DESPERTANDO OS INDECIDÍVEIS: UM DIÁLOGO ENTRE AS VERDADES E AS ILUSÕES MATEMÁTICAS.

Luciane de Paiva Moura

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TECNICAS E EPISTEMOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TECNICAS E EPISTEMOLOGIA.

Aprovada por:

____

Prof. Ricardo Silva Kubrusly, Ph.D.

____

Prof. Luiz Alberto Oliveira, D. Sc.

____

Prof. Carlos Antônido de Moura, Ph. D.

____

Prof[a]. Ângela Rocha dos Santos, D.Sc.

____

Prof. Carlos Benevenuto Guisard Koehler, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 2011

MOURA, LUCIANE DE PAIVA

Despertando os indecidíveis: um diálogo entre as verdades e as ilusões matemática

[Rio de Janeiro] 2011

VIII, 79p. 29,7 cm (PPHCTE/UFRJ, D.Sc., Historia das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2011)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, PPHCTE

1. O Teorema de Gödel

I. PPHCTE/UFRJ II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

A Deus que jamais permitiu que estivesse sozinha, nem mesmo nos momentos de erro, e que revestiu-me de fé para que eu pudesse suportar as dúvidas da vida.

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese à minha mãe, Fátima, por ser luz, ao meu pai, Henrique, por ser honestidade, à minha irmã, Natália, por ser determinação, ao André por ser ternura e ao meu amigo Ricardo Kubrusly por ser generosidade em minha vida.

Resumo da Tese apresentada ao PPHCTE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

DESPERTANDO OS INDECIDÍVEIS: UM DIÁLOGO ENTRE AS VERDADES E AS ILUSÕES MATEMÁTICAS.

Luciane de Paiva Moura

Fevereiro/2011

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

Programa: Historia das Ciências e das Técnicas e Epistemologia

A matemática é um constructo puramente intelectual, rigorosamente formalizada e bem definida que permite explicitar e gerar verdades localmente incontestáveis por meio de demonstrações que transformam de modo racional informações implícitas em explícitas, por meio da lógica que oferece regras de inferências preservadoras de verdades. Nesse jogo, aparentemente perfeito de obtenção de verdades, ainda sim surgiram paradoxos gerando as investigações profundas sobre os fundamentos da matemática. Após a detecção de paradoxos, concepção de existência matemática passa a ser não apenas produzir respostas satisfatórias, mas sim ser consistente, estar livre de contradições.

Em 1931, os conhecidos teoremas da incompletude de Gödel vêm explicitar a existência de proposições indecidíveis e a impossibilidade da demonstração da consistência do sistema pelo próprio sistema, ou seja, teoremas e verdades não podem ser postos em correspondência biunívuca.

Com seus trabalhos, Gödel permite, em uma visão filosófica, a contradição, rebatizando-a como indecidível e possibilitando seu retorno ao sistema na forma de axioma. A incompletude matemática nada mais é ter que decidir acerca de algumas proposições, assim como desde o início decidimos quais os axiomas embasariam nossa teoria. Mas essa escolha deve ser extremamente criteriosa, uma vez que escolher verdades é escolher valores, qual será o valor mais apropriado para modelar nosso mundo? Mesmo possibilitando uma modelagem eficiente do real, a matemática não é apenas reflexo do mundo físico, é uma produção intelectual, cultural, cujo desenvolvimento depende da sociedade, das técnicas desenvolvidas e dos interesses de quem a manipula e por isso, jamais será impessoal, ahistórica e arbitrária.

Este trabalho pretende, então, debruçar-se sobre o maior desafio para um matemático, que certamente não é a demonstração de um importante teorema ainda em aberto, mas sim fazer com que o matemático reflita sobre o conhecimento que produz e tentar entender como e por que a Matemática funciona, colocando seus objetos matemáticos como cerne da discussão e dialogando com o infinito, um dos seus mais representativos objetos, não com a intenção de descrevê-lo mas sim, de entender seus mistérios.

Abstract of Thesis presented to PPHCTE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

UNDECIDABLE AWAKENING: A DIALOGUE BETWEEN MATHEMATICAL TRUTHS AND ILLUSIONS

Luciane de Paiva Moura

February/2011

Advisor: Ricardo Silva Kubrusly

Department: History of Science Techniques and Epistemology

Mathematics is a purely intellectual construct, rigorously formalized and well defined that allows to explicit incontrovertible locally truths by demonstrations that uses logical rules of inferences, and turns rationally implied informations in explicit ones. In this game to obtain truths, apparently perfect, paradoxes also appeared and in consequence of that mathematicians have started deep investigations into the foundations of maths. After detection of paradoxes, mathematical conception of existence becomes not only to produce satisfactory answers, but be consistent, be free of contradictions.

In 1931, the incompleteness theorems of Gödel have clarified the existence of undecidable propositions and the impossibility of demonstrating the consistency of the system by the system, theorems and truths can not be put into correspondence. With his works, Gödel allows, in a philosophical way, to renames the contradiction as undecidable and enable its to return to the system in the form of an axiom. Incompleteness mathematics is nothing more

having to decide on some propositions, as well as from the beginning we decided which axioms based our theory. But that choice should be extremely careful, once choose truth is to choose values, and what is the value most appropriate to model our world?

Even being an efficient model of the real, maths is not a reflection of the physical world, is an intellectual production, cultural, whose development depends on the society, the techniques developed and the interests of those who manipulate and therefore will never be impersonal, ahistorical and arbitrary.

This paper aims, then look into the biggest challenge for a mathematician, which is certainly not a demonstration of an important theorem that is still open, but to reflect on the mathematical knowledge, try to understand how and why that mathematics works, places its mathematical objects as the core of the discussion and dialogue with the infinite, one of its most representative objects, not with the intention to describe it but to understand its mysteries.

SUMÁRIO

PRÓLOGO SE A MATEMÁTICA FOSSE GUIMARÃES 11
INTRODUÇÃO 14
CAPÍTULO 1 SOBRE A MATEMÁTICA 16
1.1 SOBRE OS MATEMÁTICOS - UMA BREVE (E NECESSÁRIA) ANTECIPAÇÃO 16
1.2 UMA TENTATIVA DE CONHECER A MATEMÁTICA E SEUS CAPRICHOS 17
1.3 A CONSTRUÇÃO DO RACIONAL: UM MUNDO DELIRANTE ORGANIZADO 20
1.4 A ILUSÃO "É DERIVADA DOS DESEJOS HUMANOS" 22
CAPÍTULO 2 A FANTÁSTICA FÁBRICA DE VERDADES REVELOU O QUE NÃO DEVERIA: ENFIM, O TEOREMA 26
CAPÍTULO 3 VERDADE 33
3.1 A DIFICULDADE: COMO DEFINIR O QUE PARECE INDEFINÍVEL? 33
3.2 O PROBLEMA INICIAL: AS VERDADES INICIAIS 34
CAPÍTULO 4 NOSSA FALTA DE MODÉSTIA INTELECTUAL E NOSSAS EXPERIÊNCIAS DE VERDADE 37
4.1 EXCESSO DE LUCIDEZ 37
ANEXO O DESEJO DO PENSAMENTO PURO E A PERFEIÇÃO ESTÉTICA 40
1 CONJECTURA DE GOLDBACH 40
2 O INFINITO NÃO PARA DE SURPREENDER 40
3 A DIVISÃO POR ZERO 52
4 UM POUCO DA BIBLIOGRAFIA DE KURT GÖDEL 52
5 UM POUCO SOBRE DAVID HILBERT 54
6 PARADOXOS/ANTINOMIAS 57
7 TEORIA DOS TIPOS 62
8 TEOREMA DE CANTOR 64
9 AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDEANAS 66
10 O AXIOMA DA ESCOLHA 67

11 OS TEOREMAS DE UM SISTEMA FORMAL SÃO ENUMERÁVEIS E AS VERDADES DA ARITMÉTICA SÃO NÃO ENUMERÁVEIS....................................69
CONCLUSÃO...72
REFERÊNCIAS...74

PRÓLOGO

SE A MATEMÁTICA FOSSE GUIMARÃES...

Em um dos meus encontros com a matemática ela falou-me:

"- Se quer seguir-me, narro-lhe; não uma aventura, mas experiência, a que me introduziram, alternadamente, série de raciocínios e intuições. Tomou-me tempo, desânimos, esforços. Dela me prezo, sem vangloriar-me. Surpreendo-me, porém, um tanto à-parte de todos, penetrando conhecimento que os outros ainda ignoram. (...) Reporto-me ao transcendente. Tudo, aliás, é a ponta de um mistério. Inclusive os fatos. Ou a ausência deles. (...)

Se nunca atentou nisso, é porque vivemos, de modo incorrigível, distraídos das coisas mais importantes.(...)

Ah, o tempo é o mágico de todas as traições. (...) Ah, **minha amiga**, a espécie humana peleja para impor ao latejante mundo um pouco de rotina e lógica, mas algo ou alguém de tudo faz frincha para rir-se da gente... E então?(...)

Sou, porém, **positiva**, racional, piso o chão a pés e patas. Satisfazer-me com fantásticas não-explicações? – jamais.(...)

O que se busca, então, é verificar, acertar, trabalhar um modelo subjetivo, preexistente; enfim, ampliar o ilusório, mediante sucessivas novas capas de ilusão. Eu, porém, era **uma perquiridora** imparcial, **neutra** absolutamente. **A caçadora** de meu próprio aspecto formal, **movida** por curiosidade, quando não impessoal, desinteressada; para não dizer o urgir científico. Levei meses.

Sim, instrutivos. Operava com toda sorte de astúcias: o rapidíssimo relance, os golpes de esguelha, a longa obliqüidade apurada, as contra-surpresas, a finta de pálpebras, a tocaia com a luz de-repente acêsa, os ângulos variados incessantemente. Sobretudo uma inembotável paciência. Mirava-me, também, em marcados momentos – de ira, medo, orgulho **abatida** ou **dilatada**, extrema alegria ou tristeza. Sobreabriam-se-me enigmas.(...) Sendo assim, necessitava eu de transverberar o embuço, a travisagem daquela máscara, a fito de devassar o núcleo dessa nebulosa – a minha vera forma. Tinha de haver um jeito. Meditei-o. Assistiram-me seguras inspirações.(...)

Releve-me não detalhar o método ou métodos de que me vali, e que revezavam a mais buscante análise e o estrênuo vigor de abstração. Mesmo as etapas preparatórias dariam para aterrar a quem menos pronto ao árduo. (...)

Ah, **minha amiga**, nem no ovo o pinto está intacto. E, em seguida, o que se deveria ao contágio das paixões, manifestadas ou latentes, o que ressaltava das desordenadas pressões psicológicas transitórias. E, ainda, o que, em nossas caras, materializa idéias e sugestões de outrem; e os efêmeros interesses, sem seqüência nem antecedência, sem conexões nem fundura. Careceríamos de dias para explicar-lhe. Prefiro que tome minhas afirmações por seu valor nominal.

À medida que trabalhava com maior maestria, no excluir, abstrair e abstrar, meu esquema perspectivo clivava-se, em forma meândrica, a modos de couve-flor ou bucho de boi, e em mosaicos, e francamente cavernoso, como uma esponja. E escurecia-se. Por aí, não obstante os cuidados com a saúde, comecei a sofrer dores de cabeça. Será que me acorvadei, sem menos? Perdoe-me, **a senhora**, o constrangimento, ao ter de mudar de tom para confidência tão humana, em nota de fraqueza inesperada e indigna.(...)

Mas, com o comum correr quotidiano, a gente se aquieta, esquece-se de muito. O tempo, em longo trecho, é sempre tranqüilo. E pode ser, não menos, que encoberta curiosidade me picasse. Um dia... Desculpe-me, não viso a efeitos de ficcionista, inflectindo de propósito, em agudo, as situações. (...)

Voltei a querer encarar-me. Nada. E, o que tomadamente me estarreceu: eu não via meus olhos. No brilhante e polido nada, não se me espelhavam nem eles!

Tanto dito que, partindo para uma figura gradualmente simplificada, despojara-me, ao termo, até à total desfigura. E a terrível conclusão: não haveria em mim uma existência central, pessoal, autônoma? Seria eu **uma des-almada**? Então, o que se me fingia de um suposto eu, não era mais que, sobre a instintos, tudo o mais que na impermanência se indefine?(...) Seríamos não muito mais que crianças – o espírito do viver não passando de ímpetos espasmódicos, relampejados entre miragens: a esperança e a memória.(...)

Devia ou não devia contar-lhe, por motivos talvez. Do que digo, descubro, deduzo. Será, se? Apalpo o evidente? Tresbusco. (...)

Se me permite, espero, agora, sua opinião, mesma, **da senhora**, sobre tanto assunto. Solicito os reparos que se digne dar-me, a mim, **serva** do senhor, recente **amiga**, mas **companheira** no amor da ciência, de seus transviados acertos e de seus esbarros titubeados. Sim?”[1]

Calou-se. Sorriu novamente e soltou minha mão. Fiquei encantada com o encontro. Feliz com a confiança dada a mim, saí correndo para pensar nas minhas opiniões sobre tudo que ela havia dito. Afastei-me feliz e ela voltou a trabalhar.

[1] Trechos do Conto Espelho de Guimarães Rosa. Retirado do livro ROSA, João Guimarães. **Primeiras Estórias,** 1ª Edição. Rio de Janeiro: MEDIAfashion, 2008.

Houve uma licença poética onde as palavras em negrito tiveram seu gênero alterado para fazerem sentido na estória.

INTRODUÇÃO

Minhas ideias são demasiadamente espalhadas e minhas questões sempre foram anteriores aos resultados dos teoremas.

Por esse motivo, não queria ter o privilégio de me relacionar com a matemática apenas para demonstrar, refutar ou decidir como indecidível a Conjectura de Goldbach [2]. Queria mais. Queria realmente saber da matemática como ela funciona e por que na grande maioria das vezes ela se dava ao trabalho de descrever um mundo de objetos aparentemente totalmente diferente dos seus objetos.

De fato, o que há por trás dessa criação tão humana? É por meio da sua formalização fria que hoje erro virtualmente enquanto escrevo e penso ao seu respeito. Quem são seus objetos? São eles reais ou ideais? Quem são suas verdades iniciais? Destituídas de significados ou baseadas na experiência sensível, mesmo que essa experiência seja o plano de Euclides? Como conseguimos que dê certo? O que há por trás desse jogo imaginário? Mistérios da razão!? Todas as perguntas a respeito da matemática parecem possuir respostas tais como ela: incompletas.

Quanto fascínio proposto a mim! Ser matemático é ter o aval para dialogar com o infinito[3]. Não mais o adjetivo infinito que significa o que não tem fim. Mas a ter a possibilidade de trabalhar o substantivo infinito. O infinito que passa a ser entidade, conceito, objeto. O infinito que salva do paradoxo, a divisão por zero.[4]

Ser matemático é poder trabalhar não tendo o menor compromisso com a realidade objetiva e mesmo assim produzir resultados que transformam tanto o ordinário cotidiano como a humanidade com resultados adoravelmente verdadeiros. É o descompromisso formal que dá certo.

---

[2] O enunciado da Conjectura de Goldbach pode ser visto na seção 1 do Anexo - O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.

[3] Alguns resultados interessantes que o infinito traz para a matemática podem ser vistos na seção
2 do Anexo - O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.

[4] O paradoxo que a divisão por zero traz pode ser visto na seção 3 do Anexo - O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.

Utilizo Clarice Lispector na tentativa de descrever o que ocorre no mundo matemático: “Criar, não é imaginação, é correr o grande risco de se ter a realidade”[5].

Parece que sim. De todas, essa apresenta-se como a definição mais plausível que já escutei ou pude pensar até o momento sobre matemática.

Minha crença é construída, então, dessa maneira: criamos tão especialmente num mundo abstrato, imbuído de tantos desejos que acabamos “tendo a realidade” qualquer realidade que seja, principalmente se for a mais conveniente.

---

[5] LISPECTOR, Clarice. **A hora da estrela**. São Paulo: Museu da Língua Portuguesa, 2007.

CAPÍTULO 1: SOBRE A MATEMÁTICA

1.1 SOBRE OS MATEMÁTICOS - UMA BREVE (E NECESSÁRIA) ANTECIPAÇÃO

Fazer matemática é uma produção que depende exclusivamente de quem faz, o matemático. Este aceita a solidão para além da relação com o mundo, solidão com seus objetos de estudo, uma vez que não há identificação ontológica entre eles. Mesmo pretendendo-se fazer uma matemática impessoal, ahistórica e arbitrária, após os resultados de Gödel de 1931, a necessidade e importância de uma parte criativa que não pode ser eliminada na matemática tornou-se fundamental uma vez que estabeleceu-se que a matemática não pode ser mecânica. O trabalhador, o inventor matemático acaba sendo salvo pelo resultado mais ameaçador a sua criação.

