisadores Norbert Wiener, mas com a crise americana de 1929, a instituição também passaria por dificuldades.

A Europa Oriental se encontrava nas mãos de uma política mais dura e os matemáticos ficavam em pequenos nichos inexpressivos. A impossibiidade de viajar ao exterior dificultava ainda mais os contatos e trocas com outros matemáticos. A Polônia se destacava em análise matemática, topologia e lógica. A Hungria havia uma tradição de encorajamento de jovens talentos matemáticos, mas passava por um momento de crise devido ao regime totalitário que a assolava.

Em 1925, Göttingen volta ao cenário matemático mundial e Hilbert estava envolvido com um novo grupo de matemáticos de alto gabarito como Emy Noether em análise, Richard Courant e Gustav Herglotz em teoria dos números, Edmund Landau e Carl Ludwig Siegel em fundamentos de matemática e Paul Bernays em geometria. Von Neumann veio da Hungria para visitar Hilbert e acabou ficando em Göttingen por longos meses. Nesta época Hilbert concentrou sua energia em lógica matemática e procurou por em prática um programa conhecido por Programa de Fundamentos. O programa consistia, em linhas gerais, justificar através da lógica os diversos ramos da Matemática.

Após analisar os trabalhos de Kronecker, Poincaré e Brower, Hilbert percebe que os ramos da Matemática que utilisam somente o infinito potencial estão em evidência. Era preciso investigar “quais matemáticas” tinham por base o infinito atual. Era necessário então, formalizar as teorias matemáticas, isolando uma quantidade mínima de axiomas e construir as proposições por deduções lógicas desta teoria.

Hilbert consegue certo êxito na sua fundamentação da geometria plana, apesar de seu trabalho ter sofrido duras críticas, principalmente de filósofos da Matemática e de logicistas, uma vez que para eles as regras básicas da geometria, continuavam implicitas em seu corpo teórico. Explicar as regras da dedução lógica no programa de fundamentos da geometria de Hilbert ainda era visto como um ponto cego da teoria axiomática. Este é um período da História da matemática onde muitas cartas são trocadas entre matemáticos, filósofos e logicistas. Na maioria delas havia um questionamento constante: seria possivel construir uma axiomática livre de contradições internas?

As demonstrações de teoremas propostas no programa de Hilbert são extremamente rigorosas, mas igualmente abstratas. São puramente formais. São manipulações das verdades pré-existentes para se chegar a outras conclusões verdadeiras, independente se pertencem à análise, à algebra, à aritmética, à geometria... são somente manipulações de sinais segundo regras convenientes. Tais regras indicam como transformar uma fórmula em outra por dedução lógica. Na proposta de Hilbert a demonstração é vista como uma cadeia de construção de signos cujas primeiras linhas são os axiomas e as subsequentes, são construidas a partir da manipulação de certas regras explicitas.

Mas, construir cadeias de deduções não era o suficiente para Hilbert, ele sentia a necessidade de mostrar que o sistema (as teorias formalizadas) não possuiam contradições internas e que não era possivel demonstrar uma afirmativa com valor lógico verdadeiro que ao mesmo tempo, contrariasse um axioma. Havia que se demonstrar a não contradição, ou seja a *consistência* das teorias formais que a Matemática possui. Para isso Hilbert utilizou uma linha de raciocínio onde somente há espaço para o infinito potencial, o que dá ao método uma evidência imediata.

A proposta, apresentada em 1921, tem o objetivo de reformular as bases da Matemática, partindo da aritmética. Segundo ele, toda a Matemática poderia ser reduzida a um número finito de axiomas consistentes. Assim, qualquer proposição da Matemática poderia ser provada dentro desse sistema e o sistema seria dito completo.

Em resumo,o programa formalista de Hilbert tem o objetivo de refundar a Matemática substituindo os argumentos embasados no infinito potencial por manipulações simbólicas, de modo que através de raciocínios finitistas, não se encontre alguma contradição interna.

> "La méthode abstraite semble permettre de recréer l´édifice entier des mathématiques. Pourtant Il faut reconnaître aux raisonnements qui n´utlisent que línfini potenciel une évidence immédiate. Ceux-ci ne consistent pas en procédures formelles. Leurs domaines marquent les limites de la méthode abstraite"
>
> *"Hilbert.* Cassou-Noguès. P.51. Ed. Les belles Lettres. 2004

Acreditamos que neste momento, Hilbert faz emergir da álgebra a sua habilidade em demonstrar e se radicaliza com o processo de axiomatização criado por ele mesmo. Foi o seu momento de maior expressividade como pensador e filósofo. Côncio de suas habilidades algébricas e aritméticas, reduzir qualquer ramo da matemática à sua zone de dominio pleno, seria para ele, a possibilidade de aplicar o que havia aprendido com Klein no Programa de Erlangen.

É indiscutivel a grandiosidade da produção acadêmica de Hilbert em torno da álgebra abstrata e da análise. Estes dois ramos da Matemática corriam em suas veias,assim como a aplicação constante dos métodos pertencentes ao formalismo. Por isso, intuimos fortemente que não seria diferente neste momento de sua vida acadêmica, a escolha do método dedutivo como o caminho para formalizar quaisquer teorias.

Provar que toda a Matemática é consistente significava resolver uma das questões mais complexas da Matemática. A compreensão da necessidade de provar a consistência da Matemática foi embasada em uma teoria muito forte, a qual Hilbert tinha domínio pleno, mesmo que anos mais tarde, fosse provado o contrário[66]. Procuraremos então, apresentar um exemplo de axiomatização, segundo Hilbert, para a geometria euclidiana.

---

[66] Em 1931, o matemático Kurt Gödel provou, através do seu Teorema da Incompletude, que esta tarefa era impossível. No teorema, Gödel mostra que um sistema axiomático consistente não pode provar sua própria consistência. Assim, se um sistema axiomático consegue provar sua própria consistência, ele só pode ser inconsistente. Além disso, em sistemas com o poder de definir os números naturais (como o que Hilbert idealizou), sempre há proposições (chamadas de *indecidíveis*) que não podem ser provadas dentro do sistema (portanto o sistema é incompleto). Desta forma, o sistema não pode ser simultanemante completo e consistente, e a exigência hilbertiana de completude e consistência não pode ser colocada em prática. Gödel deixou em aberto a possibilidade de existir um método geral para determinar se uma dada proposição é decidível. Em 1936, entretanto, o matemático Alan Turing provou que tal método não pode existir.

Capitulo IV

O método axiomático em geometria e o Plano Ordenado de Hilbert

"Olhas, mas não queres ver.
Vês, mas não queres perceber.
Percebes, mas não queres enfrentar.
O medo tolda-te as pernas
e enfraquece o coração".

Lídia Bulcão, Debaixo da Ventania

No capítulo anterior mostramos a produção acadêmica de Hilbert. Notamos que ela consiste em uma série de problemas resolvidos nos diferentes ramos da Matemática e que o ponto de convergência de toda essa produção é o método aplicado em suas resoluções.

Todos os trabalhos de Hilbert são baseados no estruturalismo, com traços de extremo rigor e generalização. Desde seus resultados em teoria dos invariantes observamos a forte presença do abstracionismo algébrico regendo a sua forma de fazer Matemática e a aplicação constante do conceito de *estrutura*, já discutido anteriormente neste trabalho. Como exemplo para esta última afirmativa, devemos nos lembrar de que Hilbert caracterizou um invariante por sua *estrutura* e procurou demonstrar os teoremas pertencentes a esta teoria, sem sair do contexto da própria *estrutura*. A seguir, Hilbert voltou-se para a teoria dos números algébricos e trás para a Matemática possibilidades grandiosas de expansão do conhecimento que dão frutos até os dias atuais. A axiomatização da geometria radicaliza o método abstrato de obter resultados matemáticos provenientes do pensamento álgebrico e também confirma mais uma vez a sua maneira rígida (no sentido de extrema formalidade) de produzir Matemática. Seus estudos e artigos em análise, mais especificamente em equações integrais (além do que conhecemos nos dias de hoje por espaços métricos e teoria dos operadores), o caracterizam, a nosso entender, como o maior autor e maior autoridade nos assuntos durante os anos finais do século XIX e os anos iniciais do século XX. Para muitos, o seu retorno aos estudos de análise matemática teve a ver com o fato de tentar axiomatizá-la, como fez com a geometria de Euclides. Algumas teorias físicas foram axiomatizadas devido ao avanço da teoria das equações integrais e por fim, Hilbert põe em prática o seu plano mais ousado: a tentativa de criar um sistema formal que axiomatizasse toda a Matemática, um sistema livre de contradições internas. Um programa formalista.

Neste capítulo, vamos esclarecer como Hilbert aplicou o método axiomático na geometria euclidiana e comentar, ao longo do texto, seus resultados mais expressivos. Constataremos que a sua axiomatização para a geometria é a história da criação de um modelo que emergiu da álgebra abstrata. Hilbert toma consciência de si mesmo, cria a metamatemática e a seguir, se dedica arduamente ao programa de fundamentação da Matemática.

"Hilbert propõe-se levar a cabo um programa de *salvação da Matemática* que "não atraiçoe a nossa ciência" a ideia central deste programa é duma originalidade notável e consiste em alicerçar a matemática não-finitista nos incontroversos meios finitistas. A estratégia consiste em ultrapassar o revisionismo imposto por uma exigente posição epistemológica através do apelo a essa mesma posição: uma espécie de jiu-jitsu epistemológico".

"No paraíso, sem convicção: uma explicação para o programa de Hilbert". Ferreira, F.,p.3, Universidade de Lisboa)

4.1 – O método genético e o método axiomático

Hilbert publica no jornal *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, de 1900 um artigo intitulado *Uber den Zhalbegriff* (Sobre a noção de número) em que diferencia o método genético do método axiomático. Guardamos aqui a ideia original de Hilbert sobre como podemos construir a noção de número.

Partindo do número um dterminamos os outros números naturais a partir do conceito de sucessor e a seguir, construímos os racionais, ambos conjuntos contendo números estritamente positivos. A necessidade da subtração nos conduz aos números negativos e em seguida às frações negativas e o conjunto dos números racionais como um par de númeos inteiros, sendo o segundo diferente de zero. Ainda não há a definição de zero, pois a noção de número está ligada a noção de existência de quantidade. Da mesma forma, respeitando a necessidade especifica de cada operação, extendemos os conjuntos inserindo neles, novos elementos ou criando novos conjuntos. Hilbert classifica este método como *método genético* já que a noção de númeo real aparece naturalmente ligada à simples noção primária de número.

Na construção da geometria, tudo se mostra diferente. Em geometria é habitual conceber a existência de certos elementos: o ponto, a reta e o plano (no sentido euclidiano) e estabelecemos entre eles relações a partir de certos grupos de axiomas: incidência (ou pertinência), ordem, congruência e continuidade. A questão principal é estabelecer as suas compatibilidades e suas integridades. Este método é por Hilbert classificado como *método axiomático.*

Após as duas definições fica uma questão a ser respondida: “o método mais apropriado ao estudo da aritmética é o método genético e o mais apropriado à geometria é o método axiomático?” Do nosso ponto de vista, depende. Acreditamos que a resposta deva ser dada em função do destino ao qual se verificará a aprendizagem e o nível cognitivo do aprendiz. O método axiomático requer amadurecimento cognitivo e estruturas e redes mais amplas de domínio do conteúdo que permitam estabelecer conexões entre variados e diferentes assuntos. Já o método genético permite maior experimentação, maior "visualização" da estrutura em questão, e consequentemente uma maior possibilidade (e facilidade) de conjecturarmos. Por experiência sabemos que ao apresentarmos conjuntos numéricos a crianças e a jovens adultos, muitos conceitos são transmitidos de maneira precária, e até deficiente, devido à complexidade do tema. Todo tema básico em Matemática tem alto grau de dificuldade em seus fundamentos e são difíceis de serem de pronto entendidos, principalmente pelos questionamentos de origem filosófica que guardam. Porém, se apresentaremos os números reais a jovens adultos, alunos recém chegados aos cursos de graduação em Matemática, não usaremos o método genético. Sabemos que suas fases de experimentação já se passaram. O aluno está em outro estágio de seu desenvolvimento cognitivo, atingiu um alto nível de abstração. Não cabe a ele, a apresentação do conjunto IR por experimentação. Cabe a ele o estudo pelo método axiomático.

Mal comparando, Hilbert diz o mesmo, completando a ideia ao afirmar que a escolha do método depende da natureza da ciência e que há entre estes métodos um melhor para estudar as bases da mecânica ou de qualquer outra ciência física, por exemplo. Na opinião de Hilbert: “apesar do grande valor pedagógico do método genético, o método axiomático é mais vantajoso por ser uma exposição definitiva de uma ciência e por dar às bases da ciência uma seguridade lógica indispensável”. O método axiomático permite expor a teoria da noção de número.

4.2 – O método axiomático da geometria ao longo do século XIX

A axiomática apresentada por Hilbert passou a ser o assunto dos grandes círculos acadêmicos do inicio do século passado, antes mesmo da publicação do *Grundlagen*. Euclides foi o primeiro matemático que dá um carater formal à geometria através do método axiomático, como já descrevemos. Esta foi a primeira tentativa de organização de uma teoria, mas seu processo de axiomatização continha falhas e era incompleto, apesar de sua teoria ter sido considerada um modelo, até o século XIX. Um dos objetivos de Hilbert é completar e estruturar mais o compêndio de Euclides. Vejamos o que Hermann Weyl escreve sobre.

> “The Greeks had conceived of geometry as a deductive science which proceeds by purely logical processes once the few axioms have been established. Both Euclid and Hilbert carry out this program. However, Euclid's list of axioms was still far from being complete; Hilbert's list is complete and there are no gaps in the deductions. Euclid tried to give a descriptive definition of the basic spatial objects and relations with which the axioms deal; Hilbert abstains from such an attempt. All that we must know about those basic concepts is contained in the axioms. The axioms are, as it were, their implicit (necessarily incomplete) definitions. Euclid believed the axioms to be evident; his concern is the real space of the physical universe. But in the deductive system of geometry the evidence, even the truth of the axioms, is irrelevant; they figure rather as hypotheses of which one sets out to develop the logical .consequences. Indeed there are many different material interpretations of the basic concepts for which the axioms become true.”
>
> *(David Hilbert and his mathematical work.* Weyl, H. p.636)

Mas a história da geometria não contém uma ponte extensa que liga Euclides diretamente à Hilbert, nem se quer podemos pensar que o estudo dos Elementos não tenha inspirado o homem a criar. Gauss, Lobachevski, Bolyai e Riemann definiram e construíram formalmente as geometrias não euclidianas, ao negar o axioma das paralelas com o intuito de verificar se este axioma poderia ser deduzido a partir dos axiomas anteriores e além disso, buscavam um processo que não gerasse contradições nas teorias que tinham construido. Eles conseguiram a partir de então, explicitar e teorizar geometrias cujo axioma das paralelas da geometria de Euclides não era válido. Vemos então que mais geometria era produzida útil à outras ciências e com um grande caráter filosófico.

As relações entre as geometrias não euclidianas e euclidiana foram estabelecidas por Klein, que construiu espaços não euclidianos com base no plano euclidiano. Desta forma, se houvesse uma contradição nas geometrias não euclidianas, também haveria na geometria euclidiana, por analogia diretamente estabelecida.

Problemas epistemológicos acerca da determinação dos axiomas sobre os quais as geometrias repousavam foram levantados por Riemann e Helmholtz, por exemplo: *uma vez que há diferentes espaços com suas propriedades específicas e particulares, em que espaço vive o homem?* É um questionamento de origem filosófica, mas que mostra concretamente a necessidade humana de querer reconhecer seus limites fisicos e sua ocupação no mundo, a partir do conhecimento da geometria do espaço em que vive.

Havia necessidade de se estabelecer critérios simples que permitissem "enxergar" as diferenças entre a geometria euclidiana e as não euclidianas e, consequentemente caracterizá-las ou até mesmo reconstruir os primeiros axiomas que o homem impiricamente escolheu, para formalizar a geometria de Euclides. Em outras palavras, a questão era estabelecer os axiomas mais simples e suficientes para deduzir os teoremas da geometria e descobrir quais deles eram sujeitos de experimentação. Estes questionamentos são encontrados nos textos de Riemann, Helmholtz e Ewald: *"On the hypotheses wich lie at the foundation of geometry", "On the actual foundations of geometry"* e *"The origin and meaning of geometrical axioms"*, respectivamente.

Diversos matemáticos do século XIX procuravam as premissas básicas que pudessem provar as consistências das geometrias. Cada um perseguia este objetivo segundo a sua própria área de atuação como matemático. Não havia um esforço conjunto para que uma teoria única fosse desenvolvida. Riemann e Helmholtz propõem a axiomatização da geometria euclidiana fundamentada na possibilidade de confronto com a experienciação. Já Sophus Lie se baseia na teoria dos grupos de transformação, segundo os preceitos da escola de Erlangen.

Moritz Pasch lança as bases para a fundamentação da geometria projetiva em uma perspectiva empirista onde os axiomas são provenientes da observação do homem em direção ao exterior. Pasch acreditava que somente com a exposição do homemà natureza o permite conceber as noções primitivas. Uma critica que fazemos ao modelo de Pasch é que ele não contém as regras lógicas de forma explícita, tão necessária para as deduções dos teoremas a partir dos axiomas. Além disso, há uma mistura entre empirismo e formalismo. Para alguns historiadores da Matemática, Pasch não conseguiu separar a geometria da análise matemática. Esta dificuldade começou quando diferenciou ponto gráfico de ponto matemático, pois o conceito de ponto matemático estava associado às coordenadas cartesianas. Cabia então a Hilbert a tarefa de construir um modelo axiomático intrínseco à geometria, sem se reportar a necessidade de experimentação do mundo exterior. A axiomatização concebida por Hilbert foi pensada com o intuito de não precisar falar em “experiência sensível de espaço”. Seria necessário apresentar um modelo fortemente livre do conteúdo de noções... um modelo puramente abstrato.

4.3 – A axiomática de Hilbert

A abordagem de Hilbert marca a transição para o método axiomático moderno. Axiomas agora não são mais vistos como verdades auto-evidentes. Apesar da geometria tratar de objetos a respeito dos quais temos forte intuição, não se faz necessário ter significado explícito para a elaboração de conceitos. Segundo Hilbert, não era mais necessário tratar dos objetos comuns à geometria (reta, ponto e plano) para construir demonstrações em geometria. Objetos do cotidiano podem substituir os objetos primeiros da geometria de modo que a construção e o valor lógico das demonstrações permaneçam válios. A discussão, entretanto, não se baseia nos objetos, mas sim nas relações entre eles. Hilbert estabelece os axiomas de incidência, ordem, congruência, paralelismo de retas e continuidade, como o conjunto de regras que permitirá a obtenção de afirmativas logicamente verdadeiras, os teoremas.

Desde os trabalhos de Dedekind entendemos que a álgebra depende de uma perspectiva genética, de um conhecimento minucioso acerca dos elementos que vão compor uma determinada estrutura, desde os elementos até as operações que definirão esta tal estrutura. O objetivo desse cuidado especial reside na necessidade de buscar uma simplificação das leis lógicas que regerão a estrutura e a possibilidade de deduzir logicamente, outros resultados, a partir de uma quantidade mínima de verdades não demonstráveis. Hilbert dá a álgebra outra roupagem ao afirmar que as mesmas estruturas de Dedekind se aplicam em diferentes domínios, diferentes objetos, como os números, funções, invariantes... e mostra que é possível estudar e compreender a estrutura, mesmo sem especificar a natureza do objeto.

De acordo com Cassous-Noguès (2004), a axiomatização de Hilbert consiste em criar modelos que possuem relações imbuídas de propriedades que são explicitadas pelos axiomas. Os axiomas tomam para si o mesmo valor dos enunciados que, em álgebra, fixam as leis que verificam as operações aritméticas. Os axiomas ajudam a definir uma estrutura entre quaisquer dois ou mais objetos.

Para Hilbert, a axiomatização ou uma álgebra expressam as bases primárias de qualquer estrutura. Em álgebra, dá-se uma estrutura aos objetos, números ou invariantes supostamente conhecidos (ou predefinidos), para que estes consigam produzir outros resultados e contribuir para o crescimento da teoria. Desta forma é possível demonstrar um teorema a partir da estrutura ou das propriedades que os elementos admitem dentro da estrutura. Não importa se os elementos primitivos da estruturas são chamados de *ponto, reta ou plano* ou mesmo se são conhecidos por *mesas, cadeiras ou canecas de chopp.* A axiomatização como concebida por Hilbert disassocia a geometria da concepção sensível de espaço e faz abstração de seus conteúdos. “Toda e qualquer demonstração segundo a axiomática de Hilbert, só lança mão do corpo de axiomas que a geometria apresenta, e somente deste corpo de axiomas. Nada a mais, além disso.” Em outras palavras, é possivel construir uma geometria sem considerar a natureza de um objeto ou o sentido conotativo de seus termos. A dedução de teoremas é conseqüência da manipulação correta dos axiomas.

Para Hilbert, todo sistema de objetos entre os quais existem relações que podem ser manipuladas a fim de dar a futuros enunciados um valor de verdade é uma geometria. Basta que o sistema de objetos satisfaça seu corpo teórico. Mesmo que as geometrias possuam elementos diferentes, se elas estão sob a mesma *estrutura*, então elas possuem mesmos valores semânticos lógicos. Isto é, teoremas decorrentes de manipulações lógicas, terão os mesmos resultados, independente dos objetos.

O objetivo da axiomatização é único: deduzir afirmativas a partir de uma quantidade finita de passos, apoiando-se nos axiomas que caracterizam e ou definem uma estrutura. Como os axiomas caracterizam um modelo, eles são suficientes para moldar um objeto e descrever suas relações dentro da estrutura. Os axiomas se caracterizam pelo fato de serem admitidos como *determinações implícitas e cheias de noções*, como classificam o próprio Hilbert e seu assistente Paul Bernays.

Poincaré ao entrar em contato com a teoria axiomática, diz que os axiomas são definições disfarçadas. Sinceramente, lendo e procurando interpretar todo o programa formalista de Hilbert, cremos que esta contribuição de Poincaré não foi uma das melhores, já que para Hilbert um axioma não é visto como uma simples definição. É sim, uma determinação. Uma lei. Além disso, há no nosso entender um isomorfismo que põe em correspondência os objetos da estrutura e estas leis que os relacionam. O matemático passa a deduzir teoremas independentes de estar ou não em seu campo de atuação. Como se demonstrar fosse um ramo exclusivo da lógica. Com esse caráter de alta abstração, os axiomas admitem diferentes interpretações (vai depender sobre qual estrutura está) e conhecer bem as relações entre eles constitui estabelecer um método para a investigação das propriedades lógicas dos próprios axiomas.Vejamos o comentário de Hermann Weyl, sobre a construção de modelos segundo a proposta de Hilbert:

> “His method is the *construction of models:* the model is shown to disagree with one and to satisfy all other axioms; hence the one cannot be a consequence of the others. One outstanding example of this method had been known for a considerable time, the Cayley-Klein model of non-Euclidean geometry. For Veronese's non-Archimedean geometry Levi-Ci vita (shortly before Hilbert) had constructed a satisfactory arithmetical model. The question of *consistency* is closely related to that of independence. The general ideas appear to us almost banal today, so thoroughgoing has been their influence upon our mathematical thinking. Hilbert stated them in clear and unmistakable language, and embodied them in a work that is like a crystal: an unbreakable whole with many facets. Its artistic qualities have undoubtedly contributed to its success as a masterpiece of science. In the construction of his models Hilbert displays an amazing wealth of invention. The most interesting examples seem to me the one by which he shows that Desargues's theorem does not follow from the plane incidence axioms, but that the plane incidence axioms combined with Desargues's theorem enable one to embed the plane in a higher dimensional space in which all incidence axioms hold ; and then the other example by which he decides whether the Archimedean axiom of continuity is necessary to restore the full congruence axioms after having curtailed them by the exclusion of reflections.”
>
> *(David Hilbert and his mathematical work.* Weyl, H. p.636)

Um sistema axiomático deve satisfazer as três condições seguintes: ser **consistente**, quer dizer, os postulados não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas conseqüências; deve ser **completo**, no sentido de serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; e, por fim, cada postulado deve ser **independente** dos demais, no sentido de que não é conseqüência deles, sob pena de ser supérfluo.

Após vários matemáticos terem exibido modelos euclidianos das geometrias não-euclidianas, estas ganharam total credibilidade. A consistência de cada uma destas geometrias foi demonstrada, porém totalmente embasadas na geometria euclidiana, de sorte que se tornava evidente a necessidade de provar a consistência da própria Geometria de Euclides para realmente se tomar as geometrias não euclidianas como consistentes.

Inúmeros matemáticos começaram estudar a consistência dos postulados de Euclides, e perceberam que eles eram insuficientes para provar os teoremas conhecidos, sem falar nos demais teoremas que viessem a ser considerados no futuro. Era chegada a hora de “tampar os furos de Euclides” e caminhar rumo ao futuro da Matemática, pela própria Matemática. Queremos dizer que a experiência matemática de Hilbert se manifestaria em todo o seu método axiomático, principalmente porque a análise matemática já dera conta da consolidação dos números reais como uma estrutura algébrica de corpo ordenado completo. Um exemplo que ilustra nossa afirmativa é a própria forma com que Hilbert organizou e intitulou os cinco grupos de axiomas: evidenciou as relações de pertinência, a possibilidade de ordenação, define que “coisas congruentes” (como ângulos e segmentos) coincidem-se por superposição, torna ser sem mistério a possibilidade de construção de uma única reta paralela a uma reta dada por um ponto fora dela e o mostra a necessidade de explorar o conceito de continuidade, que a nosso ver, através do axioma de Arquimedes e o axioma da integridade[67] costuram brilhantemente sua proposta. O primeiro, de **Arquimedes**, diz que é possível encontrar sobre uma reta que passa poelos pontos A e por B distintos, um ponto tão próximo de B quanto se queira. O mesmo ocorre com os racionais na reta numerada, mas já sabemos que o princípio arquimediano para os números racionais não é suficiente para garantir a continuidade em IR, porém admitindo que a união dos racionais com os números irracionais formam IR, podemos garantir que qualquer ponto da reta possui coordenadas reais. Já o segundo, de **integridade**, diz que partindo de uma estrutura que satisfaz determinadas propriedades fundamentais de ordem linear e de congruência advindas dos axiomas anteriores e do axioma de Arquimedes, é impossível juntar à esta estrutura novos objetos, de modo que a nova estrutura formada safisfaça aos <u>*axiomas primeiros* de maneira análoga àquela antes da inserção de novos objetos à estrutura</u>. Este teorema recupera a nossa concepção intuitiva de espaço. Por outro lado, façamos um exercício usando a concepção de Hilbert. Troquemos a geometria pela álgebra e façamos a leitura dos axiomas geométricos sob a óptica dos números algébricos. É possível fazer uma tradução, sem perda de generalidades, das propriedades geométricas do espaço por suas relações aritméticas. Podemos obter um sistema que é fácil aceitar os axiomas precedentes e mesmo assim não conseguirmos representar rapidamente o espaço intuitivo de nosso imaginário, pois o nosso espaço intuitivo possui buracos que

[67] Este axioma só passou a configurar no *Grundlagen der Geometrie* a partir de sua segunda edição. Cremos que tal feito se deu após às inúmeras criticas que o livro de Hilbert recebeu.

podem ser entendidos como a presença “incômoda” dos números transcendentes. O que precisaríamos fazer? Acrescentar os transcendentes ao conjunto dos números algébricos e assim criar uma nova estrutura, um novo modelo que certamente não satisfará aos axiomas primeiros (aqueles existentes antes da inserção dos transcendentes).

A função do axioma da integridade na axiomática de Hilbert é caracterizar a continuidade própria dos números reais ou dos pontos do espaço infinito garantindo restrições da axiomatização ao espaço intuitivo ou a modelos isomorfos.

4.4 – Alguns exemplos de aplicação do método axiomático de Hilbert no primeiro capítulo do *Grundlagen* e reflexões pontuais

Na primeira edição do G*rundlagen*, Hilbert acreditou ter elaborado um sistema de axiomas independentes, mas ele não estava correto em seu pensamento. Hilbert foi obrigado a reelaborar seu trabalho.

A partir da segunda edição, a simplicidade dos enunciados, a clareza do texto e as adaptações ao estudo da geometria elementar fizeram com que o erro cometido por Hilbert anteriormente não tomasse uma grande dimensão. Temos a certeza de que a reputação profissional de Hilbert fora em nada abalada, mas para nós foi um alerta para o que viria futuramente com o programa formalista.

Após as devidas correções, Hilbert mostrou ser possível construir geometrias mais gerais do que a geometria elementar (como as não euclidianas), a única considerada por ele em todo o corpo de sua obra[68]. Neste trecho do Grundlagen, o autor discute os efeitos que a negação do quinto postulado de Euclides gera na nova estrutura. Mostra como é possível obter o *plano afim* renunciando os axiomas de congruência e como se obtém uma geometria *pascaliana,* introduzindo novos axiomas, além de definir *congruência parcial*. Discute resultados que pertencerão à *geometria projetiva*, geometria esta que surge ao aceitar somente os axiomas de pertinência, ordem (adequando-os) e de continuidade.

Hilbert mostra também, que uma pequena modificação dos axiomas de incidência conduz-nos à *geometria multidimensional* e que na ausência de congruência, a expressão da continuidade exigiria o emprego da noção de ordem. Isto é, a noção de ordem somente faz sentido se existem os axiomas de pertinência, até porque não há geometrias sem ele.

A ordem caracterizada pelos axiomas de 1 a 3 é o que nomeia os planos euclidiano e afim, e está ligada a existência de retas não secantes (7º axioma de pertinência). Os axiomas de ordem escolhidos por Hilbert são mais simples que os da geometria projetiva, pois trabalham somente com dois pontos básicos e não três. Em geometria projetiva, a ausência de congruência impede o uso das operações com segmentos havendo a necessidade de assegurar a noção de ordem.

. . .

[68] Ele não explicita uma axiomática para a construção da geometria projetiva, por exemplo.

Vamos expor os cinco grupos de axiomas propostos por Hilbert[69] admitindo que os termos indefinidos sejam: *ponto, reta, plano, pertence, está entre e congruência.* Não vamos fazer uma cópia, análise ou descrição do capítulo I do Grundlagen. Apenas destacaremos os axiomas contidos nele e apresentaremos duas conseqüências diretas dos axiomas de ordem, a saber: dois pequenos teoremas e o teorema que mostra que há ordenação dados três pontos sobre a reta. Acreditamos que a lógica contida nestas demonstrações ilustra o pensamento de Hilbert sobre sua axiomática. Aos outros enunciados e demonstrações, convidamos o leitor deste trabalho ao estudo das páginas que compõem o Capitulo I da obra de Hilbert.

I. Axiomas de Incidência

1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.
2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.
3. Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

II. Axiomas de ordem

1. Se um ponto B está entre A e C, então os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A.
2. Para quaisquer dois pontos distintos A e C, existe pelo menos um ponto B pertencente à reta AC tal que B está entre A e C.
3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.

