UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Rafael Tavares Juliani

HOMEOSTASE: Uma Possibilidade Empírica para o Conhecimento Matemático.

RIO DE JANEIRO

2015

Rafael Tavares Juliani

HOMEOSTASE: Uma Possibilidade Empírica para o Conhecimento Matemático.

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, HCTE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Orientador: Francisco Caruso Neto

Rio de Janeiro

2015

J94h

Juliani, Rafael Tavares

Homeostase: Uma Possibilidade Empírica para o Conhecimento Matemático / Rafael Tavares Juliani. -- Rio de Janeiro, 2015.

120 f.

Orientador: Francisco Caruso Neto.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Decania do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza, Programa de Pós Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2015.

1. Empirismo na Matemática. I. Caruso Neto, Francisco, orient. II. Título.

RAFAEL TAVARES JULIANI

HOMEOSTASE: UMA POSSIBILIDADE PARA O CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção de título de Doutor em Ciências.

Aprovada em 22/05/2015

Francisco Caruso Neto, Dr., CBPF

Ricardo Silva Kubrusly, Dr., UFRJ

Carlos Benevenuto Guisard Koehler, Dr., UFRJ

Roberto Moreira Xavier de Araújo

Roberto Moreira, Dr., CBPF

Carlos Antônio de Moura, Dr., UERJ

Patrícia Furst, Dr., UERJ

Dedico à minha esposa, Carla Fernanda Sander Juliani, para que ela tenha sempre em mente o resultado de se trabalhar em equipe; à minha irmã, Patricia Juliani Igreja, para que ela saiba que podemos vencer as adversidades; aos meus pais, Marcos Juliani e Laura tavares Juliani, para que vejam os frutos do amor e da boa educação; ao meu sobrinho, Mateus Juliani Igreja, para que ele possa se inspirar.

AGRADECIMENTOS

O caminho para esta tese começou muito antes de entrar no HCTE, por isso, eu gostaria de agradecer a todos que de alguma forma me ajudaram, muito dos quais já apareceram nos agradecimentos da dissertação de mestrado. Agradeço a Deus em primeiro lugar. Depois, gostaria de agradecer àqueles que contribuíram de uma forma mais direta nesta tese, como a Zulena, o André Senra e o César Milman pelas conversas sobre Filosofia; ao meu orientador Francisco Caruso por toda a ajuda e paciência e a todos da banca do exame de qualificação: Roberto Moreira, Carlos Moura, Carlos Koehler e, especialmente, o professor Ricardo Kubrusly, o qual eu agradeço por todo ensinamento durante esses anos de HCTE. Eu ainda gostaria de destacar a Regina Dantas por toda ajuda, o meu cunhado Januário Brito Igreja, os meus sogros Remi Sander e Lidia Agnez Glitz Sander, os meus tios Jorge Lessa, Gilmar Evangelista, Dulce Lessa, os meus primos Lucas Lessa, Hanny Juliani, Rodrigo do Val, Diego Nunes, Rachel Nunes, David Nunes, Telma Nunes, Maísa Tavares, Amanda Tavares, os meus avós Maria e Djalma Evangelista e Aldair e Darci (*in memoriam*) Juliani, a minha irmã, os meus pais e a minha esposa pelos ensinamentos indiretos e todo o apoio. Obrigado!

“Pour un observateur superficiel, la vérité scientifique est hors des atteintes du doute”

Henri Poincaré

RESUMO

JULIANI, Rafael Tavares. **Homeostase:** uma possibilidade empírica para o conhecimento matemático. Rio de janeiro, 2015. Tese de Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia – HCTE – Coppe/IQ/IM, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.

O objetivo desse trabalho é buscar – através da História, da Filosofia, da Física e da Etnomatemática – refutações à concepção da Matemática como um conhecimento *a priori* e mostrar como fundá-la, usando o empirismo; essa atitude está em consonância com a crescente aceitação da existência de algum tipo de experiência na Matemática. Para essa finalidade, buscou-se resolver as dificuldades do empirismo, o que acarretou uma junção entre essas duas correntes epistemológicas conflitantes, tendo por base a Homeostase; além de ter sido necessário afastar os conceitos de “eternidade” e “imutabilidade” da compreensão do que nós acreditamos ser um Conhecimento. A partir da explicação do que é o Homeostase, foi possível apresentar uma possibilidade para a formação de crenças e Conhecimento e, também, a origem dos princípios da Lógica, tais como o terceiro excluído, a não contradição e a identidade.

Palavras-chave: Empirismo; Matemática; Homeostase, *Incitavita*.

ABSTRACT

JULIANI, Rafael Tavares. **Homeostase:** uma possibilidade empírica para o conhecimento matemático. Rio de janeiro, 2015. Tese de Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia – HCTE – Coppe/IQ/IM, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.

The purpose of this work is looking for – by means of History, Philosophy, Physics and Ethnomathematics – refutations to the conception of Mathematics as an a priori knowledge and to exhibit how it can be founded upon the empiricism; this attitude is in consonance with the growing acceptance of the existence of some kind of experience in Mathematics. For this purpose, it attempted to resolve the difficulties of the empiricism, which resulted in a synthesis between these two conflicting schools of epistemology by having on the basis of the Homeostasis; in addition, it was needed diverting the concepts of “Eternity” and “Immutability” from what we believe to be a knowledge. From the explanation of what is the Homeostasis, it was able to provide a possibility for creation of beliefs and Knowledge and also the origin of logic principles such as excluded third, non-contradiction e identity.

Keywords: Empiricism; Mathematics; Homeostasis, *Incitavita*.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde a época da Grécia Antiga até os dias de hoje, a concepção de o que venha a ser conhecimento matemático foi alterada; assim, em uma análise da História da Matemática, pode-se verificar uma lenta transformação – de um saber tido como *a priori* – para uma concepção empírica. Além disso, a própria definição de que é “Conhecimento” precisa se adequar às evidências modernas, segundo as quais a imutabilidade e a eternidade não são uma experiência plausível. Ainda assim, o empirismo enfrenta algumas dificuldades com relação à possibilidade do Conhecimento, as quais, possivelmente, podem ser solucionadas utilizando os conceitos de Homeostase e *Incitavita* e, a partir deste ponto, fundamentar os princípios lógicos, possibilitando a formação de qualquer crença ou Conhecimento, até mesmo o conceito de número.

O objetivo da tese não é justificar os nossos princípios lógicos e matemáticos como necessários a partir da nossa condição de existência e do mundo que nos cerca, mas descrever como é possível o conhecimento desses princípios, mesmo que sejam possíveis tantos outros distintos. Com isso, a pesquisa desta tese não foi feita com o intuito de uma solução justificacionista da Matemática e da Lógica, e sim uma descrição de uma das Matemáticas e Lógicas possíveis: aquela que qualquer leigo conhece.

O intuito desse trabalho é abrir um novo campo de estudo, no qual a possibilidade do conhecimento através da Homeostase (com foco na Matemática) surge como uma nova solução epistemológica que possibilite o Conhecimento empírico; todavia, essa tarefa pode se tornar muito abrangente e gerar algumas novas problemáticas que não serão abordadas em um primeiro momento.

O segundo capítulo será reservado para definir e esclarecer os termos que serão usados nesta tese como, por exemplo, *a priori,* inatismo, empírico, contexto da descoberta, contexto da justificação e prática matemática. Além disso, será feita uma defesa rápida da metodologia adotada, ou seja, uma justificação do psicologismo, do uso da Psicologia, da Neurociência e da História para a compreensão de questões matemáticas. E, finalizando o capítulo, analisamos a impossibilidade de existência dos sintéticos *a priori* de Kant, sem abandonar a necessidade das intuições do espaço e do tempo.

Já no terceiro capítulo, será feita uma contextualização histórica do apriorismo[1] e do empirismo na Matemática, mostrando como este último foi surgindo no âmbito desta disciplina. Embora as duas questões centrais da Filosofia da Matemática – a saber: se os objetos do seu discurso existem ou se são apenas nomes; ou se são empíricos ou *a priori* – estejam inteiramente relacionadas uma com a outra, a questão sobre a existência dos objetos matemáticos não é o foco desta tese e será tratada de forma secundária em alguns poucos casos; pois, a palavra "existir" pode ter algumas formas diferentes de interpretação. Apenas devemos admitir como uma afirmação válida e óbvia que os objetos matemáticos existem no discurso desta disciplina em questão e buscaremos mostrar que eles estão lá através da experiência. Se o leitor tem interesse sobre o *realismo* em Matemática, o livro "Il Problema di Platone" de Marco Panza e Andrea Sereni aborda essa questão.

No quarto capítulo são apresentados diversos casos em que o apriorismo na Matemática pode ser refutado. Começaremos analisando as evidências na Etnomatemática, ilustradas com os casos das tribos primitivas Pirahã e Warlpiri, as quais não possuem o conceito de número em suas culturas. Embora este argumento etnomatemático não seja para refutar o apriorismo, e sim o inatismo. Depois, será discutido o uso, feito por Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.), da lei das alavancas na descoberta da área da secção de uma parábola como uma ilustração do entrelaçamento entre a Física e a Matemática, onde muitas vezes o

1 O termo "apriorismo" usado nessa tese não se refere a concepção kantiana. Ele deve ser entendido apenas como um substantivo para o termo "*a priori*", uma teoria que defenda o conhecimento como *a priori.*

desenvolvimento de uma ajuda no da outra. E, ainda, veremos a falsa distinção entre analítico e empírico do filósofo estadunidense Willard Van Orman Quine (1908-2000), o quase-empirismo do matemático e filósofo húngaro Imre Lakatos (1922-1974) que tornou muito tênue a linha que separa a Física da Matemática, o convencionalismo do físico-matemático e filósofo francês Henri Poincaré (1854-1912).

O quinto capítulo é dedicado a apresentar como o empirismo na Matemática deve ser compreendido, de acordo com os levantamentos feitos nesta tese. Tal abordagem se difere, em certo sentido, das concepções dos autores mencionados, mas, de forma alguma, pretendo negá-las, e sim complementá-las ou torná-las mais claras.

Sendo assim, diante de todas evidências e do sentimento crescente entre os pensadores, talvez fosse mais simples dizer que a Matemática é, de fato, empírica, *a posteriori*. No entanto, o próprio empirismo enfrenta dificuldades, que serão abordadas no sexto capítulo, no qual, também, se questiona a ideia do Conhecimento como imutável e eterno.

No sétimo capítulo, a Homeostase aparece como um meio-termo entre o empirismo e o apriorismo e buscamos entendê-la com base na Psicologia da Motivação de Maslow; e, ainda, compreender como é possível a formação de crenças e Conhecimentos a partir da Homeostase; para isso, avaliamos a importância do sono e da nossa incapacidade de precisão. No final do capítulo, veremos como os princípios lógicos são desenvolvidos a partir desse meio-termo proposto.

Todas as traduções, no decorrer do texto, são do autor desta tese.

2 DEFINIÇÕES E DEFESAS

Para uma correta compreensão desta tese, é necessário que o leitor tenha em mente, de forma clara, a íntima relação entre *a priori* e inatismo, assim como a distinção, e a ligação, entre o contexto da descoberta, o da justificação e a prática matemática. Também é necessário, que o leitor aceite a metodologia que será usada e, por isso, vamos fazer uma defesa do uso da Psicologia, da Biologia e da História no âmbito da Matemática.

O vocábulo "Conhecimento" será usado, inicialmente, sem a preocupação de defini-lo, pois o leitor pode entendê-lo da forma usual, ou seja, imutável e eterno – a episteme dos gregos clássicos; no entanto, no sexto capítulo, desconstruímos essa visão. Além disso, quando a letra inicial do vocábulo for grafada em caixa alta, se referirá ao Conhecimento de uma forma geral, enquanto que, se a mesma for minúscula, se restringirá ao âmbito da Matemática.

2.1 *A PRIORI* E INATO

Por um Conhecimento *a priori* se entende aquele que foi adquirido sem o auxílio da experiência, em contrapartida, empírico significa advindo da experiência. Kant chama atenção para que um conhecimento adquirido sem a experiência não seja definido como *a priori* se os termos envolvidos são empíricos:

> Na verdade, costuma dizer-se de alguns conhecimentos, provenientes de fontes da experiência, que deles somos capazes ou possuímos *a priori*, porque os não derivamos imediatamente da experiência, mas de uma regra geral, que todavia fomos buscar à experiência. Assim, diz-se de alguém, que minou os alicerces da sua casa, que podia saber *a priori* que ela havia de ruir, isto é, que não deveria esperar, para saber pela experiência, o real desmoronamento. Contudo, não poderia sabê-lo totalmente *a priori*, pois era necessário ter-lhe sido revelado anteriormente, pela experiência, que os corpos são pesados e caem quando lhes é retirado o sustentáculo. (KANT, 1787, B2).

Um Conhecimento é dito inato quando o indivíduo já nasce com ele, ou seja, quando o mesmo não é adquirido; assim, pela citação anterior, pode-se perceber que para um Conhecimento ser *a priori* de fato, ou deve haver algo inato (um princípio), ou algum outro tipo de Conhecimento não fornecido pela experiência. Os sintéticos *a priori* de Kant são uma tentativa de sustentar a segunda opção apresentada, pois as intuições puras do espaço e do tempo não são absolutamente racionais, mas, também, não nascem dos sentidos, no entanto, são por eles pressupostas:

> … the concepts of space and time... I shall show presently that these are plainly not rational notions, nor the bonds which they form objective ideas, but phenomena; (KANT, 1894, p. 48).[2]

> Here, then, are two principles of sensuous cognition, not, as in intellectual knowledge, general concepts, but single and nevertheless pure intuition... (KANT, 1894, p. 67).[3]

> The idea of time does not originate in, but is presupposed by the senses. Whether things falling under sense-perception be simultaneous or in line of succession cannot be represented but by the idea of time; (KANT, 1894, p. 59).[4]

> The concept of space is not abstracted from external sensations. (KANT, 1894, p. 63).[5]

Contudo, no capítulo 2.5, vamos refutar a possibilidade de uma Matemática

2 … os conceitos de espaço e tempo... Eu mostrarei agora que, claramente, não são noções racionais, nem os vínculos que se formam ideias objetivas, mas fenômenos (tradução do autor).

3 Aqui, então, estão dois princípios da cognição sensível, não, como um conhecimento do intelecto, conceitos gerais, mas simples e, ainda assim, intuição pura... (tradução do autor).

4 A ideia de tempo, de fato, não se origina nos sentidos, mas é pressuposta por eles. Se as coisas estão sob a percepção dos sentidos, seja de forma simultânea ou em ordem de sucessão, não podem ser representadas a não ser pela ideia de tempo (tradução do autor).

5 O conceito de espaço não é abstraído das sensações externas (tradução do autor).

sintética *a priori*, sem abandonar a necessidade das intuições do espaço e do tempo como forma de garantir a validade da Matemática; restando, assim, a primeira alternativa – apresentada no parágrafo anterior – como a única forma possível (baseado na definição acima), ou seja, as ideias de Conhecimento inato e *a priori* estão intimamente relacionadas, funcionando como sinônimos. Podemos, porém, alterar a definição de um *a priori* com o intuito de diferenciá-lo do inatismo, mas a "independência da experiência", prerrogativa principal do apriorismo, deve ser mantida para que não se altere o seu significado por completo; e, de fato, existe uma maneira diferente de interpretar a "independência", pois podemos admitir que um Conhecimento venha pela experiência, mas que não dependa de alguma em específico, isto é, qualquer experiência rica o suficiente para esse Conhecimento nos capacitaria a possuí-lo. Por exemplo, embora possamos adquirir o Conhecimento de que 2 + 2 = 4 – através da manipulação de pedras, dedos, gravetos ou qualquer outro objeto – não existiria sequer uma experiência em qualquer mundo possível em que 2 + 2 fosse diferente de 4,[6] logo, este Conhecimento seria independente da experiência e, portanto, um *a priori*.

A expressão "rica o suficiente" pode parecer nebulosa e, portanto, precisa de uma explicação melhor; vamos explicar através de um exemplo: no caso do Conhecimento de que 2 + 2 = 4 seria necessário uma experiência em que envolvesse unidades de objetos e que pudessem estimular a noção de quantidade no sujeito cognoscente conforme expressado no parágrafo anterior; desta forma, qualquer uma dessas experiências seriam "ricas o suficiente" para este Conhecimento; já as experiências que envolvem a distinção entre quente e frio não estimulam a noção de quantidade e nem envolvem unidades de objetos, logo, não seriam "ricas o suficiente" para o Conhecimento de que 2 + 2 = 4. Alguns poderiam argumentar que usamos números para medir a temperatura e, por isso, esta seria uma experiência "rica o suficiente" para formarmos opiniões sobre os números, mas a verdade é que se dá o oposto: usamos a ideia de número e medida adquiridos de experiências anteriores para poder alcançarmos objetividade na comparação entre temperaturas.

6 Na verdade, existem casos em que 2+2 é diferente de 4. Para mais esclarecimentos, veja o capítulo 5.2.

A definição de um "*a priori*" exposta nos dois últimos parágrafos nos parece um pouco estranha, visto que os Conhecimentos assim classificados deixam de ser anteriores à experiência, mas, dessa forma, possibilitamos uma diferenciação entre o apriorismo e o inatismo e, ainda, preservamos a propriedade de ser independente da experiência. Essa ideia para definir o que é *a priori* é do filósofo inglês Philip Kitcher (1984), o qual a partir dessa ideia definiu formalmente:

> (2) X Knows a priori that p if and only if X knows that p and X's belief that p was produced by a process which is an a priori warrant for it.
> (3) α is an a priori warrant for X's belief that p if and only if α is a process such that, given any life e, sufficient for X for p:
> (a) some process of the same type could produce in X a belief that p
> (b) if a process of the same type were produce to produce in X a belief that p, then it would warrant X in believing that p
> (c) if a process of the same type were to produce in X a belief that p, then p (KITCHER, 1984, p.24).[7]

Sua definição depende de "processo", pois sua abordagem é o que se chama de psicologista. O psicologismo é uma corrente epistemológica que foca no processo de obtenção do Conhecimento para classificá-lo como verdadeiro ou mera crença. Seus maiores opositores foram Frege (1884) e Husserl (1900) e na próxima seção iremos expor a posição deles e refutá-la.

2.2 PSICOLOGISMO

Pretendemos, nesta seção, defender a abordagem psicologista e o uso da Psicologia, da História da Matemática e da Neurociência para defender o empirismo. Começaremos pela defesa do psicologismo e os outros dois usos serão justificados como consequência, afinal, tanto a Psicologia, quanto a História e a Neurociência

7 (2) X conhece *a priori* que p se, e somente se, X conhece que p e a crença de X que p foi produzida por um processo que é uma justificativa *a priori* para isso.
(3) α é uma justificativa *a priori* para a crença de X que p se, e somente se, α é um processo tal que, dado qualquer vida e, suficiente para X para p:
(a) algum processo do mesmo tipo pudesse produzir in X a crença que p
(b) se um processo do mesmo tipo fosse produzir in X uma crença que p, então ele justificaria X em acreditar que p
(c) se um processo do mesmo tipo fosse produzir in X uma crença que p, então p.

nos mostram e nos ajudam a compreender os processos que nos levaram a obtenção do Conhecimento, sobretudo o conhecimento matemático.

A ideia principal dos apsicologistas é que a Matemática e a Lógica existem independentemente da mente humana, assim, não devemos nos focar nos processos que nos levaram a obtenção do Conhecimento. Frege afirmava que:

> […] We seek to define them psychologically, in terms of the nature of the human mind. But this account makes everything subjective, and if we follow it through to the end, does away with truth. What is Known as the history of concepts is really a history either of our knowledge of concepts or the meanings of words. Often it is only after immense intellectual effort, which may have continued over centuries, the humanity at least succeeds in achieving knowledge of a concept in its pure form, in stripping off the irrelevant accretions which veil it from the eyes of mind (FREGE, 1960, p. xix).[8]

Como Kitcher afirma (1984, p.13-17), os apsicologistas sempre necessitam de algum Conhecimento com um *status* especial ou invocam um "sentido" extra para justificar as verdades matemáticas; e estas explicações são vagas e imprecisas como vemos na citação anterior de Frege: os "olhos da mente".

> The predicament of the apsychologistic epistemologist is comparable to that of a seventeenth-century Ptolemaic astronomer, struggling desperately to reduce Kepler's elliptical orbits to a complex of circular, earth-centered motions (KITCHER, 1984, p.16).[9]

Segundo o filósofo Martin Kusch, Edmund Husserl é considerado um dos maiores oponentes do psicologismo. Ainda de acordo com Kusch, as ideias husserlianas só se tornaram dominantes, no século XIX e início do século XX, por causa de uma disputa política e econômica que perdeu força após a Primeira Guerra Mundial; os psicólogos procuravam encontrar uma justificativa para utilidade da área

---

8 Nós procuramos defini-los psicologicamente, em termos da natureza da mente humana. Mas essa abordagem torna tudo subjetivo e se seguirmos com isso até o fim, passaremos longe da verdade. O que é conhecido como história dos conceitos é realmente história ou do nosso conhecimento dos conceitos, ou do significado das palavras. Muitas vezes, é somente após um imenso esforço intelectual, que pode persistir durante séculos, que a humanidade finalmente consegue alcançar o conhecimento de um conceito em sua forma pura, arrancando fora acréscimos irrelevantes que os cobrem dos olhos da mente.