Ser matemático é possuir seus laboratórios dentro de si. É ser importante, pois, qual é o valor de produzir verdades?

Contudo, existem coisas que os matemáticos, enquanto apenas matemáticos, não saberão responder. Mas enquanto seres humanos, com toda sua complexidade inerente, poderão. E é importante lembrar, que não somos seres exclusivamente racionais.

Assim, pensar matemática é dar relevância a todas as ideias, e não apenas contar a história das ideias vencedoras. O fazer matemático parece-me tão árduo que nunca permitiu e nem permite ao próprio matemático a noção de que tinha que ser assim da maneira que é, ou pensamos ser. Apenas para quem se afastou ou nunca chegou tão perto é que fica claro que a matemática tinha que ser incompleta[6].

---

[6] Referência aos resultados dos Teoremas de Gödel de 1931.

1.2 UMA TENTATIVA DE CONHECER A MATEMÁTICA E SEUS CAPRICHOS

Qual a semântica do infinito? Proponho essa pergunta uma vez que para conhecer é necessário saber qual é o objeto de conhecimento. Contudo, como essencial é invisível aos nossos olhos, já disse a raposa ao Pequeno Príncipe[7], os matemáticos em geral, estiveram sempre muito ocupados com o desenvolvimento racional matemático e nunca colocaram seus objetos como preocupação central, deixando-os invisíveis. A preocupação vigente sempre foi sintática, simbólica e não de conteúdo, de semântica.

O objetivo deste trabalho é colocarmos, então, os objetos matemáticos como cerne da discussão, jamais com a intenção de descrevê-los absolutamente, mas sim, de dialogar com seus mistérios.

Mistérios esses que são muitos. A Matemática apresenta-se como um mundo densamente surpreendente. Talvez por ser um constructo abstrato e humano não esperávamos nos surpreender, uma vez que de certo modo sempre acreditamos estar com nossas criações, sob domínio, sob controle. Kurt Gödel[8], por exemplo, após deparar-se com indecidíveis, questiona o status que a matemática carrega de criação humana. O questionamento godeliano: como é possível desconhecer o valor de verdade daquilo que eu mesmo criei?

Como um mundo criado pelo esforço intelectual humano pode surpreender tanto os próprios homens? Apesar da criação ser nossa, os resultados não saem como o previsto. Principalmente quando falamos de infinito. O infinito faz questão de não corresponder ao esperado. A atualização, por exemplo, da potencialidade da dízima 0,999... é o 1. Em relação a teoria dos conjuntos, mesmo o conjunto dos números racionais tendo elementos com uma propriedade que os elementos do conjunto dos números naturais não possuem, a de que entre quaisquer dois números racionais a e b sempre existe um número racional c tal que $a < c < b$, mesmo

---

[7] Saint-Exupéry, Antoine de. **O Pequeno Príncipe**. 48. ed. Rio de Janeiro: Agir, 2000.

[8] Um pouco sobre a bibliografia de Kurt Gödel pode ser visto na seção 4 do Anexo - O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.

assim, o conjunto dos números racionais tem a mesma cardinalidade[9], mesmo tamanho, do conjunto dos números naturais[10]. E ao analisarmos o conjunto dos números reais, este tem uma cardinalidade maior que os conjuntos citados anteriormente[11], o infinito que se identifica a essa cardinalidade é de outra ordem, ou seja, existem infinitos de tamanhos diferentes.

O que ocorre é que as verdades matemáticas, em si, descrevem o objeto que julgam e não a relação que mantemos com eles, o que as tornam isentas de subjetividade.

Desse modo, como em um conjunto axiomático deve haver conceitos indefinidos, seus significados ou sua conexão com objetos do mundo físico é matematicamente não essencial, a matemática inicia-se sem a pressão da necessidade de aplicação e a partir de então, o conhecimento ganha um momento de si mesmo e transcende o confinamento da utilidade imediata e da expectativa da realidade.

O surgimento de ideias matemáticas pode ter até relações sociais e concretas, vir do desejo motivador para tradução de realidades de mundos externos, nos levando possivelmente a enganos acerca destes mesmos mundos, contudo, essas ideias só viram afirmativas, teorias matemáticas, se forem capazes de abandonar história e passado, quando construírem universalismos sem lembranças de suas ideias iniciais. Os objetos matemáticos podem ter um estímulo ontológico na realidade objetiva, mas só podem ser manipulados como objetos matemáticos quando tornam-se puramente ideais, mentais destituídos de significado empírico.

Os objetos matemáticos, então, são significantes que abandonam os significados. O que é bem plausível quando encaramos a matemática como linguagem-pensamento.

Passamos séculos de existência buscando os óculos adequados para a leitura da criação, na busca pela linguagem perfeita. Contudo, se analisarmos um pouco na linguagem (meio que o homem utiliza para exprimir

---

[9] Cardinalidade do conjunto é o “tamanho” do conjunto, ou seja, o número de elementos que ele possui.
[10] Essa demonstração pode ser vista na seção 2 do Anexo - O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.
[11] Essa demonstração pode ser vista na seção 2 do Anexo - O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.

ideias e sentimentos[12]) a relação entre nome e objeto não tem nada a ver com a natureza do objeto. Assim como, a relação entre a linguagem e o mundo não tem nada a ver com a natureza do mundo. Estamos sempre descrevendo perspectivas. Sempre analisando recortes. Julgo, como Ludwig Wittgenstein[13], que o discurso ou qualquer linguagem são frustrantes tanto para a descrição do pensamento como para a descrição da realidade. "A verdade do ser e a verdade do discurso estão sempre dissociadas: pode haver verdade em nossos conhecimentos, mas nossos conhecimentos não são a verdade, nem poderiam identificar-se com ela"[14]. Nesse sentido, o pensamento de André Comte-Sponville está em perfeita consonância com os resultados dos Teoremas de Gödel publicados em 1931 que são a detecção/constatação do fracasso do discurso/linguagem perfeitos. É importante ter em mente que nosso conhecimento matemático pode até produzir verdades exprimíveis dentro do discurso puramente simbólico, desprovido de semântica e puramente abstrato, mas o discurso não consegue exprimir todas as verdades, não consegue exprimir a Verdade (chamo de Verdade a reunião de todas as possíveis verdades) para quem acredita nela. A linguística não explica o sentido do discurso e o algoritmo não explica a existência fenomenal, como diz Edgard Morin[15].

No jogo lógico não há materialização dos objetos matemáticos, a manipulação é livre uma vez que não há compromisso com o estabelecido, com o conhecido, apenas com as regras do jogo, gerando uma manipulação sem amarras e assim, a possibilidade de gerar resultados descolados da realidade.

Esse "roubo" de significado expulsa a matemática da categoria de ciência, de teoria científica, e a torna um argumento, uma ferramenta, uma linguagem-pensamento da ciência fazendo parte da justificativa das teorias científicas.

---

[12] FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **O Dicionário da Língua Portuguesa.** São Paulo: Editora Nova Fronteira, 2003.
[13] WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tractatus Logico-Philosophicus.** São Paulo: Edusp, 1993.
[14] COMTE-SPONVILLE, André. **Valor e Verdade.** São Paulo: Martins Fontes, 2008.
[15] MORIN, Edgard. **A Cabeça Bem-Feita.** Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2009.

É extremamente curioso que o mais abstrato dos conhecimentos seja o grande responsável por gerar mais utilidade prática. Reflexo disso é o domínio que a matemática exerce no modelo do pensamento científico.

Contudo, *"domar"* a matemática é muito mais que possuir uma arma poderosa de instrumentalização e linguagem-pensamento para as ciências naturais. É possível muitas vezes tê-la como linguagem-pensamento, filosofia e principalmente como arte. O pensar matemático permite trazer para a categoria dos sentidos, a razão. O que pode ser extremamente produtivo para o próprio fazer matemático, uma vez que, a intuição, a criatividade e a espontaneidade são potencializadores da racionalidade.

1.3 A CONSTRUÇÃO DO RACIONAL: UM MUNDO DELIRANTE ORGANIZADO

Construir verdades sempre se mostrou como uma necessidade e uma pretensão do homem. Mais ainda a busca da verdade por meio do raciocínio puro por meio do qual nenhuma descoberta empírica sobre a natureza do mundo conseguirá derrubá-la. O sistema de validação matemático não passa pela metodologia científica tradicional onde são realizadas observações cuidadosas que geram dados. Desses dados uma essência quantitativa é extraída sendo feito então, um modelo gerador de previsões que são rebatidas na observação que as valida ou não. A matemática é o terreno preparado para ser um constructo puramente intelectual que permite explicitar e gerar verdades incontestáveis, mesmo que verdades válidas apenas localmente, dentro de um determinado sistema formal – uma vez que o fazer matemático constrói universais a partir de uma particularização inicial, fruto da escolha do seu corpo de axiomas.

A exibição de verdades matemáticas é feita por meio de demonstrações. Uma demonstração é a verificação de veracidade de uma proposição naquele corpo axiomático e tem como objetivo transformar afirmativas, onde as verdades não são evidentes por si, em afirmativas mais simples onde a verdade passa a ser evidente. Ou seja, o cálculo matemático de verdades transforma de modo racional informações implícitas em explícitas onde regras de inferências preservadoras de verdades são aplicadas para obter outras verdades não óbvias.

As regras para esse jogo, cálculo matemático de verdades, são dadas pela lógica. A lógica é, então, o método, uma linguagem-pensamento, uma *façon de parler* como diria Bertrand Russell, uma maneira de falar acerca das coisas que traduz a capacidade humana de articular pensamento, usar inferências e concatenação, criar cálculos e sintaxes. Esta construção de conhecimento permite ao homem não apenas ter esperança, mas ter a possibilidade de prever e gerar novidades. Esse *artefato*, a lógica, nos possibilita reduzir e modelar a *realidade* utilizando uma técnica de resolução apropriada para determinados problemas.

O mais interessante e surpreendente é ver a transcendência de uma técnica, uma vez que o mesmo reducionismo que simplifica para resolver, acaba re-significado como uma generalização, devido a preocupação restrita com a forma, e não mais com particularidades.

A linguagem-pensamento matemática parece mesmo a linguagem ideal, pois é rigorosamente formalizada e bem definida. Contudo, ao longo do desenvolvimento da matemática ainda surgiram paradoxos[16].

O sistema matemático com paradoxos é como um corpo febril. “Desenvolver febre significa, em linhas gerais, estar com o sistema imunológico em atividade, isso não quer dizer que o paciente não deva ser acompanhado, pelo contrário, o comportamento febril informa com precisão sobre a vitalidade do enfermo e o acompanhamento médico é necessário, mas sem atrapalhar o organismo”[17].

O paradoxo em matemática é a indicação de que a própria matemática luta contra suas “doenças”. Parece incrível, mas a matemática não erra em silêncio.

O paradoxo concretiza-se pela violação do princípio de não contradição da lógica clássica.

Além do princípio da identidade, x é idêntico a x, onde x é uma proposição lógica, temos o princípio do 3º excluído, que proíbe o 3º valor de verdade de uma proposição além do verdadeiro ou falso, mas que parece não se importar com preposições do tipo x é verdadeira e falsa, uma vez que

---

[16] Alguns paradoxos importantes podem ser encontrados na seção 6 do Anexo - O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.
[17] Definição retirada de www.*homeopatia.bvs.br, visitado em 10/10/2008.*

nesse caso só há dois valores de verdade. O princípio que vai legislar impedindo esse tipo de sentença é o princípio da não contradição, que dirá que x não pode ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo[18].

A descoberta de paradoxos na teoria dos conjuntos trouxe à tona as investigações sobre os fundamentos da matemática. Várias tentativas foram feitas para tentar elucidar os paradoxos. São muito intrigantes as sugestões[19] sobre qual caminho seguir para fugir de tais dificuldades. Mas nenhuma suficientemente eficaz e com poucas perdas. As desilusões trazidas pelos paradoxos roubaram o encantamento, o objetivo passa a ser nada mais que reencantar.

1.4. A ILUSÃO "É DERIVADA DOS DESEJOS HUMANOS"[20]

Sigmound Freud

O desejo de David Hilbert[21] foi tão intenso quanto o tamanho da sua ilusão. Embriagado pelo fascínio de ser um desvendador de verdades afirma: "Essa convicção da solubilidade de qualquer problema matemático é um incentivo poderoso ao trabalhador. Ouvimos dentro de nós o chamado perpétuo: eis o problema. Busque sua solução. É possível encontrá-la pela pura razão, pois na matemática não existe *ignorabimus*"[22].

Mas é precisamente a obsessão do próprio Hilbert que dará o pontapé inicial nas descobertas dos *ignorabimus* matemáticos.

O desejo de David Hilbert, por exemplo, era a elaboração de um sistema formal que consistia na substituição completa do raciocínio por operações mecânicas com fórmulas. O sistema formal é uma estrutura que permite garimpar apenas valores de verdades livres de ambiguidades, redundâncias e obscuridades (que a linguagem natural cotidiana está carregada). Apresentando resultados que possam revelar apenas a estrutura

---

[18] De fato, o termo "ao mesmo tempo" não faz sentido matematicamente falando, uma vez que a matemática é atemporal, no entanto foi utilizado para facilitar o leitor.
[19] Algumas dessas tentativas podem ser vistas na seção 7 do Anexo - O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.
[20] COMTE-SPONVILLE, André. **Valor e Verdade.** São Paulo: Martins Fontes, 2008.
[21] Um pouco sobre David Hilbert pode ser visto na seção 5 do Anexo - O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.
[22] GOLDSTEIN, Rebecca. **Incompletude**: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel. Companhia das Letras, 2008.

lógica que os embasa. O que tornaria possível a identificação eficaz de paradoxos na teoria e sua eliminação.

No primeiro volume dos *Grundlagen der Geometrie*[23] encontramos uma distinção fundamental entre sentidos do termo axiomático. Hilbert chama de método axiomático formal aquele que resulta em uma teoria abstrata, ou seja, é um conjunto de proposições que são dedutíveis por métodos previamente fixados, de outras proposições que chamamos axiomas. A significação dessa teoria não ocorre do mesmo modo de uma teoria construída a partir do método axiomático concreto, cujo significado se obtém imediatamente da experiência que a teoria modela.

Mas como saber se uma teoria axiomática formal não é um jogo arbitrário ou trivial, destituída de significado? Para isso, é necessário demonstrar que a estrutura conceitual da teoria existe em um domínio específico, isto é, que a teoria mesmo que abstrata tenha um modelo, mesmo que esse modelo não tenha uma tradução direta na experiência sensível. O que realmente importa é que os conceitos primitivos da teoria possam ser interpretados como conceitos específicos de um certo domínio, de tal modo que todos os axiomas se tornem verdadeiros, constituindo assim uma realização da teoria abstrata. Desta maneira, uma teoria é realizável se podemos especificar uma interpretação na qual todos os axiomas resultam em proposições verdadeiras.

A realização prática de uma teoria só ocorre nos casos em que o domínio da interpretação é finito. É possível produzir concretamente uma realização da estrutura abstrata de um grupo finito especificável. O problema começa quando nos deparamos com sistemas de axiomas consideravelmente simples e para os quais não pode haver um modelo finito.

Um domínio infinito de objetos não constitui uma totalidade perceptível, de modo que a sua existência necessita de uma justificativa. Para resolver esse problema Hilbert e Paul Bernays adotaram a dedução finitista, em que o termo finitista exprime que a reflexão matemática se desenvolve não só pela efetiva possibilidade de execução dos processos, mas também pelo seu exame concreto.

[23] *Grundlagen der Geometrie,* publicação de Hilbert referente a axiomatização da geometria para provar sua consistência.

Podemos assim, caracterizar o raciocínio finitista[24], pelo fato de seu objetos serem construídos e não apenas hipoteticamente postulados, e que os processos de cálculo ou definição só são legítimos se garantem que terminam num número finito previamente especificado de passos (dois processos finitistas fundamentais são a indução e a recursão.)

Desta maneira, se dispomos de uma realização finita da teoria ou uma realização infinita, mas construída na base de princípios finitistas, como os descritos acima, então o problema do seu significado está imediatamente solucionado.

O problema gerado é que os meios finitistas, tal como definidos acima, têm um âmbito de aplicação relativamente restrito e logo na aritmética dos números inteiros é preciso lançar mão de processos não finitistas. Assim, o método de assegurar o significado de uma teoria teve que ser revisto e a busca de Hilbert por significado para uma teoria passou a ser a demonstração da consistência da teoria. A concepção de existência matemática passa a ser não apenas produzir respostas satisfatórias, mas sim estar livre de contradições.