[69] Acrescentamos o axioma das paralelas e os axiomas para a formação uma geometria tridimensional.

4. (Pasch) Sejam A, B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se l intercepta o segmento AB, ela também intercepta o segmento AC ou o segmento BC.

III. Axiomas de Congruência

1. Se A e B são dois pontos distintos numa reta l e A´ é um outro ponto de uma reta l´, não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto B em (um dado lado da reta) l , tais que os segmentos AB, e A´B´ sejam congruentes.

2. Se um segmento A´B´ e um segmento A´´B´´, são congruentes a um mesmo segmento AB, então os segmentos A´B´ e A´´B´´são congruentes entre si.

3. Sobre uma reta l, sejam AB e BC dois segmentos da mesma que, exceto por B não têm pontos em comum. Além disso, sobre uma outra ou a mesma reta l´, sejam A´B´ e B´C´ dois segmentos que, exceto por B não têm pontos em comum. Neste caso, se AB = A´B´ e BC = B´C´ , então AC = A´C´ .

4. Se ABC é um triângulo e se B´C´ é um raio, então existe exatamente um raio A´B´em cada lado de B´C´ tal que A´B´C´=ABC. Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo.

5. Se para dois triângulos ABC e A´B´C´ as congruências AB=A´B´, AC = A´C´ e BAC= B´A´C´ são válidas, então os trianguloa ABC e A´B´C´ são congruentes.

IV. Axioma das Paralelas

1. Seja l uma reta e A um ponto não em l. Então existe no máximo uma reta no plano que passa por A e não intercepta a reta l.

V. Axiomas de Continuidade

1. **Axioma de Arquimedes**: Se AB e CD são segmentos, então existe um número natural n tal que n cópias de CD construídas contiguamente de A ao longo do raio AB passará além do ponto B.

Este axioma diz que podemos encontrar sobre uma reta AB pontos tão perto de B quanto quisermos. Com efeito, tomemos sobre a reta AB um segmento CD tão pequeno o quanto queiramos. B se situa entre dois pontos de modo que sempre é possível obter um segmento congruente a CD.

2. **Axioma da Completude da Reta**: Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma reta com suas relações de congruência e ordem (que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem dos axiomas acima, menos o das paralelas) é impossível.

Para obtermos os Axiomas da Geometria Euclidiana Espacial devemos acrescentar, ainda, os seguintes axiomas:

VI. Axiomas sobre Planos

1. Em todo plano existe ao menos três pontos não colineares.

2. Nem todos os pontos pertencem ao mesmo plano.

3. Três pontos não colineares pertencem a um único plano.

4. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano, então toda a reta está contida no plano.

5. Se dois planos têm em um ponto em comum eles têm um segundo ponto em comum.

4.4.1 – Axiomas de primeira ordem e suas conseqüências

Definição. Um plano de incidência (**P**,**R**) é um *plano ordenado de Hilbert* se existe em **P** uma relação ternária (*ABC*), que se lê "*B entre A e C*", satisfazendo os axiomas de ordem descritos acima.

Vamos reorganizar os axiomas de ordem O_n a fim de podermos escrevê-los com a notação da lógica moderna:

O_1. $\forall A \forall B \forall C\ ((ABC) \rightarrow\ \exists a\ (A, B, C\ \in a))$
O_2. $\forall A \forall B \forall C\ ((ABC) \rightarrow\ A\ \neq B\ \neq C\ \neq A)$
O_3. $\forall A \forall B \forall C\ ((ABC) \rightarrow (CBA))$
O_4. $\forall A \forall B\ (A\ \neq B\ \rightarrow\ \exists C\ (A\ B\ C))$
O_5. $\forall A \forall B \forall C\ ((ABC) \rightarrow\ \sim (ACB)\ \wedge\ \sim (BAC))$
O_6. Axioma de Pasch.

$$\forall A, B, C, \forall a\ \left(\sim \overline{ABC}\ \wedge ABC\ \in a\ \wedge a\ \cap [AB] = \{D\}\ \ \ a\ \cap [BC] = \{E\}\right\}\quad a\ \cap [AC] = \{F\}$$

Para facilitar o enunciado de O_6, vamos dar as definições que se seguem:

Definições.

(1) Dados *A* e *B* (*A* ≠ *B*) chama-se *segmento AB ou intervalo fechado AB,* o conjunto dos pontos *A* e *B* e dos pontos entre A e B, isto é, {*A, B*} ∪ {X / (*AXB*)}. Vamos indicar o segmento *AB* por [*AB*].

(2) Chama-se *intervalo aberto* ao conjunto {X / (AXB)}.Indica-se este intervalo aberto por:]*AB*[.

(3) O conjunto {*AB*} ∪ {X / (*A* X *B*)} indica-se por [*AB*[.

(4) Se *A, B, C* são colineares, anotamos *ABC* e a sua negação por $\sim \overline{ABC}$.

De posse destas definições e notações, podemos reescrever o axioma de Pasch da seguinte maneira:

O_6. *Axioma de Pasch.* [70]

$$\forall A \forall B \forall C \forall a (\sim \overline{ABC} \wedge A,B,C \notin a \wedge a \cap [AB] = \{D\} \rightarrow a\,[AB] = \{D\} \rightarrow a \cap [BC] = \{E\} \vee a \cap [AC] = \{F\})$$

[70] Como o enunciado (*p* → *q* ∨ *r*) ↔ (*p* ∧ ∼ *r* → *q*) é sempre verdadeiro, então, podemos apresentar a proposição a seguir, já que ela aparece frequentemente nas demonstrações.

$$\forall A \forall B \forall C \forall a (\sim \overline{ABC} \wedge A,B,C \notin a \wedge a \cap [AB] = \{D\} \wedge a \cap [BC] = \emptyset \rightarrow a \cap [AC] == \{F\})$$

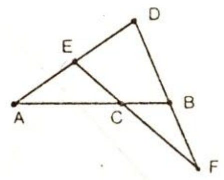
Teorema.

Quaisquer que sejam dois pontos distintos *A* e *B*, existe um ponto *C* que está entre *A* e *B*.

Simbolicamente:

$$\forall A \, \forall B \, (A \neq B \rightarrow \exists C \, (ACB)).$$

Demonstração



1. Existe $E \notin AB$

2. Pelo axioma O_4, existe *D* tal que (*AED*).

3. *D* ≠ *B*, pois se *D* = *B*, *E* ∈ *AB*, Segue-se que existe *F* tal que (*DBF*), para O_4.

4. Os pontos *A*, *B, D* são não-colineares, caso contrário, *E* ∈ *AB*.

5. Considerada a reta *EF*, temos *A, D, B* ∉ *EF*. Com efeito, se *D* ∈ *EF*, *D* = *E*, o que contradiz O_2; se *B* ∈ *EF*, *D* = *E*, o que não pode acontecer por O_2; se *A* ∈ *EF*, *A* = *E*, o que também contradiz O_2.

6. Vale *(DBF)*, então, ~ *(DFB)*, por O_5 e daí *EF* ∩ [*BD*] = ∅.

7. De (*AED*), vem *EF* ∩ [*AD*] = {E}.

8. Finalmente, por *P*, vem *EF* ∩ [*AB*] = {*C*}, isto é, (*ACB*).

Teorema.

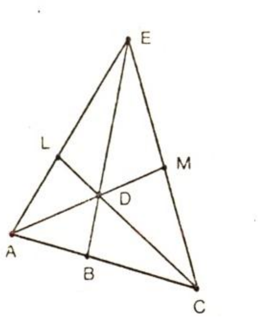
Quaisquer que sejam três pontos dois a dois distintos, *A*, *B*, *C*, se *C* não está entre *A* e *B* e *A* não está entre *B* e *C*, então *B* está entre *A* e *C*.

Em Símbolos.

$$\forall A \forall B \forall C \left(\overline{ABC} \wedge A \neq B \neq C \neq A \wedge \sim (ACB) \wedge \sim (BAC) \rightarrow (ABC)\right).$$

Demonstração

1. Seja $D \notin AB$.



2. Existe E tal que (BDE), por O_4.

3. É fácil verificar que A, B, E são não-colineares e que $E, A, B \notin DC$.

4. De $\sim$ (ACB) e (BDE), vem por P, $CD \cap [AE] = \{L\}$, isto é, (ALE).

5. De modo análogo, $AM \cap [EC] = \{M\}$, isto é, (EMC).

6. Os pontos *A, E, M* são não-colineares, o que é fácil ver e *E, A, M* ∉ *LC*, o que pode ser verificado como exercício. Vale ainda (*ALE*) e, então, *LC* ∩ [*AM*] = {*D*}, isto é, (*ADM*).

7. Finalmente, *A, M, C* são não-colineares e *ED* ∩ [AM] = {D}, isto é, (*ADM*) e *ED* ∩ [AM] ≠ ∅, ou seja, (*CME*) ou, ainda, ~ (*MEC*). Pela proposição *P*, vem *ED* ∩ [AC] = = {B}, ou seja, (*ABC*).

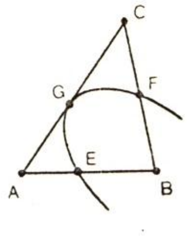
Como conseqüência do teorema acima, temos que: **"Se *A, B, C* são colineares, então ou (*ABC*) ou (*ACB*) ou (*BAC*)".**

Teorema.

Dados três pontos não-colineares *A, B, C*, se uma reta a corta *AB* em E tal que (*AEB*) e corta *BC* em *F* tal que (*BFC*), então, a não corta *AC*.

Em Símbolos.

$$\forall A \forall B \forall C \ \forall a\, (\sim \overline{ABC} \ \wedge \ A,B,C \ \notin a \ \wedge \ a \ \cap [AB] = \{E\} \ \wedge a \ \cap [BC] = F \ \rightarrow a \ \cap [AC] = \emptyset).$$



1. Suponhamos $a \cap [AC] \neq \emptyset$; então, como $A, C \in a$, temos $a \cap [AC] = \{G\}$, isto é, (AGC).

2. Como $E, F, G \in a$, pelo corolário do Teorema 26 temos (EGF) ou (EFG) ou (GEF). Seja (EGF).

3. Temos $F \neq B$ e $E \neq B$ e, também, $\sim \overline{FEB}$, senão $EF = BC = AB$ e daí $\sim \overline{ABC}$, o que contradiz a hipótese. A reta AC é tal que $E, F, G \notin AC$, o que pode ser verificado como exercício.

4. De $a \cap [AB] = \{E\}$, isto é, (AEB), vem $\sim (EAB)$, ou seja, $AC \cap [EB] = \emptyset$.

5. Analogamente, de $a \cap [BC] = \{F\}$, vem $AC \cap [FB] = \emptyset$. Segue-se da afirmação anterior e de 4 que $AC \cap [EF] = \emptyset$ (conseqüência de *P*).

6. Mas, $AC \cap [EF] = \{G\}$, pois vale (EFG), o que é contradição. Disto decorre $a \cap [AC]$ $[AC] = \emptyset$

Este teorema mostra que "ou" no axioma de Pasch é exclusivo, o que não é necessário postular como está feito nas edições do *Grundlagen* anteriores a 1962[71].

[71] Encontramos no capítulo 6 do livro de Benedito Castrucci praticamente todo o primeiro capítulo do *Grundlagen* reescrito, além das demonstrações de teoremas segundo as notações da lógica moderna. Simbologias próprias adotadas foram explicadas e ou definidas para uma melhor compreensão do texto. Assim como Hilbert no *Grundlagen*, Castrucci "pula" alguns passos de suas demonstrações e deixa a cargo do leitor completá-las. Em seu texto *Fundamentos da Geometria: um estudo axiomático do plano euclidiano,* de 1978, Castrucci afirma que o seu objetivo é seguir os passos de Hilbert segundo o *Grundlagen*, para montar o plano euclidiano, passo a passo, seguindo o plano de incidência, para terminar no plano de Euclides. O autor apresenta segundo o método axiomático: o plano afim, os planos afins desarguesiano e não desarguesiano, o plano projetivo, o plano de Hilbert, o plano absoluto, o plano absoluto contínuo e por fim o plano euclidiano. Esta obra, em língua portuguesa, é um excelente texto para entendermos a idéia central de como construir uma demonstração de um teorema, segundo a corrente formalista, além do leitor poder verificar como os diferentes modelos geométricos apresentados se articulam com o plano euclidiano.

4.4.2- Ordenação de pontos de uma reta. Demonstração.

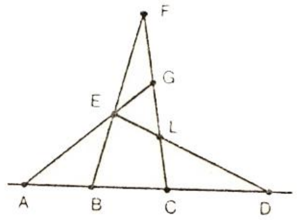
Teorema

Quaisquer que sejam quatro pontos *A, B, C, D* se valem (*ABC*) e (*BCD*), então tem-se (*ACD*) e (*ABD*).

Em Símbolos.

$\forall A \forall B \forall C \ \forall D \ ((ABC) \ \wedge (BCD) \rightarrow (ACD) \wedge (ABD))$

Demonstração de (ACD)



1. Existe $E \notin AB$ e existe F tal que (BEF).

2. Os pontos *B, C, F* não são colineares, senão, $E \in$ AB e, também, $B, C, F \notin AE$, pois se $B, C \in AE$, $E \in AB$ e se $F \in AE$, então, $E = F$, o que não pode acontecer, por causa de (BEF) (axioma O_2).

3. Temos agora $AE \cap [BF] = \{E\}$, isto é, (BEF) e $AE \cap [BC] = \emptyset$ pois $AE \cap BC = \{A\}$ e vale (ABC) e, portanto, $\sim$ (BAC). Daí, por *P*, vem $AE \cap [CF] = \{G\}$, isto é (CGF).

4. De modo análogo, para a reta *DE* e os pontos não-colineares *B, C, F* vem $B, C, F \notin \notin ED$, o que não é difícil mostrar e $ED \cap [BF] = \{E\}$ e $ED \cap [BC] = \emptyset$, por causa de (BCD). Daí, por *P*, vem $ED \cap [FC] = \{L\}$, isto é, (FLC).

5. Os pontos B, E, D não são colineares e $B, E, D \notin FC$ e ainda $FC \cap [BD] = \{C\}$, pois vale (BCD) e $FC \cap [EB] = \emptyset$, uma vez que $FC \cap BF = F$ e $\sim$ (BFE). Segue-se por P, $FC \cap \ \cap [ED] = \{L\}$, isto é, ($ELD$).

6. Os pontos A, G, C são não-colineares e $A, G, C \notin FB$ (verifique!) e $FB \cap [AC] = \{B\}$, pois vale (ABC) e $FB \cap [GC] = \emptyset$, pois não vale (CFG) (por quê?). Disto decorre que $FB \cap \cap [AG] = \{E\}$ por P, isto é, (AEG).

7. Finalmente, A, E, D não são colineares e $A, E, D \notin FC$, bem como $FC \cap [ED] = \{L\}$ e $FC \cap [AE] = \emptyset$, pois $FC \cap AE = \{G\}$ e $\sim$ (AGE). Decorre disto que $FC \cap [AD] = \{C\}$, isto é, (ACD).

4.5- Um pouco mais sobre os grupos de axiomas apresentados por Hilbert

Após termos estudado o *Grundlagen* de Hilbert, queremos destacar fatos importantes que encontramos no texto, ao longo do primeiro capitulo. São eles:

(1) A existência de retas coplanares sem intersecção não são resultados dos axiomas de incidência. Ela é demonstrada como conseqüência dos axiomas de ordem e de congruência.

(2) O terceiro axioma de ordem mostra a diferença fundamental entre pontos alinhados e não alinhados a partir de retas concorrentes: de três retas coplanares concorrentes, uma delas sempre vai cruzar as outras duas. É interessante notar que este axioma exclui a dualidade, e por conseqüência, a presença da geometria projetiva.

(3) O quarto axioma de ordem permite demonstrar os teoremas 3, 4 e 5, e em seguida provar que, sob sua forma primitiva, os três primeiros axiomas de ordem podem ser vistos como teoremas.

(4) No texto de Hilbert a palavra “igualdade” está frequentemente associada à noção de medida e não à noção geométrica de “congruência” como estamos habituados a admitir. Hilbert importa da geometria de Cayley a definição de congruência entre figuras. Para ele, figuras congruentes possuem determinadas igualdades numéricas. Entendemos que são iguais por topologia. Já para a igualdade entre segmentos, a noção somente é consolidada no parágrafo 5 do capítulo 3, quando Hilbert introduz sinais algébricos (+ ou -) aos segmentos, para se diferenciarem no sistema de eixos cartesianos. Posteriormente, coma apresentação dos axiomas de congruência, estas definições se misturam e Hilbert define a congruência entre figuras planas como um caso particular de relação de equivalência.

(5) Os axiomas de congruência apresentam a existência de segmentos congruentes, claro, mas sobre quaisquer retas contidas em quaisquer planos. A propriedade transitiva é muito utilizada além do fato de que, se dois segmentos distintos são congruentes a um terceiro, então estes dois são congruentes entre si.

(6) As seguintes propriedades de congruência de segmentos e de congruência de ângulos são verificadas: existência de congruência propriamente dita, unicidade, reflexividade, simetria, transitividade parcial, transitividade total e possibilidade de efetuar adições gráficas.

(7) O quinto axioma de congruência, o que envolve a congruência entre dois triângulos, está presente na maior parte dos teoremas seguintes, o que nos leva a crer que, sem ele, estas proposições deveriam ser apresentadas como axiomas.

(8) Há cinco teoremas envolvendo ângulos e pontos e linhas interiores que não foram demonstrados por Hilbert, mas de fáceis conclusões. São eles: (a) Existem pontos interiores e pontos exteriores a um ângulo; (b) Se as extremidades de um segmento estão no interior de um ângulo, então todo o segmento está no interior deste ângulo; (c) Uma semirreta que parte do vértice de um ângulo ou está inteiramente no interior deste ângulo ou está iteiramente em seu exterior; (d) Se A é um ponto interior de um ângulo e B é um ponto exterior, todo segmento AB ou contém o vértice do ângulo ou intercepta um de seus lados somente uma vez ; e por fim (e) Dois pontos A e A´, ambos no interior do ângulo ou ambos no exterior, formam um segmento que não contém o vértice do ângulo nem intercepta algum de seus lados.

(9) A demonstração do teorema 22 supõe os pontos B e D distintos. Tal fato já não ocorre na geometria riemaniana (basta supor que num triângulo ABC, os ângulos A e C sejam retos), mas as escolhas dos axiomas de ordem impedem tal reflexão. Neste teorema, Hilbert sugere que o leitor compete a demonstração, mas se o fizer seguindo suas sugestões encontraremos uma contradição com o axioma 3 de congruência.

(10) Uma vez eliminada a geometria riemanianna devido a escolha dos axiomas de ordem, podemos observar que sob a forma apresentada, o teorema das paralelas exclui a geometria de Lobatchevsky.

(11) O teorema de Désargues ensaia um fraco aparecimento no parágrafo vinte e dois, e o axioma das paralelas é aplicado sem a noção prévia de congruência. Assim, a demonstração da existência de pelo menos uma reta não secante, não é mais possível de ser feita, fazendo com que o axioma das paralelas garanta a existência da paralela. A partir da segunda edição, Hilbert nomeia o axioma como *o axioma forte das paralelas.*

(12) Hilbert prova que a relação de paralelismo é transitiva

(13) A definição de circulo não está ligada ao paralelismo e poderia fazer parte do grupo dos axiomas de congruência.

(14) O teorema dos ângulos inscritos está ligado ao teorema angular de Talles, e por conseqüência, ligado ao axioma das paralelas.

(15) O axioma da integridade como dissemos anteriormente, só passou a vigorar no *Grundlagen* após a segunda edição. O encontramos no artigo de Hilbert de título *Über den Zahlbegriff*, publicado no *Jahresbericht der Deutscher Mathematiker-Vereinigung, vol. 8,* de 1900. Há também referências sobre ele na primeira tradução francesa feita por Laugel. É um axioma muito importante quando se estuda números, grandezas e figuras geométricas.

(16) Hilbert define segmentos de reta, os *Streckenzug,* e posteriormente polígonos. Com estas definições parte para a demonstração do teorema dos polígonos de Jordan, cuja demonstração é extremamente grande e extenuante e nada fácil, como Hilbert expressa em seu texto.

Apresentamos a ideia principal do método axiomático de Hilbert, exemplificamos a sua utilização na demonstração de teoremas, evidenciamos suas construções estruturalistas, destacamos o formalismo como pano de fundo do pensamento Hilbertiano acerca dos fundamentos da geometria e analisamos os grupos de axiomas que definem a estrutura sobre a qual Hilbert trabalhou. Temos agora que analisar como Hilbert prova a compatibilidade e a independência destes axiomas. O que faz Hilbert para demonstrar a consistência? O matemático *cria* realmente um novo método? Hilbert introduz realmente *uma nova forma de fazer Matemática?*

Capitulo V

Sobre a compatibilidade e a independência dos axiomas no *Grundlagen*

"É necessário não nos perdermos em viciações do sentimento".

Filipe, A lição da Vigilância

Após ter destacado os grupos de axiomas sobre o qual a geometria se fundamenta, Hilbert examina a *não-contradição* (*Widerspruchsfreiheit*) do sistema criado por ele e a *independência* entre os axiomas destacados. Na visão de Hilbert:

(1) a **não contradição** de um sistema (ou a **consistência** de um sistema) quer dizer que não é possível deduzir teoremas oriundos do conjunto de axiomas escolhidos, de modo que exista pelo menos um destes teoremas que represente a negação de qualquer outro teorema já existente. Isto é, na teoria em questão não obtemos simultaneamente uma proposição e a sua contradição. A consistência é dita *relativa* quando, dados duas teorias axiomáticas *A* e *B*, a consistência de *B* implica na consistência de *A*. Como exemplo podemos citar a Aritmética de Peano, que é consistente relativa à Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

(2) a **independência** de um axioma <u>*A*</u> em relação a um conjunto de axiomas *X* significa que o axioma A não pode ser deduzido de *X.* Isto quer dizer que o sistema formado quando acrescentamos a ele, a negação do axioma <u>*A*</u>, é consistente. São exemplos de teorias independentes: a *teoria dos grupos comutativos,* que é independente da teoria dos grupos (já que há os grupos não comutativos) e o *axioma das paralelas*, independente dos demais axiomas.

Outro conceito importante, já citado anteriormente neste trabalho, é o de **completude**. Uma teoria axiomática é dita completa se para cada proposição P da teoria é posivel deduzir P´ de modo que se tenha um único valor lógico: ou verdadeiro ou falso. Um exemplo de teoria matemática completa é a teoria dos corpos algebricamente fechados[72] de característica fixa, da qual Hilbert se serve no *Grundlagen*. Mas nem tudo são flores, o Teorema da Incompletude de Gödel demostra que as teorias matemáticas habituais da aritmética (como a Aritmética de Peano), se elas são consistentes, então não são completas.

[72] Dizemos que um corpo K é algebricamente fechado se todo o polinômio f(x) $\in$ K[x] de grau positivo admite uma raiz em K. Dizemos que um corpo K tem característica p, se p é o menor número natural tal que para todo x $\in$ K , temos p.x=0. Se p não existe, então a característica de K é zero.

5.1 – Da natureza das demonstrações

As demonstrações de independência necessitam das demonstrações de consistência. Estes tipos de demonstrações sempre recorrem a modelos mais simples do que os modelos analisados. Em geral, os modelos procurados são teorias mais concisas, e livres de contradições internas. O sistema será dito contraditório internamente quando há uma pelo menos uma contradição entre as proposições válidas no modelo. É importante notar que, uma vez provado que uma estrutura mais simples que serviu de modelo para outras estruturas não é completa, então esta teoria também é dita incompleta. Hilbert se utiliza deste processo para provar a consistência do sistema de axiomas da geometria. Baseado na consistência da aritmética de Peano, o matemático prova a consistência dos axiomas propostos em seu trabalho a partir de um modelo formado por números algébricos. Por que a teoria dos números algébricos? Pelo fato dela ser consistente, concisa e incontestável. Assim, *se os axiomas da geometria fossem contraditórios, é porque a teoria dos números também seria.*

Para demonstrar a consistência do sistema usando o axioma da integridade, Hilbert cria um modelo com base nos números reais. A fundamentação teórica do modelo (consistênia do modelo + axioma da integridade) tem toda a sua base na análise matemática. Críticos do trabalho de Hilbert põem em dúvida o seu modelo, pelo fato de ainda se questionar a consistência da análise matemática desde Kronecker, que admite a existência dos inteiros e de suas propriedades como um *dogma*. Mesmo assim Hilbert alcança êxito na prova da independência dos principais grupos de axiomas.

De acordo com Rossier (1971), demonstrar a compatibilidade de uma estrutura lógica fazendo somente referências ao seu corpo teórico é impossível, assim como duvidar desta compatibilidade significa admitir a existência eventual, de um teorema contrário a todo teorema desta estrutura lógica. Mesmo que consigamos demonstrar um teorema afirmando a ausência de contradição de seu corpo teórico, é necessário, para que este teorema seja válido, atribuir a ele um “privilégio”: o de refutar o teorema contrário.

5.2 – Da equivalência lógica à *solidariedade lógica*

Hilbert baseia o estudo da compatibilidade dos axiomas num método que chamaremos de *solidariedade lógica*. Em Ciência, o método utilizado para demonstrar a compatibilidade é o método de equivalência lógica desta ciência com outra ciência

bem fundamentada e estruturada, ciência esta que não cabe motivos para se duvidar de seu corpo teórico. A equivalência lógica (para nós, *solidariedade lógica* daqui por diante) estabelecida por Hilbert foi feita entre a geometria e a aritmética. E seu principal objeto foi demonstrar a consistência da geometria via *solidariedade lógica* com a aritmética para poder demonstrar todos os teoremas da geometria de acordo com o corpo teórico por ele estabelecido.

Ainda hoje não há consonância entre as opiniões dos matemáticos acerca do que se fundamentam as bases da geometria e da aritmética. Há muitos modelos teóricos axiomáticos que procuram fundamentar a geometria, sobretudo após os trabalhos de Hilbert e de Gödel. Ainda encontramos divergências entre pensadores e pesquisadores que se "estranham" ao longo dos anos. Muitos matemáticos acreditam que não seja possível aplicar a *solidariedade lógica* entre as duas porque as dificuldades apresentadas na aritmética para a sua fundamentação são de natureza diferente daquelas da geometria[73]. A aritmética, quando apresenta dúvidas, pode sempre recorrer à própria ciência dos números. Neste caso, é praticamente impossível recorrer a outro ramo da Matemática que não seja a própria aritmética. Já na geometria, há possibilidade de recorrer à outra disciplina da própria Matemática para explicar suas dúvidas. Ora, se o termo é *equivalência lógica* então para estes críticos a relação deveria ser do tipo "se e somente se", isto é, deveria haver a possibilidade da geometria apoiar-se na aritmética e vice-versa. Não concordamos com estes pensadores, uma vez que podemos estabelecer a *solidariedade lógica* partindo das implicações do tipo "se ... então" aliada ao conceito de número e do conhecmento de suas propriedades. Um texto que descreve bem estes pensamentos e o posicionamento de Hilbert sobre a questão foi encontrado por nós, numa tradução francesa das *Actes du Troisième Congrès International de*

---

[73] Vários críticos já expuseram suas dúvidas sobre a natureza da aritmética em oposição a natureza da geometria muito antes da prova do Teorema de Gödel. Nos dias atuais, desde as últimas décadas do século XX, pesquisadores da área de neurociência e da linguagem mostraram inclusive, que independente da natureza filosófico-matemática que envolve o pensamento algébrico e o pensamento geométrico, o próprio cérebro humano traz diferentes estruturas que podem caracterizar o homem como detentor de habilidades aritméticas ou geométricas, indivíduos que "vêem" de forma algébrica, e outros de forma geométrica. Convidamos o leitor destas notas à leitura dos livros *"O Gene da Matemática"* e *"O instinto matemático"*, ambos de Keith Devlin, professor do Centro de Estudos da Linguagem e do Departamento de Matemática da Universidade de Stanford. Mas para Hilbert, não conhecedor destes estudos, o que parecia valer mesmo era a capacidade humana de inferir, concluir e demonstrar a partir de "regras do jogo previamente estabelecidas". O sucesso caberia à habilidade do jogador.

Mathématiciens, que ocorreu em Heidelberg em 1904, intitulado “*Sur les bases de la logique et de la arithmetique”.* No artigo Hilbert critica a posição empirista de matemáticos como Helmholtz, além de criticar matemáticos opositores de Kronecker como E. B. Christoffel que viam a existência dos irracionais como “salvadora” da análise matemática. Hilbert os classificava como oportunistas, pois defendiam idias que não refutavam de forma satisfatória as ideias de Kronecker. Entre os pesquisadores que estudaram profundamente a noção de número, Hilbert destacou respeitosamente Frege por ter fundamentado as leis da aritmética na lógica, em particular, por ter reconhecido as propriedades fundamentais dos números inteiros aliados à significação do raciocínio matemático através da indução completa. Frege aceita uma proposição fundamental: a noção de conjunto é definida e utilizável desde que seja possível dizer para *todo* objeto existente, se ele pertence ou não ao conjunto. Assim, ele não admite restrição alguma à palavra *todo* e expõe ao mundo acadêmico os paradoxos existentes na teoria dos conjuntos, provando que a lógica ainda não havia adquirido um rigor tal que satisfizesse as exigências da teoria dos conjuntos. Com isso, Hilbert afirmava que uma das principais metas dos matemáticos que trabalham com a teoria dos números é, desde então, evitar imediatamente os paradoxos e, quando os encontrar, os explicar. Já Dedekind percebeu claramente as dificuldades de se trabalhar com o conceito de número e estabeleceu uma teoria que prova a existência do infinito importada da filosofia, que descrevemos anteriormente e que foi classificada por Hilbert como um método *transcendental*. O método não foi aceito por Hilbert porque gerou uma contradição a noção de *conjunto de todas as coisas.* Cantor acreditou ter corrigido o método de Dedekind ao criar o conceito de *conjuntos consistentes* e o de *conjuntos inconsistentes*, mas concordamos com Hilbert ao afirmar que esta é uma atitude muito subjetiva para a Matemática já que Cantor não foi preciso na aplicabilidade de seu conceito, deixando de trazer à Matemática uma segurança objetiva. Entendemos e conconcordamos com Hilbert ao dizer que todas estas dificuldades podem ser superadas ao usar o método axiomático, pois ele estabelece rigorosamente e de maneira ordenada a noção de número. Neste artigo, *Sur les bases de la logique...* foi onde vimos pela primeira vez a defesa aberta de Hilbert em relação ao método axiomático, com justificativas precisas sobre os ganhos que o método traz à Matemática. Na parte final do texto, Hilbert comenta que aritmética e lógica andam sempre juntas, e chega a considerar a aritmética como parte da lógica. O nó se dá quando se busca fundamentar a aritmética, pois admitimos como válidos os princípios da lógica. Neste momento Hilbert mostra que num exame mais minucioso destes princípios figurarão noções de conjuntos na aritmética vindos da lógica e que a noção de números é estruturada a partir do desmembramento do conceito de conjuntos. Este é somente um exemplo que nos leva a um círculo vicioso. Para eliminar estes paradoxos, Hilbert propõe que se apresente com clareza e distinção, as propriedades de natureza lógica e as de natureza aritméticas. Hilbert conclui seu artigo fazendo um resumo sobre lógica simbólica e fecha com algumas conclusões a respeito do assunto que não cabe aqui descrever.