9 A problemática de um epistemólogo apsicologista é comparável àquela de um astrônomo ptolomaico do século dezessete que luta, desesperadamente, para reduzir as órbitas elípticas de Kleper em complexas órbitas circulares com movimentos centrados na Terra.

deles e os filósofos tentaram manter o seu campo de atuação (KUSCH, 1995 e 1999). Vejamos alguns dos argumentos de Husserl (1900) organizados por Kusch:

> (**H1**) If logical rules were based upon psychological laws, then all logical rules would have to be as vague as the underlying psychological laws. *But*, not all logical rules are vague. *Therefore*, not all logical rules are based upon psychological laws (§21).
> (**H2**) If laws of logic were psychological laws, then they could not be known a priori. They would be more or less probable rather than certain, and justified only by reference to experience. *But*, laws of logic are known a priori; they are justified by apodictic self-evidence, and are certain rather than probable. And *therefore*, laws of logic are not psychological (§21).
> (**H3**) If logical laws were psychological laws, they would refer to psychological entities. *But*, logical laws do not refer to psychological entities. And *therefore*, logical laws are not psychological laws (§23).
> (**H4**) All forms of psychologism imply species relativism: logic is construed as being relative to the human species, that is, to human psychology. Species relativism is an absurd doctrine: if the truth of a proposition *p* were contingent on membership in species *s1*, then *p* would be false for members of *s2*. But this contradicts the meaning of truth. Truths are unchanging, and independent of the human mind (§31–39) (KUSCH, 1999, p. 653 e 654).[10]

Os argumentos de H1 até H3, segundo Kusch, foram rechaçados por Heim (1902), Heymans (1905), Lapp (1913) e Schlick (1910 e 1918) por conter petição de princípio, o que é facilmente percebido por qualquer um. Vamos analisar o seu argumento H1, que é semelhante aos outros dois e nos interessa por tratar do apriorismo:

(A) As leis da Lógica são leis psicológicas.

---

10 (H1) Se regras lógicas são baseadas em leis psicológicas, então todas as regras lógicas teriam que ser tão vagas quanto as leis psicológicas subjacentes, mas nem todas regras lógicas são vagas. Por isso, nem todas regras lógicas são baseadas em leis psicológicas.
(H2) Se leis lógicas fossem leis psicológicas, então elas não poderiam ser conhecidas *a priori*. Elas seriam mais ou menos prováveis em vez de certas; e justificadas somente por referência à experiência. Mas, leis lógicas são conhecidas *a priori*; elas são justificadas por autoevidência apodítica e são certas em vez de prováveis. E, por isso, as leis lógicas não são psicológicas.
(H3) Se leis lógicas fossem leis psicológicas, elas iriam se referir a entidades psicológicas. Mas, leis lógicas não se referem a entidades psicológicas. E, por isso, leis lógicas não são leis psicológicas.
(H4) Todas as formas de psicologismo implicam em relativismo de espécies: a lógica é construída como se fosse relativa a espécie humana, ou seja, a psicologia humana. O relativismo de espécies é uma doutrina absurda: se a verdade de uma proposição p fosse contingente entre os membros de uma espécie s1, então p seria falsa para membros de s2. Mas isso contradiz o significado de verdade. Verdades são imutáveis e independentes da mente humana.

(B) As leis da Lógica são *a posteriori.*[11]

Segundo Husserl, $A \Rightarrow B$ e ele assume $\neg B$ [12] (petição de princípio); a partir desse ponto, através do *Modus Tollens,*[13] ele conclui $\neg A$, ou seja, as leis da lógica não são leis psicológicas. Mas $\neg B$, isto é, a afirmação de que a Matemática é *a priori*, não pode ser assumida assim, sem apresentar nenhum argumento para isso; de fato, hoje, existe muito questionamento sobre o apriorismo lógico com o advento das diversas lógicas; citamos, por exemplo, Newton Da Costa:

> …ao afirmarmos que a razão é dialética, queremos, com isso, tão-somente significar que ela não pode ser codificada *a priori* via um sistema lógico fixo e que, na verdade, suas categorias são históricas, nascendo, modificando-se e completando-se pela sua própria atividade. A razão vai evoluindo à medida que a ciência progride. (COSTA, 2008, p. 32).

Além disso, no capítulo 7.4, veremos como os princípios da Lógica podem variar e que até mesmo o Princípio da não contradição pode ter uma explicação empírica.

Em H4, Husserl defende que as verdades são independentes da mente humana. Neste argumento, podemos verificar que existe uma confusão entre os termos “verdade” e “realidade”, conforme é observado por Sigwart:

> In the original sense of the terms, only assertions or opinions can be true or false. And assertions or opinions necessarily presuppose thinking subjects who entertain the opinions or utter the assertions. To postulate ‘sentences’ as independent essences is sheer mythology . . . When no judgements have been made, then there is nothing of which ‘true’ or ‘false’ could be predicated. Of course, the planets did move, already long before Newton, in a way that conforms to the law of gravity. However, before Newton formulated his theory (. . .) no true sentence about these movements existed within human knowledge. After Newton formulated the law of gravity as a sentence, this sentence became, due to its content, true for the past as well (SIGWART *apud* KUSCH, 1999, p. 654).[14]

---

11 A posteriori é o contrário de a priori.

12 Lê-se não B.

13 Modus Tollens é um raciocínio lógico de prova indireta da seguinte forma: Se A, então B; B é falso; Logo, A é falso.

14 No sentido original dos termos, apenas afirmações ou opiniões podem ser verdadeiras ou falsas. E afirmações ou opiniões, necessariamente, pressupõem indivíduos pensantes que recebem as opiniões ou proferem as afirmações. Postular “sentenças” como uma essência independente é pura mitologia... Quando nenhum julgamento for feito, então não há nada de “verdade” ou “falso” que possa ser afirmado. Claro, planetas se movem, já bem antes de Newton, de maneira que está em conformidade com a lei da gravidade. Contudo, antes de Newton formular sua teoria (…)

Apesar da confusão do grande oponente do psicologismo, é conveniente ressaltar que não pertence ao escopo deste trabalho a discussão sobre a realidade Matemática ou Lógica, o que seria um assunto ontológico, e não epistemológico. A partir desta pesquisa, futuramente, podemos ter mais propriedade sobre a ontologia da Matemática.

O que devemos ressaltar é que as críticas ao psicologismo perderam força e é interessante notar a mudança de posição de Bertrand Russell que, segundo Kusch, deixou de ser apsicologista.

> On the one hand, psychology has continued to exert a powerful pull on all those philosophers who have become disenchanted with traditional methods, and who wish to put philosophy on the sure path of a natural science. Quine and the many present-day advocates of naturalised epistemology are a case in point. On the other hand, it might be that the project of 'de-psychologising' logic, semantics, and epistemology is simply hopeless. One striking witness here is the Russell of the 1930s. Once Russell became interested in the theory of meaning, he gave up his erstwhile antipsychologistic cause. 'The problem of meaning', Russell wrote in 1938, was what 'first led me... to abandon the anti-psychological opinions in which I had previously believed'. Moreover, 'I hold that in a critical scrutiny of what passes for knowledge', Russell said later in the same paper, 'the ultimate point is one where doubt is psychologically impossible' (KUSCH, 1999, pp. 672 e 673).[15]

Na citação acima, Quine também é mencionado, além do termo "Epistemologia Naturalizada", o qual se refere a negação de uma base *a priori*; as ideias de Quine são abordadas no capítulo 4.3.

> [...] uma epistemologia, ou, tomada de forma mais abrangente, filosofia, naturalizada, que, em uma de suas muitas possíveis versões,

---

nenhuma sentença sobres esses movimentos existia dentro do conhecimento humano. Após Newton formular a lei da gravidade como uma sentença, esta sentença se tornou, devido ao seu conteúdo, verdade para o passado também.

15 Por um lado, a psicologia continuou a exercer uma atração forte em todos aqueles filósofos que se desencantaram com os métodos tradicionais e que desejam pôr a filosofia no caminho seguro de uma ciência natural. Quine e muitos defensores atuais da epistemologia naturalizada são um exemplo disso. Por outro lado, pode ser que o projeto de livrar a lógica, a semântica e a epistemologia da psicologia seja simplesmente impossível. Uma admirável testemunha aqui é Russell da década de 1930. Uma vez que Russell se tornou interessado em teoria do significado, ele desistiu de sua outrora causa apsicologista. 'o problema do significado', Russell escreveu em 1938, foi o que 'primeiro me conduziu... a abandonar as opiniões apsicologistas em que eu acreditei anteriormente'. Além disso, 'eu sustento que, em uma análise crítica, o que se passa por Conhecimento', Russell disse mais adiante no mesmo artigo, 'o ponto final é aquele no qual a dúvida é psicologicamente impossível'.

> nega a existência de princípios a priori do conhecimento e defende que a filosofia, apesar de continuar tendo a tarefa de responder a perguntas estritamente filosóficas, como a pergunta acerca de como conhecemos o mundo, só pode desenvolver-se com o auxílio dos conhecimentos da ciência empírica. (STEIN, 2000, p. 191).

A abordagem e defesa apsicologista faz lembrar os três estados (métodos) de Auguste Comte (1798-1857), o fundador do positivismo.

> ...o espírito humano, por sua natureza, emprega sucessivamente, em cada uma de suas investigações, três métodos de filosofar, cujo caráter é essencialmente diferente e mesmo radicalmente oposto: primeiro, o método teológico, em seguida, o método metafísico, finalmente, o método positivo. Daí três sortes de filosofia, ou de sistemas gerais de concepções sobre o conjunto de fenômenos, que se excluem mutuamente: a primeira é o ponto de partida necessário da inteligência humana; a terceira, seu estado fixo e definitivo; a segunda, unicamente destinada a servir de transição (COMTE, 1830, p.3).

O estado teológico é caracterizado pelas explicações divinas para os fenômenos que nos cercam; o metafísico seria um estado de transição, onde se usam conceitos abstratos (metafísicos) para a justificação; o positivo não faria uso dos demais estados e se fixaria unicamente em descobrir – através do uso da observação e do raciocínio – as “leis gerais” e “invariáveis” do universo, excluindo a busca pela origem e o destino do mesmo (COMTE, 1830, p. 2-4).

Embora o estado positivo não seja possível, pois a metafísica se mostrou necessária na Ciência (KOYRÉ, p. 80) (ZAHAR, 2007) (GIUSTI, 2013), podemos nos apropriar da definição Comtiana (não que Comte pensasse assim) e situar o apsicologismo no segundo estado, pois eles inflam suas ontologias e epistemologias com entidades desnecessárias por causa de uma crença: a Matemática *a priori*.

Como desejamos evitar o uso de conceitos obscuros e imprecisos, partiremos para uma epistemologia psicologista e estudaremos os processos de formação do Conhecimento, ou seja, o contexto da descoberta e a formação do contexto da justificação. Além disso, a suposição de que a Matemática tem sua existência em si própria nos força a nos comprometer com uma ontologia realista, mas o intuito dessa pesquisa não é fazer afirmações dessa magnitude logo de início, e sim – a partir da análise psicológica, sociológica e histórica do contexto da descoberta – encontrar uma base para o conhecimento matemático e poder, em algum tempo no futuro, chegar a alguma ontologia específica.

2.3 DESCOBERTA, JUSTIFICAÇÃO E PRÁTICA

Para compreender os argumentos desta pesquisa, o leitor também precisa estar familiarizado com mais alguns conceitos que apresentamos nesta seção, a saber: a distinção entre os contextos da descoberta e da justificação e a prática da Matemática; bem como, o porquê de o enfraquecimento da distinção entre esses dois contextos (descoberta e justificação) não leva à chamada falácia genética.

Hans Reichenbach (1891-1953) foi o responsável por criar os termos e os significados de "contexto da descoberta" e "contexto da justificação"; o primeiro refere-se aos processos, aos métodos, às hipóteses e à criatividade do período em que um cientista ou pensador faz a sua descoberta; já o segundo, refere-se a construção lógica para validar uma teoria (MIGUEL-VIDEIRA, 2011).

Confundir os dois contextos é o que se chama de falácia genética; por exemplo, incorre em falácia aquele que julgar improcedente uma teoria sem observar os argumentos, mas apenas porque essa teoria foi desenvolvida por alguém que não lhe agrada ou porque a mesma foi originada através de uma visão ou sonho. Essa pessoa está confundindo os contextos, pois ela está atribuindo a credibilidade da teoria (justificação) ao momento da descoberta.

No capítulo 5.1, para defender o empirismo, vemos que existe um enfraquecimento entre os dois contextos, mas isso não leva à falácia genética porque os dois continuam existindo e são bem definidos; ocorre que o processo de justificação também tem uma gênese e é influenciada, muitas vezes, pelo que se passa na descoberta.

Quando um matemático está na primeira parte do processo ou na segunda (na justificação), não quer dizer que ele não esteja no exercício da atividade matemática, mas vamos criar um conceito e o chamaremos de "Prática Matemática" a tarefa de descobrir um teorema como uma consequência lógica de seus axiomas, ou seja, quando a lógica da descoberta é igual à lógica da justificação.

Por exemplo, vamos supor que um jovem matemático procure pela solução de equações do segundo grau em uma variável "x" real e saiba que, seja qual for a equação, sempre podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$ax^2+bx+c=0 \quad ; \quad a,b,c\in\Re \quad \text{e} \quad a\neq 0 \tag{1}$$

Para simplificar a equação (1), ele coloca “a” em evidência em relação a “x” (2), a fim de aplicar o método conhecido como “completar quadrado” (3):

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=0 \tag{2}$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c=0 \tag{3}$$

A partir daí, ele reorganiza a equação para isolar o “x” do lado esquerdo, começando por subtrair “c” dos dois lados da igualdade:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]=-c \tag{4}$$

Como “a” é diferente de zero por definição, ele pode dividir os dois lados por “a”:

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}=\frac{-c}{a} \tag{5}$$

Continuando esse processo de balanceamento até isolar o “x”, ele chega ao resultado:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{6}$$

Esse processo[16] acima faz parte do contexto da descoberta do nosso jovem matemático, mas, também, pertence ao contexto da justificação, pois o raciocínio

16 Uma boa parte do desenvolvimento foi omitida e, também, o processo se concentrou nas operações conhecidas em vez dos axiomas, mas isso foi feito com o intuito de simplificar.

usado é o mesmo para validar esta descoberta; é esse tipo de desenvolvimento que chamamos de Prática Matemática.

O motivo para essa definição é que, geralmente, quem defende a Matemática como *a priori* está com esse tipo de desenvolvimento – feito pelo nosso jovem matemático – em mente e, por isso, precisamos tê-lo bem definido para que seja possível compreender a nossa abordagem do capítulo 5, a qual mostra a nossa defesa do empirismo neste importante ramo do saber.

2.4 O QUE O EMPIRISMO MATEMÁTICO NÃO É

A resistência ao empirismo matemático é, em grande parte, por desconhecimento do assunto, por acharem que isso implicaria dizer que o matemático precisa de um laboratório ou que levaria a um relativismo exagerado, no qual a realidade passa a ser dependente do que formulamos; ou, ainda, por carregarem uma visão mística da Matemática. As três abordagens são um tanto quanto absurdas e, na verdade, essas duas últimas estão relacionadas.

No caso da não existência de um laboratório, de fato, não há muito o que dizer, pois nenhumas das formulações empíricas mencionam qualquer coisa do tipo e se baseiam na obtenção dos conceitos básicos.[17] No entanto, sem dúvida alguma, pode sim haver experiência, como, por exemplo, no caso de Gauss e as novas geometrias que começaram a tomar forma na época, as chamadas de não euclidianas:

> Essas geometrias impulsionaram o uso de experiências para verificar a natureza do espaço físico: por exemplo, se é euclidiano ou não. Gauss (1777-1855), por exemplo, realizou uma experiência com esse intuito, através da medição dos ângulos internos de um triângulo entre três montanhas: Brocken, Hoher Hagen e Inselberg; com auxílio de equipamentos de levantamento topográfico, ele verificou que os lados mediam 69 km, 85 km e 107 km e a soma dos ângulos era igual a dois retos (JAMMER, 2010, p. 189 e 190); ou seja, o espaço físico se mostrava euclidiano, no entanto, o próprio Gauss admitiu que a experiência não era conclusiva [...] (JULIANI & CARUSO, 2013, p. 2).

17 Para entender porque a Matemática pode ser baseada na experiência e não possuir laboratórios, veja o capítulo 5.

E, atualmente, o computador poderia funcionar como um laboratório conforme aponta Chaitin:

> Em minha opinião, a concepção de que a matemática proporciona certeza absoluta e é estática e perfeita, enquanto a física é de natureza experimental e evolui constantemente, constitui uma falsa dicotomia. Na realidade, a matemática não difere em nada da física. Ambas são tentativas da mente humana com o fito de organizar e dar sentido à experiência humana; no caso da física, experiência no laboratório, no mundo físico; no caso da matemática, experiência no computador, na área mental da imaginação da matemática pura. A matemática está longe de ser estática e perfeita; ela está constantemente evoluindo, mudando a todo instante e plasmando-se em novas formas. Novos conceitos continuamente transformam a matemática e criam novos campos, novos pontos de vista, novas ênfases e novas questões para serem respondidas. E os matemáticos, na realidade, se utilizam de novos princípios não provados, sugeridos pela experiência computacional, precisamente como um físico procederia. (CHAITIN, 2005, p 24.).

Contudo, a abordagem empirista do presente trabalho se concentra nos princípios básicos e na delimitação do que venha a ser chamado de Matemática, e não na defesa de que o matemático sempre faz experimentos para desenvolver o seu trabalho e isso abordado no capítulo 5.

Em relação ao relativismo, o filósofo italiano Mauro Dorato, em seu artigo intitulado “Why is the language of nature mathematical”[18] (2010), defende a plausibilidade do realismo matemático, o que – como já exposto anteriormente – não é o escopo desta pesquisa, mas podemos verificar o que muitos defensores do apriorismo defendem:

> I want to conclude this short essay by pointing out that Galileo’s realism about mathematics is a reasonable position to hold. The Earth is a sphere, or exemplifies that abstract shape, independently of us human beings, independently of our concepts and of our language. Of course, we need concepts and language in order to attribute the Earth its shape, but the latter is a mathematical property of the Earth that is quite independent of any subjective epistemic instruments. We can therefore conclude that the Earth can be said to truly possess a geometrical structure. Why this is so is certainly a very difficult fact to explain, one that should make reference to the details of its formation from the Sun (rotational effects, and so on). In any case, this is a question that, in its turn, cannot be answered without bringing in more complicated mathematical structures, exactly as predicted by Galileo

18 Por que a linguagem da natureza é matemática?

in 1623 (DORATO, 2010, p. 70 e 71).[19]

De fato, o formato da Terra independe da mente humana; no entanto, quem estabelece o significado do que vai ser atribuído ao formato da Terra são os seres humanos; todo empirismo necessário para formar tal conceito, jamais mudará a realidade, mas sim como falamos dela e como lidamos com ela; e, dependendo do que atribuímos de acordo com nossos conceitos e necessidades, as propriedades dos objetos serão diferentes. Vejamos um exemplo na Física primeiro e, depois, na Matemática.

Se Aristóteles largasse uma pedra, ele veria que a mesma atinge o solo em instantes. O mesmo ocorreria se Newton e Einstein, ou qualquer um outro, fizesse este experimento. No entanto, Aristóteles, baseado na teoria dos elementos de seus predecessores, criou uma teoria em que cada elemento procurava o seu lugar de origem, assim, como a pedra possui mais terra em sua composição, a mesma retorna à terra, isto é, ao solo. Newton, com todo o seu interesse e carga vinda da magia (WHITE, 1997), explicou o mesmo processo através da ação de forças à distância, onde os dois corpos exercem forças entre si. Já Einstein, introduziu a ideia de torção no espaço-tempo para explicar aquilo que chamamos de gravidade.

Nos três casos, a realidade não foi alterada em momento algum, mas suas teorias diferem umas das outras, ainda que se possa encontrar algum paralelo entre elas; além disso, dificilmente – mesmo no caso de Einstein – alguém duvidaria da característica empírica de cada uma das teorias.

Na Matemática não é diferente, vamos analisar o exemplo de uma circunferência. O círculo e a circunferência são definidos nos Elementos de Euclides como se segue:

19 Eu quero concluir este breve artigo assinalando que o realismo matemático de Galileu é uma posição sensata para se sustentar. A Terra é uma esfera, ou exemplifica essa forma abstrata, independentemente de nós seres humanos, independentemente de nossos conceitos ou de nossa linguagem. Claro, nós precisamos de conceitos e linguagem para atribuir à Terra a sua forma, mas esta última é uma propriedade matemática da Terra que é um tanto independente de quaisquer instrumentos epistêmicos subjetivos. Nós podemos, portanto, concluir que pode-se dizer que a Terra possui uma estrutura geométrica. Por que isso é assim é, certamente, um fato muito difícil de explicar, que deveria fazer referência aos seus detalhes de formação a partir do sol (efeitos rotacionais e assim por diante). Em todo caso, esta é uma questão, que por sua vez, não pode ser respondida sem emergirem estruturas matemáticas mais complexas, exatamente como previsto por Galileu em 1623.

> Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique {celle appelée circonférence} par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont {jusqu'à la circonférence du cercle} égales entre elles (EUCLIDES, 300 a. C., p. 162).[20] [21]

O desenho de uma circunferência (ou círculo) na Geometria euclidiana é a imagem que temos quando criamos uma instância da definição acima. Da mesma forma que ao olharmos para a figura 1 abaixo, vemos que as ondas provocadas por uma pedra na água e o sol também são instâncias da definição acima.

Figura 1: Círculos concêntricos na água e o sol, ambos instâncias de círculo e circunferência.

Ao longo dos séculos, a Matemática se desenvolveu a ponto de poder generalizar o conceito de métrica, ou seja, de dizer quais são as propriedades necessárias para que se possa fazer medições sem que exista uma dependência das propriedades de um espaço específico. Segue a definição (DOMINGUES, 1982, p. 38):

Métrica. A função $d: MxM \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma métrica onde o conjunto $M \neq \emptyset$ e d satisfaz as seguintes propriedades:

20 Um círculo é uma figura plana limitada por uma única linha {chamada de circunferência} da qual todas retas conduzidas a seu encontro a partir de um único ponto entre aqueles que estão localizados no interior da figura, são {até a circunferência do círculo} iguais entre si.

21 Podemos, ainda, simplificar e dizer que a circunferência é o conjunto de pontos no plano que são equidistantes a um ponto, no interior da figura, chamado de centro; e o círculo, o conjunto de todos os pontos internos à circunferência.

1. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.
2. $d(x,y)=d(y,x)$.
3. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

Chamamos de distância – entre dois pontos – o elemento correspondente da imagem de d; e chamamos de comprimento a distância entre os pontos de cada um dos extremos de um segmento de reta.

Podemos reescrever as propriedades anteriores para aqueles que não estão habituados à linguagem da Matemática:

1. A distância entre quaisquer dois pontos distintos nunca pode ser nula.
2. A distância medida de um ponto a outro deve ser a mesma se invertermos a ordem da medição.
3. A soma dos comprimentos de quaisquer dois lados de um triângulo nunca é menor que o comprimento do outro lado restante (Desigualdade Triangular).