Essa busca pela consistência da teoria, Hilbert denominou como Teoria da Demonstração, ou da Prova ou Metamatemática. Em particular, para a demonstração da consistência era exigido que o argumento metamatemático fosse ele por sua vez finitista. O seu plano era legitimar toda a matemática clássica por meio do raciocínio finitista[25].

Assim qualquer teoria axiomática abstrata teria significado, isto é, seria capaz de descrever uma estrutura, se houvesse uma demonstração de que a partir dos axiomas e por meio das regras de inferência não pudéssemos derivar uma contradição.

---

[24] O finitismo e o intuicionismo de Brouwer não são a mesma coisa, apesar de terem alguns pontos em comum. No intuicionismo, domina a noção de que o objeto matemático é essencialmente uma experiência mental, enquanto que no finitismo de Hilbert encontramos a noção de que o objeto matemático é produzido por uma experiência com objetos concretos.

[25] Em todo o caso, o uso frequente do raciocínio não-finitista em teorias matemáticas fez com que Hilbert tivesse que, nos sistemas formais que são supostos justificar estas teorias, introduzir regras de derivação que correspondem à parte não-finitista da inferência. Mas ainda assim, as condições do programa finitista pareciam oferecer a possibilidade de legitimar o raciocínio não-finitista.

Para isso, Hilbert teve de representar uma teoria matemática dada num sistema dedutivo muito mais rigoroso do que o usual, realizando assim, a formalização da teoria. Este sistema formal seria completo uma vez que reproduziria a teoria matemática e com isto a totalidade dos seus teoremas. Ou seja, qualquer sentença expressa na teoria seria dedutível no sistema de provas do sistema.

Estas teorias formais eram concebidas por Hilbert em um ponto de vista puramente sintático. A teoria seria fundada em um domínio postulado de objetos, com um número finito de fórmulas iniciais e as regras de inferência que teriam que ser explicitamente formuladas. Assim, nesse sistema, são fórmulas deriváveis, todas aquelas fórmulas que se obtêm das fórmulas iniciais por meio de um número finito de aplicações das regras de inferência. Deste modo, seria esperado que cada teorema da matemática correspondesse a uma fórmula derivável do sistema formal. E assim, se demonstrássemos a consistência do sistema formal, demonstraríamos também a consistência[26] da matemática[27]. Ou seja, para qualquer sentença g da teoria ou g ou ~g seriam demonstráveis gerando um sistema livre de paradoxos.

O problema de termos um sistema inconsistente (onde a contradição é possível) é que torna-se possível provar todas as afirmativas e portanto, não provamos nada.

Se $\exists\ (A \wedge \tilde{A}) \Rightarrow B$ pode ser demonstrado (1),

ou seja, se há contradição, toda proposição pode ser demonstrada.

A partir de (1) podemos concluir que:

Se $\exists$ B verdadeiro que não pode ser demonstrável $\Rightarrow$ não $\exists\ (A \wedge \tilde{A})$

Ou seja, se existe uma proposição verdadeira não demonstrável, então o sistema é livre de contradições, consistente.

---

[26] Segundo Gödel em seu artigo 1958: "Todavia, também neste sentido enfraquecido, a consistência não pode de fato ser demonstrada por meio do raciocínio finitista, porque o comprimento de uma demonstração finitista de consistência, neste sentido, teria que ser pelo menos da mesma ordem de grandeza de N. É uma questão interessante saber se, para cada N, existe de fato uma tal demonstração limitada de consistência com este comprimento. Nos escritos mais recentes da escola formalista o termo "finitista" foi substituído por "construtivista", a fim de indicar que é necessário usar certas partes da matemática intuicionista que não estão contidas dentro dos limites do que é diretamente dado na intuição sensível."

[27] Essa explicação sobre o trabalho de Hilbert foi baseada no artigo Lourenço. M. S. **Os Parâmetros Estratégicos**.

A busca pela consistência passa então, pela busca de algo verdadeiro mas que não pode ser demonstrado no sistema, ou o sistema torna-se trivial.

CAPÍTULO 2 A FANTÁSTICA FÁBRICA DE VERDADES REVELOU O QUE NÃO DEVERIA: ENFIM, O TEOREMA.

Guimarães Rosa em Grande Sertão Veredas escreve: "Todos estão loucos, neste mundo? Porque a cabeça do mundo é uma só e as coisas que há e que estão para haver são demais de muitas, muito maiores diferentes, e a gente tem de necessitar aumentar a cabeça para o total."[28]

Após algum tempo refletindo, creio que pareça ser um erro querer englobar o todo, querer colocar tudo dentro de um mesmo sistema. Os universais absolutos parecem não ter a elasticidade necessária que suporte o "peso" de todas as coisas. E ao que tudo indica, o todo parece escapar, parece não querer, ou melhor, não poder existir e até mentalmente o todo de tudo torna-se inconcebível. Basta pensar o paradoxo de Cantor[29] gerado pela possibilidade de existência de um conjunto de todos os conjuntos, o infinito absoluto[30] de Cantor colapsa o sistema, também desconstrói-se a visão do todo maior que suas partes[31].

Ainda na matemática, os teoremas de Gödel, de 1931, conhecidos como teoremas da incompletude, vem explicitar a existência de proposições indecidíveis e a impossibilidade da demonstração da consistência do sistema pelo próprio sistema. Não pode haver nem mesmo metassistemas que deem conta de tudo.

Mesmo que seja idealizado um conjunto que possivelmente fosse o conjunto de todas as relações possíveis sempre posso reinserir os indecidíveis gerados nesse conjunto como axiomas gerando um outro

---

[28] ROSA, João Guimarães. **Grande Sertão: Veredas,** 10ª Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2008.

[29] Essa demonstração pode ser vista na seção 6 do Anexo O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.

[30] O sistema de todos os números ordinais gera uma inconsistência.

[31] Essa demonstração pode ser vista na seção 8 do Anexo O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.

conjunto de todas as relações possíveis. Esse processo é infinito. Ou seja, uma teoria aritmética axiomatizada e consistente permanece sempre incompleta apesar do esforço para completá-la. A aritmética é incompletável. Esse processo está de acordo com Edgard Morin, quando afirma:

> *"O todo é mais que o todo, porque o todo enquanto todo retroage sobre as partes que retroagem sobre o todo. O todo é mais que uma realidade global, é um dinamismo organizacional. (...)*
>
> *O todo é menos que o todo. Há, dentro do todo, zonas de sombra, ignorâncias mútuas e até cisões, falhas, entre o reprimido e o exprimido, o imerso e o emergente, o generativo e o fenomenal (...)"*[32]

Segundo Gödel, seus resultados não estabelecem nenhum limite aos poderes da razão humana, mas às possibilidades do formalismo puro em matemática.

O chamado primeiro Teorema de Gödel explicita, como já nos referimos acima, a existência de proposições indecidíveis.

Para um sistema L adequado, existem proposições indecidíveis em L; isto é proposições P tais que nem P nem ~P são demonstráveis[33].

O sistema adequado em que Gödel formaliza sua demonstração utiliza a lógica do Principia Mathematica com os axiomas de Peano.

Podemos descrever os axiomas de Peano:

Zero é um número.

Se a é um número, o sucessor de a é um número.

Zero não é o sucessor de um número.

Dois números cujos sucessores são iguais são eles próprios iguais.

Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de todo número de S, então todo número está em S.

Já o Principia aborda o tratamento matemático pelos princípios matemáticos. É construído um sistema dedutivo e para que isso seja possível é necessário analisar a existência matemática e quais premissas são empregadas, onde são consistentes e se é possível reduzi-las a premissas mais fundamentais.

---

[32] MORIN, Edgard. **Ciência com Consciência.** Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2000.

[33] Lema baseado no artigo ROSSER, J. B. **Uma exposição informal das demonstrações dos Teoremas de Gödel e Church**.

Grande parte do trabalho no Principia foi gasto na tentativa de entender e eliminar contradições e paradoxos que permearam a matemática. A notação utilizada seguiu o máximo possível à utilizada por Peano e quando necessário, a de Frege. As mudanças no simbolismo de Russell e Whitehead se dão pela invenção de símbolos ainda não existentes e não pelo descontentamento com o simbolismo anterior desenvolvido principalmente por Frege e Peano.

O Principia Mathematica começa com ideias primitivas e proposições primitivas correspondendo a termos indefinidos e postulados do desenvolvimento abstrato formal. Essas ideias primitivas e proposições não estão sujeitas à interpretações, porém são restritas a conceitos intuitivos da lógica. Eles devem ser vistos, ou pelo menos devem ser aceitos, como plausíveis descrições e hipóteses do mundo real. Em suma, prevalece como um ponto de vista mais concreto que abstrato e consequentemente nenhuma tentativa é feita para provar a consistência de proposições primitivas.

O objetivo do Principia Mathematica é desenvolver conceitos matemáticos e teoremas a partir dessas ideias e proposições primitivas para poder barrar a ocorrência de definições impredicativas, ou seja, que o que está sendo definido participe da sua própria definição.

Contudo, ao longo de sua demonstração, Gödel vai generalizar a definição de sistema formal adequado e provará que todo sistema formal que satisfaça as hipóteses descritas abaixo conterão proposições indecidíveis.

As hipóteses:

. As classes dos axiomas e regras de inferência são definíveis recursivamente.

. Toda relação recursiva é definível dentro do sistema.

Gödel utiliza relações recursivas uma vez que estas são decidíveis por um processo finito uma vez que a função representativa é calculável também por um processo finito. Além disso, sabemos que proposições demonstráveis são contra-domínio das funções recursivas. E que segundo a Tese de Church, as funções recursivas gerais esgotam a classe das funções efetivamente calculáveis.

A estratégia utilizada por Gödel para demonstração é a enumeração de símbolos. O aspecto fundamental do mapeamento é que podemos provar que uma estrutura abstrata de relações incorporadas em um domínio de objetos também vale entre objetos de outro domínio. Ou seja, com esse processo, é fornecida uma imagem isomórfica do sistema no domínio da aritmética. Podendo, desta forma, efetuar todo os raciocínios metamatemáticos nesta imagem isomórfica.

Veremos agora como Gödel estruturou e pôs em prática essa engenhosa proposta.

Primeiramente, Gödel mostra que é possível atribuir a cada signo um único número, o que acaba servindo de identificação desse signo. Assim, como um único número é atribuído a cada signo, podemos facilmente identificar o signo se tivermos o número e vice e versa. Esse número que é atribuído, é chamado de número de Gödel.

O mapeamento de uma sequência de signos resultaria em uma sequência de números de Gödel o que tornaria o trabalho árduo. Gödel desenvolve, então, uma estratégia para transformar o conjunto de números em um único número. Gödel, "simplifica" a numeração da maneira descrita a seguir:

Ao mapear uma seqüência com n símbolos, ele obteria n números correspondentes a esses símbolos. Contudo, ao invés de trabalhar com essa seqüência de n números ele faz o produto dos n primeiros primos, cada um elevado ao número de Gödel correspondente ao signo elementar. Dessa maneira, a toda sequência finita de signos elementares podemos atribuir um número de Gödel. O mais impressionante é que se tivermos um número de Gödel podemos rapidamente identificar a expressão que ele simboliza, pois pelo teorema fundamental da aritmética temos a certeza que um inteiro composto possui uma única decomposição em fatores primos.

Como consequência desse mapeamento, proposições P acerca de fórmulas podem ser substituídas por proposições Q acerca de números.

Ou seja: Se P é uma propriedade de fórmulas, podemos encontrar uma propriedade de números Q, tal que a fórmula A tem a propriedade P se e somente se o número de A tiver a propriedade Q.

Definição: $z = \varphi(x,y)$ é o número da fórmula que resulta de substituir todas as ocorrências livres na fórmula cujo número é x pela fórmula de L cujo número é y.

Seja “x tem a propriedade Q” exprimível em L.

Então, para um L adequado, pode-se encontrar uma fórmula F de L cujo número é n tal que:

F exprima “n tem a propriedade Q”. Ou seja, F exprime “F tem a propriedade P”.

Suponha que “x tem a propriedade Q” e $z = \varphi(x,x)$ são exprimíveis em L.

Para que a demonstração prossiga, Gödel mostra que:

$\varphi(x,y)$ é recursiva

Se $\varphi(x,y)$ é recursiva, então é exprimível em L

Então, a fórmula que chamaremos de G que exprime

“$\varphi(x,x)$ tem a propriedade Q” é exprimível em L e possui um número n.

Seja F a fórmula obtida quando substituímos todas as ocorrências livres de G pela fórmula de L que representa n.

Assim, F representa “$\varphi(n,n)$ tem a propriedade Q” e $\varphi(n,n)$ é o número de F.

Assim, F representa “o número de F tem a propriedade Q”, isto é, “F tem a propriedade P”.

Conclusão: Seja “x tem a propriedade Q” exprimível em L. Então para um L adequado, pode-se encontrar uma fórmula F de L cujo número é n tal que F exprima “n tem a propriedade Q”. Ou seja, F exprime “F tem a propriedade P”.

Escolheremos para a propriedade P, a propriedade de não ser demonstrável em L.

Definição: Bew(x) exprime “a fórmula cujo número é x é demonstrável em L”

Novamente, Gödel demonstra que Bew(x) é exprimível em L e que Bew(x) é demonstrável se e somente se é verdadeira.

Procuraremos uma fórmula F com um número n tal que F exprima “~Bew(n)”, ou seja, F exprime que F não é demonstrável.

É importante que fique claro que a proposição F não é circular, uma vez que afirma a indemonstrabilidade de uma fórmula bem definida e só em seguida verifica-se que esta é a fórmula cuja a indemonstrabilidade se exprime.

Se L é consistente, então F não é demonstrável em L.

Suponhamos que F é demonstrável. Então, a fórmula que exprime Bew(n) é demonstrável.

Como F exprime ~Bew(n), então ~F exprime Bew(n).

Logo, ~F é demonstrável.

Logo, L não é consistente uma vez que tanto F como ~F são demonstráveis.

Assim, para que L seja consistente F não é demonstrável em L.

Analogamente:

Se L é consistente, então ~F não é demonstrável em L.

Suponhamos que ~F é demonstrável. Então, Bew(n)

Logo, F é demonstrável.

O que resultaria em L não ser consistente.

Assim, para que L seja consistente ~F não é demonstrável em L.

Já o segundo Teorema de Gödel diz que a consistência de um sistema não pode ser demonstrada dentro do próprio sistema.

Para uma linguagem L adequada, a consistência de L não pode ser demonstrada em L.[34]

Seja A uma proposição demonstrável de L e seja m o número de ~A.

Se Bew(m), então A e ~A são demonstráveis e L não é consistente.

Mas se L não é consistente todas as proposições de L são demonstráveis inclusive ~A, e assim Bew(m).

Logo, ~Bew(m) e "L é consistente" são equivalentes.

Então, o lema: para uma linguagem L adequada, a consistência de L não pode ser demonstrada em L pode ser escrito como:

Se ~Bew(m), então ~Bew(n). Onde n é o número da proposição F que exprime que F não é demonstrável.

Assim, se fosse possível demonstrar ~Bew(m), F também seria demonstrável. Logo, se L for consistente, ~Bew(m) não pode ser demonstrado.

Pode-se traduzir a descrição anterior como: já que a classe V das fórmulas verdadeiras não podem ser expressas por uma função proposicional

---

[34] Lema baseado no artigo ROSSER, J. B. **Uma exposição informal das demonstrações dos Teoremas de Gödel e Church**.

do nosso sistema, enquanto a classe D pode, concluímos que V≠D. Se supusermos que toda fórmula demonstrável é verdadeira, temos que D está contida em V. Logo, existe uma proposição A que é verdadeira mas não é demonstrável. Então ~A não é verdadeira e portanto não é demonstrável, ou seja A é indecidível.

Com seus trabalhos, Gödel rebatiza contradição de indecidível, não eliminando-o, mas reconhecendo a incerteza, a contradição fazendo progredir o conhecimento matemático ao colocar em evidência suas zonas de sombra. As proposições indecidíveis, então, são luxuosas vestimentas intelectuais para não precisarmos abandonar a matemática como linguagem eficiente de descrição da realidade, ou melhor, do mundo.