5.3 – Sobre a compatibilidade dos axiomas

A equivalência lógica feita por Hilbert para a geometria euclidiana foi embasada na criação de uma geometria analítica cujo domínio é formado pelos números algébricos Ω. Estes números são obtidos partindo do ponto de coordenadas cartesianas (0,1) e resultantes da aplicação das quatro operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação, divisão, além de uma quinta operação $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$, um número finito de vezes. Nesta última expressão, ω também é um número obtido através das cinco operações descritas. Os números do domínio Ω são todos números reais, consequentemente ordenáveis.

Através das representações de pontos no usual plano cartesiano e da definição de reta analiticamente, Hilbert estabeleceu "convenções" tais que os axiomas de ordem são sempre válidos. As "convenções" estabelecidas por Hilbert são as expressões analíticas que podem ser usadas no domínio Ω, sem entrar em conflito com os resultados da geometria euclidiana, além da escolha das corretas sequencias de operações entre elementos de Ω. Esta seleção minuciosa e de caráter cuidadoso, nos chamou atenção quanto à originalidade do pensamento de Hilbert e a certeza de ele sabia aonde iria chegar.

Na geometria analítica criada por Hilbert[74], as relações de incidência, de ordem, de congruência e de paralelismo foram definidas analiticamente e posteriormente, demonstrou que as relações apresentadas desta maneira satisfazem todos os axiomas dos diversos grupos de axiomas por ele destacados. Alguns "ajustes" foram feitos para garantir os resultados, para consolidar conceitos ou mesmo para não deixar dúvidas sobre propriedades geométricas importantes. Por exemplo: se (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ... (x_n, y_n)... são pontos de uma reta,

[74] A geometria analítica de Hilbert difere da geometria de Descartes pelo fato de estar toda embasada nos conceitos de estrutura vindos da álgebra e de tantos outros trazidos da análise matemática envolvendo os números reais. Já Descartes trabalha com segmentos unitários e opera com eles no plano cartesiano. Hilbert "foge" do conceito geométrico de número, dando à sua geometria uma visão nítida da aplicação do rigor da análise na geometria.

dizemos que eles são ordenados se a sequência de números que formam as abscissas (ou a sequência de números que formam as ordenadas) é uma sequência monótona, crescente ou decrescente. Assim, para dar sentido ao quarto axioma de ordem, o axioma de Pasch, Hilbert mostrou a necessidade de decidir quais pontos estão “sobre” a reta, ou “do lado esquerdo” ou “do lado direito” da reta. Acordo feito segundo o critério de estabelecimento de ordem dos pontos sobre uma reta. As operações entre segmentos e ângulos foram efetuadas de acordo com os métodos conhecidos da geometria analítica. Uma translação de segmentos e de ângulos ou uma simetria ao redor do eixo x são representadas respectivamente pelas igualdades:

$$x' = x + a,\ \ y' = y + b \quad ou \quad x' = x,\ \ y' = -y$$

Hilbert destacou no quinto parágrafo do capítulo 2 do *Grundlagen* que a rotação de um ângulo CÔE, onde C tem de coordenadas cartesianas (a,b), O é a origem do sistema e E tem coordenadas cartesiana (0,1), “leva” pontos interiores a CÔE de coordenadas cartesianas (x,y), a pontos de coordenadas (x´,y´) de modo que:

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y \quad \text{e} \quad y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y$$

Nesta parte do texto compreendemos melhor porque ele utiliza números do domínio Ω. Ao mostrar que o número real $\sqrt{a^2+b^2} = b.\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}$ pertence ao domínio

Ω, percebemos que as “convenções” citadas por Hilbert no texto original são admitidas para garantir a validade dos axiomas de congruência (incluindo o axioma de congruência de triângulos) e o axioma de Arquimedes.

Hilbert chama atenção para o fato de que o único axioma que não é satisfeito no domínio Ω é o axioma de integridade[75], mas isso já não ocorre se considerarmos o conjunto dos números reais, pois desta forma obtemos a geometria plana tradicional, onde o axioma da integridade vigora.

Veja como é possível mostrar a validade do axioma de Pasch segundo o método proposto por Hilbert:

“Seja a equação da reta que passa pelos pontos distintos A e B de coordenadas $(x_1, y_1)\, e\, (x_2, y_2)$, respectivamente pode ser escrita como $\frac{x-x_1}{x-x_2} = \frac{y-y_1}{y-y_2} = \mu$. O fato de termos considerado os pontos da reta distintos nos permite concluir que o parâmetro variável μ é diferente de 1. Para os pontos sobre o AB, μ é negativo e positivo para pontos, diferentes de 1,para pontos da reta, exterior ao segmento AB. Agora seja um triângulo ABC de coordenadas (x_1, y_1), $(x_2, y_2)\, e\, (x_3, y_3)$ respectivamente e uma reta d tal que d: *m*x + *n*y + *p = 0*. As equações paramétricas da reta que contém um ponto qualquer A_jB_k podem ser

[75] Sobre a compatibilidade dos axiomas da aritmética recomendamos a leitura do problema número 2 da lista de problemas de Hilbert de 1900.

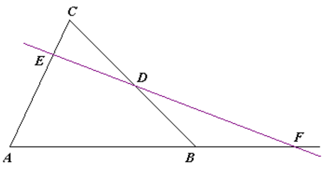
escritas como: $x = \frac{x_j - \mu_{jk} x_k}{1 - \mu_{jk}}$ *e* $y = \frac{y_j - \mu_{jk} y_k}{1 - \mu_{jk}}$. A intersecção da reta d: *m*x + *n*y + *p* = *0 com a reta descrita acima na forma paramétrica o parâmetro* $\mu_{j,k}$ será $\mu_{j,k} = \frac{mx_j + ny_j + p}{mx_k + ny_k + p}$ e o produto dos parâmetros correspondentes as três intersecções é $\mu_{1,2}.\mu_{2,3}.\mu_{3,1} = 1$[76]. Se a reta *d* encontra o triângulo, um dos μ_{jk} é um número negativo, já que o produto é positivo. Desta maneira,conclui-se que dois de seus parâmetros são negativos e a reta *d* encontra dois, e somente dois, lados do triângulo." c.q.d

Tomando por base a aritmética de domínio Ω, Hilbert afirma que todas as possíveis contradições geradas a partir dos axiomas de incidência, ordem, congruência, das paralelas e o primeiro axioma de continuidade deverão aparecer, mas deixa a cargo do leitor a verificação desta afirmativa. Nos parágrafos 8 a 14, Hilbert continua descrevendo a compatibilidade dos axiomas, concluindo que há uma infinidade de geometrias que satisfazem aos grupos de axiomas propostos por

---

[76] Esta igualdade exprime o **Teorema de Menelaus**:

"Sejam D, E, F pontos das retas suportes dos lados BC, CA e AB, respectivamente, do triângulo ABC e diferentes dos vértices. Se esses pontos são colineares, então: $\frac{BD}{DC}.\frac{AF}{FB}.\frac{CE}{EA} = 1$. É importante observar que estas frações são orientadas; por exemplo $\frac{BD}{DC}$ pode ser um número positivo (quando D estiver entre B e C) ou negativa (caso contrário)".

Veja a figura: 

ele (a menos do axioma da integridade como dissemos) e que a geometria cartesiana é a única em que o axioma da integridade é aplicável.

5.4 – Sobre a independência dos axiomas

Observamos ao longo do capítulo que a dedicação e os esforços de Hilbert para justificar a independência dos axiomas foram grandes. Hilbert afirma ser fácil demonstrar a independência dos três primeiros grupos de axiomas dentro de seus respectivos grupos e que os axiomas de incidência e de ordem são a base para mostrar a independência dos outros axiomas.

Hilbert mostra a independência do axioma das paralelas a partir de pontos, retas e planos contidos em uma esfera representada no sistema cartesiano usual da geometria espacial. Para falar de congruência, Hilbert introduz no sistema as transformações lineares que conservam as propriedades da esfera escolhida e segundo "algumas convenções", afirma que sobre este modelo, todos os axiomas são válidos, exceto o axioma IV de Euclides; que diz que "todos os ângulos retos são iguais". A reconhecida não contradição da geometria euclidiana implica a não contradição da geometria sobre a esfera. A seguir Hilbert demonstra os dois teoremas de Legendre apresentando alguns lemas que ajudarão na construção da sua prova.

Ainda partindo das primeiras noções de ponto, reta e plano oriundos da geometria ordinária, Hilbert toma por ângulo, a mesma definição que conhecemos da geometria usual. No entanto, faz-se necessário definir comprimento de um segmento como

$$\sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

para poder concluir que dois segmentos congruentes são aqueles que possuem estes valores iguais, em módulo. Construindo o conceito de medida desta forma, Hilbert mostra a validade dos axiomas: de incidência; de ordem; o 1º, o 2º, e o 4º axiomas de congruência; o axioma das paralelas e o axioma da continuidade. A seguir, cinco teoremas são demonstrados a partir do 5º axioma de congruência. Para verificar a validade do terceiro axioma de congruência, Hilbert escolhe três pontos de uma reta tal que um está entre os outros dois (não há pontos superpostos) e compara seus comprimentos. Vejamos como foi feito:

Seja a reta em IR^3 dada por

$$\begin{cases} x = \lambda.t + \lambda' \\ y = \mu.t + \mu' \\ z = v.t + v' \end{cases}$$

que na linguagem moderna da álgebra linear dizemos que: (x, y, z) são as coordenadas cartesianas dos pontos da reta, (λ, μ, *v*) são as coordenadas de um vetor paralelo a reta e (λ´, μ´, *v*´) são as coordenadas de um ponto pertencente a reta.

Tomando t_1, t_2 e t_3 como valores do parâmetro t correspondentes aos pontos A_1, A_2 e A_3 de modo que $t_2 < t_1$ e $t_3 < t_2$ os comprimentos dos três segmentos são dados por:

$$A_1A_2 = (t_1 - t_2)\,.\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}\right|$$

$$A_2A_3 = (t_2 - t_3)\,.\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}\right|$$

$$A_1A_3 = (t_1 - t_3)\,.\left|\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}\right|$$

Desta forma, é rápido verificar que os comprimentos são do “mesmo tamanho” e que o terceiro axioma de congruência é válido.

Nesta geometria, Hilbert mostra que o 5º axioma de congruência não é sempre satisfeito e exemplifica a afirmativa tomando sobre o plano Z=0 o triângulo de vértices A(1,0), B(-1,0), C(0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$) sendo O(0,0) a origem do sistema. Destaca os triângulos retângulos COB e COA. Destaca que os segmentos AO=OB=OC são de comprimento 1 e que AÔC=CÔB, AO=OC e de OC=OB. Contrariamente ao 5º axioma de congruência, os ângulos OAC e OCB não coincidem-se por superposição. Este é um exemplo em que o primeiro caso de congruência não é satisfeito uma vez que as medidas dos segmentos são diferentes: $AC = \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{2}}}$ e $AB = \sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{2}}}$. O caso LLA_o (lado-lado-ângulo oposto) não é valido para os triângulos AOC e COB. Com a apresentação deste resultado, Hilbert apresenta uma geometria plana na qual todos os axiomas são satisfeitos exceto o 5º axioma de congruência:

”Dados dois triângulos ABC e A´B´C´, as congruências seguintes são satisfeitas:

AB=A´B´, AC=A´C´, <BAC = <A´B´C´ então <ABC=<A´B´C´.

Assim, Hilbert deixa claro para o leitor a verificação de que num dado plano α é possível testar, segundo o seu modelo, a validade de todos os axiomas, exceto os de congruência de segmentos, conhecidos como axiomas lineares do grupo de congruência. O matemático termina a seção definindo comprimento de um segmento como a projeção habitual do próprio segmento sobre um plano β inclinado sobre α, formando um ângulo agudo com este, preparando o leitor para a leitura das questões relativas a independência dos axiomas de continuidade e a introdução à uma geometria não arquimediana.

Hilbert enfatiza que não é somente no conjunto das geometrias não euclidianas que somos capazes de verificar a independência do axioma das paralelas, mas na sua geometria de coordenadas sobre o domínio Ω, a fórmula da distância entre pontos oriunda do Teorema de Pitágoras pode ser usada como modelo para mostrar a independência de muitos de seus outros axiomas. Por exemplo, a consistência da geometria não arquimediana de Veronesi pode ser provada construindo um corpo não arquimediano $F = F[[t]]\,(t << 1)$ de séries de potencias reais ainda em F de modo que $\sqrt{1+\omega^2} = 1 + \frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega^4}{8} + \ldots$ (série binomial) esteja definida para todo $\omega \in$ F. Em termos geométricos, a ideia é construir um corpo não arquimediano que seja uma extensão de F e que satisfaça a propriedade pitagórica.

Usando uma linguagem mais atualizada temos que para obter esse conjunto procurado, basta definir um conjunto que seja a união da função nula com todas as classes de equivalências das funções contínuas com um número finito de raízes. Este conjunto não é um corpo, porém possui uma ordenação natural e um subconjunto de funções que são obtidas a partir de um corpo F, com um número finito de operações: as quatro operações básicas e $\sqrt{1+\omega^2}$. Este subconjunto de F é o corpo não arquimediano pitagórico. O menor corpo com estas características é o corpo enumerável Ω, apresentado por Hilbert no *Grundlagen,* hoje conhecido por corpo de Hilbert.

Nossa crítica a esta parte do texto de Hilbert se põe somente quando o autor escreve *"keine der Axiome durch logische Schltlsse aus der übrigen abgeleitet werden kann"* (nenhum destes axiomas pode ser derivado dos outros via lógica) porque esta afirmativa só poderia ser usada se a consistência tivesse sido verificada para <u>todos</u> os axiomas propostos por ele, o que não ocorreu.

Como vimos, o método matemático para a demonstração da compatibilidade e independência dos axiomas apresentados por Hilbert para a fundamentação teórica da geometria é por demais simples se considerarmos a genialidade matemática do seu criador. Porém, queremos que fique claro que este processo criativo de estabelecimento desta *solidariedade lógica* não corresponde a um rompimento com a matemática que Hilbert vinha fazendo até então, mas sim, uma aplicação de tudo que pudesse defini-lo, ousadamente, como matemático. No entanto, o problema *filosófico* da compatibilidade de uma ciência dedutiva particular não estava resolvido ao se estabelecer esta solidariedade lógica com outra ciência, no caso da geometria, com a aritmética. O problema central da compatibilidade ainda existia, pois algumas lacunas ainda ficaram por serem preenchidas. Estas lacunas é que deram origem a muitas criticas ao trabalho de Hilbert. Tanto por parte dos matemáticos quanto por parte dos filósofos da Matemática, havia uma necessidade de melhor compreensão do que Hilbert apresentava. Durante alguns anos Hilbert e seus assistentes, como Paul Bernays, aprimoraram o texto original do *Grundlagen* na tentativa de tornar mais clara e completa a proposta inicial de axiomatização da geometria via solidariedade lógica com a aritmética. Hoje, reconhecemos que um dos objetivos da obra de Hilbert foi determinar quais teoremas não dependem de um grupo de axiomas ou determinar quais teoremas são equivalentes a um axioma ou mesmo apontar se existe um outro sistema no qual um teorema ou mesmo dois ou mais, possam ser entendidos como axioma(s). Ficou claro também que para mostrar a independência de um teorema em relação a um grupo de axiomas é suficiente exibir um modelo que verifique estes axiomas, sem necessariamente verificar o teorema. O teorema não pode ser entendido como uma conseqüência do grupo considerado.

Paralelamente ao alto grau de complexidade lógica e filosófica contidas na questão do estabelecimento da solidariedade lógica, observamos no trabalho de Hilbert a necessidade dele de mostrar que há uma Matemática que lhe dá credibilidade e segurança para justificar o seu próprio método, assim como para demonstrar resultados mais complexos da geometria. A frequente menção aos cálculos com segmentos seguidos das caracterizações das estruturas algébricas que os contém, as operações que podem ser realizadas com estes segmentos e as propriedades que elas admitem, a equivalência feita entre segmentos e números reais (suas definições a partir de "entidades geométricas") e a adoção de resultados trazidos da análise matemática, o uso de números reais em coordenadas cartesianas para caracterizar objetos geométricos entre tantos outros exemplos, mostram a preocupação de Hilbert em mostrar que nada tem de simples as questões ditas fundamentais da Matemática. Vamos mais além, acreditamos que a sua clareza acerca da Matemática e a sua compreensão desta ciência que cria e manipula verdades pré estabelecidas é tão ampla que lhe permitiu unir ramos diferentes como a álgebra de Klein e a análise num único contexto: o geométrico. Hilbert o fez de maneira simples e elegante, como por exemplo, nas demonstrações que envolvem o axioma de Pasch.

Hilbert, diferente do próprio Pasch, usa somente números inteiros para definir objetos geométricos. Os números, sempre presentes na vida de Hilbert, estão no *Grundlagen* de duas maneiras distintas:

(1) em modelos numéricos, onde números tomados emprestados da análise matemática dão somente uma interpretação aos objetos definidos na teoria axiomática e

(2) nas operações feitas com os segmentos geométricos (porção da reta compreendida entre dois pontos) em que as relações entre números e pontos é o inverso do mostrado pela axiomática de Pasch.

Ficou claro também que o uso dos segmentos é que lhe garantiu a construção de um sistema de números. Porém, a escolha em usar segmentos não nos pareceu natural ou intuitivo. Suscitou-nos intencionalidade no ato. Dizemos isso porque ao associar o segmento ao número é impossível dissociá-lo do conceito de estrutura algébrica e consequentemente de toda a Matemática que Hilbert dominava.

Número associado à geometria dá ao método axiomático de Hilbert um caráter mais abstrato e traz à tona a não exigência da visão para a compreensão da geometria. Através da proposta ousada de Hilbert, a geometria deixa de ser inata, intuitiva, *a priori.* Através de seu método axiomático, Hilbert não se trai. Não trai suas raízes. Não trai a Matemática que sabia fazer. Além disso, vemos no método apresentado por Hilbert, a possibilidade concreta de fazer da geometria uma disciplina autônoma e independente. Cassou-Noguès (2004), afirma que Hilbert admite um sistema de axiomas enunciando as propriedades de relações entre objetos de naturezas desconhecidas, e isto é suficiente para caracterizar o objeto, nada mais.

Este formalismo proposto por Hilbert e já propagado por Pasch, desvincula a geometria da experimentação. Evidencia somente a maneira com que os axiomas atuam sobre as noções geométricas e se o sistema proposto “se comporta bem”, isto é, se é consistente, independente e se admite a completude[77], noção não conhecida por ocasião da publicação do *Grundlagen.* A consistência é necessária para que um sistema seja utilizável e a independência traduz a teoria de uma maneira mais sucinta, mais elegante e econômica. Já a completude tem como objetivo medir a adequação do sistema. Assim, criar um sistema baseado no método axiomático não é trabalhar com experimentação, nem justificar o caráter evidente de um axioma pela experimentação do real. É basicamente demonstrar a consistência dos axiomas que compõem o corpo da teoria. Com o *Grundlagen*, Hilbert fecha, para ele, um ciclo iniciado em 1886 ao tratar da natureza *a priori* da geometria.

---

[77] Um sistema consistente é sintaticamente completo se toda proposição formulada no sistema ou é demonstrável ou é refutada a partir dos axiomas. Os axiomas são fundamentais para as demonstrações. Um sistema consistente é categórico se os modelos são isomorfos: os objetos e as relações entre eles em diferentes modelos são correspondentes. Os axiomas são fortes suficientes para caracterizar um objeto. Por exemplo, o axioma da integridade no G*rundlagen* tem a função de assegurar a categoricidade do sistema.

Após a primeira edição do *Grundlagen*, Hilbert se dedica aos estudos dos fundamentos da Matemática, em especial à Teoria Axiomática. Tenta provar que há uma solidariedade lógica entre toda a Matemática e a aritmética, e por fim, procura estabelecer e demonstrar uma espécie de “igualdade por topologia”, entre as duas. Desejo incompatível com a realidade que se apresentou aos seus olhos, após os resultados em lógica, após 1930.

Capitulo VI

Ainda sobre o *Grundlagen*...

> **"**de que te vale o vestir-se arrumado
> se o corpo amarrotado denuncia
> as dobras mal passadas neste dia
> em que tentaste em vão representar?"
>
> **Ricardo Kubrusly,** Autocrítica

6.1 – O que vem após o estudo da compatibilidade e independência?

No capítulo anterior, ao descrevermos os cinco grupos de axiomas destacados por Hilbert e ao detalharmos as questões que envolvem a compatibilidade e a independência destes axiomas, acabamos por analisar os dois primeiros capítulos do *Grundlagen*. Mas todo o corpo da obra segue a mesma linha de formalidade e rigor matemáticos daqueles apresentados nas cerca de sessenta páginas anteriores.

O capitulo III é intitulado "Teoria das Proporções". Nele há indícios de que o texto tenha sido um aprofundamento do artigo *"Über den Zahlbegriff"*. Acreditamos que o título "Teoria dos segmentos proporcionais" seria mais adequado do que o titulo dado por Hilbert, já que toda a teoria é apresentada em função destes segmentos. Neste capítulo o problema da coordinatização resolvido por Von Staudt e Lüroth é abordado segundo os axiomas da geometria projetiva. Hilbert define *campos ordenados* através de 16 axiomas. A seguir prova um caso especial do

Teorema de Pappus usando círculos auxiliares e cita a prova de F. Schur publicada no Mathematische Annalen 51 (de 1899) como uma prova interessante porque ela não leva em consideração a métrica. Hilbert explora o Teorema de Pascal e desenvolve conceitos relativos à comutatividade da multiplicação em álgebra geométrica em relação a outros axiomas da teoria dos *campos ordenados.* Um dos principais resultados conclusivos do capitulo mostra que as retas e os planos podem ser descritos por meio de equações lineares.

O capitulo IV estuda as áreas de regiões poligonais que dependem do Teorema dos polígonos topológicos de Jordan. Esta teoria é baseada na simples ideia de que uma região poligonal pode ser decomposta em outros polígonos e que dois polígonos que possuem áreas iguais são iguais por decomposição, no sentido de que eles podem ser decompostos em um número finito de triângulos congruentes. Este resultado não era inédito. Desde 1807 esta teoria já havia sido desenvolvida pelo matemático inglês William Wallace e incluído na edição de número 1831 de *Os Elementos de Euclides de Playfair*.

O extenso capitulo V é dedicado ao Teorema de Désargues e o grande feito de Hilbert foi mostrar a versão do teorema para a geometria espacial poderia ser alcançada somente com os teoremas de incidência, de ordem e o axioma das paralelas. Um fato interessante é que para demonstrar este teorema no plano, Hilbert teve que lançar mão dos axiomas de congruência e da construção de uma *geometria não-Desarguesiana* capaz de satisfazer os axiomas de incidência, ordem e o axioma das paralelas.

O capitulo VI é o menor. Suas menos de dez páginas tratam do Teorema de Pascal, das propriedades comutativas da multiplicação em modelos arquimedianos e não arquimedianos e da geometria não Pascaliana. Estas propriedades mostram a impossibilidade de demonstração das propriedades comutativas da multiplicação a partir dos axiomas de incidência, ordem e paralelismo. A demonstração desta impossibilidade é baseada na não comutatividade, linearidade de um anel ordenado Q[s, t] das séries de potencias formais sobre ocampo dos racionais Q.

O último capitulo do *Grundlagen* fala das construções geométricas baseadas nos axiomas de incidência, de ordem, de congruência e no axioma das paralelas. As construções são feitas através do *straightedge e Streckentlbertrager* (segmentos lineares e um par de esquadros), caracterizando a diferença entre as construções com régua e compasso (*Zierkel)* usuais. Acreditamos que nesta parte do texto, Hilbert pensou em fazer uma conexão entre as construções gerais e as funções algébricas pelo fato de trazer a demonstração para o campo das funções racionais. O problema conduz a um sistema de equações algébricas irredutíveis. A necessidade das construções geométricas sob certas condições é posta em evidencia por D. Kijine que estudou a construtibilidade das figuras planas na Universidade de Ütrecht, em 1958. Queremos destacar que o método de Hilbert se aproxima do método de construção de polígonos por meio de régua e compasso de Déscartes e a solução de equações quadráticas.

A obra é um marco do movimento formalista e alguns historiadores da Matemática como o judeu colombiano radicado em Israel Léo Cory e o alemão Michael Toepell chegam a relatar que a "apresentação de Hilbert em 1900 refletia uma total atitude formalista em suas produções acadêmicas e que tal atitude se mostraria durante toda a sua produção acadêmica do século XX".

6.2 – Hilbert sempre foi formalista ao conceber as geometrias?

Antes de Hilbert exibir este caráter formalista aplicado à geometria através do seu método axiomático, seu traço mais marcante foi de um matemático que concebia a geometria como uma ciência empírica. Já descrevemos aqui que todas as publicações matemáticas de Hilbert são incontestáveis e de altíssimo valor acadêmico. Suas notas de aula, sobretudo as da última década do ano 1800 apontam evidências muito interessantes de como seus estudos acerca das geometrias em geral foram se consolidando passo a passo e apresentadas de maneira cada vez mais formais. Seus estudos sobre a disciplina datam desde 1879, ano em que ainda era aluno da escola básica.

Nos escritos de Lindemann que se encontram na Universidade de Göttingen há folders de colóquios de Matemática e de seminários ainda dos tempos de Königsberg. Estes documentos nos dão indícios de que Hilbert sempre esteve em contato com a geometria, porém não era a sua área de interesse. Além disso, os conteúdos dos folders nos mostram o quanto problemas geométricos e a literatura sobre geometria foram constantemente discutidos entre os anos de 1884 e 1893. Erdmann, Reye, Clebsch e Lindemann foram grandes pesquisadores da área e durante estes anos contribuíram com interessantes e importantes textos em axiomatização da geometria e até mesmo em geometria analítica plana e espacial.

Muitos manuscritos das aulas de Hilbert estão preservados e podem ser consultados na Universidade de Göttingen. Nos primeiros cursos de geometria lecionados, em 1891, Hilbert chega a afirmar que a geometria é a ciência que trata das propriedades do espaço e que é essencialmente diferente dos domínios da Matemática pura como a teoria dos números, a álgebra ou a teoria das funções. As disciplinas ministradas por Hilbert foram de geometria linear no inicio de 1889, teoria das curvas algébricas planas em 1890 e geometria projetiva em 1891. Ao todo foram 14 cursos em geometria. Michael Toepell (1986) nos conta que os manuscritos de Hilbert sobre geometria projetiva possuem 109 páginas e que dá uma visão generalizada desta área da Matemática. No corpo do texto há breves discussões teóricas e ou ideias que hoje nos parece pertencer muito mais ao campoda Filosofia da Matemática. Em seus textos, Hilbert chega a classificar a geometria em:

(1) Geometria Intuitiva (Geometrie der Anschauung) – Contém a geometria elementar escolar, a geometria projetiva e a topologia.

(2) Geometria Axiomática (Axiome der Geometrie) - Investiga quais axiomas são usados na geometria intuitiva, estabelecendo sempre que possível um confronto entre esta e as geometrias em que alguns desses axiomas não são válidos.

(3) Geometria analítica – números são associados a pontos e retas a fim de tirar o caráter intuitivo da geometria e reduzir a geometria à análise[78].

---

[78] Hilbert lecionou geometria analítica no verão de 1893/1894 e depois no verão de 1894/1895. No livro *Projektive Geometrie* Hilbert escreve: *“Die Geometrie ist die Lehe von Eigenschaften des raumes (...) Sie beruht auf dem einfachsten Experiment, was man machen kann, nämlich auf dem Zeichmen.”* “Geometria é a teoria das propriedades do espaço (...). ela é baseada no mais simples experimento que pode ser realizado desenho.”

Hilbert acreditava que os resultados destes últimos ramos da Matemática citados eram obtidos através do pensamento matemático puro e que isso não ocorria com a geometria. “As propriedades do espaço são impenetráveis por pura reflexão”, dizia Hilbert. Para ele, a geometria se apresentava através dos sentidos.

Já num curso ministrado em 1894, Hilbert já começa mostrar a sua inclinação para o formalismo e começa a divulgar a apresentação axiomática como a mais adequada para um claro entendimento da estrutura lógica da geometria.

Através das notas de aula de Hilbert podemos concluir que a influencia de Pasch é muito grande. Igualmente significativa é a influencia de Peano, que se deu com a tradução de sua obra (de Peano) para o alemão. Von Staudt publica *Geometrie der Lage*, obra sobre geometria sem nenhuma figura. Durante muito tempo Hlbert planejou suas aulas tentando usar a pureza matemática de Von Staudt. O objetivo era preservar a geometria projetiva livre da ação dos axiomas ou da influencia da geometria analítica.

Já na Física, um dos que mais influenciou Hilbert foi Heinrich Hertz. Compartilhando dos mesmos pensamentos de Hilbert, Hertz havia lançado uma proposta de axiomatização da mecânica. A defesa de Hilbert do método axiomático se estendeu para outras ciências chegando a afirmar que este método transforma qualquer ciência empírica factual em ciência matemática pura.

Outro aspecto interessante que aponta indícios de que Hilbert concebia a geometria como ciência empírica está em seu comentário após o experimento de Gauss na cidade de Hannover, que determinava por meio de sua soma, qual o tipo de geometria descreve o nosso espaço. Mesmo que o experimento levasse Gauss ao encontro da geometria euclidiana, Hilbert afirmou que “num futuro não muito distante, a Matemática apontaria para outro caminho”.

Hilbert continuava seguindo suas reflexões acerca da geometria ao longo de 1899. As ideias que teve para lecionar esta disciplina foram a fôrma que deu origem ao *Grundlagen.* O espírito empirista de Hilbert ainda estava presente e era possível o constatar lendo suas notas de aula. Hilbert dizia que como a mecânica, a geometria nasce da observação, da experiência. Por isso, ela pode ser vista como ciência experimental, mas que havia chegado a hora de organizar toda essa teoria através de meios puramente lógicos, para que a geometria se transformasse em uma matemática pura.

Uma axiomatização adequada para Hilbert era aquela que permitisse derivar todos os teoremas ou resultados conhecidos da disciplina em questão. Os axiomas apresentados no Grundlagen permitiram demonstrar ou construir resultados tantos da geometria euclidiana quanto resultados da não euclidiana. Dependeria somente do sistema de axiomas em que se baseia.

O que não enfocamos é que o restante do livro tem como base os resultados matemáticos a partir do Teorema de Désargues e do Teorema de Pappus. Esta abordagem permitiu Hilbert esclarecer as premissas necessárias para a “coordenalização” da geometria projetiva.