Dessa forma, se definirmos d como $max|A-B|,$, sendo $A,B \in M$ (a distância é a maior coordenada em módulo da diferença entre dois pontos)[22] teremos uma métrica diferente da euclidiana e, claro, isso fará com que a nossa definição de circunferência tenha uma instância bem diferente daquela que estamos acostumados, pois será um quadrado. Observe a figura abaixo em um plano cartesiano:

22 Para a demonstração de que d, definida dessa forma, é uma métrica, veja o anexo I.

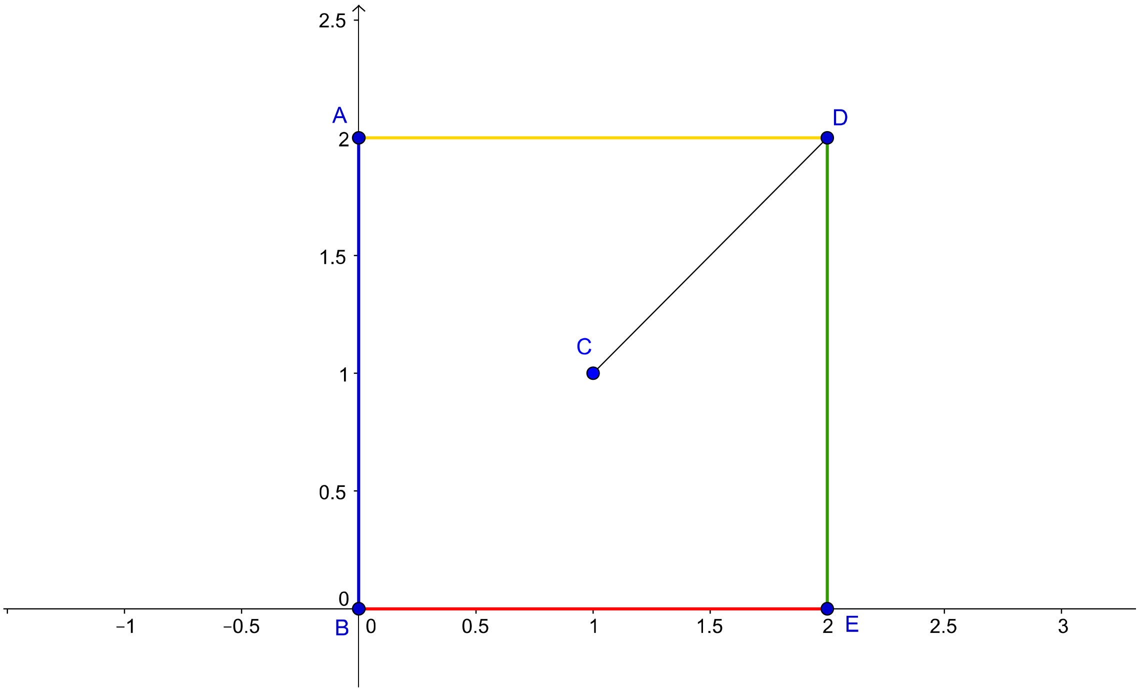


Figura 2: Circunferência Quadrada

Observe que todos os pontos do primeiro segmento de reta horizontal $\overline{AB}$ (azul) – ou seja, todos os pontos da forma $A_i(0,y);0\leq y\leq 2$ e $0<i<2$ [23] – estão a mesma distância do centro $C(1,1)$, pois temos:

$$C-A_i=(1,1)-(0,y)=(1,1-y) \tag{7}$$

Como $0\leq y\leq 2$, o valor máximo que $1-y$ pode atingir, para cada i, é 1, logo:

$$d(C,A_i)=1 \tag{8}$$

O mesmo ocorre com o segmento vertical $\overline{DE}$ (verde); para cada ponto da forma $E_i(2,y);0\leq y\leq 2$ e $0<i<2$, temos que a distância entre C e E_i, para cada i, sempre será igual 1.

Para o segmento horizontal $\overline{AD}$ (amarelo), podemos escrever cada ponto

23 O intervalo para i foi assim devido de modo que para cada ponto A_i tenha um correspondente no segmento aberto $\overline{AB}$ (bijeção).

como $D_i(x,2); 0 \leq x \leq 2$ e $0 < i < 2$ e, assim, calcular a distância entre C e cada D_i da mesma forma que fizemos acima:

$$C - D_i = (1,1) - (x,2) = (1-x, -1) \tag{9}$$

$$d(C, D_i) = max(|1-x|, |-1|) = 1 \tag{10}$$

O desenvolvimento com o segmento horizontal $\overline{BE}$ (vermelho) é análogo, logo, a distância de C para qualquer um dos pontos do quadrado é 1, ou seja, é uma circunferência. Observe que, nessa métrica, este objeto ainda conserva a definição de um quadrado, isto é, os quatro lados são de mesmo comprimento.

Agora, para conseguirmos produzir as imagens da figura 1, ou seja, a instância da definição de circunferência da métrica euclidiana – a qual, na nova métrica, chamaremos de “variferência” – devemos criar uma nova definição; assim, uma variferência é o conjunto de pontos cuja distância, chamada de raio, de cada ponto até o ponto denominado de centro varia, alternando a cada 45^o do raio maior para o menor e do menor para o maior até completar 360^o, sendo a razão entre o maior raio e o menor igual à $\sqrt{2}$ e, ainda, o ângulo e os raios estão em uma relação biunívoca a cada 45^o.[24]

Com o exemplo da “circunferência quadrada”, podemos ver que, dependendo dos nossos conceitos, as propriedades dos objetos mudam; se antes, aquela figura que chamamos de circunferência tinha raio fixo e estava relacionada com o irracional π, agora, ela tem raio variável e um irracional diferente: $\sqrt{2}$, a saber.

Alguém poderia dizer que essa definição é muita mais complicada, mas não podemos esquecer que a explicação da gravidade de Newton é bem mais complexa que a de Aristóteles, isto é, não é só a simplicidade, mas, também, a utilidade e a capacidade de fazer previsões que acaba determinando o sucesso de uma teoria.

Essa ideia de achar que a Matemática padrão é a única forma de tratar a realidade ou que independente de nossos conceitos as propriedades serão mantidas

24 A variferência não foi encontrada em literatura algum, assim, para ver a correspondência dela com a circunferência euclidiana, veja o anexo II.

está relacionada com o misticismo que envolve a mesma; parece que a Matemática é uma religião para algumas pessoas. O físico, e ganhador do prêmio Nobel, Eugene Wigner nos mostra essa magia em que a Matemática está envolvida:

> The first point is that the enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and that there is no rational explanation for it. Second, it is just this uncanny usefulness of mathematical concepts that raises the question of the uniqueness of our physical theories. (WIGNER, 1960, pp. 1-2).[25]

Uma atitude, como a mencionada na citação acima, não ajuda em nada na compreensão deste importante ramo do saber; ela surge da negação do empirismo. Pessoas com essa atitude tendem a apontar casos em que os objetos matemáticos não possuam uma correlação direta com a realidade como prova do mistério e é, exatamente isso, o que Wigner faz, no mesmo artigo da citação acima:

> The principal point which will have to be recalled later is that the mathematician could formulate only a handful of interesting theorems without defining concepts beyond those contained in the axioms and that the concepts outside those contained in the axioms are defined with a view of permitting ingenious logical operations which appeal to our aesthetic sense both as operations and also in their results of great generality and simplicity. The complex numbers provide a particularly striking example for the foregoing. Certainly, nothing in our experience suggests the introduction of these quantities. (WIGNER, 1960, p. 2).[26]

É interessante colocar os padrões estéticos como critério para a construção dos conceitos, pois a estética também muda de tempo em tempo, o que, por si só, já fornece uma característica empírica e que – no intuito de eliminar o mistério – poderia ser útil estudar a estética em vez de contemplar o desconhecido.

---

25 O primeiro ponto é que a enorme utilidade da Matemática nas ciências naturais é cercada em mistério e não existe explicação racional para isso. Segundo, é justamente essa utilidade misteriosa dos conceitos matemáticos que levanta a questão da unicidade das nossas teorias físicas.

26 O principal ponto, o qual terá que ser mencionado posteriormente, é: pudesse o matemático formular somente um punhado de interessantes teoremas sem definir conceitos além daqueles contidos nos axiomas e que os conceitos que não estão nos axiomas são definidos com o intuito de permitir engenhosas operações lógicas que apelam ao nosso senso estético tanto quanto operações e também em seus resultados de grande generalidade e simplicidade. Os números complexos, em particular, fornecem um surpreendente exemplo para o que foi mencionado acima. Certamente, nada em nossa experiência sugere a introdução dessas quantidades.

Wigner cita os números complexos como exemplo dessa falta de evidência física; mas, ao contrário do que se pensa, o que não tem uma representação física tende a ser questionável, pois pode ser apenas um delírio; foi precisamente por isso que Kant criticou a metafísica de sua época e afirmou que a Matemática era dependente do espaço e do tempo. Por que, então, os números complexos são aceitos? A verdade é que eles não foram aceitos até que existisse um modelo em que eles pudessem ser representados, assim como as geometrias não euclidianas:

> What could we possibly mean by $\sqrt{-1}$? Why shouldn't we worry that the use of such a paradoxical concept might not tempt us into the pursuit of nonsense? Historically, the existence and usefulness of complex numbers were not widely accepted until their geometric interpretation around 1800, which was formulated at roughly the same time by Caspar Wessel, the Abbe Buee, Jean-Robert Ar-gand, and the great mathematician Carl Friedrich Gauss. Gauss published a memoir about the geometric interpretation of complex numbers in 1832, which launched its wide acceptance in the mathematical world, aided also by the work of Augustin Louis Cauchy and Niels Henrik Abel. (GROSHOLZ, 2013, pp. 62-63).[27]

O modelo em questão – esse sim com intuições no espaço – era a Geometria. Ou seja, defender o empirismo não quer dizer não exista entidades sem referências diretas no mundo sensível, mas sim, que a aceitação delas está ligada a conceitos que são empíricos, caso contrário, sobre elas sempre existirão dúvidas e podem ser consideradas como fantasias.

2.5 DESCONSTRUINDO O APRIORISMO KANTIANO

O apriorismo kantiano é uma tentativa de evitar o empirismo, defendendo os sintéticos *a priori*; por isso, nesta seção, veremos que qualquer pensamento semelhante é insustentável, mas sem abandonar a importante contribuição kantiana,

---

27O que queremos dizer com $\sqrt{-1}$? Por que não devemos nos preocupar com que o uso de conceitos tão paradoxais não possa nos tentar na busca do absurdo? Historicamente, a existência e a utilidade dos números complexos não foram amplamente aceitas até a sua interpretação geométrica por volta de 1800 a qual foi formulada mais ou menos ao mesmo tempo por Caspar Wessel, the Abbe Buee, Jean-Robert Ar-gand e o grande matemático Carl Friedrich Gauss. Gauss publicou sobre a interpretação geométrica dos números complexos em 1832, o que lançou sua ampla aceitação no mundo da Matemática, auxiliado também pelos trabalhos Augustin Louis Cauchy e Niels Henrik Abel.

que é a ideia de que a Matemática depende dos conceitos de espaço e de tempo. Por razões matemáticas, vamos nos concentrar apenas no conceito de espaço.

Já foi mostrado anteriormente (capítulo 2.1) o que Kant entendia como *a priori*. Agora, primeiro, vamos entender porque ele defendia que o espaço é uma intuição indispensável, observando o trecho seguinte da Crítica da Razão Pura:

> O espaço é uma representação necessária, a priori, que fundamenta todas as intuições externas. Não se pode nunca ter uma representação de que não haja espaço, embora se possa perfeitamente pensar I que não haja objetos alguns no espaço. Consideramos, por conseguinte, o espaço a condição de possibilidade dos fenômenos, não uma determinação que dependa deles; é uma representação a priori, que fundamenta necessariamente todos os fenômenos externos. (KANT, 1787, A24).

Será que realmente não podemos ter uma "representação de que não haja espaço"? Será isso uma impossibilidade real ou criada por nossa mente durante anos de experiência? Jammer (2010, p. 32) afirma que uma antiga unidade de área dos sumérios era o "grão", o qual também era usado como uma unidade de peso; isso nos faz questionar: será que antigamente era possível conceber um espaço sem alguma coisa ou isso foi uma consequência tardia da abstração cada vez maior que buscávamos? Talvez sempre tivéssemos a ideia kantiana e apenas era difícil encontrar um nome adequado e, por isso, usávamos coisas concretas como um "grão" para essa representação difícil.

A verdade, porém, é que a conclusão de Kant parte da impossibilidade (pensar numa representação sem espaço) de uma mente adulta que passou por diversas experiências ao longo dos anos e que aprendeu com os antepassados; por isso, fica difícil confiar na conclusão que pretende esclarecer a origem do Conhecimento, o qual se inicia ainda na gestação, conforme o capítulo 7. Contudo, ainda fica a pergunta: é possível a intuição pura do espaço gerar Conhecimento?

Podemos sustentar que, ao menos, da intuição pura do espaço, é impossível derivar algum conceito sem o uso da experiência, ou seja, tal intuição é infértil. A intuição pura do espaço deve nos dar a possibilidade de derivar todos os tipos de Geometrias; e cada conceito de espaço possui as suas propriedades, mas como os conceitos de espaço em cada Geometria são contraditórios entre si, então, ou a intuição pura do espaço não tem propriedade alguma, ou tem apenas propriedades comuns a todos os conceitos de espaço. Contudo, como sempre podemos criar uma Geometria admitindo-se a negação de alguma propriedade, então, concluímos que a intuição pura do espaço não possui propriedade alguma e, portanto, ela é imprecisa e dela não se deriva qualquer outra propriedade. Assim, a intuição pura é impura, pois é da experiência mais remota de nossas mentes que ela surge.

O mais interessante é que Kant admite que o seu conceito de espaço não tem propriedade alguma:

> O espaço não representa qualquer propriedade das coisas em si, nem essas coisas nas suas relações recíprocas; quer dizer, não é nenhuma determinação das coisas inerente aos próprios objetos e que permaneça, mesmo abstraindo de todas as condições subjetivas da intuição. Pois nenhumas determinações, quer absolutas, quer relativas, podem ser intuídas antes da existência das coisas a que convêm, ou seja, a priori. (KANT, 1787, A26).

Ele entende assim porque em seu sistema, a intuição do espaço é apenas um vazio que é alimentado pelos objetos dados na sensibilidade; isso, porém, não é empírico? Para Kant não, pois esse processo ocorre sem a experiência, apenas com a representação do objeto, apreendida pela intuição pura do espaço. Mais uma vez, vemos aqui uma análise de uma mente que já passou por diversas experiências e, por isso, pode prescindir da experiência para formar conceitos; vejamos esse trecho de Kant:

> Que a linha reta seja a mais curta distância entre dois pontos é uma proposição sintética, porque o meu conceito de reta não contém nada de quantitativo, mas sim uma qualidade. O conceito de mais curta tem de ser totalmente acrescentado e não pode ser extraído de nenhuma análise do conceito de linha reta. Tem de recorrer-se à intuição, mediante a qual unicamente a síntese é possível. (KANT, 1787, B16).

Para nossa mente, que já viveu diversas experiências, parece perfeitamente possível aceitar, sem recorrer a experiência, que “a menor distância entre dois pontos é uma reta”; parece-nos verdade que apenas da intuição pura do espaço, estimulado pela representação de retas e pontos dados na sensibilidade, possamos ter tal certeza; mas isso só ocorre porque já manipulamos diversas representações de retas e pontos; uma mente sem essas experiências anteriores não pode fazer o mesmo; isso acontece porque a intuição pura do espaço, como dito antes, é vazia, sem propriedade alguma, não sendo possível fazer as ligações entre esses conceitos.

Para a formação da certeza de que "a menor distância entre dois pontos é uma reta", é necessário que nossa mente faça várias intuições dos objetos envolvidos em diferentes posições e em momentos diferentes, mas isso significaria dizer que houve uma experiência, logo, a intuição é impura. Por isso, os sintéticos *a priori* de Kant, na verdade, são só "sintéticos", ou seja, *a posteriori*.

Contudo, não podemos eliminar a necessidade da Matemática estar sujeita ao espaço e o tempo, pois sem isso, conforme apontou Kant, ela seria apenas uma imaginação, na qual tudo é possível.

3 DO APRIORISMO AO EMPIRISMO

Empírico ou *a priori*? Essa é uma questão muito recorrente em Filosofia da Ciência, no entanto, parecia informulável no âmbito da Matemática. Desde a antiguidade grega, não havia dúvidas com relação ao caráter *a priori* da Matemática, mas, com isso, aparecia uma dificuldade: como justificar o conhecimento desta disciplina se os seus objetos não são dados na experiência? Esse questionamento ficou conhecido como o *Problema de Platão*. Nos últimos séculos, porém, o *apriorismo* começou a ser questionado entre os mais diversos pensadores, por isso, apresento algumas vertentes da Filosofia da Matemática.

3.1 O PROBLEMA DE PLATÃO

O que é Matemática? Como é possível obter conhecimento matemático? Essas questões sempre estiveram presentes na História desse importante ramo do saber. Afinal, qualquer definição é uma tarefa difícil, pois os conceitos estão sempre em evolução, não possuem uma delimitação clara. Segundo o filósofo francês Gilles Deleuze (1925-1995), um conceito é uma multiplicidade que também está sujeito ao *devir*[28] (DELEUZE, 1991, p. 25-48). Assim, como a Matemática é um conhecimento desenvolvido ao longo de séculos e o seu surgimento difícil de ser determinado;

28 O *devir* é a mudança constante. Um exemplo clássico do devir é a máxima do filósofo grego Heráclito de Éfeso (535 a.C. - 475 a.C.), na qual afirma que um homem nunca se banha duas vezes no mesmo rio, pois nem o homem e nem o rio continuam os mesmos.

definir o que ela vem a ser é uma tarefa complicada de se realizar.

O filósofo grego Platão (427 a.C. - 347 a.C.), através dos relatos de diálogos de Sócrates (469 a.C. - 399 a.C.), argumentava que a Matemática não parece tratar de objetos que estão no mundo físico (visível ou sensível), mas sim no mundo inteligível; no entanto, os objetos matemáticos possuem um *status* inferior. (PLATÃO, A República – 509d a 511a).

> Supõe então uma linha cortada em duas partes desiguais; corta novamente cada um dos segmentos segundo a mesma proporção, o da espécie visível e o da inteligível; e obterás, no mundo visível, segundo a sua claridade ou obscuridade relativa, uma secção, a das imagens. Chamo imagens, em primeiro lugar, às sombras; seguidamente, aos reflexos nas águas, e àqueles que se formam em todos os corpos compactos, lisos e brilhante, e a tudo mais que for do mesmo género [...] – Supõe agora a outra secção, da qual esta era imagem, a que nos abrange a nós, seres vivos, e a todas as plantas e toda a espécie de artefactos [...] Examina agora de que maneira se deve cortar a secção do inteligível [...] Na parte anterior, a alma, servindo-se como se fossem imagens, dos objectos que então eram imitados, é forçada a investigar a partir de hipóteses, sem poder caminhar para o princípio, mas para a conclusão; ao passo que, na outra parte, a que conduz ao princípio absoluto, parte da hipótese, e, dispensando as imagens que havia no outro, faz caminho só com o auxílio das ideias (PLATÃO, séc. IV a. C. [1], 509d - 510b).

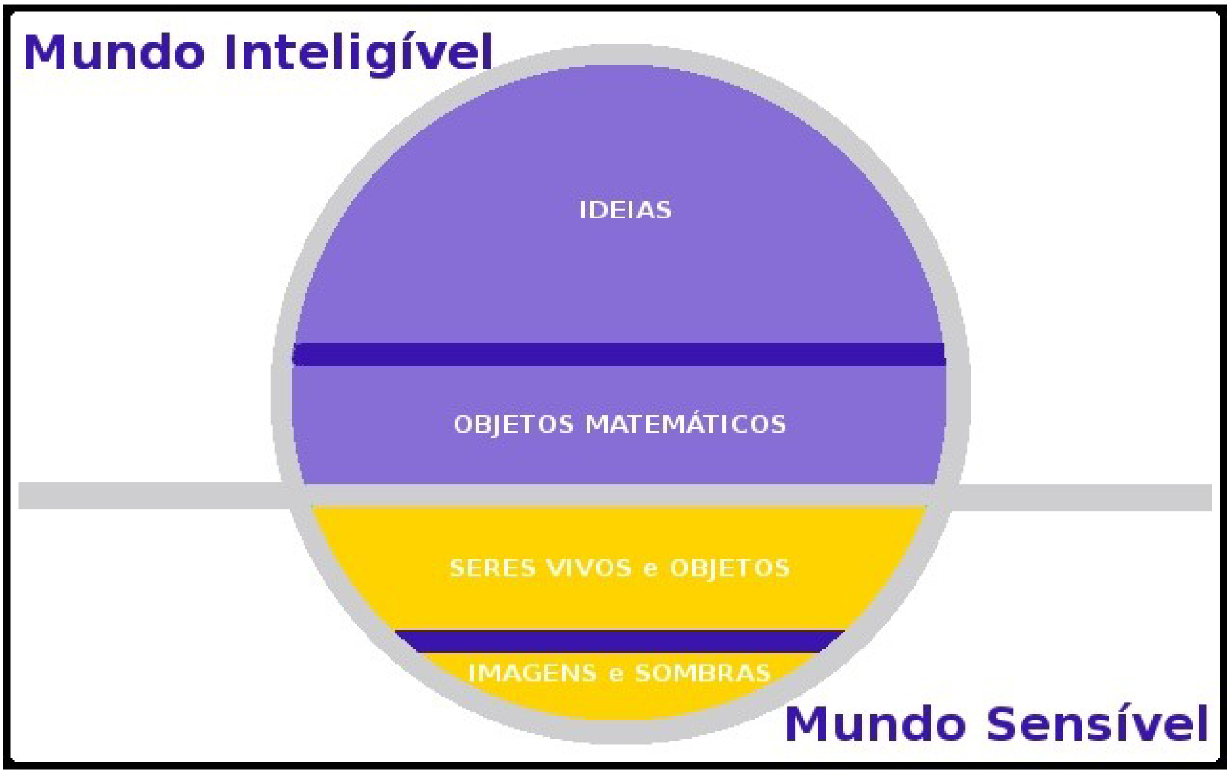


Figura 3: As linhas divisórias de “A República” de Platão.