Pós 1931, toda proposição que possua dois valores lógicos antagônicos (em uma lógica que não permite contradição, isto é, um mundo perfeito onde contrários não co-existem) veste-se de indecidível para ser reinserida no jogo lógico como mais um axioma e juntar-se as outras verdades iniciais. Em outras palavras o Indecidível torna possível, em uma visão filosófica, a contradição. Os indecidíveis são verdades matemáticas que não necessitarão de nós para serem verdadeiras, fazendo uma analogia ao pensamento de Sponville, mas para valerem como verdade, já que verdade é valor, todo valor é ilusório (subjetivo, local), logo a verdade é ilusória. Mas a verdade é ilusória como valor e não como verdade.[35]

Após os trabalhos de Gödel de 1931, estamos mais lúcidos e está aberto o diálogo com a contradição. Não é possível mais esperar a revelação do absoluto. O valor de verdade de algumas proposições escapa. “Toda lucidez tem preço”[36] A incompletude matemática é esperada para que haja realmente a consistência do sistema. A consistência do sistema é saber lidar com os paradoxos.

Os resultados de Gödel foram, sem dúvida, um dos maiores avanços da matemática. Sabemos que o problema não é tentar quantificar e formalizar tudo, o problema é não considerar o não formalizável.

Hoje, uma matemática desenvolvida não significa apenas fabricar teorias cada vez mais complexas e sim, aprender a conviver com a

---

[35] COMTE-SPONVILLE, André. **Valor e Verdade.** São Paulo: Martins Fontes, 2008.
[36] COMTE-SPONVILLE, André. **Valor e Verdade.** São Paulo: Martins Fontes, 2008.

incapacidade do sistema de responder a tudo. A linguagem parece desintegrar-se quando a expressão está comprometida com uma visão de mundo que há de se rejeitar. O fracasso, então, reflete-se em vitória por abrir espaço para indagações fundamentais.

É importante compreender que os teoremas de Gödel de 1931 são inerentes à axiomatização e não uma fatalidade do sistema. Uma vez que, os teoremas de qualquer aritmética axiomatizada são enumeráveis. Já tratando-se de verdades da aritmética, estas não são enumeráveis[37].

Assim, teoremas e verdades não podem estar em correspondência biunívuca, muito menos serem identificados. Ou seja, existem sentenças que podem ser verdadeiras mas indecidíveis em um determinado sistema.

CAPÍTULO 3 VERDADE

3.1 A DIFICULDADE: COMO DEFINIR O QUE PARECE INDEFINÍVEL?

Alfred Tarski vai colocar em seu artigo *The semantic conception of truth and the foundations of semantics* que em uma linguagem suficientemente rica não há um critério geral de definição de verdade[38]. Na teoria da verdade de Tarski, o que é necessário para a definição de verdade é uma metalinguagem semântica, ou seja, uma linguagem L´ que relacione expressões da linguagem L e objetos. E para evitar as atinomias[39] que essa linguagem L possua, uma estrutura formal bem especificada.

Enquanto que a palavra verdadeira expressa a propriedade de certas expressões, uma definição exata de verdade envolverá o uso de outras noções semânticas, como por exemplo, satisfação, definição e designação.

Logo, segundo Tarski, para definir verdade, é necessário e talvez suficiente uma linguagem rigorosa L e uma metalinguagem L´ semântica que relacione expressões da linguagem L e objetos.

---

[37] Essa demonstração pode ser encontrada na seção 5.11 do Anexo - O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.

[38] *No consistent language may contain the means of defining its own semantics*

[39] Algumas antinomias importantes podem ser encontrados na seção 6 do Anexo - O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.

Acredito que a evidência da detecção da necessidade da metalinguagem semântica que “fale” sobre a linguagem matemática seja uma das tantas consequências do trabalho de Gödel, que traz à tona o fato de existirem informações, chamadas de indecidíveis, que não podem ser explicitadas dentro da própria linguagem-pensamento por outras informações como verdadeiras ou falsas apenas por si mesmo, dizendo de si: “Eu sou indemonstrável”. A partir daí, verdades tornam-se maiores que a prova. Assim, as crenças matemáticas, que eram finitas, os axiomas, tornaram-se potencialmente infinitas por meio dos indecidíveis.

Todas as afirmativas que não contradizem os postulados pré-existentes podem obter o valor de verdade. Afirmativas que obtém valor de verdade por meio de demonstrações, transformam-se em teoremas. Mas se a afirmativa for um indecidível matemático esse valor não é dado por meio de uma demonstração, mas sim por assumir a condição de axioma. Condição essa dada por esse metassistema, por essa metalinguagem.

Deste modo, determinadas verdades extrapolam as bordas da demonstrabilidade, isso significa que nem todas as verdades podem ser captadas apenas pela linguagem, por essa escolha do pensamento (ou pelo menos não por essa *façon de parler*).

3.2 O Problema Inicial: as Verdades Iniciais

Para a matemática ter conteúdo e significado, é sempre necessário um certo número de termos indefinidos e certos axiomas, que como já vimos são proposições dedutivamente indemonstráveis, acerca destes termos. Para estes axiomas não existe outro fundamento racional a não ser que, ou deles se pode ter uma percepção direta da sua verdade, ou então que são postulados com base em argumentos indutivos, isto é, o seu sucesso em aplicações. Ou seja, as verdades dos axiomas diferem das verdades dos teoremas que são verdades que descrevem o objeto que julgam e não a relação que mantemos com eles.

As verdades axiomáticas são frutos da nossa intuição falível, da nossa relação com o objeto. Como elaborar um modelo absolutamente racional, objetivo, se devemos partir de um ponto, e mais ainda de um ponto escolhido arbitrariamente por nós? Como não haver dúvida possível sobre a veracidade dos axiomas que serão o alicerce de nossa teoria? Como podemos dizer que um axioma que é algo intuitivamente óbvio, trivial, ou auto-evidente?

Sendo assim como faremos para obter uma verdade inicial? E mais ainda: sobre qual terreno faremos nossas demonstrações?

Parece-me, então, que demonstrar é ter a possibilidade de construir uma casa em um terreno não muito sólido. Como partiremos de algumas verdades? O que isso significa? Para quem uma verdade é óbvia, trivial ou auto-evidente? O mundo da razão pura é uma dimensão humana; verdadeiro sempre é uma abreviatura de "é verdadeiro em relação a x", como diria Protágoras. Onde x é um indivíduo ou um grupo de indivíduos com os mesmos valores éticos.

Nesse caso, a incompletude é esperada para que haja realmente a consistência do sistema. Como um sistema iniciada por meio de uma determinada escolha poderia estruturar-se e dar todas as respostas possíveis? A incompletude matemática é o eterno retorno à memória de sua humanidade míope. Ter que decidir acerca de algumas proposições é sermos lembrados que a opção do caminho a seguir é, e sempre foi, nossa e foi assim desde o início com os axiomas.

Gödel diante da indecidibilidade da Hipótese do Contínuo[40] de Cantor vai dizer: "Porque se o sentido dos termos primitivos da teoria dos conjuntos (...) for aceitos como corretos, segue-se que os conceitos e teoremas da teoria dos conjuntos descrevem alguma realidade bem determinada, na qual a conjectura de Cantor precisa ser verdadeira ou falsa. Por isso, supõe-se que sua indecidibilidade com base nos axiomas aceitos atualmente, só pode significar que os axiomas não contêm uma descrição completa daquela realidade. Tal convicção não é irreal, pois é possível mostrar formas pelas quais a decisão de uma questão, que é indecidível com base nos axiomas usuais, poderia ainda ser obtida".[41] Ou seja, se o sistema demonstrado por

[40] A Hipótese do Contínuo em linhas gerais diz que sendo a cardinalidade dos naturais χ_0 a cardinalidade dos reais era χ_1 . Ou seja, não existe nenhum conjunto de cardinalidade maior do que o conjunto dos números inteiros e menor do que o conjunto dos números reais. Um pouco mais sobre s Hipótese do Contínuo pode ser encontrada na seção 2 Anexo O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.

[41] GÖDEL, Kurt. O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo. Lisboa: Editora da Fundação Calouste Gulbenkian, 1979.

ele é essencialmente incompleto "(...) o erro se deve a fatores extrínsecos (como a emoção, educação); a própria razão não erra"[42].

Algumas dúvidas surgem a respeito da necessidade e da legitimidade dessa discussão.

Qual o objetivo do questionamento sobre a veracidade dos axiomas se sempre o que teremos é um recorte do real, ou seja os axiomas não representarão a verdade, sempre serão apenas perspectivas da realidade.

Na verdade, quando falo de veracidade de axioma, não tenho a pretensão de obter axiomas verdadeiros. É claro que uma verdade nem sempre é, nem precisa ser, uma perspectiva da realidade. O que questiono é: se queremos descrever o mundo, o que os axiomas que escolhemos realmente dizem a respeito desse mundo? Pois mesmo com uma axiomática que não é um recorte do que queremos modelar, a dita realidade objetiva, conseguimos produzir um sistema consistente. A partir daí, baseados nesse sistema podemos achar que estamos modelando a realidade de modo mais fiel possível e o que estamos fazendo é justamente o contrário. A geometria euclideana, por exemplo, é um modelo que aparentemente serviu e ainda serve para a modelagem muito fiel do mundo mas começa-se a abrir espaço para as modelagens não-euclideanas[43].

O que pretendo refletir é que há a necessidade de um maior cuidado em relação as verdades escolhidas para desenvolver o nosso sistema, escolher verdades é escolher valores. Portanto, qual será o valor mais apropriado para modelar nosso mundo?

---

[42] K. Gödel, 29/11/1972. Retirado de GOLDSTEIN, Rebecca. Incompletude: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel. Companhia das Letras, 2008.

[43] Uma breve introdução sobre Geometrias não Euclideanas de ser vista na seção 9 do Anexo O Desejo do Pensamento Puro e a Perfeição Estética.

CAPÍTULO 4 NOSSA FALTA DE MODÉSTIA INTELECTUAL E NOSSAS EXPERIÊNCIAS DE VERDADE

4.1 EXCESSO DE LUCIDEZ

Atualmente, tenho buscado o encantamento, aliás o reencantamento. O custo das nossas escolhas, meu amigo matemático, é muito alto. Dedicação refletida geralmente em desilusão.

Desenvolvimento lógico, as belezas da abstração, repetição torturante ou o pragmatismo perturbador?

O que posso dizer sobre liberdade de pensamento? Às vezes sinto-me presa e amarrada na obsessão pela razão pura. Quero pensar por mim. Não apenas com a minha razão quero pensar como um todo.

De certo ainda não desisti. Tarefa árdua. Querer mostrar o belo. O esteticamente perfeito na imperfeição. Quero que o leitor reflita de maneira não linear sobre o que faz, e sobre o que possui esse conhecimento. Como sempre, meu amigo matemático, tarefa árdua. O custo há de ser alto. Já não me importo mais. Quero pagar o preço.

Que dificuldade é essa? O que pretendo de novo? Não quero uma abordagem matemática da matemática. Não quero desconstruir 6 000 anos de conhecimento. Quero apenas refletir sobre algumas coisas que já foram ditas: objetos são mentais, as manipulações são simbólicas mas também não podemos esquecer que fazer matemática depende que quem a faz. A matemática não é reflexo do mundo físico, é uma produção intelectual, cultural, cujo desenvolvimento depende da sociedade, das técnicas desenvolvidas e dos interesses de quem a manipula. No ato de fazer matemática os detalhes podem ser descartados por não serem relevantes ao teórico mas deve-se pensar que o conhecimento produzido, e por consequência transmitido, jamais será impessoal, ahistórico e arbitrário.

T. S Eliot vai oportunamente questionar: “Onde está o conhecimento que perdemos na informação?” “Onde está a sabedoria que perdemos no conhecimento?”[44]

---

[44] ELIOT, T. S. **Collected plays.** London: Faber and Faber, 1962.

Para Morin: Informações são partes dispersas de saber. O conhecimento só é conhecimento enquanto organização relacionando-se com as informações e inseridos no contexto destas.

Não há que se contentar com um conhecimento que não reflita sobre seu próprio futuro. É preciso valorizar os limites do conhecimento formal e quantitativo. E entender que uma teoria matemática não é puro e simples reflexo das realidades objetivas, mas um produto em conjunto das estruturas do espírito humano e das condições sócio-culturais do conhecimento.

É necessário que haja uma “iniciação à lucidez” no sentido de Morin “uma iniciação à onipresença do problema do erro”. É necessário entender que conhecer e pensar não é chegar a uma verdade absolutamente certa, mas dialogar com a incerteza.

Segundo Habermas, há diferentes tipos de conhecimento científico. Diferentes, pois são impulsionados por diferentes interesses. Há o interesse técnico que é o interesse de domínio da natureza; o interesse prático, cujo objetivo é o controle, principalmente o controle da sociedade e o interesse reflexivo que gera uma ciência crítica resultando em emancipação humana enquanto os outros conduzem a dominação[45].

A excessiva preocupação com a inteligibilidade leva a alteração de significação enquanto a pouca preocupação com a inteligibilidade leva à ignorância da significação de um fato ou de um acontecimento.

É necessário reconhecer nosso esforço para decifrar o aparentemente inalcançável desafio que o real nos propõe. Precisamos harmonizar nosso convívio com nossas ideias, mantendo-as como mediadoras e jamais identificando-as com o real.

Devemos conscientizar-nos de uma vez por todas que o maior ganho do último século foi a eterna incerteza do conhecer. É dessa crise, na derrota do progresso garantido, como diz Morin, que temos o ambiente próspero para refletir sobre nossos futuros caminhos enquanto humanidade, por meio do

---

[45] HABERMAS, Jurgen, **Conhecimento e Interesse**, Rio de Janeiro: Zahar, 1982.

questionamento da ciência, da técnica e da razão. Substitituiu-se a ordem da perfeição pela ordem do diálogo entre ordem e desordem.

A matemática enquanto saber não pode ignorar a realidade da complexidade humana, não há mais como naturalizar um conhecimento que tem como objetivo a eliminação do sujeito, da subjetividade. Por mais que a técnica continue dando certo temos que ter a consciência da necessidade de reinserção do sujeito na teoria. Há que se mudar o paradigma da tentativa insana de um sujeito invisível, cuja existência é negada, assim como não exaltar um sujeito transcendental, que escapa a experiência, que é puro intelecto e não pode ser concebido em suas incertezas.

Deve-se resgatar o sujeito das humanidades para que ele possa refletir sobre a matemática que produz. Não podemos continuar a produzir um conhecimento inconsequente.

ANEXO O DESEJO DO PENSAMENTO PURO E A PERFEIÇÃO ESTÉTICA.

Ao longo do texto, muitos resultados matemáticos foram apresentados e estes, pela sua relevância merecem e devem ser novamente explicitados e, explicados de uma forma mais minuciosa. Esse capítulo, então, será dedicado tanto à demonstração de teoremas matemáticos importantes quanto a descrições históricas que fizeram diferença na construção do pensamento matemático que permeou todo o trabalho.

1 CONJECTURA DE GOLDBACH

A Conjectura de Goldbach diz que: Todo inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.

Como o próprio nome diz esse enunciado ainda é uma conjectura por não possuir demonstração.

Na seção que segue, falaremos um pouco sobre os resultados matemáticos que envolvem o infinito.

2 O INFINITO NÃO PARA DE SURPREENDER...

A teoria dos conjuntos desenvolvida por Georg Cantor é uma das partes mais interessantes geradas pela presença do infinito e um belíssimo exemplo de maravilhas que o intelecto humano pode desenvolver.

Começaremos com um teorema que diz que o conjunto dos números racionais possui a mesma cardinalidade do conjunto números naturais. Faremos duas demonstrações desse resultado. Começaremos de uma forma mais intuitiva. Cantor consegue rearranjar os irracionais de modo a tornar possível estabelecer uma correspondência biunívuca com o conjunto dos números naturais descobrindo assim, que eles são enumeráveis.

TEOREMA. O conjunto dos números Racionais é enumerável.

DEMONSTRAÇÃO 1:

Cantor organiza sua estratégia do seguinte modo: primeiramente, arruma na primeira linha os números racionais de numerador 1, na segunda linha os números racionais de numerador 2 e assim sucessivamente[46].

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\[2em]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots & \frac{2}{n} & \cdots \\[2em]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \cdots & \frac{3}{n} & \cdots \\
 & & \vdots & & & \\
\frac{n}{1} & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} & \cdots & \frac{n}{n} & \cdots \\
 & & \vdots & & &
\end{array}
$$

É verdade que essa representação contém números equivalentes como, por exemplo, $\frac{1}{1}$ e $\frac{2}{2}$. Mas essas repetições não atrapalham, pois são facilmente eliminadas.