Até a publicação do *Grundlagen* todas as disciplinas e cursos ministrados por Hilbert foram de grande sucesso. No verão de 1894 Hilbert dá um curso com o mesmo título de seu livro “Grundlage der Geometrie”. Neste curso há a tentativa de reprodução, na forma mais pura possível, de um corpo axiomático que desse conta das geometrias não euclidianas. Toepell (1986) diz que suas notas de aula neste ano foram terminadas por sua esposa Käthe. Nestas notas há observações importantes sobre o reconhecimento de objetos matemáticos e trata da independência dos axiomas.

Durante a Páscoa de 1898 Hilbert lecionou a disciplina intitulada *"Über den Begriff des Unendlihen"*. Sua ementa foi inspirada em uma carta datada de 30 de janeiro de 1898 de Friedrich Schurr a Felix Klein. Hilbert escreve uma carta a Hurwitz contando como seria o curso que ministraria. Nesta carta há também uma justificativa sem muita importância dos seus interesses sobre os fundamentos da geometria. As 27 páginas que representam as notas de aula de Hilbert contém as questões mais atualizadas sobre o assunto para a época.

Durante o inverno de 1898/1899 Hilbert leciona a disciplina "*Grundlagen der Euklidischen Geometrie"* e anuncia uma serie de cursos que dará sobre geometria euclidiana. Este anuncio causou o maior espanto na maioria dos alunos, principalmente porque ao contrário de Königsberg, em Göttingen não existia a cultura de estudar geometria. Suas primeiras aulas chamaram ainda mais atenção porque Hilbert falava exatamente de teoria dos números. As aulas subseqüentes amarravam bem todas as questões sobre a consistência e método axiomático. Em março do mesmo ano de 1899 Von Schaper publica *"Elemente der Euklidischen Geometrie" e* influenciou positivamente Hilbert. Nela aparecem discussões sobre os teoremas de Désargues e Pascal. Muitas contribuições para a obra original de Hilbert estão presentes no texto de Von Schaper.

6.3 – Sobre o Festschrift...

Em junho de 1899, para comemoração do Festschrift Hilbert publica o *Grundlagen der Geometrie*. Esta não foi a sua primeira tentativa de “algebrização da geometria”. A primeira ocorreu em 1894 quando ele tentou apresentar uma introdução ao estudo das coordenadas através da banda de Möebius. Neste trabalho Hilbert estabeleceu que é possível operar com números mesmo que estes estejam relacionados a geometria. A partir da publicação deste texto, Hilbert inicia seu processo de confecção de uma teoria axiomática para a geometria. No que seria o futuro Grundlagen, Hilbert omite o axioma da continuidade de Cantor e Weierstrass e estava contente com o conjunto contável que acabara de criar. A introdução dos números reais, o axioma da completude e os axiomas de Cantor e Weierstrass foram vigorosamente discutidos ao longo de várias décadas subseqüentes.

Como vemos, em 1891 Hilbert estava realmente engajado com questões relativas aos fundamentos geometria. Porém, mesmo que seus estudos sejam feitos sobre um tema clássico, Hilbert se distancia do tradicional estudo das propriedades geométricas das figuras, partindo para a criação de seu próprio método axiomático. Hilbert mantém relações estreitas com Klein, Lindemann, Hurwitz, e desde 1894 há registros em cartas endereçadas a estes matemáticos que mostram nos que Hilbert já estava esboçando uma construção axiomática para a geometria. Em 1898 começou estudar com afinco até a publicação, em 1899 do que veio a ser o *Grundlagen der Geometrie.*

Capitulo VII
Considerações Finais

“Eu estava dormindo e me acordaram
E me encontrei, assim,
num mundo estranho e louco...
E quando eu começava a compreendê-lo
Um pouco,
Já eram horas de dormir de novo!”

Mario Quintana, Para Encarar

Antes de tudo queremos deixar registrado nestas linhas que diversos avanços na Matemática e progressos importantes são comprovadamente atribuídos a diversos trabalhos de David Hilbert. A liberdade de criação de um novo conceito, de uma nova teoria a partir da compilação de definições e de teorias pré existentes, todos em harmonia entre si é, a nosso entender, base para o que chamamos aqui de *considerações finais* sobre o que estudamos.

Dizemos nos momentos iniciais desta pesquisa que Hilbert foi o matemático que mais defendeu e aplicou em seus trabalhos os preceitos do formalismo. Em oposição ao formalismo, estava o intuicionismo do holandês Luitzen Egberthus Brouwer[79] e do alemão Kronecker, que defendiam uma Filosofia da Matemática que

[79] Eminente topólogo que seguiu seus estudos em Matemática dedicando-se aos Fundamentos da Matemática

se opunha a existência do infinito atual e do uso indiscriminado dos cardinais infinitos trazidos por Cantor e Dedekind. Para Kronecker e Brouwer o único infinito do qual a Matemática poderia se utilizar era o infinito potencial. A existência de paradoxos na Teoria dos Conjuntos reforçava ainda mais o radicalismo intuicionista. Para os intuicionistas, os matemáticos deveriam aceitar somente argumentos em que fossem possíveis reconhecer um procedimento efetivo e nunca obter demonstrações de existências, baseadas em argumentos do tipo redução ao absurdo, pois estes aplicam a adoção irrestrita e indiscriminada dos cardinais infinitos cantorianos. Hilbert não se via sem as ideias de Cantor e Dedekind quando o assunto era infinito e estes conceitos permearam toda a sua vida acadêmica, mesmo no período em que se dedicou aos fundamentos da Matemática. Um fato importante e que sempre deve ser relembrado pelos leitores deste trabalho é que o primeiro resultado significativo de Hilbert consistia em demonstrar a existência de uma base finita para um sistema de invariantes de qualquer ordem. Este resultado foi uma generalização do *Problema de Gordon*[80] e foi fonte para muitas pesquisas em Teoria dos Invariantes, desde a sua demonstração em 1868 por Paul Gordon, até os nossos dias atuais. A demonstração de Hilbert usou a técnica da redução ao

---

[80] O matemático alemão Paul Albert Gordon (1837-1912) foi aluno de Jacobi na Universidade de Konigsberg. Obteve seu doutoramento pela Universidade de Breslau em 1862 (cidade onde nasceu e atualmente denominada Wrocklaw Poland) e foi professor da Universidade de Erlangen-Nuremberg. Ficou conhecido como o *"rei dos invariantes algébricos"*. Seu resultado mais importante diz que "o anel dos invariantes das formas binárias de um grau fixo, é finitamente gerado". Há uma lenda nestas páginas da História da Matemática que atribui a Gordon uma critica à demonstração de Hilbert. Esta critica é a conhecida frase "*Isto não é Matemática, isto é Teologia."* Acreditamos ser uma lenda, pois não há referência exata sobre a citação e na literatura especifica sobre Teoria dos Invariantes encontramos muitas pesquisas de Gordon sobre o assunto que usam o resultado mais completo de Hilbert. Há historiadores da Matemática que afirmam que Gordon completa algumas conclusões de Hilbert para que o resultado torne-se mais claro e de melhor compreensão leitora.

absurdo e não foi muito bem aceita por seus contemporâneos. A frase "nada nos tirará do paraíso em que Cantor nos colocou", atribuída à Hilbert, é muito conhecida e segundo muitos, proferida por ele em uma conferência de 1926. Esta frase mostra a aceitação, a compreensão e a aplicabilidade completas, por Hilbert, da Teoria dos Infinitos de Cantor em seus trabalhos. Nos capítulos futuros da História dos Fundamentos da Matemática, este assunto rendeu muitas discussões. Algumas destas discussões são de caráter puramente cientifico e outras explicitamente pessoais. Durante os anos 1920 os matemáticos que se dedicavam ao estudo dos Fundamentos da Matemática dividiram-se em dois grupos, os pró e os contra ao pensamento hilbertiano. O que mais chocou a comunidade acadêmica foi a postura de Hermann Weyl, aluno e colaborador de Hilbert, que em 1921 escreveu um artigo em que explicava e defendia as ideias de Brower. Weyl foi extremamente pontiagudo ao criticar os matemáticos que justificavam os resultados sobre os Fundamentos da Matemática baseados na Teoria dos Conjuntos. Hilbert reagiu severamente contra as ideias intuicionistas através de uma série de pequenos artigos que continham refinamentos de origem conceitual para não cair nas armadilhas que os paradoxos contidos na Teoria dos Conjuntos pudessem oferecer. A posição formalista que Hilbert e de seus colaboradores propuseram o uso da Teoria Axiomática, mesclando tópicos da axiomatização da Matemática e da Lógica.

A prática em apresentar e discutir a fundamentação de um assunto em Matemática já era praticada por Hilbert desde seus os resultados com o *Grundlagen*:

(1) procurar a formalização teórica a partir de um número finito de axiomas nos conceitos e nas demonstrações da aritmética (como já conheciam Peano, Russell e Whitehead) e

(2) por fim provar o maior número possível de teoremas a partir deste pequeno número de axiomas, sendo estes compatíveis e independentes.

Porém, Hilbert esbarra futuramente com a necessidade de provar a consistência da própria aritmética, pois somente assim completaria a fundamentação da tese de que a Matemática é consistente e que esta consistência poderia ser estabelecida via equivalência lógica com a aritmética. O ponto chave deste programa era a questão que a prova da consistência seria obtida por meios finitistas. Corry (1997) nos diz que Hilbert e Paul Bernays abordaram estes dois temas em dois níveis: primeiro, um nível de discurso matemático cujos teoremas são demonstráveis por métodos construtivos que não requerem intervenções com argumentos que estão baseados nos infinitos cantorianos. O segundo nível é aquele que se obtém quando tomamos por base uma outra teoria que possui “elementos ideais” como a geometria projetiva que possui *pontos ideais no infinito* ou como a Teoria dos Números de Kummer que agregou os *números ideais* para demonstrar seus teoremas de fatoração única.

Acreditamos que Hilbert tenha se apropriado da existência destes elementos ideais na aritmética para poder estabelecer de uma maneira mais completa o que chamamos em nosso texto de *solidariedade lógica.* Para Hilbert não foi relevante perguntar sobre as origens, a existência e ou o significado de um “elemento ideal”, assim como não houve necessidade de fazer os mesmos questionamentos na geometria projetiva ou na Teoria de Kummer. Isto quis mostrar que estas teorias existem e são consistentes, independentes das respostas dadas a perguntas do tipo: De onde veio? Existem realmente? O que são elementos ideais? Pensamos que se no porvir encontrarmos respostas bem fundamentadas aos questionamentos acerca da necessidade de criação de elementos ideais em qualquer teoria matemática, uma grande contribuição será dada às pesquisas que envolvem as bases epistemológicas da Teoria da Demonstração e para a elucidação de pesquisas que envolvem o pensamento lógico dedutivo humano que se encontra fundamentado na lógica aristotélica tradicional.

Usando somente os métodos finitistas aceitáveis (e inquestionáveis), as demonstrações construídas a partir da "teoria estendida" com a introdução dos elementos ideais, contribuiriam para a composição de uma teoria independente, sem perder a consistência ou criar contradições internas. Com esta finalidade pura e simples, afirmamos sem dúvida que Hilbert "enxergou" a aritmética dos elementos ideais como um sistema de signos, sem significados, sobre os quais podemos operar por meio de regras puramente formais, previamente definidas. A intenção de provar a consistência da aritmética por meios puramente finitistas aliados à existência dos "elementos ideais" é conhecida na História da Matemática como o *Programa Formalista de Hilbert.* Como sabemos, apesar do grande empenho de Hilbert e de seus companheiros na difusão do formalismo na Matemática e do otimismo recebido por seus adeptos, o programa encontra em Kurt Gödel, um muro intransponível: O Teorema da Incompletude. Após os resultados de Gödel, Mancosu (1998) nos afirma que muitos pesquisadores preferem dizer que, ao programa proposto por Hilbert, cabe melhor o nome *Programa Finitista* do que Programa Formalista, devido à própria natureza do método aplicado[81]. Jean Dieudonné,

[81] Atualmente, o formalismo em Matemática tem um sentido diferente do usado no inicio do século XX. Nesta abordagem atual, a interpretação ao vocábulo formalista diz que ele guarda o conceito de que toda a Matemática é senão uma coleção de sistemas dedutivos estritamente abstratos e formais, cujo objetivo é construir teoremas (e demonstrá-los) a partir de verdades previamente concebidas (axiomas) e livres de quaisquer significados intrínsecos. Filosoficamente, este pensamento é uma reação ao pensamento de que a Matemática trata das propriedades de alguns objetos dotado de uma existência objetiva e *exterior ao matemático.*

representante do grupo francês que mais se apropriou do conceito formalista hilbertiano, o grupo *Bourbaki,* compara a técnica de Hilbert a um jogo de xadrez. Neste jogo não faz sentido falar em verdade ou falsidade, mas sim no cumprimento correto de uma sequencia de verdades estipuladas de antemão. Assim, entendemos com mais clareza, o fato de serem indiferentes para Hilbert elementos primitivos da geometria como o ponto, a reta e o plano, ou uma mesa, uma cadeira e uma tulipa de chopp. Para Hilbert, a Matemática é vista como um jogo no qual as peças se apresentam como signos gráficos que se distinguem uns dos outros por sua forma e não por seus conteúdos. É sob esta óptica que damos como exemplo de representante da corrente formalista o nome de Hilbert e não como é entendido nos dias atuais (no sentido filosófico *amplo* da palavra), tão pouco podemos dizer que ele fora formalista durante toda a sua vida como matemático profissional. Um exemplo é a sua visão empiricista da geometria antes da publicação do *Grundlagen.* Neste ponto de nossa pesquisa podemos dizer que Hilbert adota o formalismo ao estabelecer os *conceitos primeiros da geometria através do seu método axiomático e na tentativa de provar a consistência da Matemática.* Entendemos as colocações de diferentes autores ao dizerem que o programa de Hilbert deveria ser chamado de finitista porque é claro que estão olhando *todos os seus períodos de produções matemáticas,* sem fazerem um corte didático nestes períodos como apresentamos em nosso trabalho.

A publicação do *Grundlagen der Geometrie* é o nosso exemplo de resultado da aplicação do método axiomático defendido pelos formalistas, por isso, nós o apresentamos nesta pesquisa. No nosso entendimento, a complexidade do tema reside nele ser visto como uma síntese de estudos de uma corrente de investigação dos Fundamentos da Geometria existente nos últimos anos do século XIX, na qual faziam parte Riemann, Beltrami, Helmholtz, Klein, Veronesi, Pash e outros. Esta corrente de investigação surgiu naturalmente da confluência de estudos entre a geometria projetiva (desde a sua aplicação na pintura do movimento renascentista europeu) e as geometrias não euclidianas, com destaques no nosso texto. A geometria projetiva, desde o tempo de Jean Victor Poncelet, levou para o grupo de matemáticos acima destacado questões e resultados interessantes desta geometria, como a questão da continuidade e a estruturação que embasava as demonstrações de seus teoremas centrais.

A nosso ver, o resultado mais impressionante que as investigações sobre o ponto de confluência entre estas geometrias chegou foi o fato de Felix Klein ter conseguido demonstrar que tanto os planos que definem as geometrias não euclidianas quanto o plano euclidiano são derivados do plano projetivo. Este resultado foi obtido por Klein a partir do momento em que ele introduziu uma métrica especial que serviu a qualquer uma destas geometrias, *sem embasar-se nos conceitos da geometria euclidiana tradicional.* Neste trabalho mostramos que o invariante projetivo de Cayley (invariantes quadráticos) conhecido por *razão cruzada entre quatro pontos* serviu como ferramenta para Klein alcançar parte de seu resultado. Klein não alcança plenamente seu intento porque lhe faltou o axioma da continuidade para fechar suas conclusões. Outros matemáticos como Pasch se dedicaram a completar os resultados de Klein, principalmente aqueles relacionados à estrutura dedutiva da geometria projetiva. Todavia ainda não estava aclarada a questão da continuidade no plano projetivo nem se haveria uma métrica para este plano, diferente das métricas utilizadas no plano euclidiano. Outro questionamento a ser levado em consideração era se a continuidade deveria ser considerada uma propriedade fundamental do espaço ou se poderia ser reduzida à ideias mais fundamentais. Klein e Wilhelm Killing e mais tarde Hermann Ludwig Winer e Friedrich Schur dão um novo direcionamento a questão, dando origem ao “Teorema Fundamental da Geometria Projetiva”, baseando-se somente no Teorema de Désargues e no Teorema de Pappus. A prova do teorema estava baseada na propriedade de invariância projetiva da razão cruzada. Em 1898 Schur demonstra o Teorema de Pappus sem usar os axiomas de continuidade. Cremos fortemente que todas estas questões que envolvem a *continuidade* no plano projetivo incentivaram Hilbert a dedicar-se fortemente às questões relativas aos fundamentos da geometria, uma questão intrinsecamente ligada aos fundamentos da análise matemática, assunto que Hilbert dominava.

Os trabalhos de Pasch também influenciaram Peano, que escreveu sobre os fundamentos da aritmética. Seu principal objetivo era diferenciar e caracterizar o que poderia ser chamado de *termo essencialmente lógico* e *termo essencialmente geométrico*, criando o conceito de sistema independente e aplicá-lo em seu próprio sistema, que por muitos historiadores da Matemática é visto como uma breve variação do sistema axiomático de Pasch. Peano usava o conceito de independência somente para um conjunto de axiomas individuais e não para sistemas inteiros, como Hilbert apresentou ao fundamentar a geometria. Concluímos que mesmo Peano tendo aplicado um método muito semelhante ao aplicado por Hilbert à geometria, não pode ser classificado como logicista nem como formalista já que para ele *todas* as ideias matemáticas eram resultantes diretamente de atividades empíricas. Mario Pieri e Giuseppe Veronesi também foram citados em nosso trabalho. Este último apresentou a existência de uma geometria não arquimediana e aplicabilidade do axioma da continuidade, o que gerou a possibilidade de prova de que o axioma de Arquimedes é independente dos outros axiomas da geometria. Hilbert importa para o *Grundlagen* todos estes questionamentos.

O que chocou os matemáticos da época foi o interesse aparentemente repentino de Hilbert pelos fundamentos da geometria, mas pesquisadores como Michael Toepell e Leo Corry mostraram em suas pesquisas de doutoramento que Hilbert já estava se dedicando ao ensino desta disciplina há alguns anos antes da publicação do *Grundlagen*. Mesmo que Hilbert não publicasse com propriedade nesta área, como o fizera ao pesquisar em Teoria dos Invariantes e em Teoria dos Corpos dos Números Algébricos, o habilidoso matemático consolidou tópicos importantes de fundamentos de geometria de maneira gradual. Mostramos que em um primeiro momento, a geometria era concebida por Hilbert como uma ciência empírica como mostram seus textos: *Projektive Geometrie,* suas notas de aula do verão de 1894, o curso de férias *"Über den Begriff des Unendlichen"* de 1898 e as notas de aula que antecederam o *Grundlagen*, intutiladas *"Grundlagen der Euklidischen Geometrie"*, ministradas no curso de inverno dos anos de 1898/1899.

No primeiro momento, a impressão que o texto de Hilbert deixa é uma tentativa de algebrização da geometria, mas esta ideia se desfaz com a análise da obra. Os interesses de Hilbert com o *Grundlagen* se mostraram diversos em nossa análise. Com sua obra, Hilbert:

(1) reuniu uma quantidade mínima de axiomas, enfatizando que um axioma é uma verdade “que carrega uma só ideia”, o que demonstra a simplicidade de seu sistema axiomático;

(2) mostrou a independência mútua entre os grupos de axiomas e não entre axiomas individuais de diferentes grupos;

(3) enfatizou que os axiomas escolhidos deveriam dar origem a todos os teoremas, sejam eles básicos ou complexos como o Teorema de Pappus e o Teorema de Désargues;

(4) classificou premissas necessárias para a construção de uma geometria de coordenadas que representasse a geometria projetiva, tarefa iniciada anteriormente por outros matemáticos, porém não concluída;

(5) buscou uma *estrutura* (segundo o conceito de estrutura de Klein) para cada teoria conhecida e descreveu as leis que regeriam esta estrutura e

(6) criou um método claro que determina a compatibilidade, a independência e a não contradição dos axiomas que regiam a estrutura.

Baseados em todas estes pontos presentes do texto apresentado por Hilbert no Festscrift de junho de 1899, nas cartas escritas a seus companheiros e em suas notas de aulas, percebemos que Hilbert estava engajado nas questões relativas aos fundamentos da geometria, pelo menos desde o ano de 1891e inferimos que Hilbert realmente não publicou mais artigos em Teoria dos Invariantes, nem em Teoria dos Números Algébricos e Equações Integrais, porém manteve contato constante e estreito com Klein, Lindemann, Hurtwitz e Minkowski escrevendo sobre seu interesse nas questões relativas aos fundamentos da geometria.

Em 1894 estabeleceu uma construção axiomática que garantia a independência dos axiomas da geometria euclidiana e desde então refinou o processo. Hilbert não se preocupou em aplicar o seu método axiomático a outras ciências. Todo o seu trabalho na área de axiomatização se referiu a *estruturas* elaboradas e bem estabelecidas, como a mecânica e outras áreas da Física, além da geometria, claro. Concluímos também que a partir do inverno de 1898, Hilbert trabalhou intensamente no texto que se tornou o nosso exemplo de *solidariedade lógica* entre a geometria e a aritmética através do método axiomático. Porém, após a sua publicação, Hilbert não se mostra interessado pelos desdobramentos que o seu livro produz no cenário mundial. Algumas obras pós *Grundlagen* procuram melhorar criticamente o texto de Hilbert enquanto outras propõem uma estrutura axiomática diferente ou simplesmente estendem os resultados apresentados por Hilbert.

Algumas vezes, Hilbert cita resultados sem mostrar a concepção do pensamento do autor outras vezes cita novas *estruturas* propostas por outros autores, sem justificativa ou demonstração. Esta postura custou a Hilbert muitas críticas e naturalmente, um combate mais ácido às diversas de suas colocações. Mas, em defesa do trabalho de Hilbert, queremos dizer que resultados expressivos e de relativa importância foram apresentados aos círculos matemáticos após a publicação do *Grundlagen,* como:

(a) a Geometria Racional de Halsted;

(b) as criticas de Schur (*Über das dritte Hilbertsche Axiom der Verknupfüng*, de 1907) propondo a reescritura do texto de Hilbert; as criticas de Rosenthal sobre os axiomas de incidência;

(c) o detalhamento sobre falhas e sucessos relativos aos axiomas de congruência nos trabalhos de Meyer (*Über die Kongruenzaxiome der Geometrie*, de 1911);

(d) os resultados de Rosemann (*Der Aufbau der ebenen Geometrie ohne das Symmetrieaxiom*, de 1923*)* e Schmidt (*Die herleitung der Spiegelung aus der ebenen Bewegung*, de 1934*)* que completam as demonstrações esboçadas por Hilbert no apêndice II do *Grundlagen*, sobre congruência de triângulos e posteriormente sobre as geometrias fundamentadas somente nos axiomas de incidência;

(e) a criação da Geometria de Hassenberg *(Begründung der elliptischen Geometrie*, de 1905);

(f) as questões da continuidade associadas aos teoremas de Légendre com a construção da Geometria Semi Euclidiana de Dehn;

(g) as questões filosóficas envolvendo a continuidade e o axioma da integridade;

(h) a Teoria dos Segmentos Proporcionais de J. P. Mollerup *(Die Lehre Von die Geometrichen Proportionen,* de 1903);

(i) os estudos relativos a área de polígonos presentes no artigo de A. Finzel no Mathematische Annalen 72, de 1912 (*Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie);*

(j) os trabalhos de Dehn, Kagan, Bricard, Sydler, entre outros sobre volumes de poliedros;

(k) os fundamentos da geometria segundo Hjelmslev e Schur;

(l) a independência do axioma das paralelas e

(m) a fundamentação das geometrias não desarguesianas.

Diante deste vasto quadro informativo e conclusivo, podemos responder ao questionamento a que esta pesquisa se propôs. Hilbert não rompeu com a álgebra e com a análise para dedicar-se ao estudo dos fundamentos da geometria. Esta transição foi natural. Além disso, a presença fortíssima da análise matemática se faz sempre que precisa lançar mão do axioma da continuidade. Os infinitos cantorianos estão presentes em sua obra, pois não se livra do infinito potencial como propunha Kronecker. A escolha de uma estrutura de domínio Ω, de uma métrica especifica, da escolha das operações aritméticas específicas, das movimentações no plano a partir do ponto de coordenadas (0,1) e de giros, além do uso da estrutura algébrica do corpo números reais em sua própria geometria analítica, demonstram a sua fortíssima relação com a Álgebra Abstrata e com a Teoria dos Invariantes. O conhecimento dos trabalhos de Peano e o domínio da lógica aristotélica o permitiram passear pelos caminhos das demonstrações formais sem dificuldades, com leveza e com o compromisso de complementar e ou expandir resultados já existentes. No nosso entender, o método criado foi simples em considerando a sua genialidade, porém admitimos que teorias simples e grandiosas são combinações afins àqueles que conhecem profundamente um determinado assunto.

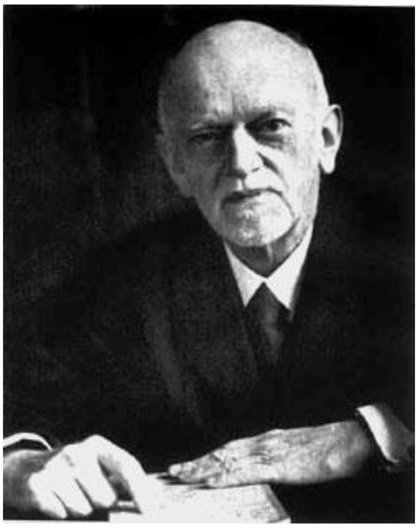
Hilbert se apropriou do estruturalismo (que a ele sempre foi visceral) integralmente, com uma pitada do que muitos chamam de formalismo. Isso para ele “era indolor” e fácil de manusear. O estruturalismo lhe garantiu fazer Matemática. E Matemática bem feita. Análise e álgebra nas veias, de forma brilhante. Hilbert não rompe com a Matemática Pura de forma alguma, tanto que ao estudar os fundamentos da geometria, tenta encontrar através da geometria das coordenadas a explicação mais matemática possível para que valesse o seu método axiomático. No estudo da compatibilidade e independência dos axiomas propostos, O matemático usa com maestria os conceitos vindos da análise e topologia, mascarados por uma “matemática menor”: a geometria analítica em um domínio restrito, a fim de que certos cálculos e propriedades sejam válidos e para que não haja contradições. O que muitos não percebem é que toda a Matemática presente na vida de Hilbert se mostra no *Grundlagen*. Seu método axiomático é recheado de lógica aristotélica e da aplicação do conceito de *estrutura* proposto por Klein. A Matemática o salvou e o garantiu o tão famoso sucesso. Sucesso tão desejado pelos mortais, por isso nada poderia dar errado em sua teoria. Aos olhos da Matemática Pura nada deu errado. E não daria, pois os autores de sua fundamentação teórica eram fortíssimos: Euclides, Cauchy, Weierstrass, Cantor, Dedekind, Lindermann, Pasch, Minkowski, Gordan, Klein...

Sem dúvida que um método novo foi criado, mas não tão original quanto esperava se, não tão a altura de um universalista como Hilbert aos olhos dos matemáticos menores. O que poderia ter faltado a Hilbert? Conhecimento além da lógica do “se então”? Talvez sim para muitos, mas para nós faltou-lhe um pouco de Filosofia da Lógica e lhe sobrou autoconfiança, por isso a necessidade de tantas correções em seu texto e o levantamento de tantos questionamentos propostos por seus opositores. Hilbert conhecia profundamente os conteúdos básicos da aritmética para estabelecer uma *solidariedade topológica* entre ela e a geometria, porém as leis da lógica são um pouco mais profundas, digamos “mais fundamentalistas” e com a terrível necessidade de não se esgotar em explicações para dar uma única explicação. Por isso, a nosso entender, a dificuldade de estabelecer de pronto uma *solidariedade lógica* e ter a geometria e a aritmética. Mas Hilbert seguiu em frente. Passa por esta etapa, mas não pára para rever seus feitos nem para avaliar o efeito que sua obra produz tão pouco sua estrutura em si... e partiu para a concretização do que acreditava muito: estender o resultado obtido para a geometria (a prova de sua consistência via solidariedade lógica com a aritmética) à toda a Matemática. Como diz um velho amigo de nome Ricardo: “Ele tinha a certeza de um resultado que não podia demonstrar e por desejá-lo tanto, ..., cegou-se, ..., mas que outro jeito existe, se não cegar-mo-nos para alcançar o que buscamos: do conhecimento ao amor...”, mas este é um outro capítulo da História dos Fundamentos que eu não quero contar...

Galeria de Fotos

Hilbert em Königsberg

David Hilbert



David Hilbert - Maturidade

Minkowski e Hilbert

Adolph Hurwitz

Felix Klein

Weierstrass

Lindemann

Dedekind, Cantor e Cauchy

Helmholtz

Léopold Kronecker

Centro de Königsberg antes da I Guerra Mundial

Hermann Weyl

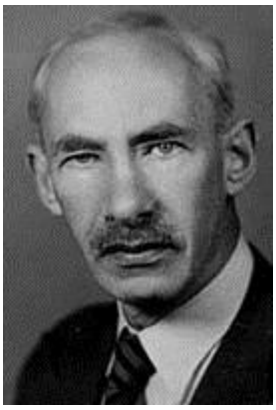
Ernst Zermelo

John Von Neumann

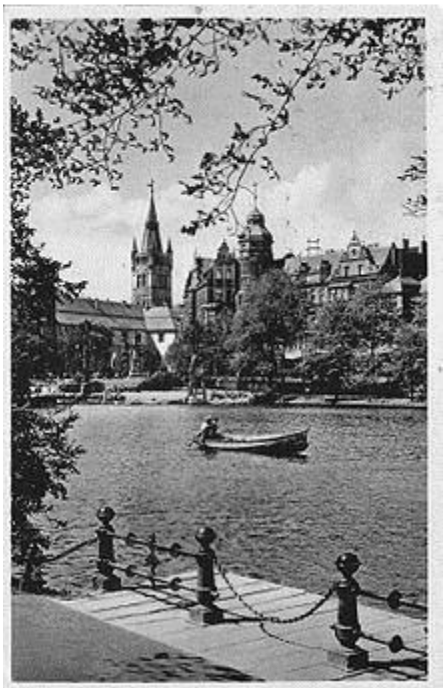
Wilhelm Ackermann

Richard Courant

Emmy Noether



Paul Bernays



Königsberg

Grundlagen der Geometrie

Texto original

A, D und einen Punkt E im Abstande e von O zum zweiten Male von EO in F geschnitten werden, indem $OF = f$, wo F ausserhalb des ursprünglichen Kreises liegen würde, was der obengenannten Voraussetzung widerspräche); EO schneidet diesen zum zweiten Male in F. Man findet nunmehr aus den ähnlichen Dreiecken OAF und OED

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OF}{OD},$$

mithin

$$OF = f.$$

Endlich findet man aus den ähnlichen Dreiecken OBF und OEC

$$\frac{OB}{OE} = \frac{OF}{OC}$$

oder

$$\frac{b}{e} = \frac{f}{c},$$

was zu beweisen war.