Mais adiante, Sócrates afirma que os seus objetos são tomados como evidentes, embora sejam apenas hipóteses. No período da Grécia antiga, as “hipóteses” eram entendidas como uma afirmação de existência[29] (JULIANI, 2010, p.16). Essa visão platônico socrática é o que se chama de *realismo* em Matemática, pois se admite a existência de seus objetos.

> Suponho que sabes que aqueles que se ocupam da geometria, da aritmética e ciências desse género, admitem o par e o ímpar, as figuras, três espécies de ângulos, e outras doutrinas irmãs destas, segundo o campo de cada um. Estas coisas dão-nas por sabidas, e, quando as usam como hipóteses, não acham que ainda seja necessário prestar contas disto a si mesmos nem aos outros, uma vez que são evidentes para todos (PLATÃO, séc. IV a. C. [1], 510c).

A questão é saber o porquê dos objetos matemáticos serem evidentes. Como se pode conhecer tais objetos, visto que eles não estão no mundo sensível? Essa questão é conhecida como problema de Platão e é o grande problema do realismo em Matemática. Para Platão (PLATÃO, séc. IV a. C. [2], 80d - 80e), os princípios (e objetos) mais básico eram reminiscências da alma, ou seja, uma lembrança enfraquecida de uma verdade apreendida pela mesma no mundo das ideias (inteligível).

Além do realismo, existe uma outra grande vertente em filosofia da matemática conhecida como *nominalismo*. Apesar de algumas controvérsias em relação à Filosofia Matemática de Aristóteles, normalmente é atribuído a ele uma posição nominalista, ou seja, os objetos matemáticos não existem, ou só existem como um nome; isso por causa da seguinte passagem em sua “Metafísica”:

> Thus we have sufficiently shown (a) that the objects of mathematics are not more substantial than corporeal objects; (b) that they are not prior in point of existence to sensible things, but only in formula; and (c) that they cannot in any way exist in separation. And since we have seen that they cannot exist in sensible things, it is clear that either they do not exist at all, or they exist only in a certain way, and therefore not absolutely; for "exist" has several senses. (ARISTÓTELES, séc. IV a. C., – 1077b).[30]

---

29 Quando uma hipótese era muito questionada a ponto de não existir um consenso sobre ela, a mesma era chamada de postulado.

30 Assim, nós temos suficientemente mostrado (a) que os objetos da matemática não são mais substanciais que os objetos corpóreos; (b) que eles não são anteriores, em termos de existência, aos objetos sensíveis, mas somente em fórmula; e (c) que eles não podem, sobre modo algum, existirem de forma separada e uma vez que temos visto que eles não podem existir nas coisas sensíveis. Está

Existe uma corrente filosófica chamada de *conceitualismo*, a qual não é tão extremista quanto o nominalismo, pois em vez de considerar os objetos matemáticos apenas como um nome, acredita-se que tais objetos, além de derivarem das coisas sensíveis, guardam também alguma semelhança com os objetos sensíveis. Analisando a passagem de Aristóteles acima, se torna mais conveniente classificá-lo nessa corrente.

3.2 FILOSOFIAS DA MATEMÁTICA

Todas as correntes em Filosofia da Matemática são desdobramentos do realismo ou do nominalismo, cada uma a sua maneira. Mostrarei apenas algumas de suas correntes com o intuito de mostrar uma crescente ruptura com o apriorismo e o realismo em suas formas mais puras e ingênuas.

Para um realista, há duas possibilidades: assumir a existência dos objetos matemáticos e que eles são dados *a priori*, ou que todos eles são dados pela experiência. No primeiro caso, esse realista precisa dizer quais objetos são *a priori*, o que é uma tarefa difícil, visto que o inatismo de qualquer objeto ou conceito possui diversos problemas que serão tratados posteriormente. Já no segundo caso, o que surge são as dificuldades relacionadas com o empirismo, que também serão abordadas posteriormente.

O apriorismo em Matemática foi a teoria epistemológica vigente até o século XIX. Até mesmo filósofos empiristas, como os ingleses Francis Bacon (1561-1626) e John Locke (1632-1704) e o cético escocês David Hume (1711-1776), não discordavam do caráter *a priori* da Matemática. No entanto, ainda no século XIX, o filósofo inglês John Stuart Mill (1806-1873) levou o seu empirismo para a Matemática, talvez como uma crítica a Kant. Mill (1882, p. 309-324) alegava que os números sempre representam um objeto, seja ele físico ou abstrato, mas que as verdades da Aritmética são todas verdades inferidas desses objetos.

---

claro que ou eles não existem por completo, ou existem somente em um certo sentido; pois “existir” tem muitos sentidos (tradução do autor).

Kant procurou fornecer uma base não empírica para a Física teórica, como também, assegurar que a Matemática não fosse um conhecimento independente do mundo sensível; com isso, Kant estabeleceu os *sintéticos a priori*, os quais dependiam de uma intuição pura (sem experiência) do espaço e do tempo:

> À primeira vista poder-se-ia, sem dúvida, pensar que a proposição 7 +5 = 12 é uma proposição simplesmente analítica, resultante, em virtude do princípio de contradição, do conceito da soma de sete e de cinco. Porém, quando se observa de mais perto, verifica-se que o conceito da soma de sete e de cinco nada mais contém do que a reunião dos dois números em um só, pelo que, de modo algum, é pensado qual é esse número único que reúne os dois. O conceito de doze de modo algum ficou pensado pelo simples fato de se ter concebido essa reunião de sete e de cinco e, por mais que analise o conceito que possuo de uma tal soma possível, não encontrarei nele o número doze. Temos de superar estes conceitos, procurando a ajuda da intuição que corresponde a um deles, por exemplo os cinco dedos da mão ou (como Segner na sua aritmética) cinco pontos, e assim acrescentar, uma a uma, ao conceito de sete, as unidades do número cinco dadas na intuição. Com efeito, tomo primeiro o número sete e, com a ajuda dos dedos da minha mão para intuir o conceito de cinco, adicionei-lhes uma a uma, mediante este processo figurativo, as unidades que primeiro juntei para perfazer o número cinco e vejo assim surgir o número doze. No conceito de uma soma de 7 + 5 pensei que devia acrescentar cinco a sete, mas não que essa soma fosse igual ao número doze. A proposição aritmética é, pois, sempre sintética, do que nos compenetramos tanto mais nitidamente, quanto mais elevados forem os números que se escolherem, pois então se torna evidente que, fossem quais fossem as voltas que déssemos aos nossos conceitos, nunca poderíamos, sem recorrer à intuição, encontrar a soma pela simples análise desses conceitos. (KANT, 1787, B15 e B16).

A preocupação de Kant era garantir uma base para que a Matemática não fosse apenas como um livro de ficção, onde tudo é válido, assim como ocorreu com a filosofia escolástica na qual se discutia “o sexo dos anjos”. Essa sua posição pode ser percebida em sua crítica a Platão:

> Foi precisamente assim que Platão abandonou o mundo dos sentidos, porque esse mundo opunha ao entendimento limites tão estreitos e, nas asas das idéias, abalançou-se no espaço vazio do entendimento puro. Não reparou que os seus esforços não logravam abrir caminho, porque não tinha um ponto de apoio, como que um suporte, em que se pudesse firmar e aplicar as suas forças para mover o entendimento. (KANT, 1787, B9).

A teoria dos sintéticos *a priori* de Kant traz a importância da sensibilidade para a Matemática; e, isso, incomodou os matemáticos e, ao que tudo indica, foi ela que desencadeou o logicismo do alemão Gottlob Frege (1848-1925).

As três escolas da Matemática dos séculos XIX e XX também estavam preocupadas em não fornecer uma base empírica para ela e eliminar paradoxos, como, por exemplo, aquele referente à *teoria dos conjuntos*, conhecido como *paradoxo de Russell*.[31] O logicismo, iniciado por Frege e continuado pelo matemático inglês Bertrand Russell (1872-1970), buscava explicar a Matemática como um desdobramento da Lógica. Esse objetivo não foi alcançado, pois, dentre outros motivos, foi necessário a utilização de três axiomas que não são puramente lógicos e com complexidades tão grandes, ou maiores, que os outros princípios matemáticos. Estes axiomas são o da redutibilidade,[32] o da escolha[33] e o do infinito[34] (ou da infinitude). Embora não tenha alcançado o seu objetivo, o logicismo mostrou o quanto a Lógica e a Matemática estão unidas (COSTA, 2008, p. 33 e 34). Convém lembrar que as críticas relacionadas aos axiomas da redutibilidade e da infinitude se referem ao caráter empírico de tais axiomas, ainda que a experiência não nos apresente objetos infinitos.

O formalismo, por sua vez, buscava explicar a Matemática como um desdobramento de um sistema formal e o seu mais ilustre defensor foi David Hilbert (1862-1943). Um sistema formal é um sistema em que, a partir da axiomatização, obtém-se símbolos adequados, regras de formação desses símbolos, assim como as regras de inferência, transformando, assim, o sistema em algo como um jogo grafomecânico (COSTA, 2008, p. 36 e 37).

O intuito de Hilbert era formalizar toda a Matemática e demonstrar a sua consistência a partir do que ele chamou de parte real[35] da Matemática: a Aritmética (*apud* MOLINA, 2001, p. 131-133); pois ele acreditava que a mesma, por parecer mais imediata e menos dependente da imaginação, fosse livre de contradições.

---

31 Paradoxo de Russell – Foi descoberto por Bertrand Russell. Considere o conjunto A formado por todos os conjuntos que não se contêm a si mesmo como membro. O conjunto A contêm a si mesmo? Se sim, pela definição de A, ele não faz parte dele mesmo, o que é absurdo. Mas se não, pela definição de A, ele faz parte dele mesmo, o que é outro absurdo; ou seja, as duas possibilidades levam a contradições.

32 Axioma da Redutibilidade – Para cada função proposicional, existe uma outra função proposicional predicativa que é satisfeita pelos mesmos argumentos que satisfazem à primeira.

33 Axioma da Escolha – Seja X um conjunto não vazio, cujos elementos também são conjuntos não vazios. Dessa forma, existe pelo menos um conjunto Y que contém somente um elemento de cada conjunto de X. O problema desse axioma está no caso no qual o conjunto X é infinito.

34 Axioma do Infinito (Infinitude) – Existe um conjunto não vazio tal que para todo elemento dele, existe um elemento sucessor (maior).

35 Hilbert não considerava toda a Aritmética como real, pois admitia nela uma parte ideal também (HILBERT, 1964, p.191).

Além disso, ela é facilmente simulada por algoritmos, o que é semelhante a um jogo grafomecânico. Hilbert obteve êxito, por exemplo, em provar a consistência da Geometria,[36] usando como base a Aritmética, ou seja, não era uma prova direta, se tratava de uma prova dependente da consistência de um outro sistema. No entanto, uma prova para a própria Aritmética não foi possível de se obter, o que ficou comprovado com os dois teoremas da incompletude de Gödel (1906-1978).

O que Gödel afirma, com os seus dois teoremas, é que dado qualquer sistema capaz de expressar a Aritmética elementar significa dizer que ou esse sistema é inconsistente, ou ele é incompleto; ou seja, consistência implica em incompletude (NAGEL-NEWMANN, 2003).

A terceira escola da Matemática dos séculos XIX e XX era a *intuicionista* e que tinha como seu grande expoente o matemático holândes Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1882-1966). O intuicionismo é uma concepção construtivista da Matemática que a considera como uma construção a partir de uma intuição semelhante à kantiana. Nada que não possa ser construído pelo intelecto do matemático não deve ser considerado. O intuicionismo propõe uma desconstrução de toda a Matemática para se criar uma com fundamentos mais seguros, reduzindo, assim, a quantidade de teoremas aceitos (COSTA, 2008, p. 43 e 44). A atitude intuicionista segue a crítica de Kant a Platão, mencionada anteriormente, pois tal atitude é uma tentativa de não dar "asas à imaginação" para que ela não vague livremente pelo campo das ideias.

Essas três escolas matemáticas apresentadas são realistas e aprioristas, embora não defendam um realismo e um apriorismo clássicos e, em alguns casos, pareçam nominalistas por relativizarem algumas questões matemáticas. No entanto, um logicista aceita a intuição imediata das formas lógicas e, por isso, ainda estaria preso ao realismo, a não ser que ele possa abandonar a tese realista da Lógica. Já no formalismo, Hilbert destitui a Matemática de uma ontologia ao reduzi-la a um jogo de símbolos sem significado (jogo grafomecânico), mas se prende a uma parte da Aritmética, chamada de real, como fundamento. A premissa construtivista do intuicionismo parece afastar o realismo, pois o objeto matemático tem que ser

36 Uma prova de consistência direta da Geometria não foi possível, a não ser para uma parte elementar (TARSKI, 1999), assim chamada por Tarski, quem fez essa demonstração.

construído pelo matemático, ou seja, ele não existiria independente de nós, o que é contrário a tese realista clássica. No entanto, o construtivismo intuicionista é apenas uma forma de "manter os pés no chão" e não inventar, ou "dar asas à imaginação" conforme foi explicado no parágrafo anterior.

Uma posição bem diferente é o convencionalismo de Henri Poincaré (1854-1912), no qual não se fala em "verdades", mas sim em "o mais adequado". Não existe, por exemplo, uma Geometria verdadeira, e sim a mais adequada ou cômoda, onde o termo "mais adequada" será satisfeito por uma convenção com base na experimentação (POINCARÉ, 1992). O intuito de Poincaré ainda é o de conservar a Matemática imune à experiência, mas, com isso, o seu convencionalismo trouxe a experiência como um critério de escolha na Matemática.

Percebe-se que nos últimos três séculos, a aceitação, de que a Matemática tem uma base empírica, começa a aumentar. Como se não fosse o bastante, a sensação de um dilema entre a semântica e a epistemologia da Matemática cresce até eclodir no artigo "Mathematical Truth" do filósofo francoestadunidense Paul Benacerraf (1931). O dilema de Benacerraf coloca em confronto duas questões da Matemática: a primeira questão é apresentar uma semântica compatível com as demais teorias, no sentido de que uma teoria da verdade na Matemática seja a mesma, ou compatível, com uma teoria da verdade geral e que exista uma distinção entre *verdade* e *demonstração* (PANZA, p. 95-103); a outra questão é com relação aos objetos da Matemática, que são abstratos, e a possibilidade de os conhecermos. Como é possível conhecer um objeto abstrato se o mesmo não é dado pela experiência? Segundo Benacerraf, ao se obter sucesso na primeira questão, a segunda não é satisfatória e o contrário também é válido: eis aí o dilema.

O Argumento da indispensabilidade é uma resposta dos filósofos estadunidenses Willard Quine (1908-2008) e Hilary Putnam (1926) ao dilema de Benacerraf. Para eles, não se pode dizer que os objetos da Matemática não existem ou que não são acessíveis ao nosso intelecto, pois se esses objetos são necessários (indispensáveis) às nossas melhores teorias científicas, então eles existem e são acessíveis através das experiências feitas no momento da formulação de nossas teorias científicas. Mais uma vez, agora com Quine e Putnam, a experiência aparece com papel importante para Matemática, pois, ao relacionar a existência dos objetos matemáticos com as teorias científicas, a Matemática fica condicionada ao fazer científico; no entanto, como é uma visão platonista, a formulação das teorias científicas apenas nos revelaria o que já existe, mas não condicionaria a sua existência a uma determinada teoria. (Panza, 2009, p. 180-186)

Mesmo que o argumento de Quine possa apresentar diversas dificuldades filosóficas, existe uma resposta, ao seu argumento de indispensabilidade, um pouco mais ambiciosa: o *nominalismo* e *ficcionaliismo* de Field (1946). “Science Without Numbers” (1980) é seu trabalho onde ele apresenta possibilidades de uma ciência em que não seja feita qualquer referência às entidades abstratas da Matemática, acabando, assim, com a indispensabilidade da mesma.

3.3 EMPIRISMO MATEMÁTICO CONTEMPORÂNEO

Nenhuma abordagem empírica parecia se preocupar em construir um sistema completo de como se origina o conhecimento matemático. Philip Kitcher, em “The Nature of Mathematical Knowledge”, diz ser este o seu objetivo: a origem do conhecimento matemático (KITCHER, 1984). Ele começa redefinindo o que é um Conhecimento *a priori*, pois com Lakatos e Pólya se torna claro que existe um processo para se obter os objetos matemáticos, dificultando a concepção apriorística. Sua definição – que foi apresentada no capítulo 2.1, na página 17 – usa uma outra possibilidade para o “independente de qualquer experiência” de Kant, sustentando que um *a priori* possa ser apreendido da experiência, mas não restrito a alguma específica, e sim que qualquer uma – rica o suficiente para aquele Conhecimento – vai nos condicionar a apreender tal Conhecimento, não existindo outra possibilidade.

Kitcher usar a ideia de “justificativa *a priori”* – para definir um Conhecimento *a priori* como sendo um processo de justificação, mas “processo” é uma abordagem psicologista; assim, ele vai apresentar algumas críticas àqueles que não aceitam o psicologismo. Em síntese, a sua crítica é que os antipsicologistas explicam o Conhecimento já se valendo de outros anteriores com um *status* especial e, quando tentam explicar como possuímos esses Conhecimentos, não escapam das abordagens psicologistas (KITCHER, 1984, p.16).

Ele também defende que o psicologismo não confunde o contexto da descoberta com o da justificação, pois os estados de Conhecimento são diferentes da mera crença verdadeira, assim, conclui que a teoria do Conhecimento mais adequada é psicologista. Desse ponto, Kitcher desenvolve seus argumentos para negar o apriorismo e vai atacá-lo em três abordagens ontológicas diferentes: a construtivista, a realista e a conceitualista.

Como no construtivismo (KITCHER, 1984, p.49-57), um objeto deve ser construído pelo intelecto do matemático, essa construção pode ter sido mal conduzida, então o item “b”[37] da definição de um *a priori* não é satisfeito, pois um processo do mesmo tipo não pôde produzir a crença em “p”. O que Kitcher alega é o problema da exatidão, ou seja, mesmo que nós possamos apreender algo através dos nossos sentidos e fazer uma afirmação apenas com o uso da intuição pura do espaço e do tempo (percepção mental), muitas vezes, temos que nos contentar em dizer que nossa afirmação é apenas uma aproximação da verdade (ou daquilo que medimos, no caso da Geometria); isto é, nossa percepção mental não é melhor que a nossa percepção comum.

O realismo também advoga uma intuição matemática, no entanto, esta é diferente da construtivista, pois não é auxiliada pelos sentidos. Para Kitcher (1984, p.57-64), os realistas são vagos na explicação de como funciona esta intuição e ainda enfrentam os problemas levantados por Benacerraf; mas, mesmo que resolvessem esses problemas, uma crítica semelhante a feita ao construtivismo se colocaria: a História da Matemática mostra casos em que a intuição nos fornece verdades básicas (axiomas) que mais tarde se mostram falsos; Kitcher cita o exemplo do axioma da separação,[38] que era considerado válido por Frege, Dedekind e Cantor e nos leva ao paradoxo de Russell.[39]

37 Ver página 17.

38 Se A é um conjunto e p é propriedade qualquer que podemos atribuir aos elementos de A, então existe B, um subconjunto de A que contém os elementos de A que possuem a propriedade p. (este é um esquema de axiomas, pois para cada p, temos um axioma).

39 Seja A o conjunto de todos os conjuntos que não contêm a si próprios como membro; se A não pertence a A, então, pela definição, A é um conjunto que pertence a si próprio, logo A pertence a A, o que é contraditório; e se A pertence a A, pela definição, A não contém a si próprio, ou seja, A não pertence a A, mais uma vez, é contraditório. Conclusão, A pertence a A se, e somente se, A não pertence a A.

Já os conceitualistas (1984, p.65-87) defendem que conhecemos os axiomas de forma *a priori* por causa dos conceitos matemáticos que possuímos, isto é, podemos obter as verdades de forma analítica, apenas em virtude do significado dentro do sistema. Kitcher se baseia nas críticas de Quine à analiticidade para negar o apriorismo: nenhuma afirmação é imune à revisão; desta forma, vemos que sua crítica ao conceitualismo segue a mesma linha abordada para o construtivismo e o realismo.

Eliminada as possibilidades do apriorismo, Kitcher busca encontrar um padrão nas mudanças da Matemática e, então, ele a explica através do que chamou de “Agentes Ideais”, ou seja, as teorias são idealizadas e as manipulações que fazemos são sobre esses agentes idealizados; ele faz uma analogia com a lei dos gases ideais e os gases reais que existem em nosso mundo. Contudo, embora ele defenda a idealização de forma empírica, seus “Agentes Ideais” são criticados por se assemelharem aos objetos platônicos (HOFMANN, 2004, p.3).

Sarah Hofmann afirma que se não admitirmos que os “agentes ideais” existam de fato, as verdades da Matemática serão apenas por vacuidade (HOFMANN, 2004, p. 5),[40] assim, ela propõem a teoria do faz de conta (The make-believe theory of fiction), uma espécie de ficcionalismo que não cria uma ontologia com objetos de ficção e ainda permite que a Matemática continue indispensável à Ciência (HOFMANN, 1999 e 2004):

> The make-believe theory of fiction accounts for bet-sensitivity or appropriateness of certain propositions in terms of the games of make-believe that are associated with works of fiction, without adding fictional objects to our ontology. Games of make-believe are ‘one species of imaginative activity; specifically, they are exercises of the imagination involving props’.[41] (HOFMANN, 2004, p. 10).

> One advantage of fictionalism I am proposing is that it is consistent with mathematics' being indispensable to science. This gives it an advantage over any fictionalist account along the lines of Field's Science Without Numbers which depends on the success of the project of nominalizing

40 Uma afirmação é verdadeira por vacuidade é quando atribuímos propriedades aos elementos de um conjunto vazio.

41 A teoria do faz de conta explica a sensibilidade à aposta ou à pertinência de determinadas proposições nos termos do jogo de faz de conta que estão associados às obras de ficção, sem adicionar objetos fictícios a nossa ontologia. Jogos de faz de conta são ‘uma espécie de atividade imaginativa; particularmente, eles são exercícios da imaginação envolvendo adereços’.