Assim, a correspondência entre os racionais e os naturais seria feita por meio do esquema:

[46] Podemos estender a demonstração acima para números negativos.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \rightarrow & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \cdots \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{2}{6} & \frac{2}{7} & \frac{2}{8} & \frac{2}{9} & \frac{2}{10} & \cdots \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{6} & \frac{3}{7} & \frac{3}{8} & \frac{3}{9} & \frac{3}{10} & \cdots \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \frac{4}{6} & \frac{4}{7} & \frac{4}{8} & \frac{4}{9} & \frac{4}{10} & \cdots \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \frac{5}{6} & \frac{5}{7} & \frac{5}{8} & \frac{5}{9} & \frac{5}{10} & \cdots \\
\frac{6}{1} & & \frac{6}{2} & & \frac{6}{3} & & \frac{6}{4} & & \frac{6}{5} & & \frac{6}{6} & \frac{6}{7} & \frac{6}{8} & \frac{6}{9} & \frac{6}{10} & \cdots
\end{array}
$$

.
.
.

Como vimos, os números $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{2}$ equivalentes a números já utilizados não atrapalham o processo. Assim, por exemplo, a correspondência biunívuca entre 17 racionais e os primeiros 17 números naturais está representada abaixo. Essa representação, claramente pode se estender indefinidamente mostrando a correspondência biunívuca entre os números racionais e os naturais.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1}
\end{array}
$$

10	11	12	13	14	15	16	17	
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	...
$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{1}$	

Demonstraremos novamente o mesmo resultado por um outro caminho.

DEMONSTRAÇÃO 2:

Para demonstrar esse teorema precisaremos de dois teoremas auxiliares que seguem. Vejamos:

TEOREMA 1. O conjunto dos números Reais algébricos é enumerável.

DEMONSTRAÇÃO:

Definição: Seja a equação

f(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ (1)

Dizemos que o índice da equação (1) é o número:

$n + a_n + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + ... + |a_2| + |a_1| + |a_0|$ (2)

Podemos fazer uma tabela relacionando índice e equações, como vemos no exemplo:

Índice	Equações
2	$x = 0$
3	$x^2 = 0$, $2x = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$
4	$x^3 = 0$, $x^2 = 0$, $x^2 = 0$, $x^2 = 0$, $x + 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x + 1 = 0$

E assim por diante.

Faremos assim, a listagem com todos os novos números algébricos provenientes das equações da tabela acima.
Se para cada índice, dispusermos os números em ordem crescente, obteremos a seqüência:

(3) 0; -1,1; -2, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$,2; -3, $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}$,3; 4,...

O número 0 vem da única equação de índice 2, os números –1 e 1 das equações de índice 3, e assim por diante. Para qualquer índice n fixo, o número de equações é finito, porque o grau n e os coeficientes $a_n,...,a_0$ estão restritos a um conjunto finito de inteiros. Além disso, temos um teorema que nos diz que dado um polinômio de grau n, esse polinômio terá n raízes. Portanto, todos os números reais algébricos vão aparecer na seqüência (3).

Logo, podemos corresponder os elementos da seqüência (3) aos naturais.

Concluímos desta maneira que os números Reais algébricos são enumeráveis.

TEOREMA 2. Um subconjunto finito de um conjunto enumerável, é enumerável

DEMONSTRAÇÃO:

Seja *M* um subconjunto infinito de um conjunto enumerável S, digamos $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$. Seja a_{i_1} o primeiro elemento de S que também esteja em M, a_{i_2}, o segundo, e assim por diante. Então *M* será o conjunto:

$M = \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, ...\}$

que, obviamente é enumerável.

Desta forma, como o conjunto dos números Racionais é um subconjunto do conjunto dos Reais algébricos, e pelo teorema 1 demonstramos que os Reais algébricos são enumeráveis. Podemos concluir, pelo teorema 2, que os Racionais também são enumeráveis, ou seja, podem ser postos em correspondência com os Naturais.

Dessa forma, começou-se a achar que todos os conjuntos infinitos poderiam ser postos em correspondência. Porém, ao trabalhar com os números reais (conjunto dos números racionais união conjunto dos números irracionais) ao invés de descobrir uma prova de que eles poderiam ser postos em correspondência biunívuca com os naturais, Cantor descobriu justamente o oposto, uma prova de que eles não poderiam ser postos em correspondência. Assim, uma de suas maiores vitórias foi conseguir mostrar que há classes com uma cardinalidade maior que ℵo, como por exemplo, a classe dos números reais.

A prova é feita por contradição, conhecida como método da diagonal de Cantor.

TEOREMA. O conjunto dos números Reais é não enumerável

Segue uma proposta de demonstração informal.

DEMONSTRAÇÃO:

Em virtude do teorema 2, será suficiente mostrar este fato para os números Reais entre 0 e 1; especificamente para os números Reais x, satisfazendo 0< x ≤1, de modo que 1 esteja incluído e 0, excluído. Suponhamos que o conjunto dos números Reais entre 0 e 1 fosse enumerável, digamos

$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$

Escrevamos estes números em forma decimal, evitando representações finitas pelo uso da forma infinita periódica em tais casos. Por exemplo, o número $\frac{1}{2}$ será escrito como 0,49999... e não 0,5.

Uma vez que:

0,49999... = x (1)
4,99999... = 10x (2)
49,9999... = 100x (3)

Daí, subtraindo a equação (3) da equação (2) temos que:

45 = 90x, logo x = 0,5.

Então, temos

$$r_1 = 0, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots$$

$$r_2 = 0, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \ldots$$

$$r_3 = 0, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \ldots$$

Construiremos, agora, um número

$$\beta = 0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$$

da seguinte maneira. Seja b_1 qualquer algarismo entre 1 e 9 porém diferente de a_{11}. Analogamente, seja b_2 qualquer algarismo não nulo, diferente de a_{22}. Em geral, seja b_k qualquer algarismo não nulo, diferente de a_{kk}. Então o número β é diferente de r_1 (pois eles diferem na primeira casa decimal), é diferente de r_2 (pois eles diferem na segunda casa decimal), e generalizando, é diferente de r_n (pois eles diferem na n-ésima casa decimal). Portanto β difere de cada um dos $r's$. Mas β é um número Real entre 0 e 1 e obtemos assim uma contradição.

Logo, o conjunto dos números Reais entre 0 e 1 é não enumerável. Pela negativa do teorema 2 concluímos que o conjunto dos números Reais é não enumerável.

Assim, concluímos que a cardinalidade do conjunto dos números reais é diferente da cardinalidade dos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.

Já que todos os conjuntos finitos são contáveis, podemos dar a cada um deles um número que represente a sua cardinalidade, é claro que vamos querer ampliar essa noção para as classes infinitas contáveis. Assim, foi criado o primeiro dos números transfinitos para descrever a cardinalidade das classes infinitas contáveis. A cardinalidade de uma classe enumeravelmente infinita foi chamada por Cantor de ℵo[47]. Com a demonstração que os reais são não enumeráveis, descobrimos outro tipo de infinito. Os infinitos enumeráveis, ou contáveis, como o conjunto dos números naturais e os não enumeráveis, como o conjunto dos números reais.

Cantor chamou a cardinalidade do conjunto dos números reais de contínuo (contínuo é uma outra maneira de se referir ao conjunto dos pontos de uma reta) e designou um novo cardinal transfinito para a classe não contável, não enumerável, dos números reais.

Referindo-se a cardinalidade do contínuo reconheceu que ela se aplica tanto às classes dos números reais como à dos pontos em um segmento linear. Se partimos da noção geométrica de um ponto, em qualquer segmento linear há um número infinito de pontos, ou seja, entre quaisquer dois pontos há uma infinidade de outros. Formalizando: os pontos são densos em todos os lugares constituindo uma das características essenciais do contínuo[48].

Logo, ambas as classes tanto de números reais como de pontos em um segmento linear são densas e possuem a mesma cardinalidade, *C*. Ou

---

[47] ℵo lê-se: álefe-zero. Álefe é a primeira letra do alfabeto hebraico.

[48] Uma outra característica importante para a continuidade é a do conjunto ser conecto.

seja, é possível fazer uma correspondência um a um entre os números reais e os pontos de um segmento linear.

A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

Até agora, só vimos apenas dois tipos de infinito. Mas Cantor não parou por aí, achando infinitos de cardinalidades diferentes da cardinalidade do infinito enumerável e da cardinalidade do contínuo. Ele verificou que o conjunto potência dos naturais é igual ao contínuo, $2^{\aleph_0} = C$. Do mesmo modo o conjunto potência do contínuo C, 2^C , faz surgir um novo transfinito maior do que C. Assim, como 2^{2^C} gera um transfinito maior que 2^C. Existindo dessa maneira uma sequência infinita de transfinitos.

Cantor também desenvolveu uma teoria para numerais ordinais infinitos.

Números ordinais são baseados no conceito de tipos de ordem. Se dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade, então eles podem ser correlacionados um a um. Se a correlação pode ser feita de um modo em que a ordem de cada conjunto permaneça a mesma, então os conjuntos possuem o mesmo tipo de ordem. Todos os conjuntos finitos que possuam a mesma cardinalidade possuem o mesmo tipo de ordem.

Como cada conjunto finito de uma dada cardinalidade tem o mesmo tipo de ordem, o número total de tipos de ordem dos conjuntos finitos é $\aleph_0$ que representa a cardinalidade do conjunto dos números naturais.

Cantor mostrou que existem infinitas maneiras de ordenar um conjunto infinito enumerável e que esse conjunto infinito tem cardinalidade diferente de $\aleph_0$, que pode ser chamado de $\aleph_1 = C$. Essa teoria de ordinalidade infinita continua gerando $\aleph_2$, $\aleph_3$, etc, desenvolvendo infinitos cada vez maiores.

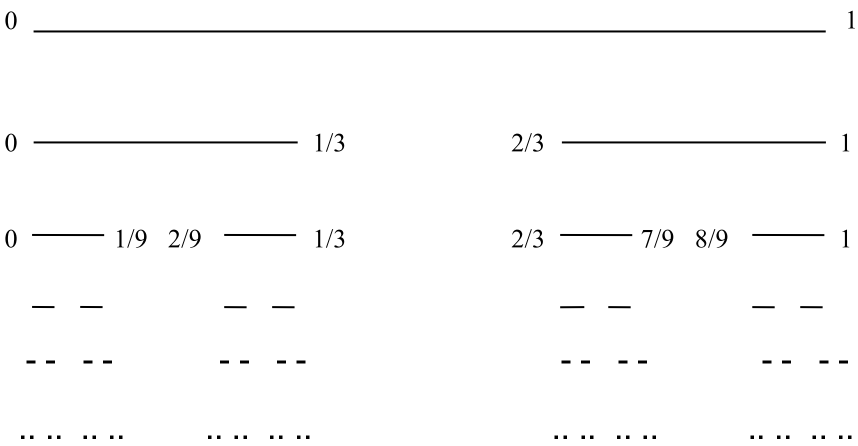
A partir daí, Cantor desenvolveu a hipótese do contínuo, essa hipótese estabelece que entre o $\aleph_0$ (cardinalidade dos naturais) e o $\aleph_1$ (cardinalidade dos reais) não existe outro transfinito, ou seja, não há um conjunto de cardinalidade intermediária ao dos números naturais e reais. Cantor nunca conseguiu provar sua hipótese, o problema só foi resolvido em 1963 por

Cohen e o resultado foi surpreendente. Na verdade, a hipótese do contínuo é um dos indecidíveis existentes na matemática.

O CONJUNTO POEIRA DE CANTOR

Um dos mais surpreendentes resultados é o Conjunto Ternário de Cantor, conhecido também por alguns como Conjunto Fractal de Cantor, ou também como Poeira de Cantor. Nele, Cantor considera um segmento unitário representado pelo intervalo fechado [0,1], o divide em três partes iguais e remove o terço do meio, que consiste em todos os pontos x tal que $1/3 < x < 2/3$, ficando com os outros dois terços extremos.

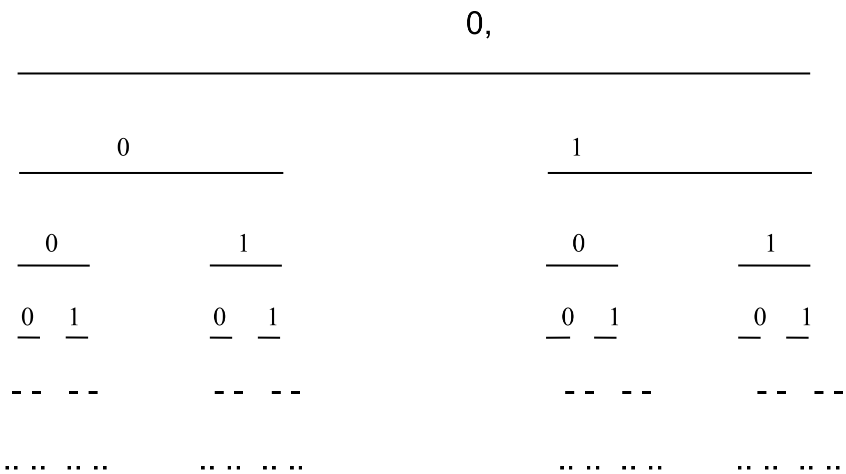
Chamaremos esse conjunto de pontos restantes de C_1. De C_1 removeremos o terço do meio dos dois segmentos que restaram, o conjunto de pontos restantes, chamaremos de C_2. Repetiremos esse processo com C_2 restando o conjunto de pontos C_3 e assim sucessivamente com os conjuntos C_4, C_5, C_6... Denotaremos por C o conjunto de pontos restantes após todos esses intervalos serem removidos, ou seja C é o conjunto de pontos formado pela sequência infinita de conjuntos C_1, C_2, C_3, ... , de maneira que C, em seu limite é o Conjunto Ternário de Cantor.



Neste processo, o que é retirado é o intervalo aberto do meio da divisão, desta maneira, pode-se observar que os pontos extremos dos diversos segmentos obtidos em qualquer etapa da construção do Conjunto de Cantor (como por exemplo: 0,1,1/3,2/3,1/9,2/9,7/9,8/9,...), sempre restarão, portanto temos certeza que esses pontos pertencem ao Conjunto de Cantor.

Surpreendentemente é possível mostrar, que a cardinalidade do Conjunto Ternário de Cantor é a mesma do segmento inicial [0,1], apesar dos infinitos pontos que são retirados do segmento durante a sua construção.

Iniciaremos o processo de demonstração pelo primeiro nível da construção, o intervalo [0,1] propriamente dito, que será associado a " 0,". Nas etapas seguintes o dígito 0 será associado ao segmento anterior (a esquerda) ao segmento retirado e o dígito 1 ao segmento posterior (a direita) ao retirado, como mostra a figura a seguir:



Desta forma, cada subintervalo utilizado na construção do conjunto estará sendo associado a um número real entre zero e um[49]. Essa associação feita acima entre cada segmento da construção do conjunto de Cantor e os dígitos 0 ou 1 cria uma infinidade de sequências infinitas do tipo: 0, $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$...onde cada a_k assume somente o valor de 0 ou 1. Portanto, as sequências infinitas criadas são de fato as escritas infinitas na base dois dos números reais entre zero e um. Esta correspondência é biunívoca, pois qualquer sequência do tipo 0, $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$... a_k, onde cada a_k assume somente o valor de 0 ou 1, representa um único número real e de maneira

[49]Essa demonstração é feita com número escrito na base 2, pois só foram utilizados os algarismos 0 e 1 para escrevê-lo.

análoga, qualquer número real entre zero e um é representado por uma sequência também desse tipo. Portanto, o Conjunto Ternário de Cantor, assim como o conjunto dos números reais, é não enumerável e ambos possuem a mesma cardinalidade.

E o que acontece com o que foi removido?

No primeiro passo foi removido um segmento de medida 1/3, já no segundo passo foram removidos dois segmentos de medida $(1/3)^2$ e assim por diante. Logo, o tamanho do total de segmentos removidos corresponde à soma infinita:

$$\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{9} + 4.\frac{1}{27} + 8.\frac{1}{81} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{(i-1)}}{3^i}$$

Esse somatório pode ser calculado como a soma infinita de uma progressão geométrica[50] de razão menor do que 1 e cujo valor é igual a 1.

Ou seja, o tamanho dos segmentos retirados é exatamente igual ao tamanho do segmento inicial.

Dessa maneira, tanto Conjunto Ternário de Cantor possui o mesmo número de pontos do segmento [0,1], assim como, toda a parte retirada tem também a mesma medida do segmento original, o que parece ser completamente contraditório.