9. In den vorstehenden Sätzen ist die ganze Lehre von den Proportionen, die ohne Hülfe des Archimedischen Axioms begründet ist, enthalten. Der Satz 8 ist der sogenannte „Pascal'sche Satz", den Professor Hilbert seiner Nicht-Archimedischen Geometrie zu Grunde gelegt hat; für diesen Satz habe ich also hier einen neuen Beweis geliefert. Die Aufgabe, die ich mir hier gestellt habe, ist früher in dem tiefsinnigen Werke: Grundlagen der Geometrie, des obengenannten Mathematikers, gelöst; ich habe aber einen anderen Weg eingeschlagen und, wie es mir scheint, das Ziel auf einfachere Weise erreicht.

Herr Professor Hilbert macht mich darauf aufmerksam, dass meine Vereinfachung des Beweises des commutativen Gesetzes auch in seiner Darstellung erreicht wird, wenn er das Streckenproduct ab mittelst eines Kreises definirt. Auf die Schenkel eines rechten Winkels O werden die Strecken $OA = a$ und $OC = 1$, endlich $OB = b$ in entgegengesetzter Richtung von OA abgetragen. Die Punkte A, B und C bestimmen einen Kreis, der zum zweiten Male von CO in D geschnitten wird. OD wird dann dem Streckenproducte ab gleich gesetzt; dieses Product ist dann in den Factoren symmetrisch. Natürlicherweise ist der Beweis des Satzes 7 dem Hilbert'schen ganz analog.

Kopenhagen, Januar 1902.

Ueber die Grundlagen der Geometrie.

Von

David Hilbert in Göttingen.

Die Untersuchungen von Riemann und Helmholtz über die Grundlagen der Geometrie veranlassten Lie das Problem der axiomatischen Behandlung der Geometrie unter Voranstellung des Gruppenbegriffes in Angriff zu nehmen und führten diesen scharfsinnigen Mathematiker zu einem System von Axiomen, von denen er mittelst seiner Theorie der Transformationsgruppen nachwies, dass sie zum Aufbau der Geometrie hinreichend sind*).

Nun hat Lie bei Begründung seiner Theorie der Transformationsgruppen stets die Annahme gemacht, dass die die Gruppe definirenden Functionen differenzirt werden können, und daher bleibt in den Lie'schen Entwickelungen unerörtert, ob die Annahme der Differenzirbarkeit bei der Frage nach den Axiomen der Geometrie thatsächlich unvermeidlich ist oder ob die Differenzirbarkeit der betreffenden Functionen nicht vielmehr als eine Folge des Gruppenbegriffs und der übrigen geometrischen Axiome erscheint. Auch ist Lie zufolge seines Verfahrens genöthigt, ausdrücklich das Axiom aufzustellen, dass die Gruppe der Bewegungen von infinitesimalen Transformationen erzeugt sei. Diese Forderungen, sowie wesentliche Bestandtheile der übrigen von Lie zu Grunde gelegten Axiome bezüglich der Natur der die Punkte in gleicher Entfernung definirenden Gleichung lassen sich rein geometrisch nur auf recht gezwungene und complicirte Weise zum Ausdruck bringen und scheinen überdies nur durch die von Lie benutzte analytische Methode, nicht durch das Problem selbst bedingt.

Ich habe daher im Folgenden für die ebene Geometrie ein System von Axiomen aufzustellen gesucht, welches, ebenfalls auf dem Begriff der Gruppe beruhend, nur einfache und geometrisch übersichtliche Forderungen enthält und insbesondere die Differenzirbarkeit der die Bewegung vermittelnden Functionen keineswegs voraussetzt. Die Axiome des von mir

*) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen Bd. 3 Abtheilung 5.

aufgestellten Systems sind als specielle Bestandtheile in den Lie'schen Axiomen enthalten oder, wie ich glaube, aus ihnen sofort ableitbar.

Meine Beweisführung ist völlig von der Methode Lie's verschieden: ich operire vornehmlich mit den von Cantor ausgebildeten Begriffen der Theorie der Punktmengen und benutze den Satz von C. Jordan, wonach jede ebene stetige geschlossene Curve ohne Doppelpunkte die Ebene in ein inneres und ein äusseres Gebiet theilt.

Gewiss sind auch in dem von mir aufgestellten System noch einzelne Bestandtheile entbehrlich; doch habe ich von einer weiteren Untersuchung dieses Umstandes abgesehen aus Rücksicht auf die einfache Fassung der Axiome und vor Allem, weil ich eine verhältnissmässig zu complicirte und geometrisch nicht übersichtliche Beweisführung vermeiden wollte.

Ich behandle im Folgenden die Axiome nur für die Ebene, obwohl ich meine, dass ein analoges Axiomensystem für den Raum aufgestellt werden kann, das den Aufbau der räumlichen Geometrie in analoger Weise ermöglicht*).

Wir schicken eine Erklärung voran.

Erklärung. Wir verstehen unter der *Zahlenebene* die gewöhnliche Ebene mit einem rechtwinkligen Coordinatensystem x, y.

Eine doppelpunktslose und einschliesslich ihrer Endpunkte stetige Curve in dieser Zahlenebene heisse eine *Jordan'sche Curve.* Ist eine Jordan'sche Curve geschlossen, so heisse das Innere des von derselben begrenzten Gebietes der Zahlenebene ein *Jordan'sches Gebiet.*

Der leichteren Darstellung und Fasslichkeit wegen will ich in der vorliegenden Untersuchung die Definition der Ebene enger fassen, als es meine Beweisführung erfordert**), ich will nämlich annehmen, dass es möglich ist, die sämmtlichen Punkte unserer Geometrie zugleich auf die

*) Durch die nachfolgende Untersuchung wird zugleich, wie ich glaube, eine allgemeine die Gruppentheorie betreffende Frage, die ich in meinem Vortrag „Mathematische Probleme", Göttinger Nachrichten 1900, S. 17 aufgeworfen habe, für den speciellen Fall der Gruppe der Bewegungen in der Ebene beantwortet.

**) Betreffs der weiteren Fassung des Begriffes der Ebene vergleiche man meine Note über die Grundlagen der Geometrie in den Göttinger Nachrichten 1902. Die daselbst S. 234—235 aufgestellten Forderungen enthalten, wie mir scheint, für den Fall zweier Dimensionen die scharfe Definition des Begriffes, den Riemann und Helmholtz als „mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit" und Lie als „Zahlenmannigfaltigkeit" bezeichneten und ihren gesammten Untersuchungen zu Grunde legten.

Indem wir die obige engere Definition der Ebene annehmen, wird offenbar die elliptische Geometrie von vornherein ausgeschlossen, da sich deren Punkte nicht in einer mit unseren Axiomen verträglichen Weise auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene abbilden lassen. Es ist jedoch nicht schwer die Abänderungen zu erkennen, die in unserer Beweisführung nöthig sind, wenn man die weitere Fassung des Begriffes der Ebene zu Grunde legt.

im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein bestimmtes Theilsystem derselben umkehrbar eindeutig abzubilden, so dass dann jeder Punkt unserer Geometrie durch ein bestimmtes Zahlenpaar x, y charakterisirt ist. Wir formuliren diese Fassung des Begriffes der Ebene, wie folgt:

Definition der Ebene. Die Ebene ist ein System von Punkten, die sich umkehrbar eindeutig auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein gewisses Theilsystem derselben abbilden lassen.

Zu jedem Punkte A unserer Ebene giebt es Jordan'sche Gebiete, in welchen der Bildpunkt von A liegt und deren sämmtliche Punkte ebenfalls Punkte unserer Ebene darstellen. Diese Jordan'schen Gebiete heissen Umgebungen des Punktes A. Jedes in einer Umgebung von A enthaltene Jordan'sche Gebiet, welches den Punkt A einschliesst, ist wiederum eine Umgebung von A. Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A, so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Ebene sind, so giebt es stets eine Umgebung, die zugleich eine Umgebung von A und eine Umgebung von B ist.

Wir werden die Bewegung als eine umkehrbar eindeutige Transformation unserer Ebene in sich definiren. Offenbar lassen sich von vornherein zwei Arten von umkehrbar eindeutigen stetigen Transformationen der Zahlenebene in sich unterscheiden. Nehmen wir nämlich irgend eine geschlossene Jordan'sche Curve in der Zahlenebene an und denken uns dieselbe in einem bestimmten Sinn durchlaufen, so geht dieselbe bei einer solchen Transformation wiederum in eine geschlossene Jordan'sche Curve über, die in einem gewissen Sinne umlaufen wird. Wir wollen nun in der gegenwärtigen Untersuchung annehmen, dass dieser Umlaufssinn derselbe ist, wie für die ursprüngliche Jordan'sche Curve, wenn wir eine Transformation der Zahlenebene in sich anwenden, aus der eine Bewegung hervorgeht. Diese Annahme*) bedingt folgende Fassung des Begriffes der Bewegung:

Definition der Bewegung. Eine Bewegung ist eine umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Bildpunkte der Zahlenebene in sich von der Art, dass dabei der Umlaufssinn einer geschlossenen Jordan'schen Curve stets derselbe bleibt.

Eine Bewegung, bei welcher der Punkt M ungeändert bleibt, heisst eine Drehung um den Punkt M.

*) Bei Lie ist diese Annahme in der Forderung enthalten, dass die Gruppe der Bewegungen durch infinitesimale Transformationen erzeugt sei. Die entgegengesetzte Annahme würde wesentlich die Beweisführung erleichtern, insofern alsdann die „wahre Gerade" unmittelbar als der Ort derjenigen Punkte definirt werden kann, welche bei einer den Umlaufssinn ändernden Transformation (Umklappung) fest bleiben.

Nach Festlegung des Begriffes „Ebene" und „Bewegung" stellen wir folgende drei Axiome auf:

Axiom I. Werden zwei Bewegungen hintereinander ausgeführt, so ist die dann entstehende Transformation unserer Ebene in sich wiederum eine Bewegung.

Wir sagen kurz:

Axiom I. Die Bewegungen bilden eine Gruppe.

Axiom II. Wenn A und M beliebige von einander verschiedene Punkte der Ebene sind, so kann man den Punkt A durch Drehung um M stets in unendlich viele verschiedene Lagen bringen.

Nennen wir die Gesammtheit derjenigen Punkte, die durch die sämmtlichen Drehungen um M aus einem von M verschiedenen Punkte entstehen, einen *wahren Kreis* in unserer ebenen Geometrie, so können wir die Aussage des Axioms II auch so fassen:

Axiom II. Jeder wahre Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten.

Dem letzten Axiom schicken wir eine Erklärung voran.

Erklärung. Es sei A ein bestimmter Punkt in unserer Geometrie und $A_1, A_2, A_3, \cdots$ irgend ein unendliches System von Punkten; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punkte in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um den Punkt A in der Zahlenebene eine beliebig kleine Umgebung α ab; wenn dann jedesmal irgend welche Bildpunkte A_i in die Umgebung α fallen, so sagen wir, dass es in beliebiger Nähe des Punktes A Punkte A_i gäbe.

Es sei AB ein bestimmtes Punktepaar in unserer Geometrie und $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \cdots$ irgend ein unendliches System von Punktepaaren; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punktepaare in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um die Punkte A und B in der Zahlenebene je eine beliebig kleine Umgebung α bez. β ab; wenn es dann jedesmal Punktepaare A_iB_i giebt, so dass A_i in die Umgebung α und zugleich B_i in die Umgebung β fällt, so sagen wir, dass es in beliebiger Nähe des Punktepaares AB Punktepaare A_iB_i gäbe.

Es sei ABC ein bestimmtes Punktetripel in unserer Geometrie und $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \cdots$ irgend ein unendliches System von Punktetripeln; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punktetripel in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um die Punkte A, B, C in der Zahlenebene je eine beliebig kleine Umgebung α bez. β bez. γ ab; wenn es dann jedesmal Punktetripel $A_iB_iC_i$ giebt, so dass A_i in die Umgebung α und zugleich B_i in die Umgebung β

und C_i in die Umgebung γ fällt, so sagen wir, dass es in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC Punktetripel $A_iB_iC_i$ gäbe.

Beim Gebrauch der Worte „Punktepaar" und „Punktetripel" wird nicht angenommen, dass die Punkte des Punktepaares oder des Punktetripels von einander verschieden sind.

*Axiom III. Wenn es Bewegungen giebt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktetripel ABC genau in das Punktetripel $A'B'C'$ übergeht**).

Die Aussage dieses Axioms wollen wir kurz so ausdrücken:

Axiom III. Die Bewegungen bilden im Endlichen ein abgeschlossenes System.

Wenn wir in Axiom III gewisse Punkte der Punktetripel zusammenfallen lassen, so ergeben sich leicht einige specielle Fälle des Axioms III, die wir noch besonders hervorheben, wie folgt:

Wenn es Drehungen um einen Punkt M giebt, durch welche Punktepaare in beliebiger Nähe des Punktepaares AB in beliebige Nähe des Punktepaares $A'B'$ übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Drehung um M, durch welche das Punktepaar AB genau in das Punktepaar $A'B'$ übergeht.

Wenn es Bewegungen giebt, durch welche Punktepaare in beliebiger Nähe des Punktepaares AB in beliebige Nähe des Punktepaares $A'B'$ übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Bewegung, durch welché das Punktepaar AB genau in das Punktepaar $A'B'$ übergeht.

Wenn es Drehungen um den Punkt M giebt, durch welche Punkte in beliebiger Nähe des Punktes A in beliebige Nähe von A' übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Drehung um M, durch welche A genau in A' übergeht.

Diesen letzten Specialfall des Axioms III werde ich bei der nachfolgenden Beweisführung oftmals in der Weise anwenden, dass für A der Punkt M eintritt**).

Ich beweise nun folgende Behauptung:

Eine ebene Geometrie, in welcher die Axiome I—III erfüllt

*) Es genügt Axiom III für genügend kleine Umgebungen als erfüllt anzunehmen, wie es ähnlich auch bei Lie geschieht; meine Beweisführung lässt sich so abändern, dass nur diese engere Annahme darin benutzt wird.

**) Eine Folgerung, die ich im mündlichen Vortrage in der Festsitzung zur Jubelfeier der Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1901 als besonderes Axiom aufgeführt habe, ist diese: „Irgend zwei Punkte können durch Bewegung niemals in beliebige Nähe zu einander gerathen". Es wäre zu untersuchen, mit welchen Forderungen zusammen diese Forderung das oben aufgestellte Axiom III zu ersetzen im Stande ist.

sind, ist entweder die Euklidische oder die Bolyai-Lobatschefsky'sche ebene Geometrie.

Wollen wir allein die Euklidische Geometrie erhalten, so haben wir nur nöthig, bei Axiom I den Zusatz zu machen, dass die Gruppe der Bewegungen eine invariante Untergruppe besitzen soll. Dieser Zusatz vertritt die Stelle des Parallelenaxioms.

Den Gedankengang meiner Beweisführung möchte ich kurz wie folgt skizziren:

In der Umgebung irgend eines Punktes M wird durch ein besonderes Verfahren ein gewisses Punktgebilde kk und auf diesem ein gewisser Punkt K construirt (§ 1—§ 2) und dann der wahre Kreis $\varkappa$ durch K um M der Untersuchung unterworfen. Es ergiebt sich, dass der wahre Kreis $\varkappa$ eine abgeschlossene und in sich dichte, d. h. eine perfecte Punktmenge ist (§ 3).

Das nächste Ziel unserer Entwickelungen besteht darin, zu zeigen, dass der wahre Kreis $\varkappa$ eine geschlossene Jordan'sche Curve ist*). Dies gelingt, indem wir zunächst die Möglichkeit einer Anordnung der Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ erkennen (§ 4—§ 5), hieraus eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Punkte von $\varkappa$ auf die Punkte eines gewöhnlichen Kreises schliessen (§ 6—§ 7) und endlich beweisen, dass diese Abbildung nothwendig eine stetige sein muss (§ 8). Nunmehr ergiebt sich auch, dass das ursprünglich construirte Punktgebilde kk mit dem wahren Kreise $\varkappa$ identisch ist (§ 9). Weiter gilt der Satz, dass jeder wahre Kreis innerhalb $\varkappa$ ebenfalls eine geschlossene Jordan'sche Curve ist (§ 10—12).

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Gruppe der Transformationen, die bei den Drehungen der Ebene um M ein bestimmter wahrer Kreis $\varkappa$ in sich erfährt (§ 13). Diese Gruppe besitzt folgende Eigenschaften: 1) Jede Drehung um M, die e i n e n Punkt von $\varkappa$ festlässt, lässt alle Punkte desselben fest (§ 14). 2) Es giebt stets eine Drehung um M, die irgend einen gegebenen Punkt von $\varkappa$ in irgend einen anderen Punkt von $\varkappa$ überführt (§ 15). 3) Die Gruppe der Drehungen um M ist eine stetige (§ 16). Diese drei Eigenschaften bestimmen vollständig den Bau der Gruppe der Transformationen aller Drehungen des wahren Kreises in sich. Wir stellen nämlich den folgenden Satz auf: Die Gruppe aller Transformationen des wahren Kreises in sich, die Drehungen um M sind, ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der gewöhnlichen Drehungen des gewöhnlichen Kreises in sich (§ 17—§ 18).

*) Vgl. hierzu die ein ähnliches Ziel verfolgende interessante Note von A. Schönflies: „Ueber einen grundlegenden Satz der Analysis Situs" Göttinger Nachrichten. 1902.

Nunmehr untersuchen wir die Gruppe der Bewegungen *aller* Punkte unserer Ebene bei Drehungen um M. Es gilt der Satz, dass es ausser der Identität keine Drehung der Ebene um M giebt, welche jeden Punkt des wahren Kreises $\varkappa$ festlässt (§ 19). Wir erkennen jetzt, dass *jeder* wahre Kreis eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, und gewinnen Formeln für die Transformationen jener Gruppe aller Drehungen um M (§ 20—§ 21). Endlich folgen leicht die Sätze: Wenn irgend zwei Punkte bei einer Bewegung der Ebene festbleiben, so bleiben alle Punkte fest, d. h. die Bewegung ist die Identität. Jeder Punkt der Ebene lässt sich durch eine geeignete Bewegung in jeden anderen Punkt der Ebene überführen (§ 22).

Unser wichtigstes weiteres Ziel besteht darin, den Begriff der wahren Geraden in unserer Geometrie zu definiren und die für den Aufbau der Geometrie nothwendigen Eigenschaften dieses Begriffes zu entwickeln. Zunächst werden die Begriffe Halbdrehung und Mitte einer Strecke definirt (§ 23). Eine Strecke hat höchstens eine Mitte (§ 24) und wenn man von einer Strecke ihre Mitte kennt, so folgt, dass auch jede kleinere Strecke eine Mitte besitzt (§ 25—26).

Um die Lage der Streckenmitten zu beurtheilen, haben wir einige Sätze über sich berührende wahre Kreise nöthig, und zwar kommt es vor Allem darauf an, zwei zu einander congruente Kreise zu construiren, die sich einander von aussen in einem und nur in einem Punkte berühren (§ 27). Wir leiten ferner einen allgemeinen Satz über Kreise, die sich von Innen berühren, ab (§ 28) und sodann einen Satz über den besonderen Fall, dass der von Innen berührende Kreis durch den Mittelpunkt des berührten Kreises geht (§ 29).

Nunmehr wird eine bestimmte genügend kleine Strecke als Einheitsstrecke zu Grunde gelegt und aus dieser durch fortgesetzte Halbirung und Halbdrehung ein System von Punkten von der Art construirt, dass jedem Punkte dieses Systems eine bestimmte Zahl a zugeordnet erscheint, die rational ist und nur eine Potenz von 2 als Nenner hat (§ 30). Nach Aufstellung eines Gesetzes über diese Zuordnung (§ 31) werden die Punkte des gewonnenen Punktsystems untereinander angeordnet, wobei die früheren Sätze über sich berührende Kreise zur Geltung kommen (§ 32). Jetzt gelingt der Nachweis, dass die den Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ entsprechenden Punkte gegen den Punkt 0 convergiren (§ 33). Dieser Satz wird schrittweise verallgemeinert, bis wir schliesslich erkennen, dass eine jede Punktreihe unseres Systems convergirt, sobald die entsprechende Zahlenreihe convergirt (§ 34—35).

Nach diesen Vorbereitungen gelingt die Definition der wahren Geraden als eines Systems von Punkten, die aus zwei zu Grunde gelegten Punkten entstehen, wenn man fortgesetzt Halbdrehungen ausführt, die

Mitten nimmt und die Häufungsstellen aller erhaltenen Punkte hinzufügt (§ 36). Sodann können wir beweisen, dass die wahre Gerade eine stetige Curve ist (§ 37), keinen Doppelpunkt besitzt (§ 38) und mit irgend einer anderen wahren Geraden höchstens einen Punkt gemein hat (§ 39). Es ergiebt sich ferner, dass die wahre Gerade jeden um einen ihrer Punkte gelegten Kreis schneidet, und hieraus folgt, dass man irgend zwei beliebige Punkte der Ebene stets durch eine wahre Gerade verbinden kann (§ 40). Auch erkennen wir in unserer Geometrie die Congruenzsätze als gültig, wobei sich jedoch zwei Dreiecke nur dann als congruent erweisen, wenn für sie auch der Umlaufssinn der gleiche ist (§ 41).

Hinsichtlich der Lage des Systems aller wahren Geraden gegen einander sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Parallelenaxiom gültig ist oder durch jeden Punkt zu einer gegebenen Geraden zwei Gerade existiren, die die schneidenden Geraden von den nicht schneidenden Geraden abgrenzen. Im ersteren Falle gelangen wir zur Euklidischen, im letzteren zur Bolyai-Lobatschefsky'schen Geometrie (§ 42).

---

§ 1.

Es sei M irgend ein Punkt in unserer Geometrie und zugleich der Bildpunkt in der Zahlenebene x, y. Unser nächstes Ziel ist dann, um M gewisse Punktgebilde zu construiren, die sich schliesslich als die wahren Kreise um M herausstellen werden.

Wir schlagen in der Zahlenebene um M einen „Zahlenkreis" d. h. einen Kreis $\mathfrak{K}$ im Sinne der gewöhnlichen Maassbestimmung, so klein dass sämmtliche Punkte innerhalb und auf diesem Kreise $\mathfrak{K}$ ebenfalls Bildpunkte sind. Dann giebt es gewiss einen zu $\mathfrak{K}$ concentrischen Kreis $\mathfrak{k}$ innerhalb $\mathfrak{K}$ von der Art, dass sämmtliche Punkte innerhalb dieses Kreises $\mathfrak{k}$ bei beliebigen Drehungen um M innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ bleiben.

Um dies zu beweisen, betrachten wir in der Zahlenebene eine unendliche Reihe von concentrischen Zahlenkreisen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \ldots$ mit abnehmenden und gegen 0 convergirenden Radien und nehmen dann im Gegensatz zur Behauptung in jedem dieser Kreise einen Punkt von der Art an, dass derselbe bei einer gewissen Drehung um M an eine ausserhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ gelegene Stelle kommt oder auf die Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}$ rückt: es sei A_i ein solcher im Kreise $\mathfrak{k}_i$ gelegener Punkt, der bei der Drehung Δ_i in eine ausserhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ oder auf demselben gelegene Stelle übergeht. Wir denken uns dann von M nach jedem Punkte A_i den Radius r_i des betreffenden Kreises $\mathfrak{k}_i$ gezogen und fassen die Curve γ_i ins Auge, in welche der Radius r_i bei der Drehung Δ_i übergeht. Da diese Curve γ_i vom Punkte M nach einer gewissen Stelle ausserhalb oder auf dem

Kreise $\mathfrak{K}$ läuft, so muss sie nothwendig die Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}$ treffen; es sei B_i einer dieser Treffpunkte und B eine Verdichtungsstelle der Treffpunkte $B_1, B_2, B_3, \cdots$. Nun sei allgemein C_i derjenige Punkt auf dem Radius r_i, der bei der Drehung Δ_i in B_i übergeht. Da die Punkte $C_1, C_2, C_3, \cdots$ gegen M convergiren, so giebt es nach Axiom III eine Drehung um M, bei welcher der auf der Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt B in den Punkt M übergeht. Dies widerspricht dem vorhin definirten Begriff der Bewegung.

§ 2.

Wie bereits in § 1 festgesetzt, sei $\mathfrak{k}$ ein Zahlenkreis innerhalb $\mathfrak{K}$, der die Bedingungen des in § 1 bewiesenen Satzes erfüllt, so dass sämmtliche Punkte innerhalb $\mathfrak{k}$ bei den Drehungen um M innerhalb $\mathfrak{K}$ bleiben; ferner sei k ein Zahlenkreis innerhalb $\mathfrak{k}$, dessen sämmtliche Punkte bei den Drehungen um M innerhalb $\mathfrak{k}$ bleiben. Dann bezeichnen wir kurz diejenigen Punkte der Zahlenebene, die bei irgend einer Drehung um M aus Punkten innerhalb oder auf k entstehen, als *bedeckt* und diejenigen Punkte, die bei keiner Drehung um M aus Punkten innerhalb oder auf k entstehen, als *unbedeckt*. Aus Axiom III folgt sofort, dass die bedeckten Punkte eine abgeschlossene Punktmenge bilden. Ferner sei A ein bestimmter Punkt ausserhalb $\mathfrak{K}$, welcher Bildpunkt für einen Punkt unserer Geometrie ist. Wenn sich nun ein unbedeckter Punkt A' durch eine Jordan'sche Curve, die aus lauter unbedeckten Punkten besteht, mit A verbinden lässt, so heisse A' *ausserhalb* kk gelegen. Insbesondere sind alle Punkte ausserhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{k}$ gewiss ausserhalb kk gelegene Punkte. Jeder bedeckte Punkt, in dessen beliebiger Nähe sich Punkte ausserhalb kk befinden, heisse ein Punkt *auf* kk. Die Punkte auf kk bilden eine abgeschlossene Punktmenge. Diejenigen Punkte J, die weder Punkte ausserhalb kk noch Punkte auf kk sind, sollen Punkte *innerhalb* kk heissen. Insbesondere sind also alle bedeckten Punkte, zu welchen nicht in beliebiger Nähe unbedeckte Punkte liegen, wie z. B. der Punkt M und die Punkte innerhalb k, sicher innerhalb kk gelegen.

§ 3.

Mit wesentlicher Hilfe unserer Definition der Bewegung, der zufolge die Drehung eine umkehrbare stetige Transformation ist, und indem wir bedenken, dass desshalb A bei den Drehungen um M niemals in das Innere von $\mathfrak{k}$ hineingelangt, erkennen wir, dass bei einer jeden Drehung um M die Punkte ausserhalb kk wieder in Punkte ausserhalb kk, ferner die Punkte auf kk wieder in Punkte auf kk und die Punkte innerhalb kk wiederum in Punkte innerhalb kk übergehen.

Jeder Punkt auf kk ist nach unserer Festsetzung ein bedeckter Punkt, und da wir wissen, dass die Punkte innerhalb k auch innerhalb kk liegen, so schliessen wir hieraus folgende Thatsache:

Zu jedem Punkte K auf kk giebt es gewiss eine Drehung Δ um M, durch welche ein auf der Peripherie von k gelegener Punkt K' nach K

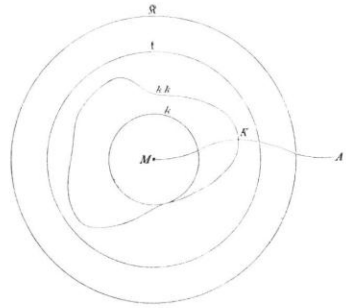


Fig. 1.

gelangt. Der Radius MK' des Zahlenkreises k liefert nach der Drehung Δ um M eine Jordan'sche Curve, welche M mit dem Punkte K auf kk verbindet und die sonst ganz innerhalb kk verläuft.

Zugleich sehen wir, dass mindestens ein Punkt der Peripherie des Zahlenkreises k, nämlich gewiss der Punkt K', auf kk liegt.

Wir verbinden den ausserhalb kk gelegenen Punkt A durch irgend eine Jordan'sche Curve mit M und bezeichnen jetzt mit K denjenigen Punkt dieser Jordan'schen Curve, der auf kk liegt und von der Art ist, dass alle auf der Jordan'schen Curve zwischen K und A gelegenen Punkte ausserhalb kk liegen. Sodann fassen wir das System aller aus K durch Drehungen um M hervorgehenden Punkte, d. h. den wahren Kreis $\varkappa$ um M durch K ins Auge. Die Punkte dieses wahren Kreises sind sämmtlich Punkte auf kk.

Nach Axiom II enthält $\varkappa$ unendlich viele Punkte. Ist K^* eine Verdichtungsstelle von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$, so gehört diese wegen Axiom III ebenfalls zum wahren Kreise $\varkappa$. Bezeichnet K_1 irgend einen Punkt des wahren Kreises $\varkappa$, so folgt, wenn wir diejenige Drehung um M

ausführen, welche K^* in K_1 überführt, dass auch K_1 eine Verdichtungsstelle von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$ ist. Wir erhalten somit den Satz:

Der wahre Kreis $\varkappa$ ist eine abgeschlossene und in sich dichte d. h. eine perfecte Punktmenge.

§ 4.

Das wichtigste Ziel der nächstfolgenden Entwickelungen besteht darin, zu zeigen, dass der wahre Kreis $\varkappa$ eine geschlossene Jordan'sche Curve ist. Es wird sich ferner herausstellen, dass der wahre Kreis $\varkappa$ mit den Punkten auf kk übereinstimmt.

Zunächst beweisen wir, *dass irgend zwei Punkte K_1, K_2 des wahren Kreises $\varkappa$ sich stets untereinander sowohl durch eine Jordan'sche Curve verbinden lassen, die abgesehen von den Endpunkten ganz innerhalb kk verläuft, als durch eine solche Jordan'sche Curve, die abgesehen von den Endpunkten ganz ausserhalb kk verläuft.*

In der That, ziehn wir entsprechend den obigen Ausführungen die Jordan'schen Curven MK_1 und MK_2, welche innerhalb kk den Mittelpunkt M mit K_1 bezüglich K_2 verbinden, und bestimmen auf der Curve MK_1 von M ausgehend den letzten auf MK_2 gelegenen Punkt P, so bildet das Stück PK_1 der ersteren Jordan'schen Curve zusammen mit dem Stück PK_2 der letzteren Jordan'schen Curve eine Verbindungscurve von der zuerst verlangten Art.