> physical theory.[42] (HOFMANN, 2004, p. 13).

Já o empirismo de Carl Behrens segue uma linha diferente, ele corrobora a visão de que os gregos antigos defenderam um Conhecimento imutável e infalível, retendo essas características das doutrinas religiosas, embora tenham substituído a mitologia pela Filosofia:

> […] the Greek philosophers undertook to replace religion with philosophy. In doing so, they "stripped away imaginative accretions" of myths and rituals. But they retained the principle of "immutable and necessary truth" that characterized belief in religious doctrines. Inevitably, this led to a downgrading of the kind of truth one obtains through physical observation, as compared to pure and uncontaminated thought [...][43] (BEHRENS, 2012, p. 65).

Isso fez com que houvesse uma depreciação em relação as afirmações obtidas das observações do mundo físico e que culminou na separação entre mente e corpo de Descartes; assim, concluir que existe um tipo privilegiado de Conhecimento adquirido por operações da mente através de um meio imaterial não parece uma surpresa. Behrens, no entanto, vai atacar a validade dessa separação através da "Astonishing Hypothesis" do vencedor do prêmio nobel: Francis Crick; esta hipótese, para qual Crick apresentou evidências (*apud* BEHRENS, 2012, p. 64), alega que as atividades mentais do ser humano – sejam as alegrias, as preocupações, livre arbítrio etc – são completamente devidas ao comportamento de um conjunto de nervos e moléculas associadas; dessa forma, Behrens nega a existência de um universo imaterial; logo, ideias, conceitos, sentimentos etc são objetos físicos que existem no mundo.

---

42 Uma das vantagens do ficcionalismo que estou propondo é que ele é consistente com a Matemática ser indispensável para a Ciência. Isso dá uma vantagem sobre qualquer abordagem ficcionalista nos termos da Ciência sem números de Field, a qual depende do sucesso do projeto de nominalização da Física.

43 […] os filósofos gregos se encarregaram de substituir religião por filosofia. Fazendo isso, eles "arrancaram acréscimos imaginativos" dos mitos e rituais. Mas eles retiveram o princípio de "verdade imutável e necessária", característica da crença nas doutrinas religiosas. Inevitavelmente, isso levou a um rebaixamento do tipo de verdade que se obtém através da observação física em comparação ao pensamento puro e não contaminado.

Seguindo esse raciocínio, os objetos matemáticos também seriam objetos físicos, mesmo que seja impossível montar um mapa de neurônios que represente um determinado objeto matemático; assim, este conhecimento poderia se apoiar, como os demais, na observação de algo físico e, também, estariam sob as leis da Física.

4 DIFICULDADES PARA O APRIORISMO

Através da História, da Etnomatemática e de questionamentos filosóficos, pode-se encontrar bastante casos que complicam a visão apriorista, dos quais serão destacados uma pequena parcela significativa como: as tribos sem Matemática, o axioma de Arquimedes, o holismo de Quine, a mutação dos conceitos em Lakatos e as ideias de Poincaré. É um tanto intrigante imaginar como um saber que se desenvolveu por questões práticas foi considerado por muitos séculos como independente da experiência.

4.1 AS TRIBOS PIRAHÃ E WARLPIRI: UMA EVIDENCIA ETNOMATEMÁTICA

Os números desempenham um papel muito importante em nossa sociedade a ponto de não conseguirmos imaginar um mundo sem eles; dessa forma, concluímos que os números são inerentes ao nosso pensamento. Por isso, para uma melhor compreensão, é necessário analisar sociedades em que a Matemática ou não se desenvolveu (Pirahã), ou teve um desenvolvimento quase nulo (Warlpiri). E se, de fato, ela não se desenvolveu, isso elimina o inatismo; e ainda, como a Matemática pode surgir por questões sociais (JULIANI, 2008), essas sociedades podem chegar a um novo sistema baseado em suas culturas e interesses e, assim, o apriorismo também seria eliminado. Antes de entrarmos nesses assuntos, vamos desmistificar a crença de que até animais possuem o conceito de número.

Os números são objetos abstratos criados pelos homens a fim de conseguir comparar coisas em termos de quantidade. Muitas experiências são realizadas com o intuito de descobrir se os animais também possuem esses objetos abstratos. Essas experiências mostram que eles têm habilidades em comparar quantidades, mas nada indica que eles formaram o conceito de número. Um exemplo conhecido é a habilidade dos corvos:

> The crow learns very quickly that it is dangerous to attempt to approach the food while someone is in the building. It cannot see into the building to check if anyone is inside or not, but it can see when someone enters or leaves it. [...] several people enter the building one after the other. As long as they remain in the building, the crow keeps away. The people in the building then leave, one by one. With surprising accuracy the crow knows when all those it saw enter the building have left, and only then does it approach the food. Clearly there is a limit to crows' ability to be exact, just as there is a limit to humans' ability to keep track on exact large numbers.[44] (ARTSTEIN, 2014,p. 22).

Esse evento, de forma alguma, indica que o corvo foi capaz de contar, usando o conceito de número. Podemos fazer uma experiência conosco mesmo e perceber que não há necessidade de números para isso. Imagine que um determinado número de pessoas tenha entrado em uma sala; depois, podemos esperar que elas comecem a sair e, com certeza, saberemos se ainda tem alguém ou não lá dentro. Isso só será possível para uma quantidade pequena, assim como para o corvo. Cada pessoa tem uma característica diferente e isso faz com que as memorizemos.

No caso do corvo, ele identifica cada pessoa com o conceito de predador, por isso, não vai até a comida; mas cada predador tem a sua individualidade, suas diferenças e, então, ele pode memorizar. Conforme a quantidade de pessoas aumenta, ele já não consegue identificar as individualidades e não consegue mais

44 O corvo aprende muito rápido que é perigoso se aproximar da comida enquanto alguém está dentro de um recinto. Ele não consgue olhar lá dentro para ver se alguém está ou não lá, mas ele pode ver quando alguém entra ou sai do recinto.[...] várias pessoas entram um por um no recinto. Contanto que eles permaneçam lá, o corvo se mantém afastado. As pessoas no recinto, então, saem uma a uma. Com uma surpreendente acurácia, o corvo sabe quando todas as que ele viu saíram do recinto e, somente, então, ele se aproxima da comida. Claramente, existe um limite na habilidade do corvo em ser exato, assim como existe um limite na habilidade dos humanos em não se perder com números grandes.

saber se tem ou não tem alguém no recinto, mostrando que ele não foi capaz de contar, assim como nós também não temos necessidade de usar números para tarefas pequenas.

Artstein, mostra uma experiência feita com ratos muito interessante e, talvez, ela seja a melhor já feita para defender que animais sabem contar:

> It is not difficult to train rats so that when they hear two beeps, one after the other, they are given enough tasty food to satisfy them. Similarly, when they see two flashes of light, they can also safely eat the food. They were taught, however, that when they hear four beeps or see four light flashes, it is dangerous to eat the food, as they get an electric shock. The aural or visual signals, that is, the beeps or flashes, are received and processed in the brain via two different senses, hearing and sight. The rats reached a high level of reacting correctly, approaching the food if they heard two beeps or saw two flashes, and avoided doing so if they heard four beeps or saw four flashes. When the rats had been trained sufficiently, they heard two beeps that were immediately followed by two light flashes. How do you think they reacted? Did the rats consider the signals as a double invitation to eat the food, or did they interpret them as a four-signal warning to refrain? If they reacted according to the latter, it may be assumed that they recognized the number four as an independent concept, even though the signals received were of two different types. The answer: the rats clearly identified the number four and did not approach the food when they received four signals, even when they were received via different senses.[45] (ARTSTEIN, 2014, p. 24).

A primeira vista, parece que eles têm formado o conceito de número, mas devemos ter muito cuidado nessas conclusões. O próprio Artstein mostra (2014, pp. 21-22) que devemos ter essa cautela no caso dos animais e menciona o caso do cavalo que parecia fazer contas, mas que depois foi descoberto que ele seguia as expressões faciais das pessoas; ele batia o seu casco até perceber uma expressão

---

45 Não é difícil treinar ratos de modo que ao ouvir dois bips, um após o outro, lhes são dados comidas saborosas para satisfazê-los. De maneira similar, quando eles veem dois flashes de luz, também podem comer a comida em segurança. Eles foram ensinados, contudo, que ao ouvir quatro bips ou 4 flashes de luz, era perigoso comer a comida, uma vez que recebem um choque elétrico. Os sinais auditivos ou visuais, isto é, os bips ou os flashes, são recebidos e processados no cérebro através de dois diferentes sentidos, audição e visão. Os ratos alcançaram um nível elevado de reação correta, aproximando-se da comida se eles ouvissem dois bips ou vissem dois flashes e evitaram fazer isso se ouvissem quatro bips ou vissem quatro flashes. Quando os ratos tinham sidos treinados suficientemente, eles ouviram dois bips que foram imediatamente seguidos por dois flashes de luz. Como você acha que eles reagiram? Os ratos consideraram os sinais como um convite em dobro para comer a comida ou eles os interpretaram como um aviso de quatro sinais para evitar? Se eles reagiram conforme esta última, pode ser assumido que eles reconheceram o número quatro como um conceito independente, ainda que os sinais recebidos fossem de dois tipos diferentes. A resposta: os ratos claramente identificaram o número quatro e não se aproximaram da comida quando eles receberam quatro sinais, mesmo quando eles foram recebidos via sentidos diferentes.

facial de aprovação pela resposta correta e então parava, acertando a questão. É um feito fascinante do cavalo, mas ele, de fato, não sabia aritmética.

A história do cavalo mostra que os animais encontram outros meios diferentes da contagem e que acabam nos confundindo. O mesmo parece acontecer com os ratos. Um bip ou um flash é uma experiência diferente de dois bips e dois flashes, de modo que os ratos não necessariamente tenham memorizado o aviso de poder comer em segurança como duas vezes alguma coisa, e sim como uma única experiência. Dessa forma, eles aprenderam que ao receber um aviso de comer em segurança seguido de outro (não há números) indicava perigo e evitavam a comida, assim, mesmo vindo de sentidos diferentes, eles interpretavam como uma aviso seguido de outro. O próprio Artstein (2014, p. 24.) assume: “This experiment with rats still does not indicate arithmetic ability in these animals”.[46]

Contudo, os animais apresentam uma capacidade de manipular pequenas quantidades, assim como qualquer grupo de humanos; mas isso não envolve um sistema de contagem (computação) e nem a existência do conceito de número, ou seja, não existe um sistema que apreende os conceitos das experiências com pequenas quantidades, generalizando-os e emulando-os para o caso de grandes quantidades.

É importante destacar que não é fundamental para a pesquisa desta tese a afirmação de que animais não possuem o conceito de número; afinal, no capítulo 7, mostramos que até plantas aprendem, logo, não seria nada absurdo os animais saberem Matemática. No entanto, as pesquisas feitas com animais são muito simples e inconclusivas e nada no comportamento deles nos leva a crer que há uma generalização a fim de lidarem com qualquer quantidade; muito pelo contrário, eles sempre se mostram incapazes de tal tarefa.

Agora, podemos compreender porque tribos indígenas que não desenvolveram os números não são mais inferiores que os animais. Os aborígenes australianos Warlpiri até desenvolveram a ideia básica dos números, pois usam a intuição espacial, fazendo riscos na terra, por exemplo, para não se perderem ao trabalharem com certas quantidades; além disso, eles usam cantigas para medir distâncias, isto é, a distância de um lugar A até um outro B poderia ser as cantigas x,

46 Esse experimento com ratos ainda não indica habilidade aritmética nesses animais.

y e z e de um outro lugar C até D, u, v e w (MURPHY, 2005); se entendermos essas cantigas como uma unidade de medida, poderíamos dizer que seus “números” não são homogêneos, visto que a duração de cada cantiga é diferente entre si, o que mostra um conceito de medida bem diferente dos nossos números.

Butterworth e Reeve (2008) mostram que diversas tribos primitivas australianas que não desenvolveram os números em suas línguas e nem em um sistema matemático de símbolos usam constantemente uma intuição espacial (riscos na terra, gravetos, dedos etc) para manipularem quantidades, mostrando que Kant tinha alguma razão em sua afirmação sobre a necessidade da intuição espacial para fundamentar a Aritmética; hoje, podemos não usar o espaço para contagem, mas isso porque criamos “gravetos mentais” como símbolos matemáticos e nomes; e aqueles que têm dificuldades com essas entidades mentais, também usam os dedos para os auxiliarem nas tarefas de computação (contagem).

Por isso, a tribo Pirahã da Amazônia é uma sociedade interessante, pois além de não usarem uma intuição espacial, eles não têm nem mesmo uma palavra exclusiva para a unidade. Gordon (2004, pp. 496-497) mostra que eles têm a mesma intuição que os animais apresentam com pequenas quantidades, mas dificilmente poderíamos chamar de números. Em uma das experiências, eles deviam dizer a palavra que representava cada quantidade de objetos e representar com os dedos (ou seja, uma representação espacial); eis uma tabela apresentada por Gordon (2004, pp. 496) com os resultados deles (o travessão “–” representa a troca de representação):

Número de Objetos	Palavra Usada	Número de Dedos
1	hói (= 1)	
2	hoí (= 2) aibaagi (= muitos)	2
3	hoí (= 2)	3
4	Hoí (= 2) aibai (= muitos)	5 – 3
5	aibaagi (= muitos)	5
6	aibaagi (= muitos)	6 – 7
7	Hói (= 1)	1

	aibaagi (= muitos)	5 – 8
8		5 – 8 – 10
9	aibaagi (= muitos)	5 – 10
10		5

Perceba que “hói”, a palavra que geralmente eles usam para a unidade, aparece mais de uma vez; a primeira, sem representação digital e a segunda, apresentando um dedo. Além disso, a bagunça entre a denominação verbal e digital para representar as quantidades parece mostrar que eles nem mesmo usam os dedos como uma estratégia espacial para fazer cálculos como muitas tribos fazem. Daniel Everett, que viveu boa parte de sua vida estudando e vivendo entre os Pirahãs, diz que eles de fato não usam uma intuição espacial para se referir a quantidades:

> […] they do not make tallying motions on individual appendages. If they use gestures, they hold the flat hand out, palm down, varying the distance between hand and ground to indicate the size of the “pile” or amount under discussion. However, a seated Pirahã man or woman (though women rarely do this) will occasionally extend both feet and hands, with toes and fingers also extended, to indicate a large number of individual items [...] Other than these gestures, there is no use of body parts, objects, or anything to indicate a concept of “tallying”.[47] (EVERETT, 2005, p. 624).

A citação acima também nos mostra que eles usam a noção de tamanho para indicar quantidades, assim como as crianças fazem (KLEIN & GIL, 2012, pp. 39 e 45).

Everett também explica que “hói” não indica exatamente “um”, mas sim “tamanho pequeno” ou “pequena quantidade”:

> There are three words in Pirahã that are easy to confuse with numerals because they can be translated as numerals in some of their uses: hói ‘small size or amount’, hoí ‘somewhat larger size or amount’, and bá a gi so lit.

47 […] eles não fazem movimentos de computação com assessórios individuais. Se eles usam gestos, eles mantêm a mão espalmada e estendida, virada para baixo, variando a distância entre a mão e o chão para indicar o tamanho de uma “pilha” ou uma quantidade em discussão. No entanto, um pirahã homem ou uma mulher (embora mulheres raramente fazem isso) sentado irá, ocasionalmente, estender os pés e as mãos, com dedos dos pés e das mãos também estendidos, para indicar um número grande de itens individuas […] Além desses gestos, não há uso de partes do corpo, objetos, ou qualquer coisa para indicar o conceito de “computação”.

> 'cause to come together' (loosely 'many').[48] (EVERETT, 2005, p. 623).

Alguns podem dizer que a polissemia de "hói" não indica que eles não tenham o conceito do número um (unidade), pois nós podemos diferenciar claramente quando nos referimos a fruta "manga" ou a uma parte de uma camisa, assim, o mesmo pode acontecer com eles. De fato, é provável, mas há uma boa diferença, pois usamos "manga" em contextos diferentes, enquanto "hói" está no mesmo contexto e isso, pelo menos, nos indica que se eles percebem claramente a diferença, então a ideia de unidade não é tão importante para eles a ponto de quererem reservar uma única palavra para tal.

A dificuldade dos Pirahãs com números pode ser explicada através de sua cultura e de suas crenças; eles não usam a recursividade, que é essencial para a computação (contagem) (EVERETT, 2005, p. 634) e eles também não aceitam nada que extrapola a experiência, nada que seja abstrato:

> […] Pirahã culture avoids talking about knowledge that ranges beyond personal, usually immediate experience or is transmitted via such experience. All of the properties of Pirahã grammar that I have listed will be shown to follow from this. Abstract entities are not bound by immediate personal experience, and therefore Pirahã people do not discuss them.[49] (EVERETT, 2005, p. 623).

Os trabalhos de Gordon e Everett, citados aqui, diferem em relação a hipótese Sapir-Whorf;[50] para o primeiro, a tribo Pirahã a exemplifica ao mostrar dificuldades em contar por falta de números na sua linguagem, enquanto que para o segundo, a tribo contradiz, pois foi a sua falta de interesse em entidade abstratas que determinou a ausência dos números em sua linguagem.

Com tudo isso, podemos ver que o inatismo não é a melhor concepção para

---

48 Há três palavras nos Pirahãs que são fáceis de confundir com numerais porque eles podem ser traduzidos como numerais em alguns de seus usos: hói "tamanho ou quantidade pequena", hoí "algo como tamanho ou quantidade grande" e bá a gi, escrito assim, "pois se unem" (mais ou menos "muitos").

49 […] a cultura Pirahã evita falar sobre conhecimento que vai além da experiência pessoal normalmente imediata ou que seja transmitida através de tal experiência. Todas as propriedades da gramática Pirahã que eu tenho registrado serão mostradas seguindo desse ponto. Entidades abstratas não estão ligadas pela experiência pessoal imediata e, por isso, o povo Pirahã não as discute.

50 Hipótese Sapir-Whorf – A língua de um povo é determinante para formar conceitos sobre o seu mundo e afeta nos processos cognitivos desse povo.

a Matemática, além disso, vemos que diferentes povos têm visões de mundo diferentes e, assim, talvez, possam desenvolver outros sistemas e isso enfraquece a hipótese do apriorismo, pois se forem ensinar a eles a nossa Matemática, não será uma apreensão *a priori* do conhecimento, mas de sucessivas aulas com modelos do nosso mundo, assim como acontece com as crianças da nossa sociedade.

4.2 O AXIOMA DE ARQUIMEDES

Um outro argumento, contra o apriorismo da Matemática, é o fato dessa e a Física serem dois ramos do Conhecimento muito imbricados em que, não ocasionalmente, uma ajuda no desenvolvimento da outra. E dentre os diversos casos, analisaremos o uso, feito por Arquimedes, da lei das alavancas no contexto de sua descoberta da área da secção de uma parábola, isto é, do segmento parabólico. Na formalização da demonstração (contexto da justificação), ele usa um axioma que hoje em dia leva o seu nome: *axioma de Arquimedes*, o qual não parece ter origem dentro da Matemática, mas sim, na experiência.

Arquimedes chama de “Quadratura da Parábola” (séc. III a. C.), o tratado em que ele buscou encontrar a área da seção de uma parábola; para entender melhor, olhe a figura abaixo.

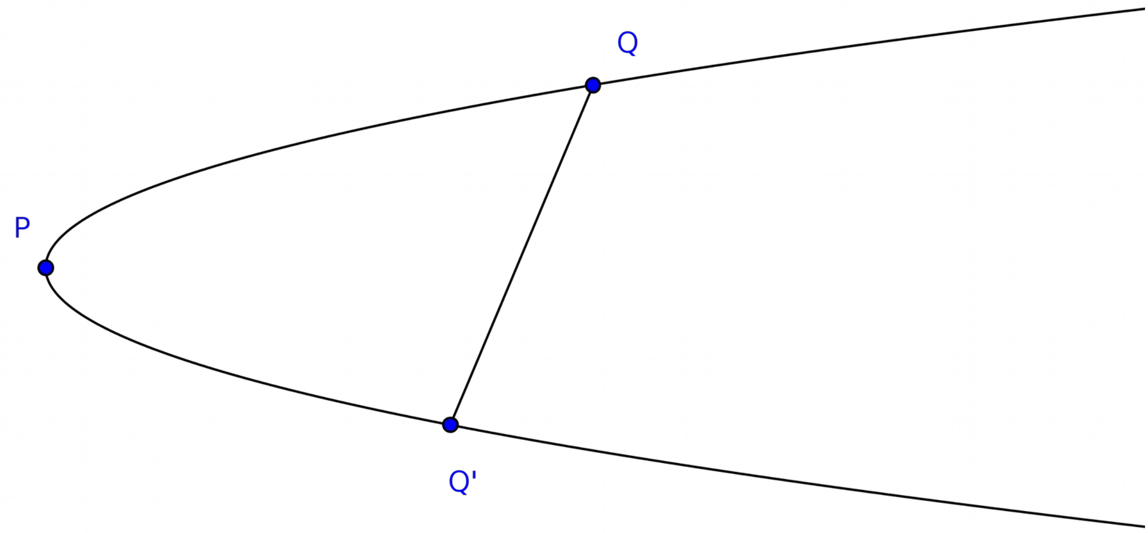


Figura 4: Área da seção de uma parábola.

A intenção é calcular a área da região entre a parábola e o segmento $\overline{QQ'}$. Para essa tarefa, ele usou um processo curioso ao imaginar uma balança, buscando encontrar um equilíbrio através da lei das alavancas e ele deixa bem claro que o contexto da sua descoberta foi empírico e isso logo no começo do tratado ao se dirigir a um tal de Dositeo:

> […] a certain geometrical theorem which had not been investigated before but has now been investigated by me, and which I first discovered by means of mechanics and then exhibited by means of geometry.[51] (ARQUIMEDES, séc. III a. C, p. 233).

O resultado obtido por Arquimedes é que a área do segmento parabólico é $4/3$ do triângulo inscrito, construído da seguinte maneira: dois pontos (Q e q) são determinados pela interseção entre a corda $\overline{Qq}$ que limita o segmento parabólico e a própria parábola; já o terceiro ponto (P) é aquele que pertence a parábola de maneira que a tangente à mesma passando por ele seja paralela ao segmento $\overline{Qq}$; esse é o triângulo Qpq:

51 […] um certo teorema geométrico que não tinha sido investigado antes, mas, agora, tem sido investigado por mim e que, primeiro, eu descobri por meio da Mecânica e, depois, mostrei através da Geometria.