Paradoxo de Banach-Tarski

Outro aspecto interessante que o infinito nos traz é o teorema de Banach–Tarski, também é conhecido como paradoxo de Banach-Tarski não por ser contraditório, mas por ser um resultado totalmente contra-intuitivo. Nele, fica estabelecido que é possível dividir uma esfera sólida tridimensional em um número finito de pedaços e com estes pedaços construir duas esferas, do mesmo tamanho da original. A demonstração prova a existência

---

[50] Como a soma da PG infinita é dada por $\frac{a_1}{1-q}$ então: $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}$ = 1.

teórica de uma forma de repartir a esfera com estas características, usando o axioma da escolha. Não há uma prova construtiva que descreva a maneira pela qual a esfera deve ser repartida. Banach e Tarski propuseram este paradoxo com a intenção de evidenciar um resultado para que o axioma da escolha fosse rejeitado, mas os matemáticos em geral continuam a utilizar este axioma arcando com suas consequências bizarras e contra-intuitivas.

3 A DIVISÃO POR ZERO

Entretanto, esse mesmo infinito que surpreende acaba sendo salvador. Pois é graças ao mesmo infinito, que a divisão por zero é salva do paradoxo. Vamos entender como o paradoxo se constrói na divisão por zero. Suponha que seja possível dividir um número p e um número q por zero, sendo p diferente de q. Dessa forma, seja a equação válida $p. 0 = q. 0$, ao dividirmos esta equação por zero, obteríamos como resultado $p = q$, o que geraria um absurdo, uma vez que consideramos que p é diferente de p. Contudo, esse paradoxo fica amenizado, ao considerarmos a função $f(x) = a/x$, onde a é um número real, constante e diferente de zero. Ao considerarmos essa função, quando x tende a zero, ou seja, quando a divisão por zero vai se configurando, o limite dessa função vai para infinito, salvando assim, a divisão por zero do absurdo e a levando ao infinito.

4 UM POUCO DA BIBLIOGRAFIA DE KURT GÖDEL

Kurt Gödel nasceu em 28 de abril de 1906, em Brünn, Áustria-Hungria (hoje Brno, RepúblicaCheca). Durante a infância teve febre reumática e ao longo de toda sua vida sua saúde sempre foi uma preocupação.

Kurt frequentou a escola em Brünn, completando os seus estudos escolares em 1923. Nesse mesmo ano, Gödel ingressou na Universidade de Viena, ainda sem ter tomado uma decisão definitiva, se ele queria se especializar em matemática ou física teórica. Durante a graduação participou de um seminário dirigido por Schlick cujo tema era Introdução à filosofia matemática de Bertrand Russel o que despertou seu interesse por lógica matemática.

Em 1929, defendeu sua tese de doutorado mostrando a completude do cálculo funcional de primeira ordem sob a orientação de Hans Hahn. Tornou-se membro do corpo docente da Universidade de Viena em 1930 e passou a frequentar o Círculo de Viena. Em 1931, ele publicou seus resultados mais relevantes, mostrando que em certos sistema matemático axiomático, existem proposições que não pode ser provadas ou refutadas dentro do próprio sistema. Em particular, a consistência do sistema não pode ser provada dentro do próprio sistema.

A ascenção de Hitler ao poder, em 1933, não influenciou muito a vida de Gödel em Viena. Em 1934, Gödel apresentou uma série de palestras na Universidade de Princeton intituladas “Sobre as proposições indecidíveis dos sistemas matemáticos formais”. Nessa época, Gödel sofreu um colapso nervoso e para tratar-se, passou vários meses num sanatório recuperação da depressão. Apesar dos problemas de saúde, Gödel continuou produzindo importantes resultados. Contudo, o assassinato de Schlick, em 1936, um dos participantes dos encontros do Círculo de Viena e cujo seminário tinha despertado seu interesse pela lógica, o abalou profundamente.

Casou-se com Adele Porkert no outono de 1938.

Ainda no mesmo ano, após anexação da Áustria pela Alemanha, o título de "Privatdozent" de Gödel foi extinto e ele foi convocado a se inscrever no exército nazista. Em Janeiro de 1940, ele e sua mulher saíram da Europa por meio da ferrovia trans-siberiana e viajaram pela Rússia e Japão, até chegarem aos Estados Unidos em 4 de março de 1940. Estabeleceram-se em Princeton, quando Gödel passou a integrar o IAS (Instituto de Estudos Avançados). Nessa época, voltou-se para a filosofia e física, estudando detalhadamente os trabalhos de Leibniz, Kant e Husserl. No final de 1940 demonstrou a existência da solução paradoxal das equações de campo da teoria geral da relatividade de Einstein.

Continuou seus trabalhos em lógica e publicou o estudo sobre a consistência do axioma da escolha e da hipótese do contínuo generalizada com os axiomas da teoria dos conjuntos, um dos assuntos clássicos da matemática moderna. Em 1946, Gödel tornou-se membro permanente do IAS e em 1948 naturalizou-se cidadão estadunidense.

Passou a professor pleno do instituto em 1953 e professor emérito em 1976. Kurt Gödel recebeu muitos prêmios e honrarias durante sua vida como o primeiro Prêmio Einstein, em 1951. Em 1974, recebeu a Medalha Nacional de Ciência. No final de sua vida, Gödel acreditava estar sendo envenenado e recusava-se a comer, faleceu em 14 de janeiro de 1978, em Princeton.

5 Um Pouco sobre David Hilbert

De fato, o século XIX foi todo dedicado ao desenvolvimento completo e rigoroso da matemática.

A descoberta das geometrias não Euclideanas no início do século fizeram com que os matemáticos parassem para pensar melhor nos seus fundamentos.

Cauchy e Weierstrass reformaram o cálculo. Na Inglaterra, Boole e Augustus de Morgan (1806–1871) começaram a desenvolver a lógica simbólica. Em 1890, Peano, na Itália, desenvolveu a aritmética na base axiomática e Frege na Alemanha, começou desenvolver a matemática unicamente por meio da lógica.

Desde que o paradoxo de Russell tornou-se conhecido a questão sobre consistência ficou cada vez mais em evidência.

Em 1899, David Hilbert já havia conseguido uma axiomatização satisfatória da geometria. Em seguida, em 1900, apresentou um conjunto de axiomas para o conjunto dos números reais e indicou que a questão sobre consistência destes vinha antes da questão da consistência da geometria. Neste mesmo ano, no Congresso Internacional de Paris apresentou uma lista de problemas que desafiaram o mundo matemático. Segue abaixo a lista completa.

Problema 1: Problema de Cantor relativo a hipótese do contínuo (HC).

Problema 2: Demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética.

Problema 3: Pode-se provar que dois tetraedros, de mesma base e mesma altura, têm o mesmo volume?

Problema 4: Construir todos os espaços métricos em que as linhas são geodésicas.

Problema 5: Todo grupo contínuo é automaticamente um grupo diferencial?

Problema 6: Axiomatizar a física.

Problema 7: Irracionalidade e transcendentalidade de certos números.

Problema 8: A hipótese de Riemann e a conjectura de Goldbach.

Problema 9: Achar a lei de reciprocidade mais geral em todo campo de número algébrico.

Problema 10: Encontrar um algoritmo que determine se uma equação diofantina tem solução.

Problema 11: Classificar as formas quadráticas a coeficiente nos anéis algébricos inteiros.

Problema 12: Estender o teorema de Kroneker para os corpos não abelianos a um domínio de racionalidade algébrica.

Problema 13: Demonstrar a impossibilidade de resolver equações de sétimo grau por meio de funções de somente duas variáveis.

Problema 14: Demonstrar que certos sistemas completos de funções são finitos.

Problema 15: Desenvolver bases sólidas para a geometria enumerativa de Schubert.

Problema 16: Desenvolver uma topologia de curvas e superfícies algébricas.

Problema 17: Representação de formas definidas por somas de quadrados de funções racionais.

Problema 18: Construir um espaço com poliedros congruentes.

Problema 19: A resolução dos problemas de cálculo de variações são sempre necessariamente analíticas?

Problema 20: Problema de Dirichelet no caso geral.

Problema 21: Prova da existência de equações diferenciais lineares tendo um determinado grupo monodrômico.

Problema 22: Uniformizar as curvas analíticas por meio de funções automorfas.

Problema 23: Desenvolver um método geral de resolução no cálculo de variações.

No 3º Congresso Internacional de Matemática ocorrido em Heidelberg de 8 a 13 de agosto de 1904, David Hilbert apresentou o trabalho intitulado *On the foundations of logic and arithmetic.* Nele, Hilbert apresenta uma primeira tentativa de provar a consistência da aritmética. De fato, seu plano era mostrar que todas as fórmulas de uma certa classe possuem uma certa propriedade, e assim as fórmulas iniciais a possuem e as transmitem para as derivadas.

Além da busca por uma prova de consistência o trabalho faz uma crítica aos vários pontos de vista sustentados em relação aos fundamentos da aritmética e introduz termos que Hilbert vai desenvolver, modificar ou tornar mais precisos nos seus futuros trabalhos, tais como: a redução da matemática a uma coleção de fórmulas, a existência extralógica de objetos básicos, suas combinações e a construção de uma lógica paralela com o estudo dessas combinações.

O trabalho de 1904, além de ter sido um marco na concepção hilbertiana, influenciou Julius König (1849–1913) que por sua vez inspirou von Neumann em sua busca por uma prova da consistência da aritmética.

Já em 1925, Hilbert publicou um trabalho entitulado *On the infinite.* Onde ele começa recordando Weierstrass eliminando referências ao infinito na análise, também menciona Cauchy e D´Alambert (1717–1783) e revê a sua influência na física, na teoria dos conjuntos e na lógica. A segunda parte do trabalho é uma tentativa de provar a hipótese do contínuo.

Na década de 1920, Hilbert, então, atacou o problema número 2 da sua lista de 23 problemas apresentados em 1900. Imbuído pelo desafio de provar a consistência da matemática, ele desenvolveu um programa que reconstruía a matemática por um caminho que poderia levar a resultados aceitáveis.

Hilbert acreditava que se as regras fossem estabelecidas cuidadosamente, poderia tanto extinguir paradoxos como também desenvolver tudo com um perfeito funcionamento na matemática. Não seria essencial que as regras fossem intuitivamente óbvias, a única coisa que importava era se elas realmente funcionavam. Além do mais, ele acreditava que investigando o sistema por fora, por meio da metamatemática, ele poderia eventualmente provar a consistência da matemática e também demonstrar que esse sistema matemático seria completo.

O programa de Hilbert ficou conhecido como formalista e a obtenção de alguns sucessos o encorajaram a continuar. Algumas partes da matemática eram ambas consistentes e completas. Porém, algumas não. Não podemos mostrar na aritmética, por exemplo, que ela é completa e consistente ao incluirmos a multiplicação.

A não-existência de contradição é garantida somente pela consistência das proposições. Foi dessa forma que Hilbert concebeu uma nova maneira de aproximar-se do problema de consistência. Ele esperou provar que uma fórmula contraditória nunca deveria ocorrer por meio de conjuntos apropriados de regras de procedimento. E se ele provasse que não seria possível a existência de fórmulas contraditórias então estaria estabelecida a consistência do sistema. No entanto, isso não foi possível.

6 PARADOXOS/ANTINOMIAS

A discussão sobre paradoxos não é recente. Há muito tempo são criados paradoxos e estes trazem a tona grandes debates.

Vejamos abaixo alguns exemplos de paradoxos:

Todos cretenses são mentirosos. – Epinêmides, um cretense.

A afirmação que estou fazendo é falsa. – Eublides

Na primeira afirmação, notamos que só existe contradição, se considerarmos a frase como verdadeira já que Epinêmides se declara como cretense. Porém, se a frase for falsa, teríamos que nem todos os cretenses são mentirosos e não geraríamos uma contradição. Já no paradoxo de Eublides não temos outras circunstâncias. Se a afirmativa for falsa, então ela é verdadeira e se for verdadeira ela é falsa.

Como veremos, ao longo de várias épocas, muitos discutiram outras versões, novas roupagens para o paradoxo de Eublides. Aristóteles foi um deles. Sua versão, na qual os gregos chamavam de O Mentiroso era a seguinte: Essa afirmação é falsa. Mais tarde, filósofos a desenvolveram em forma de diálogo:

Sócrates: Tudo que Platão diz é falso.

Platão: Sócrates só fala a verdade.

A idéia da demonstração do teorema de Cantor[51] serviu como embrião para que fossem gerados paradoxos na teoria dos conjuntos.

Partindo dessa idéia foi mostrado que a teoria cantoniana de ordinalidade continha um paradoxo conhecido como paradoxo de Burali-Forti. Em seguida, Cantor encontrou um outro paradoxo bem similar ao paradoxo de Burali-Forti, conhecido como paradoxo de Cantor.

Em 1897, o matemático italiano Burali-Forti foi o primeiro a publicar um paradoxo da teoria dos conjuntos. O trabalho de Burali-Forti foi anunciado no encontro do *Circolo matemático di Palermo* em 28 março de 1897. O trabalho é a primeira publicação de um paradoxo moderno. Despertou imediatamente o interesse do mundo matemático, e provocou inúmeras discussões nos anos que se seguiram à sua publicação. Inúmeros trabalhos trataram do assunto, propiciando uma grande análise dos fundamentos da teoria dos conjuntos. O paradoxo é simples. Sabe-se que a toda a boa ordenação corresponde um único número ordinal. Também se sabe que ordinais formam uma boa ordenação. Considere, então, a coleção de todos os ordinais. Esta coleção é uma boa ordenação e, portanto, corresponde a um ordinal A. Logo, A excede todos os ordinais e excede-se a si próprio, o que é uma contradição.

A essência deste paradoxo pode ser encontrada, por uma descrição não técnica de um paradoxo muito similar descoberto por Cantor dois anos depois. Em sua teoria dos conjuntos, Cantor teve sucesso ao provar que dado qualquer transfinito sempre existe um transfinito maior, ou seja, que o conjunto dos números transfinitos é infinito.

Agora, vamos considerar o conjunto no qual os membros são todos os conjuntos possíveis. Assim como em todo conjunto infinito, Cantor associa um transfinito a sua cardinalidade. Certamente, não há conjunto que possua mais elementos que o conjunto de todos os conjuntos. Logo, esse seria o

---

[51] A demonstração feita por Cantor desse teorema pode ser vista na seção 8 deste mesmo capítulo.

maior transfinito possível o que geraria um absurdo. Pois como já vimos, Cantor mostrou que dado qualquer transfinito sempre existe um transfinito maior.

Como podemos perceber, os paradoxos de Burali-Forti e Cantor envolviam resultados da teoria dos conjuntos. Entretanto, Bertrand Russell descobriu em 1902 um paradoxo que não dependia de nada mais que o próprio conceito de conjunto. Antes de descrever o paradoxo de Russell, precisamos ter bem claro que conjuntos podem ser membros de si mesmo ou não. Vejamos alguns exemplos: o conjunto de todas as idéias abstratas é uma idéia abstrata, porém o conjunto de todos os homens não é um homem. Assim como, o conjunto de todos os conjuntos é um conjunto e o conjunto de todas as estrelas não é uma estrela.

Daí surge então a questão de Russell: Vamos representar o conjunto de todos os conjuntos que são membros de si mesmo por M, e o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si mesmo de N. Agora, fica a pergunta: N é ou não membro de si mesmo? Se N for membro de si mesmo, então N é membro de M e não é de N, logo N não é membro de si mesmo. Por outro lado, se N não é membro de si mesmo, então N é membro de N e não é de M, concluindo N é membro de si mesmo. Como vemos, nos dois casos existem antinomias.

Em 1913, P. E. B Jourdain criou uma versão moderna do diálogo, dessa vez sem personagens. De um lado de uma carta estava escrito: A afirmativa no outro lado da carta é verdadeira, enquanto do outro lado estava escrito: A afirmativa no outro lado da carta é falsa.

Alfred Tarski desenvolveu uma versão que nos lembra indução matemática. Você tem um livro de 100 páginas. Na página 1 está escrito, A afirmativa na página 2 é verdadeira. Na página 2 está escrito, A afirmativa na página 3 é verdadeira. Generalizando, na página n está escrito, A afirmativa na página n+1 é verdadeira. Porém, ao chegarmos à página 100 nos deparamos com a seguinte frase: A afirmativa na página 1 desse livro é falsa. As versões de Jourdain e Tarski são basicamente a mesma, a única diferença é que Tarski nos deixa em suspense por mais tempo.

José Bernadete, com outro propósito em mente, criou um livro de infinitas páginas. Onde na primeira página estaria escrito: A afirmativa da última página é verdadeira. E em todas as outras páginas estaria escrito: A afirmativa da página anterior é falsa. Quando você lesse a página 1, não haveria uma maneira de você checar se a afirmativa seria verdadeira ou falsa, já que o livro é infinito e que não há última página. Porém, quando você lê a página 2, descobre que a afirmação na página 1 é falsa. E quando lê a página 3, você descobre que a afirmação na página 2 é falsa, o que implicaria na veracidade da afirmação na página 1. Entretanto, ao ler a página 4, alteramos mais uma vez o valor de verdade da página 1. Então, a afirmativa na página 1 é verdadeira ou falsa?