Andererseits fassen wir die Drehungen um M ins Auge, bei denen K in K_1 bezüglich in K_2 übergeht; die Punkte A_1 bez. A_2, die dabei aus A entstehen, sind nach § 3 Punkte ausserhalb kk und lassen sich daher ausserhalb kk mit A verbinden. Aus diesen Verbindungscurven und denjenigen Jordan'schen Curven, die bei jenen Drehungen aus der in § 3 construirten Jordan'schen Curve AK entstehen, können wir leicht eine Jordan'sche Curve zwischen K_1 und K_2 zusammensetzen, die ganz ausserhalb kk verläuft.

§ 5.

Der eben gefundene Satz setzt uns in den Stand, die Punkte des wahren Kreises in bestimmter Weise anzuordnen.

Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 irgend vier verschiedene Punkte des wahren Kreises $\varkappa$. Wir verbinden die Punkte $K_1 K_2$ einerseits durch eine Jordan'sche Curve, die ganz innerhalb kk verläuft, und andrerseits durch eine solche, die ganz ausserhalb kk verläuft. Da diese beiden Verbindungscurven einschliesslich ihrer Endpunkte K_1, K_2 stetig sind, so bilden sie zusammen eine geschlossene Jordan'sche Curve. Eine in dieser Weise aus K_1, K_2 hergestellte Curve wollen wir stets mit $\overline{K_1 K_2}$ bezeichnen. Die ganze Zahlenebene zerfällt dann, abgesehen von $\overline{K_1 K_2}$ selbst, nach dem bekannten Jordan'schen Satze in zwei Gebiete, nämlich das Innere und das Aeussere dieser

Curve $\overline{K_1 K_2}$. Betreffs der Lage der Punkte K_3, K_4 sind nun zwei Fälle möglich: erstens die Punkte K_3, K_4 werden durch die Curve $\overline{K_1 K_2}$ nicht getrennt, d. h. sie liegen beide innerhalb oder beide ausserhalb derselben; zweitens die Punkte K_3, K_4 werden durch die Curve $\overline{K_1 K_2}$ getrennt, d. h. es liegt K_3 innerhalb und K_4 ausserhalb der Curve $\overline{K_1 K_2}$ oder umgekehrt.

Verbinden wir die Punkte K_1, K_2 irgend wie anders durch einen innerhalb kk und einen ausserhalb kk verlaufenden Weg, so erkennen wir leicht, dass hinsichtlich der Lage der Punkte K_3, K_4 zu der neu entstehenden geschlossenen Jordan'schen Curve $\overline{K_1 K_2}$ gewiss derselbe Fall eintritt, wie vorhin. In der That, liegt beispielsweise der erste Fall vor, und befinden sich K_3, K_4 beide im Innern von $\overline{K_1 K_2}$, so verbinde man K_3 und K_4 durch einen innerhalb kk verlaufenden Weg W. Sollte derselbe aus dem Inneren der geschlossenen Curve $\overline{K_1 K_2}$ heraustreten, so müsste er im weiteren Verlauf doch schliesslich wieder in dieses Innere zurückführen; es ist daher gewiss möglich den ausserhalb $\overline{K_1 K_2}$ verlaufenden Theil dieses Weges W durch ein nahe an dem betreffenden Stücke von $\overline{K_1 K_2}$ verlaufenden Weg zu ersetzen, welcher ganz innerhalb kk und zugleich innerhalb $\overline{K_1 K_2}$ verläuft, so dass dadurch ein Verbindungsweg W^* zwischen K_3 und K_4 entsteht, welcher ebenfalls ganz innerhalb kk und innerhalb $\overline{K_1 K_2}$ verläuft. Setzen wir aus dem innerhalb kk liegenden Theil der Curve $\overline{K_1 K_2}$ und dem ausserhalb kk liegenden Theil der Curve $\overline{K_1 K_2}$ eine neue geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{\overline{K_1 K_2}}$ zusammen, so ist W^* offenbar ein Weg, welcher K_3 und K_4 innerhalb dieser neuen Curve verbindet, ohne die Curve $\overline{\overline{K_1 K_2}}$ zu durchsetzen, d. h. K_3 und K_4 werden durch $\overline{\overline{K_1 K_2}}$ gewiss nicht getrennt. Hieraus folgt nach entsprechender Construction ausserhalb kk, dass K_3 und K_4 auch durch die Curve $\overline{K_1 K_2}$ nicht getrennt werden. Wir dürfen daher im ersten Falle schlechthin sagen: das Punktepaar K_3, K_4 wird durch das Punktepaar K_1, K_2 nicht getrennt. Dann aber folgt auch im zweiten Falle, dass wir schlechthin sagen dürfen: das Punktepaar K_3, K_4 wird durch das Punktepaar K_1, K_2 getrennt.

Wir führen nun irgend eine Drehung um M aus, durch welche die Punkte K_1, K_2, K_3, K_4 in K_1', K_2', K_3', K_4' übergehen. Bedenken wir, dass die Drehung nach der Definition eine stetige und eindeutige umkehrbare Transformation der Zahlenebene ist und die Punkte innerhalb kk in Punkte innerhalb kk, die Punkte ausserhalb kk in Punkte ausserhalb kk überführt, so folgt, dass die Punktepaare K_1', K_2' und K_3', K_4' von einander getrennt oder nicht getrennt liegen, je nachdem die Punktepaare K_1, K_2 und K_3, K_4 sich einander trennen oder nicht, d. h. *die gegenseitige Lage der Punkte-*

paare K_1, K_2 und K_3, K_4 bleibt bei einer beliebigen Drehung um M unverändert.

Wir leiten in ähnlicher Weise auch die Sätze ab, die den übrigen bekannten Thatsachen hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Punktepaare auf der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises entsprechen, nämlich die Sätze:

Wenn K_1, K_2 durch K_3, K_4 getrennt werden, so werden auch K_3, K_4 durch K_1, K_2 getrennt. Wenn K_1, K_4 durch K_2, K_5 und K_2, K_4 durch K_3, K_5 getrennt werden, so wird auch K_1, K_4 durch K_3, K_5 getrennt.

Dadurch sind wir zu dem folgenden Ergebniss gelangt:

Die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ sind cyklisch, d. h. mit Rücksicht auf die gegenseitige Trennung von Punktepaaren wie die Punkte eines gewöhnlichen Zahlenkreises angeordnet. Diese Anordnung ist gegenüber den Drehungen um den Mittelpunkt M des wahren Kreises $\varkappa$ invariant.

§ 6.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des wahren Kreises $\varkappa$ sprechen wir wie folgt aus:

Zu irgend einem Punktepaar des wahren Kreises $\varkappa$ giebt es stets ein Punktepaar dieses Kreises $\varkappa$, welches jenes Punktepaar trennt.

Wir bezeichnen mit K_∞ einen bestimmt gewählten Punkt des wahren Kreises $\varkappa$ und wollen dann von irgend drei anderen Punkten K_1, K_2, K_3 des wahren Kreises $\varkappa$ sagen, es liege K_2 zwischen K_1 und K_3 bez. nicht zwischen K_1 und K_3, je nachdem das Punktepaar K_1, K_3 durch das Punktepaar K_2, K_∞ getrennt oder nicht getrennt wird.

Wir nehmen im Gegensatz zu der obigen Behauptung an, es seien K und K' zwei Punkte des wahren Kreises $\varkappa$, die durch kein Punktepaar getrennt werden; dann folgt nach unserer Festsetzung gewiss auch, dass zwischen denselben kein Punkt von $\varkappa$ liegt. Ferner dürfen wir annehmen, es gäbe einen Punkt K_1 von der Art, dass das Punktepaar K_1, K' durch das Punktepaar K, K_∞ getrennt wird; anderenfalls nämlich denken wir uns in der folgenden Entwickelung die Rollen der Punkte K und K' mit einander vertauscht. Sodann wählen wir eine unendliche Reihe R von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$, die gegen den Punkt K convergiren, und verbinden K_1 mit K' sowohl durch eine innerhalb kk verlaufende Curve, wie durch eine ausserhalb kk verlaufende Curve. Durch Zusammensetzung dieser beiden Curven erhalten wir eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K_1 K'}$, welche K_∞ von K trennt und daher nothwendig auch von unendlich vielen Punkten der gegen K convergenten Punktreihe R trennen muss. Es sei K_2 einer dieser Punkte der Reihe R. Da K_2 zwischen K_1 und K' liegt und nicht zwischen K und K' liegen darf, so liegt K_2 nothwendig zwischen K_1 und K. Nunmehr verbinden wir analog K_2 mit K' durch eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K_2K'}$ und gelangen ebenso zu einem Punkte K_3 der Reihe R, der zwischen K_2 und K liegt u. s. f. Auf diese Weise erhalten wir *eine unendliche Reihe von Punkten $K_1, K_2, K_3, \cdots$ von denen jeder Punkt zwischen dem vorangehenden und K gelegen ist, und die gegen den Punkt K convergiren.*

Wir führen jetzt eine Drehung um M aus, bei welcher K in einen der Punkte $K_1, K_2, K_3, \cdots$, etwa in K_i übergeht; Der Punkt K' gehe bei dieser Drehung in den Punkt K_i' über. Da unserer Annahme zufolge K und K' durch kein Punktepaar getrennt werden, so ist das gleiche mit dem Punktepaar K_i, K_i' der Fall. Infolgedessen muss K_i' entweder mit K_{i-1} oder mit K_{i+1} zusammenfallen oder zwischen K_{i-1} und K_{i+1} liegen; in jedem Falle liegt also K_i' zwischen K_{i-2} und K_{i+2}, so dass auch die unendliche Reihe von Punkten $K_1, K_3', K_5, K_7', K_9, K_{11}', \cdots$ gewiss von der Beschaffenheit ist, dass jeder Punkt dieser Reihe zwischen dem vorangehenden Punkte und dem Punkte K gelegen ist.

Wir wollen nun zeigen, dass auch die Punkte $K_3', K_7', K_{11}', \cdots$ gegen den Punkt K convergiren müssen. In der That, würden die Punkte $K_3', K_7', K_{11}', \cdots$ einen von K verschiedenen Punkt Q zur Verdichtungsstelle haben, so wähle man aus ihnen einen Punkt K_l' aus. Da $K_{l+4}', K_{l+8}', K_{l+12}', \cdots$ sämmtlich zwischen K_l' und K liegen, so giebt es eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K_l'K}$, die den Punkt K_∞ von den Punkten $K_{l+4}', K_{l+8}', K_{l+12}', \cdots$ und daher auch von Q trennt, d. h. Q liegt nothwendig zwischen K_l' und K. Wegen der Anordnung der Punkte K_i zu den Punkten K_l' folgt hieraus, dass Q auch zwischen den sämmtlichen Punkten $K_1, K_5, K_9, \cdots$ einerseits und K andrerseits liegt. Die geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{QK_\infty}$ müsste mithin sämmtliche Punkte $K_1, K_5, K_9, \cdots$ von K trennen; dann könnten aber die Punkte $K_1, K_5, K_9, \cdots$ nicht gegen K convergiren, wie es sein sollte.

Nunmehr betrachten wir die gegen K convergirenden Punkte $K_3, K_7, K_{11}, \cdots$ und die Punkte $K_3', K_7', K_{11}', \cdots$, die nach dem eben Bewiesenen ebenfalls gegen K convergiren. Da mittelst einer Drehung um M der Punkt K in K_i und zugleich K' in K_i' übergeht, so müsste es nach Axiom III auch eine Drehung geben, welche K und zugleich K' in die gemeinsame Convergenzstelle K überführt. Dies ist aber ein Widerspruch gegen die Definition der Drehung. Somit ist durch Widerlegung unserer Annahme der zu Anfang dieses § 6 aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

§ 7.

Mit Rücksicht auf die Festsetzungen zu Beginn des § 6 fassen wir den wahren Kreis $\varkappa$ unter Ausschluss des Punktes K_∞ als eine geordnete

Punktmenge im Sinne Cantor's auf: *dann besitzt diese Punktmenge den Ordnungstypus des Linearcontinuums.*

Zum Beweise hierfür benutzen wir wesentlich die Schlussweisen, die Cantor in seinen „Beiträgen zur Begründung der transfiniten Mengenlehre"*) entwickelt hat. Zunächst bestimmen wir eine abzählbare Menge S von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$, deren Verdichtungsstellen den wahren Kreis $\varkappa$ selbst ausmachen. Eine solche Menge S besitzt nach Cantor den Ordnungstypus des Systems aller rationalen Zahlen in ihrer natürlichen Rangordnung**) d. h. es ist möglich, den Punkten des Systems S derart die rationalen Zahlen zuzuordnen, dass wenn A, B, C irgend drei Punkte in S sind, von denen B zwischen A und C liegt, von den drei zugeordneten rationalen Zahlen bez. a, b, c allemal die Zahl b ihrem Werthe nach zwischen a und c liegt.

Es sei nun K irgend ein Punkt des wahren Kreises $\varkappa$, welcher nicht dem System S angehört; sind dann A, B Punkte von S, so nennen wir A, B auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite von K gelegen, je nachdem K zwischen A und B oder nicht zwischen A und B liegt. Uebertragen wir diese Festsetzung von den Punkten des Systems S auf die denselben zugeordneten rationalen Zahlen, so erhalten wir unter Vermittlung des Punktes K einen bestimmten Schnitt im Sinne Dedekind's durch das System der rationalen Zahlen: wir ordnen dem Punkte K die durch diesen Schnitt definirte irrationale Zahl zu.

Es kann nicht zwei verschiedene Punkte K und K' auf $\varkappa$ geben, denen die gleiche irrationale Zahl zugeordnet erscheint. In der That, construiren wir eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{KK'}$ und sei H irgend ein zwischen K und K' und folglich innerhalb $\overline{KK'}$ gelegener Punkt von $\varkappa$, so muss es, da H eine Verdichtungsstelle von Punkten des Systems S ist, gewiss auch einen Punkt A in S geben, der innerhalb $\overline{KK'}$ und daher auch zwischen K und K' liegt. Die zu A gehörige rationale Zahl a bedingt daher jedenfalls eine Verschiedenheit der Schnitte, die unter Vermittelung der Punkte K und K' entstanden sind.

Wir wollen endlich zeigen, dass es auch umgekehrt zu jeder irrationalen Zahl α einen Punkt K auf $\varkappa$ giebt, dem diese zugeordnet erscheint. Zu dem Zwecke sei $a_1, a_2, \cdots$ eine Reihe zunehmender und $b_1, b_2, b_3, \cdots$ eine Reihe abnehmender Zahlen, deren jede gegen α convergirt. Man construire die diesen Zahlen zugehörigen Punkte $A_1, A_2, A_3, \cdots$ bez. $B_1, B_2, B_3, \cdots$ und bezeichne mit K irgend eine Verdichtungsstelle dieser Punkte $A_1, A_2, A_3, \cdots, B_1, B_2, B_3, \cdots$. Der Punkt K gehört dann nothwendig

*) Diese Annalen Bd. 46, vgl. insbesondere § 11.

**) Cantor l. c. § 9.

der Zahl α zu. Denn wenn wir allgemein eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{A_iB_i}$ construiren, so liegen die Punkte $A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \cdots, B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, \cdots$ und folglich auch der Verdichtungspunkt K innerhalb $\overline{A_iB_i}$ d. h. zwischen den Punkten A_i, B_i. Der unter Vermittlung von K entstehende Schnitt ist mithin kein anderer als derjenige, der die Zahl α bestimmt.

Betrachten wir nun die Punkte auf der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises mit dem Radius 1 und ordnen einem dieser Punkte das Zeichen $\pm\infty$ und den Punkt K_∞ zu, den übrigen Punkten dagegen in stetiger Folge die sämmtlichen reellen Zahlen und diesen wiederum die entsprechenden Punkte des wahren Kreises $\varkappa$, so gelangen wir zu folgendem Resultat: *Die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ lassen sich unter Erhaltung ihrer Anordnung umkehrbar eindeutig auf die Punkte der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises mit dem Radius 1 abbilden.*

§ 8.

Um das in § 4 bezeichnete Ziel zu erreichen, bleibt nur noch die Stetigkeit der gewonnenen Abbildung d. h. die Lückenlosigkeit des wahren Kreises $\varkappa$ zu zeigen übrig. Zu dem Zwecke denken wir uns die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ durch die Coordinaten x, y der Zahlenebene und andererseits die Punkte des Zahlenkreises mit dem Radius 1 durch den Bogen t von einem bestimmten Anfangspunkte an bestimmt: dann haben wir zu beweisen, dass x, y stetige Functionen von t sind.

Es seien nun $t_1, t_2, t_3, \cdots$ irgend eine Reihe gegen t convergirender entweder sämmtlich wachsender oder sämmtlich abnehmender Werthe und $K_1, K_2, K_3, \cdots$ seien bez. die diesen Parameterwerthen zugeordneten Punkte des wahren Kreises $\varkappa$, während der Werth t einem Punkte K auf $\varkappa$ entsprechen möge. Es sei ferner Q eine Verdichtungsstelle der Punkte $K_1, K_2, K_3, \cdots$. Construiren wir allgemein eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K_iK}$, so liegen nothwendig die Punkte $K_{i+1}, K_{i+2}, K_{i+3}, \cdots$ und folglich auch deren Verdichtungsstelle Q innerhalb $\overline{K_iK}$ d. h. es liegt auch der Punkt Q zwischen K_i und K; demnach muss sich auch der zu Q gehörige Werth des Parameters t allgemein zwischen t_i und t befinden. Der letztere Widerspruch löst sich nur, wenn Q und K zusammenfällt; mithin convergiren die Punkte $K_1, K_2, K_3, \cdots$ gegen den Punkt K. Damit ist die Stetigkeit der Function x, y vom Parameter t völlig bewiesen und es folgt eine Thatsache, die wir in § 4 als das erste wichtige Ziel unserer Entwickelung hingestellt haben, nämlich der folgende Satz:

Der wahre Kreis $\varkappa$ ist in der Zahlenebene eine geschlossene Jordan'sche Curve.

§ 9.

Wir wissen, dass die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ sämmtlich zu den Punkten auf kk gehören; es wird sich auch zeigen, dass diese sämmtlich auf $\varkappa$ liegen, so dass der weitergehende Satz gilt:

Der wahre Kreis $\varkappa$ ist identisch mit den Punkten auf kk; die innerhalb $\varkappa$ liegenden Punkte sind zugleich die Punkte innerhalb kk und die ausserhalb $\varkappa$ liegenden Punkte sind zugleich die Punkte ausserhalb kk.

Um diesen Satz zu erkennen, zeigen wir zunächst, dass der Punkt M, der „Mittelpunkt" des wahren Kreises $\varkappa$ mit jedem Punkte J innerhalb $\varkappa$ durch eine stetige Curve verbunden werden kann, ohne dass dabei der wahre Kreis $\varkappa$ überschritten wird.

In der That, ziehen wir durch J irgend eine gewöhnliche Gerade in der Zahlenebene, eine sogenannte „Zahlengerade", so seien K_1 und K_2 die ersten Punkte dieser Zahlengeraden, die auf $\varkappa$ liegen, nach den beiden Richtungen hin von J aus gerechnet. Da K_1 und K_2 auch Punkte auf kk sind, so können sie mit M durch je eine Jordan'sche Curve MK_1 bez. MK_2 verbunden werden, die ganz innerhalb kk verlaufen und daher gewiss nicht den wahren Kreis $\varkappa$ überschreiten. Trifft eine dieser Jordan'schen Curven das Geradenstück K_1K_2 etwa im Punkte B, so bildet das Curvenstück MB mit dem Geradenstück JB zusammen den gesuchten Verbindungsweg. Im entgegengesetzten Falle bilden MK_1 und MK_2 zusammen mit dem Geradenstück K_1K_2 eine geschlossene Jordan'sche Curve γ. Da diese Curve γ ganz innerhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{k}$ liegt, so lässt sich der ausserhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt A gewiss nicht mit einem Punkte innerhalb γ verbinden, ohne dass dabei ein Punkt der Curve γ überschritten wird. Die Curve γ besteht nun aus Punkten innerhalb kk, aus Punkten auf kk und aus Punkten innerhalb $\varkappa$. Da die letzteren Punkte von A aus nur durch Ueberschreitung eines Punktes auf $\varkappa$, der ebenfalls ein Punkt auf kk ist, erreicht werden kann, so liegt das ganze innerhalb γ gelegene Gebiet nothwendig auch innerhalb kk. Verbinden wir also M mit J durch einen stetigen innerhalb γ verlaufenden Weg, so überschreitet dieser Weg den wahren Kreis $\varkappa$ sicher nicht und ist mithin von der gewünschten Art.

Wir schliessen daraus zunächst, dass M innerhalb $\varkappa$ liegt, d. h. *der Mittelpunkt M des wahren Kreises $\varkappa$ liegt innerhalb desselben.*

Da ferner alle Punkte auf kk mit M durch eine Jordan'sche Curve verbunden werden können, die ganz innerhalb kk verläuft und also $\varkappa$ gewiss nicht trifft, so liegen alle Punkte auf kk nothwendig auf $\varkappa$ oder innerhalb $\varkappa$. Gäbe es einen Punkt P auf kk, der innerhalb $\varkappa$ liegt, so könnte der ausserhalb $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt A nicht mit Punkten in beliebiger

Nähe von P verbunden werden, ohne dass dabei ein Punkt von $\varkappa$ überschritten wird; da aber jeder Punkt von $\varkappa$ zu den bedeckten gehört, so könnte P nicht ein Punkt auf kk sein; dies ist ein Widerspruch. Alle Punkte auf kk liegen also zugleich auf $\varkappa$, womit die obige Behauptung völlig erwiesen ist.

§ 10.

Das Punktgebilde kk ist in § 2 durch eine gewisse Construction aus dem Zahlenkreise k hervorgegangen. Da der Zahlenkreis k, wie in § 3 gezeigt worden ist, mindestens einen Punkt auf kk enthält und ganz auf oder innerhalb kk liegt und die Punkte auf kk nach § 9 nichts anderes als der wahre Kreis $\varkappa$ sind, so haben wir in der obigen Construction zugleich ein Mittel, um aus dem Zahlenkreise k einen wahren Kreis $\varkappa$ zu construiren, welcher eine geschlossene Jordan'sche Curve ist und den Zahlenkreis k umschliesst, diesen von aussen berührend.

Durch eine geringe Abänderung des früheren Verfahrens, nämlich durch eine Vertauschung der Rollen, die den Punkten innerhalb und ausserhalb k zugetheilt worden sind, können wir aus dem Zahlenkreise k noch einen anderen wahren Kreis construiren: wir bezeichnen kurz diejenigen Punkte der Zahlenebene, die bei irgend einer Drehung um M aus Punkten ausserhalb oder auf k entstehen, als *bedeckt;* alle andern Punkte dagegen als *unbedeckt.* Wenn nun ein unbedeckter Punkt sich durch eine Jordan'sche Curve, die aus lauter unbedeckten Punkten besteht, mit M verbinden lässt, so heisse dieser Punkt *innerhalb* kkk. Die Grenzpunkte dieser Punkte innerhalb kkk heissen Punkte *auf* kkk und alle übrigen Punkte heissen *ausserhalb* kkk. Wir zeigen dann ähnlich wie in § 3—§ 9, *dass die Punkte auf kkk einen wahren Kreis um M bilden, der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, den Mittelpunkt M umschliesst und innerhalb des Zahlenkreises k verläuft, diesen von innen berührend.*

§ 11.

An Stelle des Zahlenkreises k kann man nun eine beliebige geschlossene innerhalb k verlaufende Jordan'sche Curve z wählen, die den Punkt M im Innern enthält: *durch Anwendung der nämlichen Construction erhalten wir dann zu dieser Curve z sowohl einen bestimmten sie umschliessenden wahren Kreis um M, der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist und z von aussen berührt, als auch einen bestimmten innerhalb z verlaufenden wahren Kreis um M, der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist und z von innen berührt.*

Wir bemerken noch, dass jeder solche aus einer Jordan'schen Curve z construirte wahre Kreis auch aus einem Zahlenkreise erzeugt werden kann:

man braucht nur denjenigen Zahlenkreis zu wählen, der innerhalb des vorgelegten wahren Kreises ihn von innen berührend verläuft bez. ihn von aussen berührend umschliesst; denn zwei wahre Kreise, die geschlossene Jordan'sche Curven sind und denselben Zahlenkreis sei es umschliessend, sei es ganz innerhalb verlaufend berühren, müssten gewiss einen Punkt gemein haben und wären folglich überhaupt mit einander identisch.

§ 12.

Nunmehr können wir ohne erhebliche Schwierigkeit die wichtige Thatsache beweisen, *dass jeder durch irgend einen Punkt P innerhalb $\varkappa$ bestimmte wahre Kreis um M ebenso wie die in* § 11 *construirten wahren Kreise eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, die M im Innern enthält.*

Zum Beweise fassen wir einerseits alle wahren Kreise um M ins Auge, die geschlossene Jordan'sche Curven sind und P ausschliessen: sie mögen wahre Kreise *erster* Art heissen; und andrerseits alle diejenigen, die geschlossene Jordan'sche Curven sind und P einschliessen: sie mögen wahre Kreise *zweiter* Art heissen.

Wir denken uns zunächst aus jedem Zahlenkreise mit dem Mittelpunkt M den *umschliessenden* wahren Kreis erzeugt und fassen dann diejenigen Zahlenkreise ins Auge, aus denen wahre Kreise entspringen, die erster Art sind. Sodann suchen wir für diese Zahlenkreise den Grenzkreis g, d. h. den kleinsten Zahlenkreis, der sie sämmtlich enthält. Alle Zahlenkreise, die kleiner als g sind, liefern dann wahre Kreise erster Art. Der aus dem Zahlenkreise g entspringende wahre Kreis γ müsste, wenn er nicht durch P geht, diesen Punkt ebenfalls ausschliessen. Denn läge P innerhalb γ, so ziehe man eine ganz innerhalb γ verlaufende, die Punkte M und P umschliessende geschlossene Jordan'sche Curve und erzeuge aus dieser den wahren Kreis, der sie umschliesst. Dieser wahre Kreis liesse sich, da er ja gewiss in das Innere des Zahlenkreises g hineintritt, durch einen Zahlenkreis erzeugen, der kleiner als g ist; er umschliesst ferner den Punkt P, was nicht möglich ist. Da, wie erwähnt, alle wahren Kreise um M, die geschlossene Jordan'sche Curven sind, auch aus Zahlenkreisen um M entspringen, so ist offenbar der aus g entspringende wahre Kreis ein solcher Kreis erster Art, welcher alle anderen wahren Kreise erster Art umschliesst.

Indem wir andererseits aus jedem Zahlenkreise mit dem Mittelpunkt M denjenigen wahren Kreis erzeugt denken, der jenen Zahlenkreis ausschliesst, beweisen wir auf ähnlichem Wege die Existenz eines wahren Kreises zweiter Art, welcher von allen anderen wahren Kreisen zweiter Art umschlossen wird.

Würden nun die gefundenen wahren Grenzkreise beide nicht durch P gehen, so könnte man eine Jordan'sche Curve in dem zwischen ihnen gelegenen ringförmigen Gebiete ziehen, welche sicher durch unser Verfahren einen wahren Kreis liefern würde, der weder von der ersten noch von der zweiten Art wäre; dies ist ein Widerspruch und damit haben wir die zu Anfang von § 12 aufgestellte Behauptung bewiesen.

§ 13.

Nachdem wir im Vorstehenden die wichtigsten Eigenschaften der wahren Kreise um M gefunden haben, die durch Punkte innerhalb $\varkappa$ laufen, wenden wir uns nun zur *Untersuchung der Gruppe aller Bewegungen, die bei den Drehungen der Ebene um M ein bestimmter wahrer Kreis in sich erfährt.*

Es seien den Entwickelungen in § 8 gemäss die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ auf die Punkte t der Peripherie eines Zahlenkreises mit dem Radius 1 unter Erhaltung ihrer Anordnung abgebildet: dann entspricht einer jeden Drehung Δ unserer Ebene um M eine bestimmte umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Punkte t des Einheitskreises in sich, da ja nach § 5 bei einer Drehung die Anordnung der Punkte auf dem wahren Kreise und daher mit Rücksicht auf § 7 auch die Anordnung der Parameterwerthe t ungeändert bleibt. Diese Transformation lässt sich durch eine Formel von der Gestalt

$$t' = \Delta(t)$$

darstellen, wo $\Delta(t)$ eine stetige Function ist, die mit wachsendem t entweder stets wächst oder stets abnimmt und die bei Vermehrung des Arguments t um 2π sich ebenfalls um den Betrag 2π ändert.

Diejenigen Functionen $\Delta(t)$, die bei wachsendem Argument t abnehmen, entsprechen Transformationen, die den Umlaufssinn auf dem wahren Kreise ändern, und da zufolge unserer Fassung des Begriffes der Bewegung bei einer Bewegung der Umlaufssinn stets derselbe bleiben soll, so ergiebt sich, dass die Function $\Delta(t)$ bei wachsendem Argument t stets wachsen muss.

§ 14.

Wir fragen zunächst, ob es in dieser Gruppe aller Drehungen um M eine Drehung geben kann, bei welcher ein Punkt A des wahren Kreises $\varkappa$ ungeändert bleibt. Es sei $t = a$ der Parameterwerth für einen solchen Punkt A und dieser bleibe bei der eigentlichen Drehung Δ fest, die durch die Formel

$$t' = \Delta(t)$$

dargestellt wird. Ferner sei B irgend ein Punkt des wahren Kreises mit dem Parameterwerth $t = b$, der bei der Drehung Δ seine Lage verändere; wir machen etwa die Annahme $b < a$, worin keine Einschränkung liegt.

Sowohl $\Delta(t)$ als auch die umgekehrte Function $\Delta^{-1}(t)$ sind von der Art, dass sie bei zunehmendem Argument zunehmen. Wegen $\Delta(a) = a$ schliessen wir hieraus der Reihe nach, dass sämmtliche Grössen, die durch die symbolischen Potenzen

$$\Delta(b),\ \Delta\Delta(b) = \Delta^2(b),\ \Delta^3(b), \cdots, \Delta^{-1}(b),\ \Delta^{-2}(b),\ \Delta^{-3}(b), \cdots$$

dargestellt werden, unterhalb a liegen. Nun bilden, falls $\Delta(b) > b$ ausfällt, die Grössen

$$\Delta(b),\ \Delta^2(b),\ \Delta^3(b), \cdots$$

eine Reihe beständig zunehmender Werthe; im Falle $\Delta(b) < b$ gilt das Gleiche von der Grössenreihe

$$\Delta^{-1}(b),\ \Delta^{-2}(b),\ \Delta^{-3}(b), \cdots.$$

Aus diesen Thatsachen entnehmen wir, dass im ersteren Falle die directen Wiederholungen der Drehung Δ auf b angewandt, im letzteren die symbolischen Potenzen von $\Delta(b)$ mit negativen Exponenten sich einem Grenzwerth g nähern müssen, der zwischen a und b liegt oder mit a übereinstimmt. Entspricht der Grenzzahl g etwa der Punkt G auf dem wahren Kreise $\varkappa$, so bilden die Potenzen von Δ mit positiven bez. negativen Exponenten Bewegungen, so dass durch sie der Punkt B in beliebige Nähe von G übergeht und zugleich durch sie Punkte in beliebiger Nähe von G in beliebiger Nähe von G bleiben. Nach Axiom III müsste es demnach eine Bewegung geben, welche B in G überführt und zugleich G ungeändert lässt; dies widerspräche dem Begriffe der Bewegung. *Es ist demnach die Drehung Δ, welche den Punkt A festlässt, nothwendig eine solche, die alle Punkte des Kreises festlässt, d. h. für diesen Kreis die Identität ist.*

§ 15.