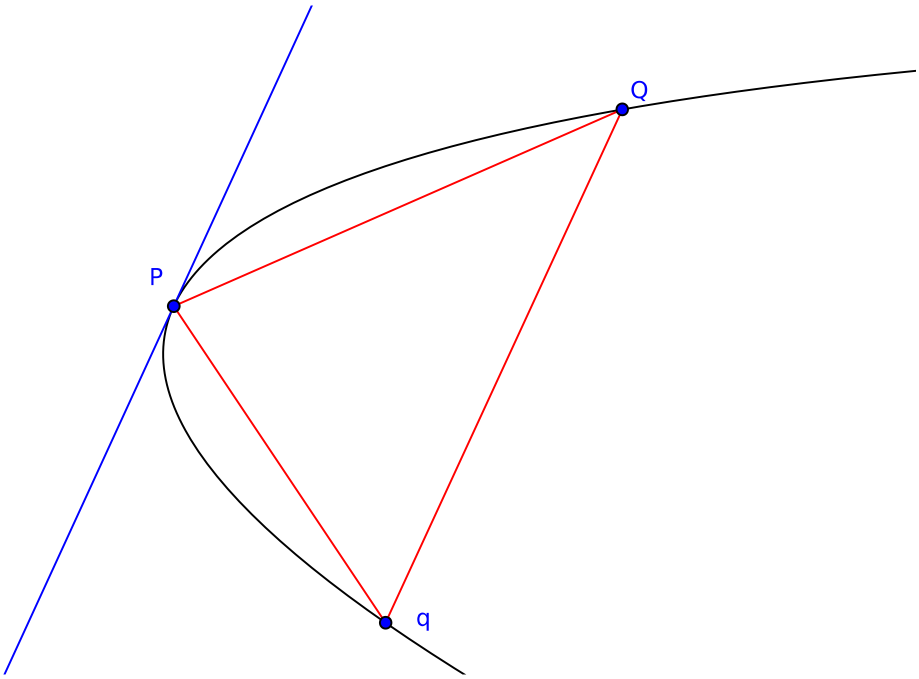


Figura 5: Triângulo inscrito.

Ele descobriu diversas relações entres as cordas e os triângulos e trapézios do segmento parabólico, usando o baricentro e a lei das alavancas:

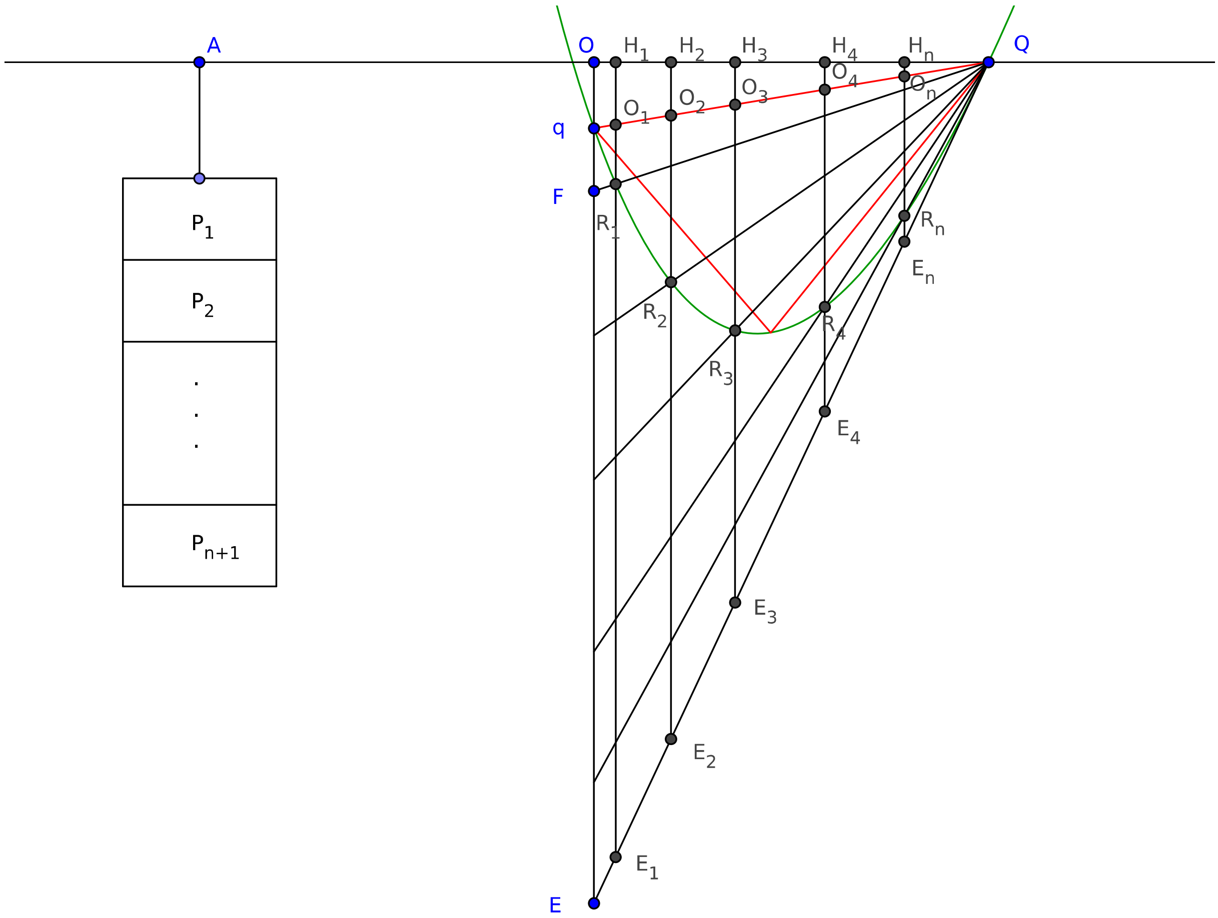


Figura 6: A balança de Arquimedes.

Na figura acima, ele usou o segmento AOQ como uma alavanca com seu fulcro no ponto médio O; Arquimedes traçou diversos segmentos que formavam triângulos e trapézios que estavam suspensos pelos pontos H_i, assim, de acordo com suas distâncias em relação ao centro O, ele os equilibrou com pesos pendurados no ponto A; usando as proposições presentes no tratado, ele chega ao resultado já mencionado acima: $4/3$ do triângulo inscrito.

Na formalização, ele usa o método da exaustão, o qual necessita de um postulado que mais tarde ficou conhecido como Axioma de Arquimedes; no tratado, ele aparece com o seguinte enunciado: o excesso pela qual duas áreas desiguais excede a menor pode, sendo adicionada a ela mesma, exceder qualquer área finita dada (ARQUIMEDES, séc. III a. C, p. 234).

Esse axioma parece mesmo vir da experiência; se trocarmos a palavra “área” por “peso”, vemos que é muito semelhante ao que ele fez em seu contexto da descoberta ao usar a alavanca. Hilbert também dizia que ele é empírico e precisa ser testado da mesma forma que o quinto postulado (HILBERT, 1918, p. 1115).

Algumas consequências do axioma, apontada por Hilbert, são:

- O axioma das paralelas[52] não pode ser substituído por nenhuma das formulações normalmente consideradas como equivalentes se o axioma de Arquimedes não for considerado como verdadeiro.
- Quando se exclui o axioma de Arquimedes, não se pode afirmar o axioma da geometria hiperbólica referente às infinitas paralelas a uma reta dada que podem ser traçadas, no plano, através de um único ponto.
- O axioma de Arquimedes é de fundamental importância para os “pontos de acumulação”, assim, consequentemente, também de grande importância para o Cálculo Diferencial e Integral.

O axioma não permite a existência do infinitamente grande ou infinitamente pequeno que já foi a base do Cálculo Diferencial e Integral, mostrando que seu oposto pode ser formulado dentro da Matemática; e, de fato, existem Geometrias chamadas de não arquimedianas, pois, nela, não vale o axioma em questão. Arquimedes tenta se defender, dizendo que outros geômetras já haviam usado o axioma e, de fato, ele aparece no quinto livro de Euclides: Os Elementos. Mas, não importa se foi ele outro que primeiro usou; isso não impede dele ser empírico. Na verdade, foi Eudoxo o primeiro a usar em uma tentativa de resolver o problema dos incomensuráveis:

> […] a obra de Eudoxo foi tão significativa que cabe a ele a palavra ‘reforma’. Na juventude de Platão a descoberta do incomensurável causou um verdadeiro escândalo lógico, pois pareceu arruinar teoremas envolvendo proporções […] foi um brilhante feito de Eudoxo descobrir a teoria de proporções usada no livro V de Os elementos de Euclides […] o enunciado de Euclides segundo o qual se diz que duas grandezas estão numa mesma razão se é possível achar um múltiplo de cada uma que seja maior que a outra. Isto é essencialmente o enunciado do ‘axioma de Arquimedes’ – uma propriedade que o próprio Arquimedes atribuiu a Eudoxo. (BOYER, 1996, p. 66).

Esse episódio nos mostra que o contexto da justificação também se altera

---

52 O axioma das paralelas é o famoso quinto postulado dos Elementos de Euclides.

com o tempo, apresentando uma história e que é possível ser influenciado pelo contexto da descoberta. O axioma não só pareceu ser importante na descoberta de Arquimedes, como também é descreditado como sendo *a priori*; isso nos faz crer que a justificação Matemática é influenciada por resultados empíricos.

4.3 QUINE E OS CONCEITOS REVISÁVEIS

Em seu artigo “Two Dogmas of Empiricism”, Quine faz uma crítica à distinção entre enunciados analíticos e empíricos (QUINE, 1951). Segundo ele, se algum princípio considerado empírico for colocado em questionamento por causa de alguma nova experiência, toda a teoria pode ser revista, até mesmo os princípios ditos analíticos, os quais podem ser modificados ou receberem uma pequena alteração; dessa forma, podemos questionar: seria *a priori* algo que pode ser revisto pela experiência? A seguir, será apresentado apenas um esboço das ideias quineanas.

As doutrinas de Quine se baseiam no holismo, ou seja, em uma análise considerando o todo, e não apenas as suas partes; isto é, ao considerar uma teoria científica, muitas outras são consideradas de forma a dar sentido a teoria em questão e, assim, se uma experiência a refuta, todas as outras também terão de ser revistas (*apud* HYLTON, 2012). Dessa forma, podemos fazer um paralelo com Hilbert, para o qual a compreensão dos termos primitivos é obtida levando em conta todos os axiomas que relacione esses termos (HILBERT, 2005).

Essa concepção holística o fez aceitar a Matemática como empírica de uma forma indireta, a partir de revisões de uma teoria científica, por isso, o termo quase-empirismo é atribuído aos seus pensamentos e ao de Putnam. Quine critica a distinção entre analítico e sintético, pois ele havia percebido que se uma teoria é revista, não só apenas as verdades empíricas são reformuladas, mas as ditas *a priori*, também; assim, a classificação entre empírico (sintético) e *a priori (analítico)* é só a título de organização e, por isso, devia-se considerar o sistema como um todo, e não cada afirmação de uma forma particular:

> The totality of our so-called knowledge or beliefs, from the most casual matters of geography and history to the profoundest laws of atomic physics or even pure mathematics and logic, is a man-made fabric which impinges on experience only along the edges. Or, to change the figure, total science is like a field of force whose boundary conditions are experience. A conflict with experience at the periphery occasions readjustments in the interior of the field. Truth values have to be redistributed over some of our statements. Re-evaluation of some statements entails re-evaluation of others, because of their logical interconnections [...] No particular experiences are linked with any particular statements in the interior of the field, except indirectly through considerations of equilibrium affecting the field as a whole.[53] (QUINE, 1951, pp. 39-40).

Eliminar essa distinção, fazia com que ele não buscasse uma fundamentação metafísica para os termos *a priori;* afinal, estes não tinham mais um *status* especial e, além disso, tal busca era incompatível com seu holismo; todo o sistema era fundamentado nas Ciências naturais, daí o termo de Epistemologia naturalizada (STEIN, 2000, p. 191).

Putnam e Quine apresentaram trabalhos que complementavam uns aos outros e, assim, a ideia do quase-empirismo e da submissão da Matemática às Ciências naturais poder constatada claramente nessa passagem de Putam:

> We will be justified in accepting classical propositional calculus or Peano number theory not because the relevant statements are 'unrevisable in principle' but because a great deal of science presupposes these statements and because no real alternative is in the field. Mathematics, on this view, does become 'empirical' in the sense that one is allowed to try to put alternatives into the field.[54] (PUTNAM, 1983, p.303).

Essa é a justificativa dele para não haver necessidade de preocupação com a falta de uma prova de consistência para Matemática clássica, ou seja, ela se

53 A totalidade de nosso, assim chamado, Conhecimento ou crenças, dos assuntos mais casuais de Geografia ou História até as mais profundas leis da Física atômica ou até mesmo da Matemática pura e da Lógica, é uma estrutura feita pelo homem, a qual choca-se com a experiência somente ao longo das extremidades. Ou, para mudar a ilustração, a Ciência, no todo, é como um campo de força cujas condições de fronteira são experiências. Um conflito com a experiência na periferia ocasiona reajustamentos no interior do campo. Valores de verdade têm de ser redistribuídos sobre algumas de nossas afirmações. Reavaliação de algumas afirmações ocasionam reavaliação de outras, por causa de suas interconexões lógicas […] Nenhuma das experiências particulares são ligadas a qualquer afirmação particular no interior do campo, a não ser indiretamente por meio de considerações de equilíbrio, afetando o campo como um todo.

54 Nós estaremos justificados em aceitar o Cálculo Proposicional clássico ou a Teoria dos Números de Peano não porque as afirmações relevantes são ‘não revisáveis em princípio’, mas porque uma grande parte da Ciência pressupõem essas afirmações e porque nenhuma alternativa real está em jogo. Matemática, sobre essa ótica, de fato se torna ‘empírica’ no sentido que é permitido tentar colocar alternativas em jogo.

confirma em sua aplicação na Ciência e se mostra indispensável a esta última; tal argumento ficou conhecido como Argumento da Indispensabilidade (AI) de Quine-Putnam, que também podemos verificar em (QUINE, 1981 and 1983) e (PUTNAM, 1979).

Uma outra observação importante de Putnam é o fato de que nenhuma curva em um espaço de Riemann satisfaz o quinto postulado euclidiano; assim, afirma ele (PUTNAM, 1983, p. 302), o estratagema filosófico de afirmar que as Geometrias não euclidianas apenas mudam os significados dos antigos objetos só interessam a linguística. Com essa observação, chegamos a uma conclusão de que entre um sistema e outro, alguns objetos podem deixam de existir, ou seja, há o risco de criarmos uma ontologia inflada com objetos que poderão ser descartados em virtude da experiência, fortalecendo a hipótese de que os objetos matemáticos possam ser ficções.

A Epistemologia naturalizada e o holismo de Quine e Putnam são mais uns fortes argumentos contra o apriorismo e, veremos na próxima seção que os seus pensamentos, de certa forma, se assemelham e se complementam com os de Lakatos, embora a abordagem seja diferente.

4.4 LAKATOS E A EVOLUÇÃO DOS CONCEITOS MATEMÁTICOS

Imre Lakatos (1922-1974) foi mais um pensador que mostrou grandes dificuldades para o apriorismo na Matemática, tanto em “Provas e Refutações: A Lógica da Descoberta Matemática” (197) quanto em “Um Renascimento do Empiricismo na Filosofia da Matemática Recente” (197). Ele fez com que a linha entre a Matemática e as Ciências Naturais se tornasse muito estreita ao mostrar, usando a história, que os conceitos matemáticos se alteram com o tempo, antes de se fixarem (LAKATOS, 1976). Ele (1978, p. 25-28) também cita vários pensadores que, se não eram a favor do empirismo na Matemática, no mínimo, admitiam ou haver a possibilidade, ou que não se pode ter certeza absoluta sobre a Matemática; são eles: Russell, Curry Drew, Carnap, Bernays, Von Neumann etc. Vamos, agora, mostrar como o raciocínio de Lakatos foi desenvolvido.

O empirismo matemático começou a ganhar força, também, na escola húngara. László Kalmár, em sua apresentação “Foundations of mathmatic – Whither now?” (*apud* GURKA, 2006) afirmou que a abstração, a qual está conectada com a dedução, foi usada por matemáticos para descobrir regularidades contidas nos fatos empíricos, a fim de construir conceitos idealizados; em seu artigo “The development of exactness in mathematics from experience to axiomatics” (*apud* GURKA, 2006), ele mostra que a exatidão matemática vem de um longo processo em que o empírico se enfraquece gradualmente, assim, um sistema axiomático reflete a origem empírica dos seus axiomas (*apud* GURKA, 2006, p. 268-269).

Inspirado por Kalmár – e, também, por Pólya[55] – Lakatos mostrou que os conceitos na Matemática se alteram conforme são encontrados contraexemplos. Sua abordagem também é quase-empirista, mas ele próprio explica o termo (Lakatos, 1976 e 1978) usando a distinção entre o que ele chamou de sistema euclidiano e quase-empírico. No primeiro, a verdade é injetada no topo (axiomas) e flui pra todo o sistema (teoremas) através de inferências lógicas, mas ele acrescenta que esse sistema é só ideal (não real). No segundo, a falsidade é injetada em baixo, ou seja, nos teoremas e passa para os axiomas (ou definições) do sistema como ocorre no exemplo da conjectura da relação de Euler, assim como em outros, que Lakatos analisa (LAKATOS, 1977).

Em qualquer poliedro, pressupomos que valha a relação de Euler, ou seja:

$$V-A+F=2 \tag{11}$$

Onde V é o número de vértice; A, o de aresta e F, o de faces. Lakatos analisa não só a prova de Cauchy para a conjectura, mas, também, as críticas direcionadas a ela e, assim, ele observou que os conceitos da Matemática são dinâmicos, pois a definição do que vinha a ser um poliedro era, constantemente, alterada. Por exemplo, a figura de um sólido oco – o qual podemos montar, retirando uma parte do interior de um cubo maciço – é um contraexemplo para a relação.

55 George Pólya buscava encontrar uma lógica da descoberta matemática (heurística).Ele não via a Matemática como um sistema formal com deduções a partir de seus axiomas, mas como um conjunto de problemas e hipóteses que devem ser resolvidos (PÓLYA, 1957 and 1962).

Assim, para esse sólido, vale (11), mas, há dois cubos (poliedros) no mesmo poliedro; então, seja V_1 , A_1 e F_1 os números de vértices, arestas e faces do cubo maior, respectivamente; e V_2 , A_2 e F_2 , os do cubo menor (parte oca); temos:

$$V_1 - A_1 + F_1 = 2 \tag{12}$$

e, também,

$$V_2 - A_2 + F_2 = 2 \tag{13}$$

para cada um dos cubos. Somando as duas equações acima, obtemos:

$$V_1 + V_2 - (A_1 + A_2) + F_1 + F_2 = 4 \ . \tag{14}$$

Como o cubo não possui intercessões, o número de vértices do sólido é igual a:

$$V = V_1 + V_2 \ ; \tag{15}$$

assim como o número de arestas:

$$A = A_1 + A_2 \ ; \tag{16}$$

e o número de faces:

$$F = F_1 + F_2 \ . \tag{17}$$

Dessa forma, e equação (14) fica:

$$V - A + F = 4 \ . \tag{18}$$

A equação (18) contraria, claramente, a relação de Euler (11); e, como o sólido apresenta duas superfícies – a da parte oca e a externa – cogitou-se não contá-lo como um poliedro; mas, no fim, aditou-se um novo conceito, o de convexidade e a relação passou a ser enunciada não para um poliedro qualquer, mas sim para os convexos.

Lakatos acabou tornando praticamente invisível a linha divisória entre a Matemática e as Ciências Naturais, mostrando que os contraexemplos não ocorrem apenas na Física ou na Química, por exemplo. De forma geral, o que ocorre com os teoremas é que no começo temos apenas uma conjectura da qual se obtém uma prova preliminar através de outros teoremas e lemas ou outras subconjecturas; mais tarde, os contraexemplos começam a surgir; a partir daí, a prova passa por diversas análises até percebermos que havia algum lema oculto e o incorporamos na conjectura inicial, alterando – e enriquecendo – os conceitos envolvidos originalmente. Esse processo pode ocorre com a apenas um matemático ou no decorrer de vários séculos.

4.5 CRÍTICAS AO CONVENCIONALISMO GEOMÉTRICO DE POINCARÉ

Nesta seção, será apresentado o convencionalismo geométrico de Poincaré e, também, algumas críticas a ele, pois é visível que, apesar de dar um papel importante para a experiência, seu intuito é sustentar que a Matemática não pode ser revista pela experiência, continuando, assim, um comportamento antigo dos matemáticos que chamo de “Fuga dos Falseadores”, uma espécie de empirismo platônico, por mais contraditório que isso possa parecer. Ainda assim, sua contribuição nos mostra como é possível conceber uma Matemática empírica.

O contexto de Poincaré é o das diferentes Geometrias surgidas no século XIX, chamadas de não euclidianas, as quais, embora possamos dizer que foram descobertas *a priori*, são mais uma prova do empirismo matemático.[56] Pode parecer

56 As geometrias não euclidianas foram descobertas somente a partir da negação de um dos postulados da geometria euclidiana sem o uso de experiências, todavia, se o apriorismo da própria geometria euclidiana é questionável, então não se pode afirmar, categoricamente, que as geometrias

contraditório, mas, de fato, não é; pois foi justamente o medo de "dar assas à imaginação" que fez com que se duvidasse da validade dessas novas Geometrias. Não é por acaso, que o próprio Poincaré apresenta um modelo físico possível em que poderíamos usá-las sem causar algum estranhamento (POINCARÉ, 1992, p. 88). Além disso, sem dúvidas, foi uso de uma Geometria não euclidiana pelo físico alemão Albert Einstein (1879-1955) em sua Teoria da Relatividade (*apud* BARKER, 1969, p.70) que as fortaleceu como uma possibilidade para além da imaginação.