Existem inúmeras explicações para esse paradoxo. Nenhuma delas é completamente satisfatória, por isso ainda há uma busca pela resposta até hoje.

Existe um paradoxo de extrema importância, pois foi fundamental para teoria de Gödel. É o Paradoxo de Richard, inventado em 1905 por Jules Richard (1862–1956). O paradoxo de Richard veio à tona enquanto a euforia causada pelo paradoxo de Russell, publicado dois anos antes, ainda não havia diminuído. Praticamente ao mesmo tempo, König apresentou na academia húngara de ciências, em forma de paradoxo, um novo argumento para mostrar a impossibilidade de fazer uma boa-ordenação do contínuo (já que após sua primeira tentativa, Zermelo provou que qualquer conjunto poderia ser bem-ordenado). Apesar da semelhança entre os paradoxos, estes são completamente independentes. Podemos entender melhor o paradoxo de Richard. A partir de idéias retiradas do texto[52] de Ricardo Kubrusly.

> “Na língua portuguesa, propriedades sobre os números podem ser formuladas e definidas (poderíamos ter qualquer outro tipo de linguagem que pudéssemos fazer definições). Então, por exemplo, a propriedade de um número ser primo pode, desta maneira, ser definida como divisível apenas por si mesmo e pela unidade, a de um número ser par como múltiplo de dois e assim por diante. Cada

[52] Retirado de KUBRUSLY, Ricardo Silva. **Uma Viagem Informal ao Teorema de Gödel ou (O Preço da Matemática é o Eterno Atemático)**. In: CARVALHO, Edgard de Assis; MENDONÇA, Terezinha. **Ensaios de Complexidade 2**. Rio de Janeiro: Editora Sulina, 2004. pp140-158

uma destas definições contém um número finito de palavras logo, um número finito de letras do alfabeto, sendo possível portanto, serem arrumadas numa lista ordenada de definições das propriedades da aritmética.

Uma definição precederá a outra se o número de letras do alfabeto empregadas na sua definição, for menor do que o número de letras empregada na outra definição. No caso de duas definições empregarem o mesmo número de letras do alfabeto, o posicionamento na lista de definições será decidido baseado no critério da ordem alfabética. De posse desta lista, associaremos ao seu primeiro elemento o número 1, ao segundo elemento da lista o número 2, e assim sucessivamente.

Como cada definição ficará associada a um único número inteiro, pode acontecer em certos casos, que o próprio número associado a uma certa definição possua a propriedade descrita por ela. Por exemplo: se o número associado à definição da propriedade de um número ser primo, divisível apenas por si mesmo e pela unidade, é 19, temos claramente que ele, o 19, possui a propriedade descrita pela expressão de número 19. Por outro lado pode acontecer, o que deve ser inclusive mais provável, o contrário: que o número associado à definição de uma certa propriedade da aritmética não possua a propriedade descrita pela definição a que ele se refere. Por exemplo: se o número associado à definição da propriedade de um número ser par, múltiplo de dois é 35, temos, também claramente, que ele o 35, não possui a propriedade a que ele se refere, ou seja, a de ser um número par. Os números que se referem aos casos descritos no segundo exemplo, serão chamados de richardianos, isto é, um número será richardiano se ele não possuir a propriedade aritmética descrita na definição associada a ele na lista de definições aritméticas, confeccionadas da maneira explicada acima. Serão não richardianos, caso contrário, isto é, quando possuir a propriedade por ele designada na lista de definições das propriedades aritméticas.”

> Agora, a propriedade de um número ser richardiano passa então a ser associada a um número N. Podemos então perguntar: será N richardiano? e mais uma vez, teremos como resposta: N É richardiano se e somente se N é não richardiano.

7 TEORIA DOS TIPOS

Em todos os paradoxos lógicos existe uma espécie de auto referência reflexiva, isto é, a de incluir, como membro de uma totalidade, alguma coisa referente a essa totalidade que deve ser condenada.

Após várias tentativas, Russell e Alfred North Whitehead propuseram uma nova maneira de eliminar os paradoxos da matemática chamada de teoria dos tipos. A solução do problema é apresentada em menos de trinta linhas. Além dessa solução, examina outras possíveis e as acha menos satisfatórias. Conclui, finalmente, que "não há nenhuma filosofia peculiar envolvida na contradição, que salta diretamente do sentido comum e pode somente ser resolvida abandonando algumas verdades do senso comum"[53].

Russell passou, então, a tomar conhecimento de outros paradoxos, como por exemplo, do paradoxo de Burali-Forti e o de Cantor. Em dezembro 1905, Russell tinha abandonado a teoria dos tipos. Para superar as dificuldades levantadas pelos novos paradoxos apresentou então três novas teorias: a teoria do zigzag, a teoria da limitação do tamanho e a teoria de nenhuma-classe. Entretanto, logo, Russell reconheceu que as teorias se mostravam inadequadas à matemática clássica. Então, voltou atrás para a teoria dos tipos e prosseguiu desenvolvendo-a detalhadamente. O resultado desse estudo foi publicado em julho de 1908.

Russell vê o universo divido em níveis, ou tipos. Determinadas coisas somente satisfazem uma condição dada se forem do mesmo tipo. Os membros de uma classe, então, devem ser todos do mesmo tipo. Russell é conduzido assim para um distinção entre *todo* e *algum*: o *todo* representa uma certa (*aparente*) variável de quantificação universal, escalas sobre um

---

[53]RUSSELL, Bertrand. **The Principles of Mathematics: Volume I**. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

tipo, e o *algum* é expresso pela variável (*real*) livre, que se refere a qualquer coisa não específica não levando em consideração o tipo. Russell vê como o cerne dos paradoxos o que ele chama o princípio do círculo-vicioso: "Nenhuma totalidade pode conter os membros definidos como termos de si mesmo"[54].

A idéia deles era basicamente a seguinte: um conjunto de tipo inferior (vamos chamá-lo de tipo 1) poderia somente conter objetos como membros e não poderia conter conjuntos. Já um conjunto do tipo 2 (superior ao do tipo 1) poderia conter objetos ou conjuntos do tipo 1 (inferior ao tipo 2). Claramente, nenhum conjunto poderia conter a si mesmo, pois se isso ocorresse, ele deveria pertencer a um tipo superior ao seu próprio tipo.

O tipo mais baixo compreende individuais; seu seguinte compreende o que ele chama de proposições de primeira ordem; e assim por diante. Estas proposições, ao contrário dos individuais, são notações, e podem conter variáveis. Ainda assim, como os individuais, possuem tipos e figuram como valores de variáveis quantificadas.

A teoria dos conjuntos é um componente indispensável da matemática. É o ramo da matemática cuja tarefa é investigar as noções fundamentais de número, ordem, e função, desenvolvendo as fundações lógicas, de toda aritmética e análise. Contudo, sua existência parecia estar ameaçada uma vez que não havia nenhuma solução inteiramente satisfatória, nem mesmo a teoria dos tipos, para determinadas contradições, ou antinomias que podiam ser derivadas de seus princípios[55].

Somente depois com o estudo de Ernest Zermelo que se obteve um resultado satisfatório. O trabalho de Zermelo publicado em 1908 *Investigations in the foundations of set theory I,* apresenta a primeira axiomatização da teoria dos conjuntos. A idéia básica de Zermelo assemelha-

[54]HEIJENOORT, Van. **From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931.** New York: San Jose New York Lincoln Shanghai, 2000.

[55] Embora não tendo ido diretamente ao ponto, Ramsey foi o primeiro a abandonar a ramificação e o axioma da redutilibidade. Ramsey foi alertado pela observação de Peano que os paradoxos se dividem em dois tipos: aqueles de pura teoria dos conjuntos e aqueles que articulam conceitos semânticos tais como o *falsity* e o *specifiability*. Ramsey observou que a única utilidade da ramificação da teoria dos tipos de Russell seria a resolução de paradoxos semânticos e estes, segundo Ramsey, devem ser deixados de lado pois extrapolam conceitos da lógica e da matemática. Essa idéia acabou sendo abandonada uma vez que seu uso ia completamente contra intuição.

se a teoria de Russell, ambos recusam a considerar conjuntos como coleções. Conjuntos não são simplesmente coleções, são objetos que satisfazem a determinadas circunstâncias axiomáticas.

Os axiomas de Zermelo (1871–1953) são surpreendentemente pouco em números. O mais original é talvez o axioma III, o axioma da separação. Zermelo foi talvez o primeiro a ver claramente que a existência de conjuntos infinitos deveria ser assegurada por um axioma especial (axioma VII, do infinito).

Zermelo apenas indica seus axiomas, e declara ser incapaz de provar sua consistência. Mostra que as derivações usuais de um número de paradoxos conhecidos, como os paradoxos de Buralli-Forti e de Russell, não podem ser obtidas deles pois o conjunto de todos os ordinais e o conjunto de todos os conjuntos não existem no sistema. Prova então teoremas sobre conjuntos. O desenvolvimento vai até o teorema de Cantor, o teorema de König, e um teorema, que conecta duas noções de infinitude.

Em 1898, Whitehead publicou o primeiro volume do *A treatise of universal álgebra*. Em 1903, Russell publicou o primeiro volume do *The principles of mathematics*. Whitehead foi então persuadido a abandonar os planos para a publicação do segundo volume de seu livro e colaborar com o Russell no segundo volume dos *The principles*. Este volume nunca se materializou. Porém, o resultado da colaboração foi um trabalho independente dos *The Principles*. O resultado desse trabalho foi o *Principia Mathematica* e a concretização do que Frege e Peano, em suas diferentes maneiras, tinham projetado. São três volumes de um estudo detalhado da lógica e da teoria dos conjuntos, e uma construção da matemática clássica.

8 TEOREMA DE CANTOR

TEOREMA. Para qualquer conjunto A, a cardinalidade de A é estritamente menor que o conjunto de suas partes, ou seja, $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{P(A)}}$

Demonstraremos esse teorema primeiramente de maneira intuitiva e em seguida de um modo mais formal.

DEMONSTRAÇÃO INTUITIVA:

Seja A um conjunto infinito.

Suponhamos que o conjunto A pode ser posto em correspondência biunívuca com o conjunto de suas partes P(A).

Vamos criar uma lista tal que a cada elemento a,b, c, … de A, teremos um subconjunto {…}a, {…}b, {…}c ,… de A associado.

A	⇔	P(A)
a	⇔	{…}a
b	⇔	{…}b
c	⇔	{…}c
.		
.		
.		

Como a é elemento de A, temos duas possibilidades: ou a pertence ao subconjunto {…}a no qual está relacionado ou não pertence a esse subconjunto.

Seja B um conjunto no qual para todo elemento b pertencente a B, b pertence ao subconjunto {…}b no qual está relacionado.

Logo B está contido em A, e em particular em P(A).

Desse modo, existe um c pertencente a A tal que c está relacionado com o cojunto B ={…}c.

Sendo assim, c pertence ao conjunto B?

Se c pertence ao conjunto B, então c não pertence a B, uma vez que B é o conjunto de todos os elementos que não pertencem a B.

Se c não pertence ao conjunto B, então c pertence a B, uma vez que B é o conjunto de todos os elementos que não pertencem a B.

Geramos um absurdo, contrariando nossa hipótese conjunto A pode ser posto em correspondência biunívuca com o conjunto de suas partes P(A).

Demonstração Formal:

Suponhamos que φ é uma função de $\overline{\overline{A}}$ sobre $\overline{\overline{P(A)}}$

Seja $z = \{x \in A \ / \sim x \in \varphi(x)\}$.

Então $z \subseteq A$.

Se $z = \varphi(y)$ para $y \in A$ então:

$$y \in z \rightarrow \sim y \in \varphi(y) \rightarrow \sim y \in z \text{ e}$$

$\sim y \in z \rightarrow y \in \varphi(y) \rightarrow y \in z$, o que é impossível.

9 As Geometrias não Euclideanas

Uma das crises do infinito que ocorreram na matemática está relacionada ao 5º Postulado de Euclides. Os Elementos, obra escrita por Euclides por volta do ano 300 a.C, tem por objetivo de formular e organizar os resultados da geometria desenvolvida até então. Nos 13 livros que a compõe, Euclides não se limita a compilar resultados dos matemáticos que o antecederam, mas sim, em muitos casos, aperfeiçoa as demonstrações já existentes. A obra começa com definições de termos geométricos. Em seguida, Euclides aponta 5 postulados ou suposições fundamentais sobre objetos geométricos. São eles:

1. Por dois pontos distintos é possível traçar uma única reta.
2. É possível prolongar continuamente tanto quanto se queira um segmento, a partir de qualquer das suas extremidades numa linha reta.
3. É possível traçar uma circunferência com qualquer centro e raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas, quando suficientemente prolongadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos[56].

Uma das razões pelas quais esta obra é tão importante é o fato de ser possível demonstrar 465 proposições, partindo de apenas 5 postulados, 5 noções comuns e algumas definições. O 5º Postulado foi desafiador durante séculos e inúmeros matemáticos tentaram deduzi-lo a partir dos demais

[56] Releitura do 5º postulado de Euclides: Dado um ponto P fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta s paralela à reta r dada.

quatro axiomas e assim demonstrá-lo como um teorema. Aliás, o próprio Euclides possivelmente também teria visto algo de especial no quinto postulado, razão pela qual não o utiliza na demonstração das primeiras 28 proposições (e só a partir da 32ª todas o utilizam). É quase como se Euclides evitasse a sua utilização tanto quanto possível. Na verdade, a existência da reta paralela era e é, facilmente, demonstrada com o restante dos quatro outros postulados; a unicidade das paralelas é que necessitava de ser postulada. Na verdade, o 5o postulado de Euclides é um indecidível, se considerássemos apenas os quatro primeiros postulados de Euclides.

O grande desafio ocasionado pelo 5o postulado foi gerado pela a visão de espaço homogêneo e infinito em todas as direções. As propriedades euclideanas de espaço estavam muito marcadas no pensamento dos cientistas dos séculos XVII e XVIII, tornando-se, deste modo então, difícil uma visualização de soluções alternativas para o problema.

Por esse motivo, a solução dessa crise demorou cerca de dois mil anos para aparecer e somente em 1829 o matemático russo Nikolai Lobachevski (1793-1856) publicou Sobre os Princípios da Geometria onde apresentava uma nova geometria, baseada em um novo postulado que viria a substituir o 5º e que dizia: Dado um ponto P fora de uma reta r pode-se traçar mais de uma reta paralela à reta r dada. Com essa nova geometria, uma nova concepção de espaço era possível, desmistificando assim a atribuição kantiana de verdade absoluta feita à geometria euclideana.

A publicação do trabalho de Lobachevski desengavetou vários outros, na mesma direção, cujas idéias estavam represadas pelo respeito à crença kantiana de um único modelo possível para o espaço. O mundo estava maduro para uma geometria não euclideana. Documentos comprovam que Carl Friedrich Gauss (1777-1855) já pensava sobre uma nova geometria antes mesmo da publicação de Lobachevski. A publicação em 1831 do trabalho Ciência Absoluta do Espaço do matemático húngaro Janos Bolyai (1802-1860) que reinventa a mesma geometria não euclideana independentemente de Lobachevski, demonstra, de outra maneira que as idéias de novas geometrias fervilhavam no início do século XIX.

Formalmente, o axioma da escolha diz o seguinte: $\forall x. x \neq 0 \Rightarrow \sigma(x) \in x$, onde σ é a representação da função primitiva que indica a função escolha e σ (x) escolhe exatamente um elemento do conjunto não vazio x.

Em outras palavras: Uma função escolha em uma família D de conjuntos é uma função f com domínio D tal que, para todo conjunto não vazio X em D, f(X) é um elemento de X. Em outras palavras, f “escolhe" um elemento para cada membro de D. Se D é finito, a existência da função de escolha em D é uma consequência trivial dos princípios básicos de formação de conjuntos e das regras de lógica clássica. Se D é infinito esses princípios não são suficientes, portanto a existência de uma função de escolha deve ser postulada.

Inúmeras críticas foram feitas devido o caráter altamente não construtivo do axioma da escolha, uma vez que ao mesmo tempo que garante a possibilidade de se fazer um número grande de escolhas arbitrárias, o axioma não dá nenhuma indicação de como essas escolhas devem ser feitas. Contudo, além da importância do axioma da escolha nas provas de muitos teoremas matemáticos relevantes, em 1938, Gödel estabeleceu a relativa consistência do axioma da escolha com relação a sistemas usuais de teoria de conjuntos e esses dois fatos combinados fizeram com que o axioma fosse aceito pela maioria da comunidade acadêmica. A prova de independência do axioma da escolha (com relação aos demais axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo Fraenkel) foi apresentada em 1964 por P. J. Cohen.

ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS MATEMÁTICAS

. Teorema da boa ordenação de Zermelo: todo conjunto pode ser bem ordenado.

. Princípio de tricotomia: em todo par de números cardinais, um é menor que o outro, ou eles são iguais.

. Lema de Kuratowski-Zorn: qualquer conjunto não vazio no qual todo subconjunto ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal.

. Teorema de Tychonov: o produto de qualquer família de espaços topológicos compactos é compacto.

. Teorema de Hamel-Banach: todo espaço vetorial possui uma base.

. Demonstração do princípio do 3º excluído

Se S é um subconjunto do produto cartesiano A x B e, para cada x $\in$ A existe y $\in$ B tal que (x; y) $\in$ S, então existe uma função f : A $\rightarrow$ B tal que (x; f(x)) $\in$ S para cada x $\in$ A.

Então vale o princípio do terceiro excluído: p V ~p.

Prova. Seja A = {s,t}, onde s = t se e somente existe um p, onde p é um predicado qualquer.

Seja B = {0,1} e seja S = {(s; 0); (t; 1)} $\subset$ A x B.

Se f : A $\rightarrow$ B é a função de escolha para S, então

(I) f(s) = 1 ou f(t) = 0, então devemos ter s = t e, portanto p vale; ou

(II) f(s) = 0 e f(t) = 1, e portanto s não pode ser igual a t e p não vale.

CONSEQUÊNCIAS PARADOXAIS

.1914: Hausdor provou, utilizando o axioma da escolha, que 2/3 da superfície da esfera é congruente a 1/3 dela.

.1924: Paradoxo de Banach-Tarski, qualquer esfera sólida pode ser decomposta em um número finito de subconjuntos, que podem ser rearranjados de tal modo a formar duas esferas sólidas, cada uma do mesmo tamanho da original.

Decomposições paradoxais como essas só se tornam possíveis em teoria de conjuntos porque objetos geométricos contínuos foram considerados como um conjunto discreto de pontos, que o axioma da escolha então permite ser rearranjado em uma maneira arbitrária.

Ambas as possibilidades são viáveis, tanto aceitar como rejeitar o axioma da escolha, em qualquer uma delas estaremos apenas precisando sobre qual universo mental que estamos escolhendo para trabalhar. No entanto, a maioria dos matemáticos aceita o axioma da escolha, principalmente por facilitar seu trabalho em algumas demonstrações.

Mas essa utilização como obriga a elaboração de provas não-construtivas e levanta questões filosóficas interessantes acerca da existência essencialmente formal de objetos matemáticos.

11 (A) Os Teoremas de um Sistema Formal são Enumeráveis e (B) as Verdades Aritmética são não Enumeráveis

Proposição A

Se T é uma teoria formal axiomatizável então
o conjunto de fórmulas bem formuladas de T
(i') o conjunto de sentenças de T
(ii)o conjunto de provas construtíveis em T
(iii)o conjunto de teoremas de T
são enumeráveis.

Demonstração

(i) Podemos obter um algoritmo mecânico que enumere todas possíveis sequências de símbolos do alfabeto por meio de uma ordenação qualquer que pode ser, por exemplo, o tamanho da sequência, ou a ordem alfabética. Pela definição de linguagem formal, existe um procedimento mecânico para detectar quais dessas sequências são fórmulas bem formuladas. Combinando esses dois procedimentos podemos efetivamente enumerar todas as fórmulas bem formuladas.

(i') Essa prova é análoga a prova (i), basta substituir fórmulas bem formuladas por sentenças.

(ii) Dado que as provas em T são sequências de fórmulas bem formuladas. Do mesmo modo que podemos enumerar todas as possíveis fórmulas bem formuladas, também podemos efetivamente enumerar todas as possíveis sequências finitas de fórmulas bem formuladas em ordem alfabética. Pela definição de teoria axiomatizada, existe um algoritmo para decidir quais dessas sequências de fórmulas bem formuladas derivam dos axiomas da teoria, sendo possível assim, uma efetiva enumeração de todas as possíveis provas.

(iii) Ao enumerar efetivamente as provas bem construídas novamente e testar se essas sentenças são fechadas. Esse procedimento gerará mecanicamente uma lista contendo todos os teoremas da teoria[57].

Proposição B

DEMOSTRAÇÃO

(i) Para essa prova precisaremos de dois teoremas auxiliares:

Existe um conjunto de números K enumerável cujo seu complemento $\overline{K}$ não é enumerável.

Se K é um conjunto enumerável de números, então existe uma relação numérica R, tal que n $\in$ K, se e somente se $\exists$xR(x,n)

(ii) Seja R decidível, então em uma linguagem aritmética L, existirá uma fórmula bem formulada de L que expressa R: R(x, y).

(iii) Pela definição, $\exists$ xR(x,n) quando $\exists$ x(Nat[58] (x) ^ R(x, $\overline{n}$)) é verdadeira.

De (i) e (iii) temos n $\in$ $\overline{K}$ se e somente se ~$\exists$x(Nat(x)^R(x,$\overline{n}$) é verdadeira.

(v) Suponha que o conjunto Q de verdades aritméticas que podem ser expressas em L é enumerável, então, dada a descrição de R, podemos percorrer a enumeração de Q, e sempre que nos deparamos com verdades do tipo ~$\exists$x(Nat(x)^R(x,$\overline{n}$), listaremos n. Esse procedimento listar todos os membros de $\overline{K}$.

(vi) Mas pela hipótese $\overline{K}$ não é enumerável, então Q também não é enumerável como queríamos demonstrar.

[57]Dizer que os teoremas de uma teoria formal axiomatizada podem ser enumerados não é o mesmo que dizer que teoria é decidível.

[58]Dado qualquer L-predicado, Nat(x) pode ser necessário para restringir quantificadores de L em números .

CONCLUSÃO

Depois de tudo, mais segura chamei a matemática de volta para finalmente encarar-lhe sem medo algum. E disse-lhe

Ao longo de todos esses anos perguntei-me: Como fazer matemática? Como ensinar matemática? Como respeitar a matemática? Quero mais do que o senso comum sempre me ofereceu. Sempre soube que poderia ir além. Não me deixaria petrificar pela formação desconectada de reflexòes oferecida a mim nos anos de Universidade, não poderia deixar que a corrompessem de forma tão vil. Não posso ficar em silêncio ao ver um conhecimento intensamente reflexivo ser dito como exato, previsível, infalível, insosso. O desejo de desistir da alienação e do enquadramento mental foi substituído pelo desejo de desvelação. Hoje, sinto-me feliz e realizada, creio que cumpri o papel que foi dado a mim. E ela então virou-se e me disse

"A matemática não é um produto, e sim uma atividade; como tal, sua consistência depende fundamentalmente do seu poder de construção efetiva. A lógica intuicionista tem como particularidade, exatamente, o fato da negação do estado indefinido ser tido como falso. Como se poderia reduzir o mundo a uma "totalidade" calculável, sem história e sem futuro, sem fundamento e sem contas a prestar, des-ontologizado e desencantado, não fosse o número, medido por instrumentos ou acordado pelos mercados, e o seu obsessivo processamento? Matematicidade como passagem da linguagem natural à linguagem formal, feita por meio da mumificação ou congelamento dos aspectos identitários da primeira. Cremos não ser preciso por demais enfatizar que, pela própria natureza da tarefa pretendida – a formalização do informalizável -, a significação, não raro, emergirá do não-dito, do mal-dito, até do inter-dito em contraposição ao simplesmente dito. A oportuna discriminação, entrementes, terá que ficar por conta da leitura; pô-la já na escritura seria pretender colocar o carro, concomitantemente, antes e depois dos bois. Toda formalização de formas terá que deixar um rezíduo intratável, irremediavelmente in-formal. Esse é o sentido mais profundo dos famosos teoremas de Gödel. O cálculo é uma máquina brutal; o número é a extrema exterioridade e o conceito não pode prescindir de sua interioridade; o entendimento estratifica e estabiliza o mundo para poder dominá-lo, e o affaire da razão é o "conceito concreto". O sistema formalizado em apreço é nada mais que a lógica clássica querendo se passar, fantasiada, por dialética. Matemática intencionalmente reducionista, de propósitos específicos e limitados.[59]

Enfim, ficamos em paz.

[59] SAMPAIO, Luiz Sérgio Coelho de. **Lógica Ressuscitada**: Sete Ensaios. Rio de Janeiro: Editora da Universidade Estadual do Rio de Janeiro, 2000.

REFERÊNCIAS

ACKERMAN, Wilhelm; HILBERT, David. **Principles of Mathematical Logic**. AMS Chelsea Publishing, 1991.

ALONSO, Aristides; DANTAS, Rosane Araújo (Organizadores). **Pensamento Original Made in Brazil**. Rio de Janeiro: Oficina do Autor Editora, 1999.

BACHELARD, Gaston. **O Novo Espírito Científico**. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1968.

BAR-HILLEL, Yehoshua. **Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the 1964 International Congress**. Amsterdam North-Holland Publishing Company, 1972.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BUNCH, Bryan. **Mathematical Fallacies and Paradoxes**. New York: Dover Publication, INC, 1982.

CASSIRER, Ernst. **Linguagem e Mito**. São Paulo: Perspectiva, 2009.

CONSUEGRA, Francisco Rodrígues. **Kurt Gödel: Ensayos Inéditos**. Barcelona: Mondadori, 1994.

COSTA, Newton. **Lógica Indutiva e Probabilidades**. São Paulo, 1991.

COURANT, Richard; JONH, Fritz. **Introduction to Calculus and Analysis I**. New York: Springer, 1982.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **What is Mathematics?** New York: Oxford University Press, 1996.

CURRY, Haskell B. **Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics**. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1951.

DALL'AGNOL, Darlei. **Ética e Linguagem:** Uma introdução ao Tractatus de Wittgenstein**.** Florianópolis:Editora da UFSC, 1995.

DAWSON, Jonh W.; FEFERMAN, Solomon; HEIJENOORT, Jean Van; KLEENE, Stephen C.; MOORE, Gregory H.; SOLOVAY, M. **Kurt Gödel Collected Works:** Publications 1929-1936 Volume I. New York: Oxford University Press, 1986.

_________. **Kurt Gödel Collected Works:** Publications 1938-1974 Volume II. New York: Oxford University Press, 1986.

DAWSON, Jonh W.; FEFERMAN, Solomon; GOLDFARB, Warren; PARSONS, Charles; SOLOVAY, M.. **Kurt Gödel Collected Works:** Unpublished Essays and Lectures Volume III. New York: Oxford University Press, 1995.

DOXIADIS, Apostolos. **Tio Petros e a Conjectura de Goldbach**. São Paulo: Editora 34, 2001.

DUBBEY, J.M. **Development of Modern Mathematics**. New York: Crane, Russak e Company, INC, 1975.

EDWARDS, JR, C. H. **The Historical Development of the Calculus**. New York: Springer Verlag, 1979.

ELIOT, T. S. **Collected Plays**. London: Faber and Faber, 1962.

ENDERTON, Hebert B. **A Mathematical Introduction to Logic.** London: Academic Press, 1972.

EVES, Howards. **Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics**. New York: Dover Publication, INC.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **O Dicionário da Língua Portuguesa.** São Paulo: Editora Nova Fronteira, 2003.

FRANZÉN, Torkel. **Gödel's Theorem: an incomplete guide to its use and abuse**. Massachusetts: A K Peters, 2005.

GÖDEL, Kurt. **O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo**. Lisboa: Editora da Fundação Calouste Gulbenkian, 1979.

_________. **On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems**. New York: Dover Publication, INC, 1962.

GOLDSTEIN, Rebecca. **Incompletude**: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel. Companhia das Letras, 2008.

HABERMAS, Jurgen, **Conhecimento e Interesse**, Rio de Janeiro: Zahar, 1982

HADAMARD, Jacques. **Psicologia da Invenção na Matemática.** Rio de Janeiro: Contraponto, 2009.

HILBERT, David. **Sur les Problèmes Futurs des Matheématiques**: Les 23 problèmes. Éditions Jacques Gabay, 1990.

HEIJENOORT, Van. **From Frege to Gödel**: A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931. New York: San Jose New York Lincoln Shanghai, 2000.

HOFSTADTER, Douglas R**. Gödel, Escher, Bach**: An Eternal Golden Braid, 20th anniversary edition. New York, 1979.

JECH, Thomas J.. **The axiom of choice**. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1973.

KANT, Immanuel. **Crítica da Razão Pura**. São Paulo: Martin Claret, 2002.

KASNER, Edward; NEWMAN, James. **Matemática e Imaginação**: O fabuloso mundo da matemática ao alcance de todos. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.

KLAJMAN, Débora de Queiroz Gadêlha. **O Real por Detrás das Aparências,** 2007. 83 f. Dissertação (Mestrado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) - Coordenação dos Programas de Pós Graduação de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

KNEALE, W., KNEALE, M. **O Desenvolvimento da Lógica.** Lisboa: 2ª edição, 1980.

KUBRUSLY, Ricardo Silva. **Uma Viagem Informal ao Teorema de Gödel ou (O Preço da Matemática é o Eterno Atemático)**. In: CARVALHO, Edgard de Assis; MENDONÇA, Terezinha. **Ensaios de Complexidade 2**. Rio de Janeiro: Editora Sulina, 2004. pp140-158

LAVIGNE, Shaughan. **Understanding the Infinity**. Harvard University Press, 1994.

LISPECTOR, Clarice. **A Hora da Estrela**. São Paulo: Museu da Língua Portuguesa, 2007.

MOORE, Gregory H. **Zermelo's Axiom of Choice.** New York: Springer-Verlag, 1982.

MORIN, Edgard. **A Cabeça Bem-Feita.** Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2009.

MORIN, Edgard. **Ciência com Consciência.** Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2000.

MOSCHOVAKIS, Yiannis N. **Notes on Set Theory**. Springer, 1994.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R. **Prova de Gödel**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

NIVEN, Ivan. **Números Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

PENROSE, Roger. **The Emperor's New Mind**: Concerning Computers, Mind and the Laws of Phisics. New York: Oxford University Press, 1989.

POINCARÉ, Henri.**O Valor da Ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 1995.

QUINE, W. V..**Filosofia da Lógica**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1972.

ROSA, João Guimarães. **Grande Sertão: Veredas,** 10ª Edição. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2008.

ROSA, João Guimarães. **Primeiras Estórias,** 1ª Edição. Rio de Janeiro: MEDIAfashion, 2008.

RUBIN, Jean E.. **Mathematical Logic Aplications and Theory**. Flórida: Purdiw University, 1990.

RUSSELL,Bertrand.**Introdução à Filosofia Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1981.

_________.**Meu Desenvolvimento Filosófico**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1980.

_________.**Significado e Verdade**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

_________.**The Principles of Mathematics Volume I**. Cambridge: Cambridge University Press, 1903

RUSSEL, Bertrand; WHITEHEAD, Alfred North. **Principia Mathematica Volume I**, 2ª edição. Londres: Cambridge University Press, 1935.

_________.**Principia Mathematica Volume II**, 2ª edição. Londres: Cambridge University Press, 1927.

_________. **Principia Mathematica Volume III**, 2ª edição. Londres: Cambridge University Press, 1927.

SAINT-EXUPÉRY, Antoine de. **O pequeno príncipe**. 48. ed. Rio de Janeiro: Agir, 2000.

SAMPAIO, Luiz Sérgio Coelho de. **Lógica Ressuscitada**: Sete Ensaios. Rio de Janeiro: Editora da Universidade Estadual do Rio de Janeiro, 2000.

SAYERS, Sean. **Reality and Reason**: Dialetic and the Teory of Knowledge. New York: Basil Blackwell, 1985.

SMITH, Peter. **An introduction to Gödel's Theorems.** Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

TARSKI, Alfred. **Collected Papers Volume I**. Basel: Gian-Carlo Rota Editor, 1986.

____________. **Collected Papers Volume II**. Basel: Gian-Carlo Rota Editor, 1986.

____________. **Collected Papers Volume III**. Basel: Gian-Carlo Rota Editor, 1986.

____________. **Collected Papers Volume IV**. Basel: Gian-Carlo Rota Editor, 1986.

____________. **Logic, Semantics Metamathematics:** Papers from 1923 to 1938. Oxford: At the Clarendon Press, 1969.

YOURGRAU, Palle. **A World Without Time**: The forgotten Legacy of Gödel and Einstein. New York: Basic Books, 2005.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tractatus Logico-Philosophicus.** São Paulo:Edusp, 1993.

WANG, Hao. **Reflections on Kurt Gödel**. Hong Kong: The Mit Press, 1988.