Aus der Definition des wahren Kreises leuchtet unmittelbar die folgende Thatsache ein:

Es giebt stets eine Drehung um M, welche den gegebenen Punkt O des wahren Kreises in einen anderen gegebenen Punkt S desselben überführt.

§ 16.

Wir leiten jetzt eine weitere Eigenschaft für die Gruppe der Bewegungen eines wahren Kreises in sich ab.

Es seien O, S, T, Z vier solche Punkte auf dem wahren Kreise $\varkappa$, dass diejenige Drehung um M, vermöge welcher O in S übergeht, den Punkt

T nach Z bewegt, so dass die Lage von Z eindeutig durch die Punkte O, S, T mitbestimmt ist. Halten wir O fest und bewegen S und T auf dem wahren Kreise, *so erfolgt bei stetiger Aenderung von S und T auch die Aenderung von Z stetig.*

Um dies zu beweisen, wählen wir eine unendliche Reihe von Punkten $S_1, S_2, S_3, \cdots$, die gegen den Punkt S convergiren, und eine unendliche Reihe von Punkten $T_1, T_2, T_3, \cdots$, die gegen den Punkt T convergiren. Die Drehungen um M, vermöge deren O in $S_1, S_2, S_3, \cdots$ übergeht, bezeichnen wir bez. mit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots$ und die durch diese Drehungen bez. aus $T_1, T_2, T_3, \cdots$ entspringenden Punkte seien $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$; dann haben wir zu zeigen, dass die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ gegen Z convergiren. Es sei Z^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$. Nach Axiom III giebt es dann eine Drehung um M, vermöge deren O in S und zugleich T in Z^* übergeht. Hierdurch erweist sich aber Z^* als eindeutig bestimmt und mit Z identisch.

§ 17.

In § 14—§ 16 haben wir erkannt, dass die Gruppe aller Drehungen eines wahren Kreises $\varkappa$ in sich die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Es giebt ausser der Identität keine Drehung um M, welche einen Punkt des wahren Kreises festlässt.

2. Wenn O, S irgend zwei beliebige Punkte des wahren Kreises sind, so giebt es gewiss eine Drehung um M, welche O und S überführt.

3. Bei einer Drehung um M, die O nach S bewegt, gehe zugleich T in Z über; der somit durch O, S, T eindeutig bestimmte Punkt Z erfährt auf $\varkappa$ eine stetige Aenderung, wenn S und T auf $\varkappa$ stetig ihre Lage ändern.

Diese drei Eigenschaften bestimmen vollständig den Bau der Gruppe der Transformationen $\Delta(t)$, die den Bewegungen des wahren Kreises in sich entsprechen. Wir stellen nämlich den folgenden Satz auf:

Die Gruppe aller Bewegungen des wahren Kreises in sich, die Drehungen um M sind, ist holoedrisch-isomorph mit der Gruppe der gewöhnlichen Drehungen des Zahlenkreises um M in sich.

§ 18.

Wenn wir uns diejenige Drehung um M, die den Punkt O des wahren Kreises mit dem Parameterwerth 0 in den Punkt S mit dem Parameterwerth s überführt, durch die Transformationsformel

$$t' = \Delta(t, s)$$

dargestellt denken, wobei wir den Functionswerth $\Delta(0,0) = 0$ nehmen, so

erkennen wir auf Grund der gefundenen Eigenschaften der Drehungsgruppe, dass die Function $\Delta(t, s)$ eindeutig und stetig für alle Werthe der beiden Veränderlichen t, s ist. Auch folgt, da s bis auf Vielfache von 2π eindeutig durch zwei zusammengehörige Werte t und t' bestimmt ist, dass die Function $\Delta(t, s)$ bei constantem t mit wachsendem s nur entweder beständig wächst oder abnimmt, und da sie für $t = 0$ in s übergeht, so tritt nothwendig der erstere Fall ein. Nun ist

$$\Delta(t, t) > \Delta(0, t), \quad \Delta(0, t) = t; \qquad (t > 0)$$

und wegen

$$\Delta(2\pi, s) = 2\pi + \Delta(0, s) = 2\pi + s$$

folgt

$$\Delta(2\pi, 2\pi) = 4\pi.$$

Mithin hat die Function $\Delta(t, t)$ $(> t)$ der einen Veränderlichen t die Eigenschaft, beständig von 0 bis 4π zu wachsen, während das Argument t von 0 bis 2π wächst. Aus diesem Umstande schliessen wir sofort folgende Thatsache:

Wenn irgend eine positive Zahl $t' \leqq 2\pi$ vorgelegt ist, so giebt es stets eine und nur eine positive Zahl t, so dass

$$\Delta(t, t) = t'$$

wird; es ist $t < t'$. Der Parameterwerth t liefert einen Punkt des wahren Kreises von der Art, dass bei einer gewissen Drehung um M der Punkt $t = 0$ sich nach t und zugleich der Punkt t nach t' bewegt.

Wir bezeichnen nun denjenigen Werth von t, für welchen

$$\Delta(t, t) = 2\pi$$

wird, mit $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, denjenigen, für welchen

$$\Delta(t, t) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$$

wird, mit $\varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$, denjenigen, für welchen

$$\Delta(t, t) = \varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$$

wird, mit $\varphi\left(\frac{1}{2^3}\right) \cdots$; ferner setzen wir allgemein

$$\Delta\left(\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right), \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = \varphi\left(\frac{a+1}{2^n}\right),$$

wo $2a$ eine gerade ganze Zahl bedeutet, und ferner setzen wir

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 2\pi.$$

Damit ist die Function φ für alle rationalen Argumente, deren Nenner eine Potenz von 2 ist, widerspruchslos definirt.

Ist nun σ ein beliebiges positives Argument < 1, so entwickeln wir σ in einen Dualbruch von der Form

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots,$$

wo z_1, z_2, z_3 lauter Ziffern 0, 1 bedeuten. Da die Zahlen der Reihe

$$\varphi\left(\frac{z_1}{2}\right), \varphi\left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2}\right), \varphi\left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3}\right), \cdots$$

gewiss niemals abnehmen und sämmtlich $\leqq \varphi(1)$ bleiben, so nähern sie sich einem Grenzwerth; diesen bezeichnen wir mit $\varphi(\sigma)$. Die Function $\varphi(\sigma)$ ist eine Function, die mit wachsendem Argument stets wächst; wir wollen beweisen, dass sie auch stetig ist. In der That wäre sie an einer Stelle

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots = \underset{n=\infty}{L} \frac{a_n}{2^n} = \underset{n=\infty}{L} \frac{a_n + 1}{2^n},$$

$$\left(\frac{a_n}{2^n} = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \cdots + \frac{z_n}{2^n}\right)$$

nicht stetig, so müssten die beiden Grenzwerthe

$$\underset{n=\infty}{L} \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right) \quad \text{und} \quad \underset{n=\infty}{L} \varphi\left(\frac{a_n + 1}{2^n}\right)$$

von einander verschieden ausfallen und mithin die unendliche Reihe von Punkten, die den Parametern

$$t = \varphi\left(\frac{a_1}{2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_2}{2^2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_3}{2^3}\right), \cdots$$

entsprechen, gegen einen anderen Punkt convergiren als die unendliche Reihe von Punkten, die den Parametern

$$t = \varphi\left(\frac{a_1 + 1}{2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_2 + 1}{2^2}\right), \quad t = \varphi\left(\frac{a_3 + 1}{2^3}\right), \cdots$$

entsprechen. Nun führt dieselbe Drehung, vermöge deren der Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n + 1}{2^n}\right)$ übergeht, auch zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ über, und da die Zahlen $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{2^3}\right)$, $\cdots$ beständig abnehmen und die diesen Parameterwerthen entsprechenden Punkte daher jedenfalls gegen eine gewisse Stelle A convergiren müssen, so convergiren mit Rücksicht auf Axiom III einer oft angewandten Schlussweise zufolge auch die vorhin genannten unendlichen Reihen von Punkten beide gegen denselben Punkt.

Die Function $\varphi(\sigma)$ gestattet, da sie stets wächst und stetig ist, auch eine eindeutige und stetige Umkehrung.

Die Drehung um M, durch welche der Punkt $t = 0$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ übergeht, führt zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right)$ in $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \frac{a_n}{2^n}\right)$ über, unter b_m irgend eine ganze Zahl verstanden. Da für $n = \infty$ die Werthe $\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ gegen $\varphi(\sigma)$ und zugleich die Zahlen $\varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \frac{a_n}{2^n}\right)$ gegen $\varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$ convergiren, so giebt es nach Axiom III eine Drehung, welche den Punkt $t = 0$ nach $t = \varphi(\sigma)$ und zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right)$ nach $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$ bewegt, d. h. es ist

$$\Delta\left(\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}, \varphi(\sigma)\right)\right) = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$$

und, da σ eine stetige Function ist, so folgt hieraus allgemein für beliebige Parameterwerthe τ, σ

$$\Delta(\varphi(\tau), \varphi(\sigma)) = \varphi(\tau + \sigma).$$

Damit ist bewiesen, dass, wenn wir in der Transformationsformel

$$t' = \Delta(t, s)$$

mittelst einer gewissen umkehrbar eindeutigen Function φ an Stelle von t, t', s neue Parameter τ, τ', σ gemäss

$$t = \varphi(\tau), \quad t' = \varphi(\tau'), \quad s = \varphi(\sigma)$$

einführen, sich die Drehung in den neuen Parametern durch die Formel

$$\tau' = \tau + \sigma$$

ausdrückt. Dieser Satz lehrt die Richtigkeit der in § 17 aufgestellten Behauptung.

Wir setzen noch an Stelle des Parameters σ den Parameter $\omega = 2\pi\sigma$, und nennen diesen Parameterwerth ω *den Winkel* oder *die Bogenlänge* zwischen den Punkten O $(\sigma = 0)$ und S (d. h. σ) auf dem wahren Kreise $\varkappa$; die Drehung, bei welcher der Punkt O $(\sigma = 0)$ in den Punkt S (d. h. σ) übergeht, heisse *eine Drehung $\Delta[\omega]$ des wahren Kreises in sich um den Winkel ω.*

§ 19.

Durch diesen Beweis des Satzes in § 17 haben wir die Untersuchung der Drehungen eines einzelnen wahren Kreises in sich beendet und wenden uns nun zu den Eigenschaften der Gruppe der Transformationen *aller* Punkte bei den Drehungen der Ebene um den festen Punkt M.

Zum Zweck dieser Untersuchung beweisen wir der Reihe nach folgende Sätze:

Es sei von einem wahren Kreise $\varkappa$ um M bekannt, dass er eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, in deren Innerem M liegt: dann giebt es ausser der Identität keine Drehung der Ebene um M, welche jeden Punkt des wahren Kreises $\varkappa$ festlässt.

Zum Beweise bezeichnen wir eine Drehung um M, die jeden Punkt auf $\varkappa$ festlässt, mit K und nehmen dann *erstens* im Gegensatz zur Behauptung an, es gäbe auf $\varkappa$ einen Punkt A, in dessen beliebiger Nähe Punkte liegen, die ihre Lage bei einer Drehung K verändern. Um A schlagen wir, was nach § 12 gewiss möglich ist, einen wahren Kreis α, der durch einen gegenüber K veränderlichen Punkt gehe. Es sei B ein Schnittpunkt dieses Kreises mit $\varkappa$; dann charakterisirt sich die Bewegung K zugleich als eine Drehung des Kreises α in sich, bei der B festbleibt. Bei einer solchen Drehung bleiben aber nach § 14 alle Punkte auf α fest, was nicht der Fall ist; unsere erstere Annahme erweist sich demnach als unzulässig.

Wir construiren nunmehr ein System von geschlossenen Jordan'schen Curven um M, zu denen $\varkappa$ gehört und von denen jede die andere entweder ganz ein- oder ganz umschliesst, so dass durch jeden Punkt der Zahlenebene eine und nur eine Curve des Systems hindurchgeht. Dann nehmen wir *zweitens* im Gegensatz zur obigen Behauptung an, es sei λ eine Curve dieses Systems innerhalb $\varkappa$ bez. ausserhalb $\varkappa$, so dass alle Punkte in dem ringförmigen Gebiete zwischen $\varkappa$ und λ bei jeder Drehung K festbleiben, während in beliebiger Nähe der Curve λ solche Punkte vorhanden sind, die nicht bei jeder Drehung K festbleiben.

Es sei A ein Punkt auf λ, in dessen beliebiger Nähe bei K bewegliche Punkte liegen; dann schlagen wir um A einen wahren Kreis, der durch einen dieser beweglichen Punkte läuft. Da dieser Kreis bei genügender Kleinheit jedenfalls durch einen Theil des ringförmigen bei den Bewegungen K festbleibenden Gebietes hindurchläuft, so charakterisirt sich die Bewegung K zugleich als eine Drehung des Kreises α in sich, bei welcher unendlich viele Punkte von α festbleiben. Bei K müssten daher nach § 14 alle Punkte von α festbleiben, was nicht der Fall ist. Damit ist gezeigt, dass bei den Drehungen K alle Punkte der Ebene festbleiben.

§ 20.

Wir stellen nun folgende wichtige Behauptungen auf:

Jeder wahre Kreis ist eine geschlossene Jordan'sche Curve: das System aller wahren Kreise um irgend einen Punkt M erfüllt lückenlos unsere Ebene, so dass jeder wahre Kreis um M jeden anderen solchen Kreis ein- oder umschliesst.

Die sämmtlichen Drehungen $\Delta[\omega]$ unserer Ebene um M werden durch Transformationsformeln von der Gestalt

$$x' = f(x, y;\ \omega),$$
$$y' = g(x, y;\ \omega)$$

ausgedrückt; darin bedeuten x, y bez. x', y' die Coordinaten in der Zahlenebene und f, g eindeutige stetige Functionen in den drei Veränderlichen x, y, ω. Ferner haben für jeden Punkt x, y die Functionen f, g hinsichtlich des Argumentes ω die Zahl 2π zur kleinsten simultanen Periode, d. h. man erhält jeden Punkt des wahren Kreises durch den Punkt (x, y) je einmal und nur einmal, wenn man ω die Werthe von 0 bis 2π durchlaufen lässt. Endlich gilt für die Zusammensetzung zweier Drehungen um die Winkel ω, ω' die Formel

$$\Delta[\omega]\,\Delta[\omega'] = \Delta[\omega + \omega'].$$

§ 21.

Zum Beweise der aufgestellten Behauptungen construiren wir irgend einen wahren Kreis $\varkappa$ um M, der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, und betrachten zunächst die Drehungen dieses wahren Kreises $\varkappa$ in sich. Nach § 18 führen wir den Winkel ω ein, so dass durch die Angabe eines Werthes von ω zwischen 0 und 2π eine Bewegung des wahren Kreises $\varkappa$ in sich eindeutig bestimmt ist. Nun entspricht aber einer jeden Drehung des wahren Kreises in sich nur e i n e bestimmte Drehung der Ebene um M, da ja nach § 19 bei Festhaltung aller Punkte auf $\varkappa$ überhaupt alle Punkte der Ebene festbleiben. Daraus folgt, dass in den in § 20 aufgestellten Formeln für die Drehung der Ebene um M die Functionen f, g für alle x, y, ω *eindeutige* Functionen sind, die hinsichtlich ω die Periode 2π besitzen.

Wir beweisen nun, dass f, g *stetige* Functionen in x, y, ω sind. Zu dem Zwecke sei O irgend ein Punkt auf $\varkappa$, ferner $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$ eine unendliche Reihe von Werthen, die gegen einen bestimmten Werth ω convergiren, und $T_1, T_2, T_3, \cdots$ eine unendliche Reihe von Punkten unserer Ebene, die gegen irgend einen Punkt T convergiren. Diejenigen Punkte, die aus O bez. bei Anwendung der Drehungen um den Winkel $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$ hervorgehen, bezeichnen wir mit $S_1, S_2, S_3, \cdots$ und die Punkte, die aus $T_1, T_2, T_3, \cdots$ bez. bei den Drehungen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$ entstehen, mögen $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ heissen. Endlich mögen die Punkte, die aus O bez. T durch eine Drehung um den Winkel ω hervorgehen, bez. mit S, Z bezeichnet werden. Es kommt darauf an zu zeigen, dass die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ gegen Z convergiren.

Da die Punkte $T_1, T_2, T_3, \cdots$ gegen T convergiren, so können wir ein Jordan'sches Gebiet G bestimmen, in dessen Innerem die sämmtlichen

Punkte $M, T, T_1, T_2, T_3, \cdots$ liegen. Auf dieses Jordan'sche Gebiet wenden wir dann diejenige Drehung um M an, welche O nach S bewegt. Das so aus G entstehende Jordan'sche Gebiet heisse H; dasselbe enthält gewiss die Punkte M und Z. Endlich construiren wir eine geschlossene Jordan'sche Curve α, die das Gebiet H ganz umschliesst, ohne H zu berühren.

Wir wollen nun beweisen, dass von den Punkten $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ gewiss nur eine endliche Anzahl ausserhalb der Curve α liegen. In der That, würden unendlichviele von ihnen, etwa die Punkte $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}, \cdots$ ausserhalb α liegen, so denke man sich allgemein M mit T_{i_h} durch eine Jordan'sche innerhalb G verlaufende Curve γ_h verbunden und dann mit γ_h die Drehung um den Winkel ω_{i_h} ausgeführt. Die so entstehende Curve verbindet M mit Z_{i_h} und schneidet folglich die Curve α gewiss in einem Punkte, etwa B_h; es sei A_h der Punkt auf γ_h, der bei der Drehung um den Winkel ω_{i_h} in B_h übergeht. Da die Punkte $A_1, A_2, A_3, \cdots$ sämmtlich innerhalb G und die Punkte $B_1, B_2, B_3, \cdots$ sämmtlich auf α bleiben, so giebt es gewiss eine unendliche Reihe von Indices $h_1, h_2, h_3, \cdots$ von der Art, dass $A_{h_1}, A_{h_2}, A_{h_3}, \cdots$ gegen einen Punkt A innerhalb G oder auf der Grenze von G und zugleich $B_{h_1}, B_{h_2}, B_{h_3}, \cdots$ gegen einen Punkt B auf α convergiren. Nun wissen wir, dass die Punkte $S_1, S_2, S_3, \cdots$ gegen S convergiren; mit Rücksicht auf Axiom III müsste es demnach eine Drehung um M geben, die O nach S und zugleich A nach B bewegt; dies ist aber nicht möglich. Denn bei dieser Drehung müsste A in einen Punkt innerhalb H oder auf der Grenze von H übergehen; dagegen ist B ein Punkt auf der Curve α, die das Gebiet H umschliesst, ohne H zu berühren.

Damit haben wir erkannt, dass das Punktsystem $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ ganz innerhalb eines gewissen Jordan'schen Gebietes liegen muss.

Es sei nun Z^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$. Da die Punkte $S_1, S_2, S_3, \cdots$ gegen S convergiren, so giebt es nach Axiom III eine Drehung um M, bei welcher O in S und zugleich T in Z^* übergeht. Da aber bei derjenigen Drehung um M, welche O in S überführt, T in Z übergehen sollte, so folgt wegen der vorhin bewiesenen Eindeutigkeit der Functionen f, g nothwendig $Z^* = Z$, d. h. die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ verdichten sich nur an einer Stelle, nämlich an der Stelle Z. Damit ist die Stetigkeit der Functionen f, g in x, y, ω bewiesen.

Wir setzen jetzt in f, g für x, y die Coordinaten irgend eines Punktes P unserer Ebene ein, der innerhalb oder ausserhalb des Kreises $\varkappa$ liegt. Die dann entstehenden Functionen $f(\omega)$, $g(\omega)$ in der Veränderlichen ω allein dürfen nicht beliebig kleine simultane Perioden haben. Denn da sie stetige Functionen von ω sind, so wären sie in diesem Falle Constante; dann aber würde der Punkt P bei allen Drehungen der Ebene um M festbleiben,

was Axiom II widerspräche. Die kleinste simultane Periode jener beiden Functionen $f(\omega)$, $g(\omega)$ muss demnach von der Form $\frac{2\pi}{n}$ sein, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Hieraus folgt, dass der durch P gehende wahre Kreis erhalten wird, wenn man in den Formeln

$$x = f(\omega), \qquad y = g(\omega)$$

den Werth ω von 0 bis $\frac{2\pi}{n}$ laufen lässt. Diese Curve ist geschlossen und ohne Doppelpunkte; sie stellt daher den durch P gehenden wahren Kreis um M dar. Wenden wir nunmehr auf die Ebene eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ an, so bleiben dabei alle Punkte dieses durch P gelegten wahren Kreises fest, und daher müssten nach § 19 alle Punkte der Ebene fest bleiben; die Punkte auf dem wahren Kreise $\varkappa$ bleiben aber bei jener Drehung nur fest, wenn $n = 1$ ist, und damit haben wir die Aussagen des in § 20 aufgestellten Satzes in allen Theilen bewiesen.

§ 22.

Wir erkennen jetzt leicht auch die Richtigkeit der folgenden Thatsachen:

Wenn irgend zwei Punkte bei einer Bewegung der Ebene festbleiben, so bleiben alle Punkte fest, d. h. die Bewegung ist die Identität.

Jeder Punkt der Ebene lässt sich durch eine Bewegung gewiss in jeden anderen Punkt der Ebene überführen.

Die erstere Thatsache folgt sofort mit Rücksicht auf den Satz in § 20; die letztere, wenn wir um jeden der Punkte den wahren Kreis durch den anderen legen, wobei diese Kreise sich nothwendig treffen müssen.

§ 23.

Unser wichtigstes weiteres Ziel besteht darin, den Begriff der wahren Geraden in unserer Geometrie einzuführen und die für den Aufbau der Geometrie nothwendigen Eigenschaften dieses Begriffes zu entwickeln.

Zu dem Zwecke setzen wir zunächst folgende Benennungen fest: Wenn A, B und A', B' zwei Punktepaare von der Art sind, dass sich vermöge einer Bewegung A in A' und zugleich B in B' überführen lässt, so sagen wir, *die (wahre) Strecke AB sei congruent* (in Zeichen $\equiv$) *der (wahren) Strecke $A'B'$.* Ferner nennen wir *zwei wahre Kreise congruent,* wenn es eine Bewegung giebt, welche ihre Mittelpunkte und zugleich sie selbst ineinander überführt.

Unter einer *Halbdrehung* H um einen Punkt M verstehen wir eine Drehung um den Winkel π d. h. eine Drehung, die noch einmal ausgeführt die Identität ergiebt. Wenn A, B, C drei Punkte sind, so dass A bei einer Halbdrehung um B in C und demnach auch zugleich C bei dieser Halbdrehung in A übergeht, so heisse B die *Mitte der Strecke* AC.

Wenn C ein Punkt innerhalb bez. ausserhalb des um A durch B geschlagenen wahren Kreises ist, so nennen wir die Strecke AC *kleiner bez. grösser* als die Strecke AB. Um in analoger Weise die Begriffe „kleiner" und „grösser" für beliebige Strecken bez. für beliebige Kreise zu definiren, führe man Bewegungen aus, vermöge welcher die Anfangspunkte der Strecken bez. die Mittelpunkte der Kreise in den nämlichen Punkt fallen.

§ 24.

Eine wahre Strecke AC hat höchstens *eine* Mitte; gäbe es nämlich für AC zwei Mitten und bezeichnen wir die Halbdrehungen um diese Mitten mit H_1 und H_2, so würde die zusammengesetzte Substitution $H_1 H_2^{-1}$ eine Bewegung darstellen, welche jeden der Punkte A und C festliesse, und somit entnehmen wir nach § 22 symbolisch

$$H_1 H_2^{-1} = 1 \quad \text{d. h.} \quad H_1 = H_2;$$

mithin stimmen auch die Mitten selbst überein. Insbesondere folgern wir hieraus die weitere Thatsache:

Wenn zwei Strecken einander congruent sind, so sind auch ihre Hälften einander congruent.

§ 25.

Für die weiteren Entwicklungen brauchen wir folgenden Hilfssatz:

Es mögen die Punkte $A_1, A_2, A_3, \cdots$ gegen den Punkt A und die Punkte $M_1, M_2, M_3, \cdots$ gegen den Punkt M convergiren; wenn dann allgemein bei Ausführung der Halbdrehung um M_i der Punkt A_i in B_i übergeht, so convergiren die Punkte $B_1, B_2, B_3, \cdots$ ebenfalls und zwar gegen denjenigen Punkt B, der durch die Halbdrehung um M aus A entsteht.

Zunächst lässt sich gewiss ein Jordan'sches Gebiet finden, innerhalb dessen das Punktsystem $B_1, B_2, B_3, \cdots$ gelegen ist. Davon überzeugen wir uns durch das nämliche Schlussverfahren, welches in § 21 auf das Punktsystem $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ angewandt worden ist.

Wir bezeichnen nun mit B^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $B_1, B_2, B_3, \cdots$. Auf Grund des Axioms III muss es dann eine Bewegung geben, welche die Punkte A, M, B^* bez. in die Punkte B^*, M, A überführt; d. h. B^* geht aus A durch die Halbdrehung um M hervor. Da aber auch B aus A durch die Halbdrehung um M hervorgeht, so folgt $B^* = B$ und damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

§ 26.

Es sei M die Mitte einer gewissen Strecke AB; dann wollen wir zeigen, dass jede Strecke AC, die kleiner als AB ist, ebenfalls eine Mitte N besitzt.

Zu dem Zwecke ziehen wir irgend eine stetige Curve γ von A bis M und suchen zu jedem Punkte M' dieser Curve γ den Punkt B', so dass M' die Mitte von AB' wird; dann ist der Ort der Punkte B', wie wir aus dem in § 25 bewiesenen Hilfssatze schliessen, eine stetige Curve γ'. Diese Curve γ' mündet gewiss in A, wenn der Punkt M' auf der Curve γ nach A hin läuft. Denn im anderen Falle nehmen wir an, es sei $M_1, M_2, M_3, \ldots$ eine unendliche Reihe von Punkten auf γ, die gegen A convergiren, und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die entsprechenden Punkte auf der Curve γ'. Würden nun $B_1, B_2, B_3, \ldots$ eine von A verschiedene Verdichtungsstelle A^* besitzen, so entnehmen wir daraus, dass es eine Bewegung giebt, welche gewisse Punkte in beliebiger Nähe von A in beliebiger Nähe von A lässt und zugleich den Punkt A in beliebige Nähe von A^* bringt. Dann müsste also auf Grund des Axioms III bei einer gewissen Bewegung A fest bleiben und zugleich in A^* übergehen, was unmöglich ist.

Da nun unserer Annahme zufolge AC kleiner als AB ist, so muss der um A durch C geschlagene wahre Kreis die A mit B verbindende stetige Curve γ' in irgend einem Punkte B' treffen. Der diesem Punkte entsprechende Punkt M' auf γ ist die Mitte der wahren Strecke AB' und da $AC \equiv AB'$ ist, so findet man durch eine geeignete Drehung um A aus M' auch die gesuchte Mitte N von AC.

Da die Strecke AC durch die Halbdrehung um ihre Mitte N in die Strecke CA übergeht, so folgt aus unserem eben bewiesenen Satze:

Die Strecke AC ist stets der Strecke CA congruent — vorausgesetzt, dass die Strecke AC kleiner als die bestimmte am Anfange dieses § 26 zu Grunde gelegte Strecke AB ist.

Zugleich erkennen wir, dass, wenn die Punkte $C_1, C_2, C_3, \cdots$ gegen den Punkt A convergiren, stets auch die Mitten $N_1, N_2, N_3, \cdots$ der Strecken bez. $AC_1, AC_2, AC_3, \cdots$ gegen A convergiren.

§ 27.

Für unsere weiteren Entwickelungen haben wir einige Sätze über sich berührende wahre Kreise nöthig und zwar kommt es vor Allem darauf an, *zwei zu einander congruente Kreise zu construiren, die sich einander von aussen in einem und nur in einem Punkte berühren.*

Zu dem Zwecke wählen wir einen Kreis $\varkappa'$ so klein, dass innerhalb desselben keine Strecke liegt, die der bestimmten in § 26 zu Grunde

gelegten Strecke AB congruent wird; der Satz in § 20 zeigt, dass dies gewiss möglich ist, da sich sonst die Punkte A und B gleichzeitig beliebig nahe an M bewegen liessen. Sodann sei $\varkappa$ ein innerhalb $\varkappa'$ liegender Kreis um denselben Mittelpunkt wie $\varkappa'$. Wir nehmen nun auf dem Kreise $\varkappa$ irgend zwei Punkte an und schlagen um diese zu einander congruente Kreise α und β so klein, dass irgend zwei Punkte auf $\varkappa$, die innerhalb α liegen, niemals von irgend zwei Punkten auf $\varkappa$, die innerhalb β liegen, im Sinne der Anordnung der Punkte auf $\varkappa$ getrennt liegen können. Ausserdem seien die Kreise α, β so klein gewählt, dass sie ganz innerhalb des Kreises $\varkappa'$ liegen. Dann nehme man einen Punkt P' an,

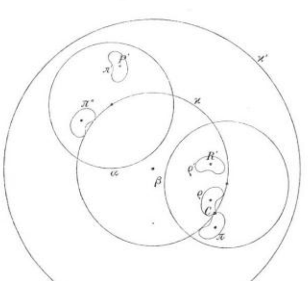


Fig. 2.

der innerhalb α und ausserhalb $\varkappa$ liegt und einen Punkt R' an, der innerhalb β und innerhalb $\varkappa$ liegt, und schlage dann um P' und R' zu einander congruente Kreise π' bez. ϱ' so klein, dass π' ganz innerhalb α und ausserhalb $\varkappa$ und ferner ϱ' ganz innerhalb β und innerhalb $\varkappa$ fällt. Nun führe man eine Drehung um den Mittelpunkt von α aus, so dass der Kreis π' in einen Kreis π'' übergeht, der den Kreis $\varkappa$ von aussen berührt: die Berührungspunkte bilden ein Punktsystem, welches mit S bezeichnet werden möge. Sodann führe man eine Drehung um den Mittelpunkt von β aus, so dass der Kreis ϱ' in einen Kreis ϱ übergeht, der den Kreis $\varkappa$ von innen berührt. Die Berührungspunkte bilden ein Punktsystem, welches mit T bezeichnet werden möge.