Essas Geometrias não euclidianas não pareciam estar de acordo com as nossas intuições do espaço, embora, hoje em dia, pelo fato da Terra não ser plana, elas possam parecer mais adequadas, ao menos para uma geometria que envolva grandes distâncias terrestres. No entanto, por causa dessa falta de intuição, Poincaré criou um modelo em que os primeiros princípios da geometria hiperbólica fossem verdadeiros, afinal esse tipo de Geometria é menos evidente que a elíptica, visto que a Terra não é hiperbólica:

> Supposons, par exemple, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes: La température n'y est pas uniforme; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé J précis davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon de la sphère limite; soit r la distance du point considéré au centre de cette sphère. La température absolue sera proportionnelle à R^2-r^2 . Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu. Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable. Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera de la sphère limite. Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants. Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petit, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre la sphère limite. Si, pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables, pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides déformés par ces différences de températures dont je viens de parler.[57] (POINCARÉ, 1992, pp. 87-89).

não euclidianas são um conhecimento *a priori*.

57 Suponhamos, por exemplo, um mundo encerrado numa grande esfera e submetido às seguintes leis: a temperatura não é uniforme; ela é máxima no centro e diminui na medida em que dele nos afastamos e chega a zero absoluto quando atingimos a esfera em que esse mundo está contido. Apresento maiores precisões sobre a lei segundo a qual varia essa temperatura. Seja R o raio da esfera limite; seja r a distância do ponto considerado ao centro dessa esfera. A temperatura absoluta será proporcional a R^2-r^2 . Suporei, ainda, que, dentro desse mundo, todos os corpos tenham o mesmo coeficiente de dilatação, de tal maneira que o comprimento de uma régua

A criação de um modelo nos moldes desse de Poincaré nos faz imaginar que a Física influencia na escolha da Geometria verdadeira do espaço, sendo assim, qual é a Geometria verdadeira da Terra ou do nosso Universo? Ou seja, qual é a episteme do espaço? Segundo Poincaré, essas perguntas não fazem sentido, pois o que existe é uma convenção no uso de uma determinada geometria. E para chegar a conclusão de um convencionalismo geométrico, Poincaré em sua “La science et l’hypothèse”, começa fazendo uma distinção entre dois tipos de espaço: o espaço geométrico e o espaço representativo, sendo este último dividindo em espaço visual, espaço tátil e espaço motor.

O espaço geométrico é o espaço dos matemáticos e possui algumas propriedades como a homogeneidade (todos os seus pontos são idênticos em si) e a continuidade, por exemplo. Já o espaço representativo é o espaço de nossas representações e sensações e que não possui a propriedade da homogeneidade, por exemplo; sendo a heterogeneidade uma das propriedades que o difere do espaço geométrico. Com o intuito de mostrar essa heterogeneidade e outras propriedades, Poincaré explica as diferenças de cada um dos espaços que compõem o espaço representativo, sendo as explicações do espaço visual as mais simples e efetiva, além de que é suficiente para mostrar que o espaço representativo não possui a homogeneidade.

O espaço visual é o espaço das imagens formadas pela retina de nossos olhos e, como a ideia é demonstrar a heterogeneidade desse espaço, devemos provar que os pontos da retina não são idênticos entre si, ou seja, eles formam imagens diferentes do mesmo objeto. De fato, segundo Poincaré, as imagens produzidas no centro da retina são diferente das produzidas nas extremidades, pois

---

qualquer seja proporcional à sua temperatura absoluta. Suporei, enfim, que um objeto transportado de um ponto a outro, cuja temperatura é diferente, estabeleça, imediatamente, equilíbrio calorífico com seu novo meio. Nada, nessas hipóteses, é contraditório ou inimaginável. Um objeto móvel se tornará, então, cada vez menor quanto mais se aproxima da esfera limite. Observemos primeiramente que se esse mundo é limitado do ponto de vista de nossa geometria habitual, ele parecerá infinito a seus habitantes. Quando esses, com efeito, quiserem se aproximar da esfera limite, eles se tornarão cada vez mais frios e menores. Seus passos também diminuirão cada vez mais de tal modo que não conseguirão nunca atingir a esfera limite. Se, para nós, a geometria é apenas o estudo das leis segundo as quais se movem os sólidos invariáveis, para esses seres imaginários, será o estudo das leis segundo as quais se movem os sólidos deformados por essas diferenças de temperatura que acabo de falar.

uma é mais viva que a outra. A continuidade é mais fácil de mostrar que é exclusiva do espaço geométrico; com certeza, muitos já pensaram a respeito. Poincaré pede que se considere dois pesos, um peso A com 10 gramas e outro peso B com 11 gramas; nós, seguramente, consideraríamos como idênticos se segurarmos um com cada mão, assim como se segurássemos o peso B com um outro peso C de 12 gramas. Se a experiência, porém, fosse feita com os pesos A e C, perceberíamos a diferença. Como isso parece contraditório, criamos o contínuo geométrico, criando infinitos intermediários e culpamos a nossa falta de sensibilidade para perceber as diferenças entre A e B e entre B e C. Dessa forma, a experiência do mundo discreto fornece a ocasião para o objeto do nosso espírito.

O mais interessante é que a continuidade não está presente no mundo físico e, embora esteja no espaço geométrico, ela gera diversas complicações na matemática. Por exemplo, os paradoxos de Zenão são devidos a consideração de um mundo discreto com uma matemática contínua. O axioma de Arquimedes, considerado como o axioma da continuidade não é interno à Matemática e nem é fruto da experiência, mas sim do nosso desejo. Se o espaço representativo, porém, é diferente do espaço geométrico, então ele não é a representação de nossas sensações, o que nos resta a questionar: como ele surge? Como o conhecemos? Para Poincaré, o espaço geométrico é formado pelas nossas argumentações e raciocínios sobre o espaço representativo; dessa forma, Poincaré atribuiria a Geometria como uma Ciência empírica, mas ele alerta que isso seria um erro, pois para ele a experiência nos guiaria para a escolha de uma geometria mais cômoda, e não mais “verdadeira“; visto que seus objetos não se ocupam da realidade do mundo físico, mas sim de objetos ideais que são imagens simplificadas. Os objetos ideias seriam dados por nosso espírito, enquanto a experiência nos faz colocá-los para fora; agora, percebemos que Poincaré ainda está preso a uma forma “mística” de Geometria.

Com a construção do que Poincaré chamou de espaço geométrico e representativo, ele consegue explicar a inacessibilidade do espaço e a independência que a Geometria tem da experiência. Imagine, pois, que alguém desenhe um círculo material ou que tire medidas de um determinado lugar; tais acontecimentos serão representados no espaço representativo e estaríamos presos às propriedades do material que foi usado para o desenho do círculo e da medida do lugar, pois, provavelmente, diferentes materiais se comportariam de forma diferente, ou seja, não teríamos feito uma experiência sobre as propriedades do espaço em si, mas sobre as propriedades dos materiais utilizados. Assim, o espaço geométrico seria apenas as argumentações e raciocínios sobre as propriedades dos materiais; dessa forma, o espaço em si é inacessível.

Considere agora a paralaxe de uma estrela muito distante; dependendo da Geometria utilizada, teremos resultados diferentes, assim, pode-se esperar que a experiência nos informe qual Geometria é a verdadeira. Contudo, essa diferença é dada porque em Astronomia se diz que a linha reta é a trajetória de um raio de luz, portanto, uma alteração nas leis da óptica (a luz não se propaga em linha reta) nos mostra que não é necessariamente um problema de Geometria, o que mostra que a mesma é independente da experiência. A veracidade da Geometria euclidiana não depende de experiências.

Poincaré fecha seu capítulo sobre a Geometria e a experiência com uma frase intrigante:

> On veut dire que par sélection naturelle notre esprit s'est adapté aux conditions du monde extérieur, qu'il a adopté la géométrie la plus avantageuse à l'espèce; ou, en d'autres termes, la plus commode. Cela est tout à fait conforme à nos conclusions, la géométrie n'est pas vraie, elle est avantageuse.[58] (POINCARÉ, 1992, p. 110).

Assim, se a escolha depende da nossa evolução (seleção natural) e da experiência, então a Geometria é empírica; não importa se seus objetos não pertencem a este mundo ou ao espaço representativo. Do mesmo modo, podemos dizer que a abordagem de Poincaré é um tanto platônica, pois, para ele, há um mundo independente da experiência.

Construir um mundo em que seus objetos não são acessíveis pela experiência não invalida o empirismo; isso ocorre porque durante milênios a Matemática tem se desenvolvido assim, livrando seus objetos de quaisquer

---

58 Isso quer dizer que pela seleção natural o nosso espírito se adaptou às condições do mundo exterior, que adotou a Geometria mais vantajosa à espécie; ou, em outros termos, a mais cômoda. Isso é inteiramente coerente com as nossas conclusões, a Geometria não é verdadeira, ela é vantajosa.

características que possam ser falseadas; criando assim, um mundo de faz de conta (JULIANI & CARUSO, 2013).

Popper estabeleceu critérios para podermos dizer o que é Ciência, através do que ele chamou de falsificadores, ou falseadores. Segundo ele, se não existisse uma experiência com a qual fosse possível verificar a hipótese contrária, então ela não seria científica (CHALMERS, 1993, p. 64-109). A sentença “Choverá ou não choverá aqui, amanhã” é um exemplo de uma proposição que não possui falseadores, isso porque ela não pode ser falseada seja qual for a experiência (POPPER, 2000, p. 41-44 & 2004). No entanto, a sentença “Todos os planetas se movem de forma elíptica ao redor do sol” será falseada se fizermos alguma experiência em que ficasse evidente alguma outra forma geométrica do movimento dos planetas ao redor do sol; ou seja, é possível uma experiência que a torne falsa.

As proposições matemáticas se assemelham com a primeira sentença, pois da forma que foram desenvolvidas, elas não podem ser corrigidas seja qual for a experiência; isso pôde ser visto com a atitude de Poincaré; e o mesmo aconteceu muito antes com o primeiro grande problema da Matemática: os irracionais.

Os pitagóricos acreditavam que toda a natureza – isto é, a *Physis* – podia ser expressa com o auxílio dos números; no entanto, se quisermos medir a diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade, usando os conhecimentos gregos (e atuais), não será possível encontrar um número racional, ou seja, os existentes até aquela época; assim, na falta de um número que a representasse, poderíamos dizer que essa diagonal não existia, contrariando o que vemos ao fazer o desenho (diagrama) desse quadrado (EVES, 2011, p. 104-107). Tal descoberta poderia fazer com que os postulados fossem revistos; ora, se a divisibilidade de um número e de uma reta fosse finita, se o ponto tivesse um tamanho mínimo e a reta, uma espessura mínima, então tudo seria comensurável. No entanto, os gregos antigos preferiram manter os seus postulados, concentrando a sua Matemática na Geometria, a qual possui uma representação em diagramas, no qual a diagonal do quadrado é possível de ser traçada, ou seja, no qual ela existe. Platão, então, geometriza a *Physis*, deixando de lado a ideia pitagórica de recobrir o Mundo com os números racionais.[59] Dessa forma, eles abriram caminho para a existência de mais

59 A reta e o ponto foram concebidos sem espessura e sem tamanho justamente para permitir o uso

um tipo de número: os irracionais. Com isso vemos que os conceitos da Aritmética e da Geometria não foram revistos pela evidência apresentada pelos diagramas, permanecendo a divisibilidade infinita e a ideia de que uma reta não tem espessura; tudo para manter a universalização da Matemática.

Mesmo com tudo isso, sabemos que a origem da Geometria é empírica, como afirma Barker (1969, p. 28): "Os gregos perceberam o que os egípcios eram capazes de fazer e assimilaram seus princípios empíricos.". A verdade é que não basta criar objetos imunes à revisão, evitando que tenhamos uma experiência direta deles:

> Mesmo que nunca se pudesse ter, por experiência direta, algo que se assemelhasse a retas, não estaria, por isso, demonstrado que o conhecimento de pontos, linhas e figuras não poderia ser de caráter empírico. Não é raro, na ciência, o enunciado empírico relativo a coisas de que inexista caracterização observacional. Assim, por exemplo, o físico discute o movimento de um pêndulo que oscila no vácuo perfeito, sem que haja atrito no ponto de suspensão. Êsse pêndulo não existe; qualquer pêndulo oscila com atrito e em presença do ar. Isso não impede que os enunciados a propósito dos pêndulos ideais se tornem testáveis, os testes sendo experimentos realizados com pêndulos reais. A noção de pêndulo ideal é uma noção-limite no sentido: falar dos movimentos de um pêndulo ideal é falar do limite para o qual tendem os movimentos de pêndulos reais quando decresce o atrito no ponto de suspensão e a atmosfera se torna cada vez mais rarefeita. A linha de raciocínio de Platão olvida que os enunciados a propósitos de pontos, linhas e figuras possam ser empíricos de maneira indireta, como no caso dos pêndulos ideais. (BARKER, 1969, p. 42).

Esse objetos são os casos limites obtidos das experiências, revelando suas origens empíricas. E mesmo que esse novo mundo seja imune a qualquer revisão proveniente do mundo das sensações, a escolha do melhor mundo, como diria Poincaré, depende de nós acharmos a mais conveniente para as nossas experiências; assim, seja como for, sempre haverá um empirismo no seu desenvolvimento.

---

da divisibilidade infinita, visto que a mesma é incompatível com o pensamento pitagórico das mônadas como unidades indivisíveis dotadas de magnitudes e ela – a divisibilidade infinita – é mais vantajosa para Matemática, ou melhor, ela permite a universalização. (RUSSELL, 2004, p. 65).

5 O QUE É O EMPIRISMO MATEMÁTICO

No terceiro capítulo, apresentamos a transição do aprismo ao empirismo na Matemática; e no capítulo seguinte mostramos como alguns pensadores defendem suas teses empíricas, bem como acrescentamos alguns fatos e discussões que corroboram a visão destes pensadores. Neste capítulo, pretendemos explicar como é a nossa abordagem empírica da Matemática, a qual se baseiam no problema de demarcação, ou de definição, do que deve ser aceito como válido.

5.1 ENTRELAÇANDO OS CONTEXTOS DA DESCOBERTA E DA JUSTIFICAÇÃO

Embora sempre tenhamos como distinguir os dois contextos, evitando a falácia genética, os limites entre descoberta e justificação não são tão rígidos; os trabalhos de Quine – que são abordados no capítulo 4.3 – mostram essa fragilidade, atacando a analiticidade. Também acrescentamos a esse assunto ao mostrar um evento histórico sobre Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) e sua descoberta sobre a área da secção de uma parábola no capítulo 4.2. Em seu processo de descoberta, Arquimedes usa uma ideia engenhosa junto com a lei das alavancas, a qual é empírica; já na parte da justificação, ele aceita um axioma que mais tarde receberá o seu nome; a aceitação deste axioma não devia ser difundida naquela época, visto que ele tenta defender o seu uso e usa argumentos de autoridade ao citar outros matemáticos – inclusive Euclides – que o usaram em seus trabalhos.

Esse caso de Arquimedes – e outros trabalhos, como também os de Lakatos, por exemplo, os quais são abordados no capítulo 4.4 – mostram que o contexto da justificação muda conforme a época e pode ser influenciado por elementos da descoberta, enfraquecendo, assim, a "linha" que separa os dois contextos; no entanto, a "linha" continua existindo e evitando a falácia genética, mas existe uma flexibilização.

Os sistemas formais[60] fazem parte do contexto da justificação e os mesmos podem ser alterados ou extrapolados conforme os anseios de cada época; na conclusão do artigo "On the Incompleteness Axiomatized Models for the Empirical Sciences", Francisco Doria e Newton da Costa questionam as limitações impostas pelos sistemas formais e sugerem olharmos além deles:

> We cautiously suggest that the trouble may lie not in some essential inner weakness or flaw of mathematical reasoning, but in a too narrow, too limited concept of formal system and of mathematical proof. There is a strongly mechanical, machinery-like archetype behind our current formalizations for the idea of algorithmicity that seems to stem from an outdated 17th century vision à la Descartes […] The problem lies in our current ideas about formalized mathematics. They are too weak. We must look beyond them. (COSTA; DORIA, 1992, pp. 86-87).[61]

Essa atitude pode conduzir a algumas quebras de paradigmas, alterando o nosso contexto da justificação da Matemática; dessa forma, o novo contexto possuirá conceitos oriundos desse processo de "olhar além" e a aceitação deles dependerá de modelos que, ao menos em última instância, nos conduz ao mundo físico (sensibilidade); pelo menos, isso é o que a História da Matemática tem nos mostrado seja com as geometrias, os números complexos etc.

Assim, conforme o exposto anteriormente, aquilo que chamamos de "Prática Matemática",[62] embora exercida apenas com o uso da mente, não pode ser

---

60 Os sistemas formais foram explicados no capítulo 3.2, página 42.

61 Nós sugerimos, cautelosamente, que o problema pode não estar em alguma fraqueza interna essencial ou falha matemática, mas em um conceito de sistema formal e de prova matemática muito restrito, muito limitado. Existe um arquétipo de máquina, altamente mecânico, por trás das nossas formalizações devido a ideia de algoritmia que parece se originar de uma visão à la Descartes e obsoleta do século XVII […] O problema está em nossas ideias atuais sobre as matemáticas formalizadas. Elas são muito fracas. Nós devemos olhar além delas.

62 A ideia de Prática Matemática foi apresentada no capítulo 2.3.

classificada como *a priori*, pois os conceitos envolvidos na justificação passaram por processos de construção e aceitação, muitas vezes vindos da descoberta ou de uma experiência sensível direta. A Geometria euclidiana, por exemplo, apresenta suas bases que vieram da experiência, pelo menos, é o que a História nos informa (BARKER, 1969, p. 28). Mas, o interessante é observar como foi a aceitação da Geometria projetiva e daquelas chamadas de não euclidianas.

A partir da prática da pintura e da perspectiva, a Geometria projetiva se consolidou com axiomas e postulados como a euclidiana, no entanto, essas duas geometrias são conflitantes, pois na perspectiva as retas paralelas se encontram no infinito. Apesar do conflito, a aceitação da nova Geometria foi natural (BONGIOVANNI, 2007, pp. 20-23); isso porque as telas da pintura forneciam uma experiência sensível direta. Mas, o mesmo não aconteceu com as Geometrias não euclidianas, pois elas não forneciam essa experiência direta e nem se tratavam de arte, e sim de uma nova organização para o espaço, ameaçando o cânone euclidiano. Essa questão era grave, pois o sistema de Euclides para o espaço era a base até para as tomadas de decisão como na época de Descartes; o problema da exatidão, isto é, como saber quais objetos e processos são válidos na Geometria, foi respondido por Descartes, o qual alegava que a base era a Geometria Plana Euclidiana (PANZA, 2011).

O surgimento dessas Geometrias tão temidas não veio de experiências, mas das diferentes formas de negar do famoso quinto postulado de Euclides, o que era completamente contra intuitivo. Segue o postulado na forma euclidiana:

> Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs e du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits. (EUCLIDES, 300 a. C, p. 175).[63]

Uma forma mais simples, e equivalente, seria dizer que: no plano, dados uma reta e um ponto, só existe uma paralela à reta dada que passe por esse ponto. Essa versão é conhecida como axioma de Playfair, devido ao matemático de mesmo

63 E que, se uma reta cortar duas retas, fazendo ângulos interiores e do mesmo lado (colaterais) menor que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram no lado onde estão os ângulos menores que dois retos.

nome (BARKER, 1969, p. 48).

Podíamos dizer assim que foi uma “descoberta *a priori*” e, mesmo assim, isso não foi suficiente para a sua aceitação, visto que era considerada como um jogo, uma Geometria imaginária. Foi somente após as apresentações de modelos por Beltrami, Klein e Poincaré (BONGIOVANNI, 2007, p. 25) que elas foram aceitas; assim como ocorreu com os números complexos, o modelo foi feito com objetos da própria Geometria euclidiana.

Como vemos desses exemplos, não basta uma gênese *a priori*, pois sempre ficará a dúvida, faltando o ponto de apoio que Kant argumenta. De fato, a Matemática pode até ser originada em um sonho ou de uma “iluminação” – isto é, a solução vir de forma repentina – (HADAMARD, 2009), mas esse processo não fará com que alguém a aceite e, assim, ela precisará de um modelo que a justifique, ou seja, de um contexto da justificação que, como já mencionado, é uma construção social. É isso que podemos chamar de problema de demarcação, pois se não há alguma construção empírica para servir de base a uma teoria, então não é possível saber se é Matemática ou não, se é Ciência ou não; assim como não temos meios de saber se os anjos possuem duas ou três cabeças.

Além disso tudo, no caso do sonho ou da “iluminação”, também não é fácil sustentar um apriorismo, visto que estes processos são precedidos de situações do nosso cotidiano. No capítulo 7.3, vemos que o sonho reproduz e embaralha dados da nossa experiência.

O exposto acima leva a entender que uma teoria pode ter diversas formas de justificação, o que é conhecido como super-determinação epistêmica; e essa característica é usada por Albert Casullo para alegar que as ideias empiristas de Mill e Quine não são definitivas contra a existência do apriorismo. O que vemos em seu artigo “Epistemic Overdetermination and A Priori Justification” (CASULLO, 2005), parece uma tentativa desesperada de salvar a justificação *a priori*. Se uma sentença *a priori* é aquela que não pode ser negada por uma experiência – seja ela qual for – e se sustentarmos que a tese quineana de que nada é imune a revisão de uma experiência, isso nos conduzirá, segundo Casullo, a admitir uma justificativa *a priori* da Matemática.

Vamos supor uma sentença p que pode ser justificada por uma experiência

A, mas, como nada é imune a revisão, pode existir uma experiência B que negue p, ou C que afirme p novamente, logo, p se manteria imune à experiência, visto que nem A e nem B podem ser conclusivas; assim, deve existir uma justificativa *a priori* para p; ou seja, uma sentença Matemática pode ter uma justificativa empírica e *a priori*.

O mesmo argumento acima poderia ser usado para uma sentença p que fosse uma invenção nossa, totalmente fantasiosa; mas para essa invenção, poderíamos ter dificuldades de encontrar uma justificação empírica, assim, vemos mais uma vez a importância da experiência como forma de delimitar o que é delírio (ausência de super-determinação epistêmica em alguns casos) e o que é Matemática (presença de super-determinação epistêmica). Além disso, essa imunidade à experiência já foi discutida no capítulo 4.5, na crítica a Poincaré e ela seria apenas em virtude da “fuga dos falseadores”, isto é, p estaria sendo, de fato, revisada por cada uma das experiências A, B e C.