Da wegen der Wahl der Kreise α, β keine zwei Punkte des Systems S durch ein Punktepaar des Systems T auf $\varkappa$ getrennt werden, so ist es gewiss möglich, durch eine Drehung der Ebene um den Mittelpunkt des Kreises $\varkappa$ einen der äussersten Punkte von S auf $\varkappa$ mit einem der äussersten Punkte von T auf $\varkappa$ derart zur Deckung zu bringen, dass die übrigen Punkte von S in Punkte übergehen, die von den Punkten des Systems T

durchweg verschieden sind. Bei dieser Drehung gelangt der Kreis π'' mit dem Kreise ϱ in Berührung in der Weise, dass der Punkt C, in dem das Zusammenfallen stattfindet, der einzige Berührungspunkt wird. Wir bezeichnen den Kreis π'' in seiner neuen Lage mit π und die Mittelpunkte von π und ϱ bez. mit P und R.

Wir wollen nun beweisen, dass der Berührungspunkt C nothwendig die Mitte zwischen den beiden Mittelpunkten P, R ist. In der That wegen unserer Wahl von $\varkappa'$ ist die Strecke PR nothwendig kleiner als die bestimmte Strecke AB und besitzt daher nach § 26 gewiss eine Mitte; dieselbe heisse C^*. Dann geht jeder der beiden Kreise π, ϱ durch eine Halbdrehung um C^* in den andern über und daher wird aus jedem Punkte des einen Kreises ein Punkt des andern. Da der Punkt C beiden Kreisen π, ϱ gemeinsam ist, so muss er bei einer solchen Halbdrehung ebenfalls in einen den Kreisen π, ϱ gemeinsamen Punkt übergehen, er muss folglich bei dieser Halbdrehung ungeändert bleiben und stimmt mithin nothwendig mit dem Punkte C^* überein, um welchen die Halbdrehung ausgeführt wurde.

Aus der eben bewiesenen Thatsache erkennen wir zugleich folgende Thatsache:

Aus dem Kreise π entsteht durch Halbdrehung um den Punkt C auf π der Kreis ϱ, der π in C von aussen berührt; es giebt ausser ϱ keinen anderen Kreis, der mit dem Kreise π congruent ist und ihn im Punkte C und nur in diesem einen Punkte von aussen berührt.

§ 28.

Ferner gilt der Satz:

Wenn irgend ein Kreis ι von dem Kreise π umschlossen und berührt wird, so findet diese Berührung nur in einem Punkte statt.

Zum Beweise nehmen wir an, es seien Q, Q' zwei von einander verschiedene Berührungspunkte der Kreise ι und π. Dann führen wir eine Halbdrehung um Q' aus; durch diese geht π in einen Kreis π' über, der π nur im Punkte Q' berührt, und ι geht in einen Kreis ι' über, der innerhalb π' und daher gewiss ganz ausserhalb π verläuft, beide Kreise π, π' nur in Q berührend. Führen wir jetzt diejenige Drehung um den Mittelpunkt des Kreises π aus, durch welche Q in Q' übergeht, so entsteht aus ι ein Kreis ι'',

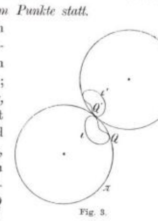


Fig. 3.

welcher ganz innerhalb π und daher gewiss auch ausserhalb ι' liegt, diesen nur in Q' berührend. Damit haben wir zwei Kreise ι, ι'' die beide den congruenten Kreis ι' in Q' und nur in diesem Punkte von aussen berühren, und dieser Umstand widerspricht dem Satze in § 27.

Die in § 27 und § 28 gefundenen Thatsachen bleiben gültig, wenn wir statt π, ϱ kleinere Kreise nehmen.

§ 29.

Es sei P der Mittelpunkt des in § 27 construirten Kreises π und Q ein Punkt auf π, ferner sei O ein beliebiger Punkt. Dann können wir unter Heranziehung der Bemerkung am Schluss von § 26 und wie in § 27, auf Grund des Satzes in § 20 gewiss einen Punkt E in solcher Nähe von O angeben, dass innerhalb des Kreises ι, der um die Mitte M der Strecke OE durch O und E gelegt wird, keine zu PQ congruente Strecke existirt und das Gleiche auch für jeden Punkt E' und den entsprechenden Kreis ι' gilt, wenn E' noch näher als E an dem Punkte O gelegen ist.

Alsdann gilt der Satz:

Der um die Mitte M (bez. M') von OE (bez. OE') durch O gelegte Kreis ι (bez. ι') wird von dem Kreise um O durch E (bez. E') ganz umschlossen und nur in E (bez. E') berührt.

Zum Beweise construiren wir zunächst denjenigen Kreis ω um O, der den Kreis ι umschliesst und zugleich berührt. Dieser Kreis ω ist nothwendig kleiner als der Kreis π; denn im anderen Falle würde der um O gelegte zu π congruente Kreis in's Innere des Kreises ι eintreten und dann müsste innerhalb ι eine zu PQ congruente Strecke existiren, was nicht der Fall sein sollte. Nach dem in § 28 bewiesenen Satze kann dieser Kreis ω mit ι nur einen Berührungspunkt haben; derselbe sei E_1. Wäre nun E_1 verschieden von E, so führe man um M diejenige Drehung aus, durch welche E_1 nach O gelangt; bei dieser Drehung gelangt dann O in einen Punkt E_2 des Kreises ι, der von E_1 verschieden sein müsste. Da die Strecke OE_1 der Strecke E_2O und also auch OE_2 congruent wird, so müsste E_2 ebenfalls ein Punkt des Kreises ω sein, dies wiederspräche dem Umstande, dass E_1 der einzige den Kreisen ω und ι gemeinsame Punkt sein sollte; d. h. der Kreis ω läuft durch E und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

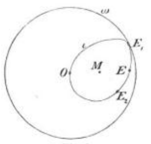


Fig. 4.

§ 30.

Bei den folgenden Entwickelungen legen wir die zu Beginn des § 29 construirte Strecke OE zu Grunde und ertheilen den Punkten O, E die Zahlenwerthe 0 bez. 1; sodann construiren wir die Mitte von OE und

ertheilen dieser Mitte den Zahlenwerth $\frac{1}{2}$, ferner ertheilen wir den Mitten der Strecken $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ bez. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ die Werthe $\frac{1}{4}$ bez. $\frac{3}{4}$ und dann den Mitten der Strecke $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ bez. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ die Werthe $\frac{1}{8}$ bez. $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$; und so fort. Ferner führen wir mit der ganzen Strecke $(0, 1)$ um den Punkt 0 eine Halbdrehung aus und ertheilen allgemein demjenigen Punkte, der aus dem zur Zahl a gehörigen Punkte hervorgeht, den Zahlenwerth $-a$; sodann führen wir um den Punkt 1 eine Halbdrehung aus und ertheilen allgemein demjenigen Punkte, der aus dem zur Zahl a gehörigen Punkte hervorgeht, den Zahlenwerth $2-a$ und so fort denken wir uns abwechselnd Halbdrehungen um O und um E ausgeführt und die neu entstehenden Punkte entsprechend benannt, bis schliesslich jede Zahl a einem bestimmten Punkte zugeordnet erscheint, wenn a eine rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist.

§ 31.

Wir erkennen für diese Zuordnung leicht folgendes Gesetz:

Durch eine Halbdrehung um den zur Zahl a gehörigen Punkt geht jeder Punkt x in den Punkt $2a - x$ über. Wenn wir mithin erst eine Halbdrehung um den Punkt $O = 0$ und dann eine solche um den Punkt a ausführen, so wird jeder Punkt x in den Punkt $x + 2a$ verwandelt.

§ 32.

Um die Punkte, denen Zahlen zugehören, unter einander anzuordnen und die von ihnen begrenzten Strecken mit einander zu vergleichen, benutzen wir den in § 29 aufgestellten Satz über sich berührende Kreise in folgender Weise:

Der Kreis um den Punkt 0 durch den Punkt $\frac{1}{2}$ umschliesst ganz den Kreis um $\frac{1}{4}$ durch $\frac{1}{2}$, und da dieser die Kreise um $\frac{1}{8}$ durch $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ und um $\frac{3}{8}$ durch $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ umschliesst, die letzteren wiederum die Kreise um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, um $\frac{3}{16}$ durch $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, um

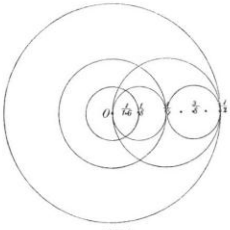


Fig. 5.

$\frac{5}{16}$ durch $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, um $\frac{7}{16}$ durch $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, u. s. f., so erkennen wir, dass die Strecke $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ grösser als alle Strecken $(0, a)$ ist, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{2}$ liegt.

Ferner umschliesst der Kreis um 0 durch $\frac{1}{4}$ den Kreis um $\frac{1}{8}$ durch $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Der zweite umschlossene Kreis umschliesst seinerseits die Kreise um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16}$ und um $\frac{3}{16}$ durch $\frac{4}{16}$, diese umschliessen wiederum die kleineren Kreise um $\frac{1}{32}, \frac{3}{32}, \frac{5}{32}, \frac{7}{32}$ u. s. f.; daraus erkennen wir, dass die Strecke $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ grösser ist als alle Strecken $(0, a)$, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{4}$ liegt.

Weiter betrachten wir den Kreis um 0 durch $\frac{1}{8}$; derselbe umschliesst den Kreis um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ und dieser wiederum umschliesst die kleineren Kreise um $\frac{1}{32}$ durch $\frac{2}{32}$ u. s. f.; daraus erkennen wir, dass die Strecke $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ grösser als alle Strecken $(0, a)$ ist, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{8}$ liegt. Durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens finden wir das allgemeine Resultat:

Ist a eine positive rationale Zahl, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{2^m}$ liegt, so ist die Strecke $(0, a)$ stets kleiner als die Strecke $\left(0, \frac{1}{2^m}\right)$.

§ 33.

Nunmehr sind wir im Stande, der Reihe nach folgende Hilfssätze zu beweisen:

Die Punkte, die den Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ entsprechen, convergiren gegen den Punkt 0.

Denn im entgegengesetzten Falle müssten, da die Strecken $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $\left(0, \frac{1}{16}\right)$, $\cdots$ beständig kleiner werden, die Punkte $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ ihre Verdichtungsstellen auf einem bestimmten wahren Kreise $\varkappa$

um den Punkt 0 haben. Es sei etwa $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$ eine Reihe von Punkten, die gegen einen Punkt K auf $\varkappa$ convergiren: dann mögen die Punkte

$$\frac{1}{2^{n_1+1}}, \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{1}{2^{n_3+1}}, \cdots$$

im Punkte K^* eine Verdichtungsstelle haben. Aus dem Satze in § 25 geht hervor, dass dann K^* die Mitte der Strecke OK sein müsste; dies widerspricht unter Hinzuziehung der am Schlusse von § 27 gefundenen Thatsache dem Umstande, dass K^* ebenfalls auf dem Kreise $\varkappa$ liegt.

§ 34.

Es mögen $a_1, a_2, a_3, \cdots$ positive rationale Zahlen bedeuten, deren Nenner Potenzen von 2 sind. Wenn dann die unendliche Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, \cdots$ gegen 0 convergirt, so convergirt auch die diesen Zahlen entsprechende Punktreihe gegen den Punkt 0.

Zum Beweise wählen wir die ganzen Exponenten $n_1, n_2, n_3, \cdots$ derart dass

$$a_1 < \frac{1}{2^{n_1}}, \; a_2 < \frac{1}{2^{n_2}}, \; a_3 < \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$$

wird, und die Reihe $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$ ebenfalls gegen 0 convergirt. Da zufolge des Satzes in § 32 allgemein der Punkt a_i innerhalb des Kreises um 0 durch $\frac{1}{2^{n_i}}$ liegt und nach dem in § 33 bewiesenen Hilfssatze die Kreise um 0 durch $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$ gegen 0 convergiren, so folgt sofort auch die zu beweisende Behauptung.

§ 35.

Endlich gilt der folgende Satz:

Es seien $a_1, a_2, a_3 \cdots$ eine unendliche Reihe von rationalen Zahlen, deren Nenner Potenzen von 2 sind und die gegen irgend eine reelle Zahl a convergiren: dann convergiren die entsprechenden Punkte $a_1, a_2, a_3, \cdots$ ebenfalls gegen einen bestimmten Punkt.

Zum Beweise nehmen wir das Gegentheil an: es seien etwa V' und V'' zwei von einander verschiedene Verdichtungsstellen der Punkte $a_1, a_2, a_3, \cdots$ und zwar mögen die Punkte $a_{1'}, a_{2'}, a_{3'}, \cdots$ gegen V' und $a_{1''}, a_{2''}, a_{3''}, \cdots$ gegen V'' convergiren. Nach den Bemerkungen in § 31 giebt es für jeden Punkt a_k eine aus zwei Halbdrehungen zusammengesetzte Bewegung, die allgemein den Punkt $a_{i'}$ in den Punkt $a_{i'} - a_k$ und zugleich den Punkt $a_{i''}$ in den Punkt $a_{i''} - a_k$ überführt, und da sowohl die Zahlenwerthe $a_{i'} - a_k$ als auch die Zahlenwerthe $a_{i''} - a_k$ mit wachsenden Indices beliebig nahe an 0 kommen, so erkennen wir mit Rücksicht auf den Satz in § 34, dass es Bewegungen giebt, die einen Punkt in beliebiger Nähe von V' und zugleich einen Punkt in beliebiger Nähe von V'' in beliebige Nähe des Punktes 0 bringen. Dies ist im Hinblick auf Axiom III einer oft angewandten Schlussweise zufolge nicht möglich.

§ 36.

Ertheilen wir nun dem Punkte, gegen den die Punkte $a_1, a_2, a_3, \cdots$ convergiren, den Zahlenwerth a, so ist damit überhaupt jedem reellen Zahlenwerthe ein bestimmter Punkt unserer Ebene zugeordnet; wir nennen das System aller dieser Punkte eine *wahre Gerade*, so dass also *die wahre Gerade dasjenige System von Punkten ist, die aus den Punkten O, E entstehen, wenn man fortgesetzt die Mitten nimmt, Halbdrehungen ausführt und die Häufungsstellen aller erhaltenen Punkte hinzufügt. Sämmtliche durch Bewegung aus dieser wahren Geraden entstehenden Punktsysteme sind wiederum wahre Gerade. Die Gerade zerfällt vom Punkte O aus in zwei Halbgerade.*

§ 37.

Mit Benutzung des Hilfssatzes in § 25 erkennen wir leicht, dass bei der Halbdrehung um einen beliebigen Punkt a unserer wahren Geraden allgemein der Punkt x in den Punkt $2a - x$ übergeht; bei der Ausführung zweier Halbdrehungen um die Punkte 0 und a geht also allgemein x in $x + 2a$ über.

Aus dem Satze in § 35 folgern wir leicht, dass auch dann, wenn $a_1, a_2, a_3, \cdots$ beliebige gegen a convergente Zahlen sind, die entsprechenden Punkte $a_1, a_2\ a_3, \cdots$ stets gegen den entsprechenden Punkt a convergiren; d. h. *die wahre Gerade ist eine stetige Curve.*

§ 38.

Versuchen wir die Annahme, dass es zwei Zahlenwerthe a und b gäbe, die auf der wahren Geraden den nämlichen Punkt P der Ebene darstellen. Der Punkt $\frac{a+b}{2}$ ist die Mitte der Strecke (a, b); derselbe müsste daher mit dem Punkte P übereinstimmen. Das Gleiche müsste dann von den Mitten der Strecken $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ und $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ d. h. den Punkten $\frac{3a+b}{4}$ und $\frac{a+3b}{4}$ gelten. Indem wir fortgesetzt die Mitten nehmen, erkennen wir, dass sämmtliche Punkte $\frac{A_n a + B_n b}{2^n}$, wo A_n, B_n positive ganze Zahlen

mit der Summe 2^n bedeuten, mit P identisch sein müssten, und hieraus folgt nach § 37, dass überhaupt allen zwischen a und b gelegenen reellen Zahlen der nämliche Punkt P der Geraden entsprechen müsste. Dieser Widerspruch zeigt, dass *die wahre Gerade keinen Doppelpunkt besitzt.* Ebenso erkennen wir, dass *die wahre Gerade nicht in sich selbst zurücklaufen kann.*

§ 39.

Zwei Gerade haben höchstens einen Punkt gemein.

In der That, hätten sie die zwei Punkte A und B gemein und entsprächen diesen Punkten auf der einen Graden die Zahlenwerthe a, b und auf der andern Geraden die Zahlenwerthe a', b', so müssten nach § 24 auch die Mitten $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a'+b'}{2}$ mit einander übereinstimmen. Indem wir fortgesetzt wie in § 38 die Mitten nehmen, schliessen wir in ähnlicher Weise, dass sämmtliche zwischen a und b bez. a' und b' gelegenen Punkte auf beiden Geraden und mithin diese Geraden selbst mit einander identisch sind.

§ 40.

Unsere wahre Gerade schneidet jeden um einen ihrer Punkte, etwa um den Punkt 0 *gelegten Kreis.*

In der That, bei der entgegengesetzten Annahme sind nur zwei Fälle möglich: entweder es giebt einen bestimmten Kreis $\varkappa$ um den Punkt 0, der von der wahren Geraden g noch getroffen wird, während die den Kreis $\varkappa$ umschliessenden Kreise um 0 von g nicht mehr getroffen werden; oder es giebt einen bestimmten Kreis $\varkappa$, der von g nicht getroffen wird, während alle innerhalb $\varkappa$ verlaufenden Kreise um den Punkt 0 von g getroffen werden.

Da die Gerade g ihrer Construction gemäss über jeden ihrer Punkte hinaus stets fortgesetzt werden kann und, wie in § 38 gezeigt worden ist, keinen Doppelpunkt besitzen darf, so müsste es im *ersteren* Falle gewiss einen innerhalb $\varkappa$ verlaufenden Kreis um den Punkt 0 geben, den sie auf derselben Seite von 0 an zwei Stellen A, B träfe. Führt man nun eine Drehung um den Punkt 0 aus, durch welche A in B übergeht, so würde dabei unsere Gerade g in eine andere übergehen, welche g ausser in 0 noch in B schnitte; dies ist dem in § 39 bewiesenen Satze zufolge unmöglich.

Im *zweiten* Falle bezeichne K einen Punkt des Kreises $\varkappa$, in dessen beliebige Nähe die wahre Gerade g gelangt. Man schlage dann um K einen wahren Kreis π^*, der kleiner als $\varkappa$ ist und g etwa im Punkte M treffe. Sodann schlage man um M einen Kreis π, der grösser als π^* und kleiner als $\varkappa$ ist. Dieser Kreis π enthält, da er grösser als π^* ist, den

Punkt K im Inneren und da er kleiner als $\varkappa$ ist, so ergiebt unsere Annahme in Verbindung mit dem vorhin Bewiesenen, dass die durch M gehende Gerade g stetig innerhalb π verläuft, nach der einen oder anderen Richtung hin verlängert je durch einen Punkt auf π aus dem Kreise π heraustritt und dann nicht mehr in den Kreis π zurückläuft. Da die Gerade g andererseits dem innerhalb π gelegenen Punkte K beliebig nahe kommen soll, so enthält sie nothwendig den Punkt K selbst; hierin liegt ein Widerspruch mit unserer gegenwärtigen Annahme.

Da das System aller Kreise um einen Punkt die ganze Ebene lückenlos bedeckt, so folgt zugleich aus dem Vorigen, dass *irgend zwei Punkte in unserer ebenen Geometrie stets durch eine wahre Gerade verbunden werden können.*

§ 41.

Wir haben nun zu zeigen, dass *die Congruenzaxiome in unserer ebenen Geometrie gültig sind.*

Zu dem Zwecke wählen wir einen bestimmten wahren Kreis $\varkappa$ aus und führen für die Punkte desselben nach § 18 die Parameterdarstellung durch den Winkel ω ein: dann wird, wenn ω die Werthe 0 bis 2π erhält, der wahre Kreis in einem bestimmten Sinne durchlaufen. Aus dieser Einführung folgt für jeden anderen mit $\varkappa$ congruenten Kreis ebenfalls ein bestimmter Umlaufssinn, nämlich derjenige, der sich ergiebt, wenn wir den Mittelpunkt des Kreises $\varkappa$ nach § 22 durch zwei hintereinander angewandte Drehungen mit dem Mittelpunkt des vorgelegten Kreises zur Deckung bringen. Da es im Hinblick auf den zu Anfang dieser Abhandlung definirten Begriff der Bewegung nicht möglich ist, den ursprünglichen Kreis $\varkappa$ mit sich selbst im umgekehrten Umlaufssinn zur Deckung zu bringen, so existirt in der That für jeden Kreis ein bestimmter Umlaufssinn.

Jetzt nehmen wir zwei von einem Punkte M ausgehende Halbgeraden, die nicht beide zusammen eine wahre Gerade ausmachen, schlagen um M einen zu $\varkappa$ congruenten Kreis und fixiren dasjenige von den Halbgeraden ausgeschnittene Stück dieses Kreises, welches einem unterhalb der Zahl π liegenden Parameterintervall entspricht. Der festgesetzte Umlaufssinn führt dann innerhalb des fixirten Kreisbogenstückes von einer der beiden Halbgeraden zu der anderen Halbgeraden: wir bezeichnen die erstere Halbgerade als den rechten, die letztere Halbgerade als den linken Schenkel des Winkels zwischen beiden Halbgeraden, während das Parameterintervall $(< \pi)$ selbst das Mass für diesen Winkel abgiebt. Aus unserem Begriffe der Bewegung folgt dann der erste Congruenzsatz für zwei Dreiecke in folgender Gestalt:

Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Congruenzen

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, wenn ferner AB bez. $A'B'$ die rechten, AC bez. $A'C'$ die linken Schenkel der Winkel BAC bez. $B'A'C'$ sind, so gelten stets auch die Congruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \textit{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B',$$
$$BC \equiv B'C'.$$

§ 42.

Nachdem in § 30—§ 40 die wahre Gerade definirt und ihre Eigenschaften abgeleitet worden sind, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

Erstens nehmen wir an, dass es durch einen Punkt nur *eine* Gerade giebt, die eine gegebene Gerade nicht schneidet (Parallelenaxiom). Für unsere Ebene gelten dann die sämmtlichen Axiome, die ich in meiner Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie aufgestellt habe, nur dass das Congruenzaxiom IV, 6 dort in der vorhin in § 41 aufgestellten engeren Fassung zu nehmen ist. Auch bei dieser engeren Fassung des letzten Congruenzaxioms folgt mit Nothwendigkeit die Euklidische ebene Geometrie*).

Zweitens nehmen wir an, dass es durch jeden Punkt A zwei Halbgeraden giebt, die nicht zusammen ein und dieselbe Gerade ausmachen, und die eine gegebene Gerade nicht schneiden, während jede in dem durch sie gebildeten Winkelraum gelegene von A ausgehende Halbgerade die gegebene Gerade schneidet.

Mit Hilfe der Stetigkeit folgt dann leicht, dass auch umgekehrt zu irgend zwei von einem Punkte A ausgehenden Halbgeraden, die nicht zusammen ein und dieselbe Gerade ausmachen, stets eine bestimmte Gerade g gehört, die jene beiden Halbgeraden nicht schneidet, dagegen von jeder anderen Halbgeraden getroffen wird, die von A ausgeht und in dem Winkelraum zwischen den beiden gegebenen Halbgeraden verläuft. Unter diesen Umständen folgt dann die Bolyai-Lobatschefsky'sche ebene Geometrie, auch wenn wir das Congruenzaxiom IV, 6 in der vorhin aufgestellten engeren Fassung zu Grunde legen**).

Zum Schlusse möchte ich auf den charakteristischen Unterschied hinweisen, der uns entgegentritt, wenn wir die vorstehende Begründung der

*) Vgl. dazu meine demnächst in den Proceedings of the London mathematical society erscheinende Abhandlung „Ueber den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreiecke".

**) Vgl. meine Begründung der Bolyai-Lobatschefsky'schen Geometrie, die ich demnächst in diesen Annalen zu veröffentlichen gedenke.

Geometrie mit derjenigen vergleichen, die ich in meiner Festschrift „Grundlagen der Geometrie“ *) zu geben versucht habe. In dieser Festschrift ist eine solche Anordnnng der Axiome befolgt worden, wobei die Stetigkeit hinter allen übrigen Axiomen an *letzter* Stelle gefordert wird, so dass dann naturgemäss die Frage in den Vordergrund tritt, inwieweit die bekannten Sätze und Schlussweisen der elementaren Geometrie von der Forderung der Stetigkeit unabhängig sind. In der vorstehenden Untersuchung dagegen wird die Stetigkeit vor allen übrigen Axiomen an *erster* Stelle durch die Definitionen der Ebene und der Bewegung gefordert, so dass hier vielmehr die wichtigste Aufgabe darin bestand, das geringste Mass von Forderungen zu ermitteln, um aus demselben unter weitester Benutzung der Stetigkeit die elementaren Gebilde der Geometrie (Kreis und Gerade) und ihre zum Aufbau der Geometrie nothwendigen Eigenschaften gewinnen zu können. In der That hat die vorstehende Untersuchung gezeigt, dass hierzu die in den obigen Axiomen I—III ausgesprochenen Forderungen hinreichend sind.

Göttingen, den 10. Mai 1902.

*) Leipzig 1899. Vergleiche auch die mit Zusätzen versehenen Uebersetzungen ins Französische (Annales de l'école Normale 1900) und Englische (Chicago 1902).

Beitrag zur Auflösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen gewisse bestimmte Integrale genügen.

Von

J. H. GRAF in Bern.

Im 45ten Band dieser Zeitschrift S. 235 u. s. f. haben wir im Abschnitte B darauf hingewiesen, dass man bei der Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung auch auf indirectem Wege vorgehen könne, indem man eine Differentialgleichung bildet, der eine bestimmte Integralform zukommt; die allgemeine Methode ist kurz folgende:

$$(1)\;(a_0x+b_0)\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+(a_1x+b_1)\frac{\partial^{n-1}y}{\partial x^{n-1}}+\cdots+(a_{n-1}x+b_{n-1})\frac{\partial y}{\partial x}+(a_nx+b_n)y=0,$$

sei die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit linearen Coefficienten.

$$f(x) \quad \text{und} \quad g(x)$$

seien zwei ganze Functionen n^{ten} Grades in x,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n;$$

dann kann (1) dargestellt werden in der Form

$$(2) \qquad x\,f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y+g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)y=0.$$

Dieser Gleichung versuche man durch ein bestimmtes Integral zu genügen, das die Form habe

$$y=\int e^{xt}\frac{h(t)}{f(t)}\,dt,$$

wo $h(t)$ eine noch zu bestimmende Function von t allein, ferner die Grenzen constant und noch aus den Bedingungen zu finden sind.

Da

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{xt}=e^{xt}f(t),$$
$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{xt}=e^{xt}g(t),$$

Bibliografia

BLUMENTHAL, O.

"Lebensgeschichte", in Hilbert *Gesammelte Abhandlungen A* Vol. 3, 387-429.

BREITENBERG, E.

Gauss's Geodesy and the Axiom of Parallels", *Arch. Hist. Ex. Sci.* 31, 273-289.

CONTRO, W.

"Von Pasch bis Hilbert", *Arch. Hist. Ex. Sci.* 15, 283-295.

CORRY, L.

"Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures" , Boston,Birkhäuser.

"David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1894-1905)", *Archive for History of Exact Sciences* 51: 83-198.

"The Origins of Eternal Truth in Modern Mathematics: Hilbert to Bourbaki and Beyond", *Science in Context* 12: 137-183

DIEUDONNÉ, J..

"Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques", in F. Le Lionnais (ed.) *Les grands Courants de la Pens ׳e Mathématique* (Second, enlarged edition), Paris, Blanchard, 443-555.

"The Work of Nicolas Bourbaki", *Am. Math. Monthly* 77, 134-145.

FERREIRÓS, J.

Labyriths of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics, Boston, Birkhäuser.

GRAY, J.

"Le défi de Hilbert", Oxford University Press, 2000.

HERTZ, H.

The Principles of Mechanics Presented in a New Form, New York, Dover.

HILBERT, D.

Grundlagen der Geometrie, Leipzig, Teubner.

"On the Infinite", in J. van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cmabridge, Harvard University Press (1967), pp. 367-392.

"Natur und Mathematisches Erkennen: Vorlesungen, gehalten 1919-1920" in Göttingen. (Edited and with an English introduction by David E. Rowe), Basel, Birkhäuser.

"Grundlagen der Matematik", deux tomes, Springer, Berlin, 1934-9

"Grundlagen der Geometrie", Teubner,Berlin, 1930, tr. Paul Rossier

"Foundations of Geometry", Open Court, 1990;

"Les Fondements de la Géometrie", Dunod, CNRS, 1971.

HUNTINGTON, E.V.

"Simplified Definition of a Group", *Bull. AMS* 8, 296-300. Empiricista: 21

KENNEDY, H.

Peano - Life and Work of Giuseppe Peano, Dordrecht, Reidel.

KLEIN, F.

"Über die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie", *Math. Ann*. 4, 573-625.

"Über die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie", *Math. Ann.* 6, 112-145.

“Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, 2Vols., ed. by R. Courant and O. Neugebauer, Berlin, Springer. (Chelsea reprint, New York, 1948.)

MANCOSU, P. (ED.)
From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s, New York, Oxford University Press.

MILLER, A.I.
1972 “On the Myth of Gauss’s Experiment on the Physical Nature of Space”, *Isis* 63, 345-348.

MOORE, E.H.
“Projective Axioms of Geometry”, *Trans. AMS* 3, 142-158.

CASSOU-NOGUÈS, P.
“Hilbert”, Ed. Les belles Lettres. Figures du Savoir, 2004.

REID, C.
“Hilbert”. *Springer Verlag*, 1970

ROWE, D.E.
“The Philosophical Views of Klein and Hilbert”, in Sasaki et al. (eds.) *The Intersection of History and Mathematics*, Basel/Berlin/Boston, Birkhäuser, 187-202.

SCHUR, F.
“Über die Grundlagen der Geometrie”, *Math. Ann.* 55, 265-292.

“Grundlagen der Geometrie”, Leipzig, Teubner.

SCHOLZ, E.

“Gauss und die Begründung der ‘Höhere’ Geodäsie” in M. Folkerts et al. (eds.) *Amphora - Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65 Geburtstag*, Berlin, Birkhäuser, 631-648.

SEGRE, M.

“Peano’s Axioms in their Historical Context”, *Arch. Hist. Ex. Sci.* 48, 201-342.

TOEPELL, M.M.

Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie”, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

TORRETTI, R.

“Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré”, Dordrecht, Reidel.

TYMOCZKO, T (ED.).

New Directions in the Philosophy of Mathematics, Boston, Birkhäuser. Empiricista: 22

VAN DALEN, D.

1990 \`The war of the frogs and the mice, or the crisis of Mathematische Annalen', *Mathematical Intelligencer*, 12, no. 4, 17-31.

VERONESE, G.

1891 Fondamenti di geometria a piu dimensioni e a piu specie di unitá rettilinee,

esposti in forma elementare, Padova, Tipografia del Seminario.