O que se tem visto ao longo dos anos, através da História, é que Matemáticas muito longe da intuição sofrem para serem aceitas e, como mais um exemplo disso, podemos citar os infinitos de Cantor. Embora sua teoria não pareça ter qualquer relação com a sensibilidade, ela se mostrou consistente com os demais objetos básicos oriundos de relações com o mundo físico; caso isso não acontecesse, ela seria, até hoje, renegada como uma fantasia.

5.2 PIRAHÃ E ARITMÉTICA DO RELÓGIO

No capítulo 4.1, vimos a tribo indígena da Amazônia conhecida como Pirahã, a qual não possui um conceito formado de número. Também sabemos que o desenvolvimento da Matemática pode ter influências sociais (JULIANI, 2008). Com isso, podemos questionar: seria possível os Pirahãs desenvolverem uma nova Aritmética baseada em sua sociedade? O que determinaria a Aritmética “certa”? Mais uma vez, aparece a questão do problema de demarcação.

Os conservadores, provavelmente, responderiam que a tribo indígena pode sim desenvolver uma outra Aritmética, mas, assim como aconteceu com os chineses, eles também desenvolveriam a nossa tradicional do $2+2=4$ (JULIANI, 2008). E os conservadores, ainda, tentariam alegar que: caso alguém, ou uma tribo, almejasse construir um sistema para fazer cálculos, seja quem quer que seja e viva em qualquer lugar, seria impossível não desenvolver a nossa Aritmética.

As pessoas não conseguem perceber que a tensão entre as duas Aritméticas – a tradicional e a modular – é do mesmo tipo que a existente entre as Geometrias euclidiana e não euclidianas; isto é, nos dois casos existe um axioma que, se alterados, mudam completamente o jogo. Vejamos a definição Matemática de Domínio, ou Domínio de integridade (GARCIA-LEQUAIN, 1988, pp. 4-5):

Domínio. O conjunto D – munido das operações $+$ e $.$, chamadas, respectivamente, de adição e multiplicação – é um Domínio se satisfizer as seguintes condições:

1. $\forall x, y, z \in D$, $(x+y)+z=x+(y+z)$ - A adição é associativa.
2. $\exists 0 \in D$, tal que $0+x=x$ e $x+0=x$, $\forall x \in D$ - A existência do elemento neutro da adição.
3. $\forall x \in D$, $\exists z \in D$, tal que $x+z=0$ e $z+x=0$ - Todos os números de D possuem elemento inverso.
4. $\forall x, y \in D$, $x+y=y+x$ - A adição é comutativa.
5. $\forall x, y, z \in D$, $(x.y).z=x.(y.z)$ - A multiplicação é associativa.
6. $\exists 1 \in D$, tal que $1.x=x.1=x$ $\forall x \in D$ - A existência do elemento neutro da multiplicação.
7. $\forall x, y \in D$, sendo $x \neq 0$ e $y \neq 0$, temos que $x.y \neq 0$ - A multiplicação de dois números diferentes de zero (elemento neutro da adição) também é diferente de zero.
8. $\forall x, y \in D$, $x.y=y.x$ - A multiplicação é comutativa.
9. $\forall x, y, z \in D$, $x.(x+y)=x.y+x.z$ - A Adição é distributiva em relação à multiplicação.

Se o axioma 7 não for satisfeito – ou seja, se $\exists\ \forall_{x,y} \in D$, sendo $x \neq 0$ e $y \neq 0$, tal que $x.y=0$ – então essa estrutura deixa de ser um Domínio e passa a ser um Anel, surgindo, assim, a Aritmética Modular em vez da tradicional; e, dessa forma, pode acontecer de $2+2=0$.

Não existe qualquer argumento *a priori* que possa decidir qual versão do axioma 7 devemos seguir; para isso, é necessário um modelo, algo que possa decidir se é uma fantasia ou não; mais uma vez, o problema da demarcação entre realidade e fantasia.

Voltando a pergunta sobre a tribo Pirahã, sim, eles poderiam desenvolver uma outra Aritmética conforme a sua sociedade e também a nossa Tradicional, mas não porque está última seja inevitável, e sim porque eles vivem no mesmo mundo que nós e sob as mesmas leis da Física, o que faz com que eles tenham experiências iguais a nossa, embora possuam uma visão diferente. Em um mundo com uma estrutura e com leis físicas completamente diferentes das nossas, a nossa Aritmética poderia nem ser possível, ou seja, poderia ser que nem existisse um modelo para satisfazer seus axiomas, isto é, um modelo em que os axiomas de Peano fossem verdadeiros.

O último trunfo dos conservadores seria dizer que: embora, as leis físicas fossem diferentes, ainda poderíamos, mentalmente, fazer operações aritméticas tradicionais, imaginando cada objeto de forma separada. No entanto, se aceitarmos a "Astonishing Hypothesis", mencionada no capítulo 3.3, a qual sustenta que não existe um mundo imaterial, sendo nossos pensamentos decorrentes do comportamento de um conjunto de nervos e moléculas e processos químicos, ou seja, se admitirmos o empirismo de Carl Behrens, então este argumento dos conservadores também seria derrubado, pois estariam, também, os nossos pensamento, sob as leis daquele mundo.

6 ALGUMAS DIFICULDADES DO EMPIRISMO

Diante das evidências e do sentimento crescente entre os pensadores, talvez fosse mais simples dizer que a Matemática é empírica, *a posteriori*. No entanto, o próprio empirismo enfrenta dificuldades como uma forma possível de conhecimento. Uma das dificuldades é saber: como é possível ter um conhecimento a partir da experiência, a qual se mostra enganosa? Uma outra é: como é possível conhecer alguma coisa – ter alguma opinião ou crença – somente a partir das impressões dos sentidos se toda teoria depende de um conhecimento prévio? Neste capítulo, vamos analisar as questões expostas acima.

A primeira questão é mais fácil de resolver se alterarmos o que se entende por conhecimento, o que, para muitos, pode parecer uma solução *ad hoc*, mas não é. Por que o Conhecimento tem que ser eterno, imutável e outros adjetivos que são mais adequados ao discurso religioso? Muitos ainda podem alegar que, ao agir dessa forma, o problema não é resolvido, pois apenas se altera a pergunta do problema para: como saber qual é o conhecimento verdadeiro, mais confiável? Ou seja, como diferenciar da crença?[64] Obviamente, dessa forma, confiabilidade e verdade vão depender de fatores pragmáticos, sociais, etc.

De fato, não há nada que nos faça crer que exista algo eterno e imutável, embora isso não implique que não exista a eternidade. Mesmo assim, ainda seria

64 O vocábulo “crença” não é empregado com o sentido, necessariamente, religioso, e sim como algo que podemos saber, ainda que esteja mal fundamentado, como uma opinião pode estar. Exemplo, se dissermos: “Existe a geração espontânea”; isso será uma crença, visto que foi baseado em Conhecimentos anteriores e na experiência, embora esteja errado.

possível argumentar que a Matemática nos faz crer que possa sim existir algo eterno, mas isso contraria os argumentos apresentados nos capítulos precedentes desta tese. É, portanto, mais prudente deixar a eternidade para o discurso religioso, cosmológico ou filosófico que não seja a epistemologia. O conhecimento eterno foi um resquício da busca grega pela imparcialidade.

Esse entendimento não é novo, afinal já até foi citado no capítulo 3.3 (página 48) como a posição do filósofo inglês Carl Behrens. Se tudo na natureza muda, então o Conhecimento sobre ela também pode mudar. Parece imutável o Conhecimento de que se largamos uma pedra na Superfície da Terra, ela irá cair; no entanto, é possível imaginar uma alteração nas leis da Física de modo a alterar esse evento, ainda que seja improvável. O mesmo pode acontecer com os conhecimentos da Matemática, visto que a mesma é sobre o mundo e as relações que nele se encontram.

Uma análise crítica da História pode nos mostrar o exposto nos últimos parágrafos acima. Dentre todas as explicações para o surgimento da demonstração na Matemática, da Lógica e da democracia grega, a mais curiosa e interessante é aquela na qual tudo isso emergiu devido a busca dos gregos pela imparcialidade, uma característica que não é própria dos deuses do panteão grego (PENSADORES, 1996, p. 6-8).

No quinto canto, dos versos 1008 até o 1020 da Ilíada, transcritos abaixo, Homero descreve a queixa de Ares feita a Zeus; ele reclamava de Atena que incitou Diomedes e, o mesmo, lhe feriu. Percebe-se que os deuses gregos são movidos pelos seus próprios interesses e estes possuem tantos desejos conflitantes quanto os homens; o Olimpo é movido pela paixão! Como, então, delegar aos deuses as explicações das causas da natureza ou das “leis” do pensamento? Seriam confiáveis, essas explicações? Dessa forma foi preciso criar um “deus” mais poderoso e confiável; foi preciso criar o “deus” chamado razão. Assim, nessa transição entre “deuses”, certas características se mantiveram: o conhecimento verdadeiro – a episteme – com toda a sua pujança e confiabilidade, “esnobando” com seu *status* ontológico, “mostrando” o eterno, o imutável.

> We everlasting gods... Ah what chilling blows
> we suffer – thanks to our own conflicting wills –
> whenever we show these mortal men some kindness.
> And we all must battle you –
> you brought that senseless daughter into the world,
> that murderous curse – forever bent on crimes!
> While all the rest of us, every god on Olympus
> bows down to you, each of us overpowered.
> But that girl –
> you never block her way with a word or action, never,
> you spur her on, since you, you gave her birth
> from your own head, that child of devastation!
> Just look at this reckless Diomedes now –
> Athena spurred him on to rave against the gods.[65] (HOMERO, séc. VII a. C., p. 193).

Já a segunda dificuldade do empirismo, apresentada acima, pode ser compreendida com duas ilustrações: o dicionário de sinônimos de um idioma desconhecido e a computação. Vamos supor que não temos conhecimento algum de italiano e que não exista vocábulos semelhantes entre o italiano e o português. Tomemos, como exemplo, o vocábulo “eppure” e busquemos no dicionário. Um dos sinônimos encontrados é “nondimeno”, como, por suposição, não sabemos coisa alguma de italiano, continuamos sem ter ideia do que significa “eppure”. Ao procedermos a busca pelo dicionário, encontraremos o vocábulo “tuttavia” e, mais uma vez, não alcançamos o nosso objetivo de Conhecermos o que significa o vocábulo “eppure”. Se continuarmos a nossa busca, indefinidamente, chegaremos ou ao mesmo vocábulo de origem, ou encontraremos um outro com um significado bem distinto do significado do vocábulo original e mesmo assim não saberemos o que significa.

As únicas formas de saber o significado de “eppure” seriam ou usando um Conhecimento prévio, no caso, o português, ou associando um dos sinônimos a

---

65 Nós, deuses eternos... ah, que golpes arrepiantes
sofremos – graças às nossas próprias vontades conflitantes –
sempre que mostramos alguma bondade a esses mortais.
E todos nós devemos te confrontar –
você trouxe essa filha insensata ao mundo,
essa peste assassina sempre empenhada ao crime!
Enquanto nós outros todos, cada deus do Olimpo
se inclina a você, cada um de nós, subjugados.
Mas essa garota, você nunca a repreende com uma palavra ou atitude, nunca,
você a incentiva, já que, trouxe a vida,
você mesmo, essa filha da perdição.
Dê só uma olhada para o ousado Diomedes agora –
Atena o incentivou a se enfurecer contra os deuses.

alguma experiência que pudesse explicar o significado de algum desses sinônimos. No caso do uso do português, bastaria, apenas, que conhecêssemos a tradução de um dos sinônimos. No entanto, com relação à experiência, o caso se complica, pois como seria feita essa associação?

A grande dificuldade do empirismo é explicar como a experiência pode gerar um Conhecimento, ou até mesmo uma crença, se não existe qualquer Conhecimento ou categoria que podem ser chamados de *a priori*. Em computação, a nossa segunda ilustração, se usa a notação binária, a qual é representada unicamente pelo número zero e o número um. Normalmente, o número zero representa uma variação de tensão entre zero e dois e meio volts e o número um, acima de dois e meio até cinco volts. Essas tensões elétricas seriam as únicas experiências possíveis no mundo computacional[66] e as sequências de zero e um, o registro das impressões dos sentidos. Considere, agora, um dispositivo de armazenamento, um *hard disk* (hd), por exemplo; neste dispositivo, teremos apenas as impressões dos sentidos, ou seja, sequências de zero e um. Para que a sequência de zero e um possa ser lida e tenha algum significado, é preciso que, primeiro, o hd tenha sido formatado em alguma convenção preestabelecida de gerenciamento de arquivos, seja em FAT32, ReiserFS, Ext3, NTFS ou em alguma outra; e em segundo lugar, é preciso que cada sequência de zero e um, chamada de arquivo, esteja em algum formato preestabelecido, seja em PNG, GIF, ODT, DOC ou em algum outro. Ou seja, para ter um Conhecimento do que está armazenado, é preciso de Conhecimento prévio, caso contrário, o dispositivo será apenas um amontoado de sequências de zero e um sem sentido. As impressões dos sentidos por si só não geram conhecimento.

Percebe-se, também, que no momento das gravações das sequências de zero e um, já foram usadas convenções de gerenciamento de arquivo e de formato de arquivo, pois não se procede do caos até encontrar algum significado, a não ser que fosse um trabalho de engenharia reversa,[67] no qual uma série de conhecimentos

---

66 Não entrarei em detalhes dos mais diversos tipos que são convertidos em tensão elétrica, como um leitor óptico, por exemplo, ou o próprio teclado, que converte energia mecânica em uma sequência de tensões elétricas.

67 Engenharia reversa – quando se usam esforços para descobrir como uma determinada tecnologia foi alcançada. A partir de uma solução pronta, busca-se descobrir como chegar até ela, sem conhecer o caminho que foi seguido.

prévios seriam considerados.

A ilustração acima pode ser relacionada com a nossa memória. O erro dos empiristas é achar que apenas com a impressão dos sentidos se pode gerar Conhecimento. É necessário que haja algo anterior que possibilite registrar as impressões dos sentidos já como uma forma de conhecimento, por isso, deve haver algo *a priori*.

7 ENTRE O EMPIRISMO E O APRIORISMO

Nos capítulos anteriores, vimos as dificuldades tanto do empirismo quanto do apriorismo em relação a possibilidade do conhecimento. No entanto, vimos que a Matemática possui algumas características empíricas e que todo Conhecimento necessita de algum outro anterior. Desta forma, buscamos encontrar um meio-termo entre o empirismo e o apriorismo para poder fundamentar todo o Conhecimento, observando o que tem de novo na Neurociência.

Um ponto importante a esclarecer é que esta fundamentação deve ser consistente, obviamente; contudo, não devemos esperar que dela só provenham Conhecimentos ou crenças consistentes, pois a percepção de nossas contradições, quando não muito triviais, só aparecem posteriormente com o amadurecimento; ou seja, produzimos sim crenças ou Conhecimentos inconsistentes e, desta forma, não podemos esperar que uma teoria forneça apenas sistemas perfeitos, pois ela estaria longe da realidade; até porque a ideia de “sistema perfeito” muda com o tempo, afinal, basta lembrar que da perfeita axiomatização da Geometria feita por Euclides passamos para a de Hilbert, condenando as imperfeições euclidianas (JULIANI, 2010).

Um exemplo, bastante emblemático, de que produzimos Conhecimento inconsistente é o caso do logicismo de Frege em seu “Fundamentos da Aritmética” (1884), o qual era inconsistente conforme foi mostrado por Russell (EVES, 2011, p. 675); ou seja, até grandes lógicos produzem inconsistências.

Iniciando a nossa busca, esperamos que desse meio-termo almejado se deva emergir um conceito que não seja necessariamente um Conhecimento e que o mesmo seja indubitavelmente *a priori*; e, ainda, tal conceito deve possibilitar o Conhecimento através das impressões dos sentidos. Para não cometer o mesmo erro dos outros pensadores como Kant, por exemplo, não devemos examinar uma mente já adulta, amadurecida, isto é, devemos nos concentrar na origem do Conhecimento, devemos procurar por tal conceito no momento da vida em que se inicia o aprendizado. Sendo assim, de acordo com a Neurociência moderna (SCHWAB, 2009; RIBEIRO, 2003), devemos procurar no momento da gestação, ou seja, um feto deve possuir o tal conceito *a priori* gerador do Conhecimento. Além disso, se existem questionamentos sobre o apriorismo da Matemática e da Lógica, então nossa busca não se concentrará nessas disciplinas.

Agora, que sabemos o que procuramos, podemos perceber que se trata de um instinto, ou seja, aquilo que surge independente de reflexão, ou melhor, o que procuramos é aquilo que nos faz agir sem pensar, algo inerente à nossa vida, a estrutura do nosso corpo. E o que estaria presente em humanos de qualquer idade, até mesmo em um feto e em animais? É o princípio da Homeostase, ou seja, ele é o gerador do Conhecimento; é o responsável pela formação dos primeiros conceitos – aos quais chamaremos de "Conhecimento *Incitavita*" – de acordo com a percepção dos objetos dados na sensibilidade.

Para compreender como a Homeostase pode gerar crença e Conhecimento, devemos analisar a Teoria das Motivações, além disso, entender como o sono e o sonho desempenham um papel fundamental no processo de aprendizagem. Ainda mais, o que também nos ajuda a conhecer é a nossa Incapacidade de Precisão. A partir desse ponto, podemos derivar as noções rudimentares dos princípios lógicos.

7.1 A HOMEOSTASE E O CONHECIMENTO *INCITAVITA*

O que é a Homeostase? Como Ela pode gerar uma crença e um Conhecimento, o qual chamaremos de *Incitavita* e que será a base para todo Conhecimento? Se Ela está presente em seres vivos, poderiam espécies de outro reinos, como o vegetal, por exemplo, produzir Conhecimento? Para responder a essas perguntas, vamos buscar informações na psicologia, através das Teorias da

Motivação e na neurociência; lembrando que esta é uma pesquisa epistemológica, e não de psicologia ou neurociência, portanto, este tema não será esmiuçado sobre as perspectivas dessas disciplinas.

A Homeostase é um conceito que teve suas origens nos trabalhos sobre o sistema social de Vilfredo Pareto, mas que tomou forma e se difundiu com Walter Bradford Cannon (RODRIGUES, 2013) e significa:

> […] a tendência que organismos vivos têm em manter ou retornar ao estado de equilíbrio sempre que este for alterado por condições adversas (perturbações), externas ou mesmo internas ao seu funcionamento. Numa série de processos tanto em nível fisiológico como bioquímico, a homeostase está presente. (RODRIGUES, 2013, p. 171)

Dessa forma, este equilíbrio está relacionado com o teor de água no sangue, o teor de sal, dos açúcares, das gorduras, das vitaminas etc, gerando necessidades fisiológicas, mas nem todas as necessidades são, comprovadamente, homeostáticas como, por exemplo, o desejo sexual e a sonolência (MASLOW, 1943, p. 372).

No capítulo anterior, vimos a necessidade de guardarmos (memorizar) as impressões dos sentidos já como uma forma de Conhecimento, assim seria a Homeostase a responsável por registramos estas impressões – não de forma separada, mas como uma tríade estímulo-resposta-consequência – classificando-as conforme a utilidade na manutenção do equilíbrio do nosso organismo. Esse Conhecimento rudimentar, obtido desse processo, é o que vamos chamar de ***Incitavita***. O vocábulo é a junção de dois termos latinos "in*cita*" e "*vita*" que significa "que deve ser estimulado pela vida".[68]

A primeira vista, podemos pensar que os Conhecimentos *Incitavita* só são possíveis porque já temos os princípios lógicos formados em nossas mentes, mas é o contrário, aqueles, junto com os sonhos, é que possibilitam a formação desses últimos, o que pode ser visto na seção 7.4. Além disso, a definição de Homeostase não envolve a ideia de raciocínio.

Alguém, ainda, poderia argumentar que nem sempre as atitudes que tomamos são as melhores para os nossos corpos e, com isso, a Homeostase não

68 O termo "i*ncita*" está no gerundivo, também conhecido como particípio futuro passivo, do verbo "i*ncitare*", que significa "estimular", "impulsionar"; No latim, o gerundivo indica uma obrigação, algo que deve ser feito. O termo deve ser inflexível quanto ao gênero e ao número.

seria a melhor explicação para os Conhecimentos *Incitavita*, pois podem existir outras motivações que desconhecemos. Claro que podem existir motivações desconhecidas até o momento, mas não podemos misturar diferentes fases da vida, pois as escolhas que fazemos hoje não são necessariamente as mesmas do início das nossas vidas; para entender isso, vejamos um pouco da Teoria das Motivações de Maslow (1943; 1970).

Em sua Teoria das Motivações Humanas, Maslow estabelece uma hierarquia para as nossas necessidades, as quais ele divide em cinco grupos: necessidades fisiológicas, de segurança, de amor e afeto, de autoestima e de autorrealização. A primeira, a fisiológica, regida pela Homeostase, é a mais básica de todas; os seres humanos só buscam as outras quando ela é satisfeita. Já a última é a mais fraca de todas.

> Undoubtedly these physiological needs are the most prepotent of all needs. What this means specifically is, that in the human being who is missing everything in life in an extreme fashion, it is most likely that the major motivation would be the physiological needs rather than any others. A person who is lacking food, safety, love, and esteem would most probably hunger for food more strongly than for anything else.
> If all the needs are unsatisfied, and the organism is then dominated by the physiological needs, all other needs may become simply non-existent or be pushed into the background.[69] (MASLOW, 1943, p. 373).

Assim, como estamos analisando o início da vida, imaginamos que nenhuma das necessidades são satisfeitas, fazendo com que o nosso organismo seja dominado pelas necessidades fisiológicas, reguladas pela Homeostase e gerando os Conhecimentos *Incitavita*, os quais serão a base para a formulação de crenças e Conhecimentos.

O neurocirurgião Vertosick (2000, p. 2) afirma que formigas não evitam o fogo por causa da dor, por exemplo, elas apenas sabem que precisam evitar; talvez,

---

69 Sem dúvidas essas necessidades fisiológicas são as mais predominantes de todas as necessidades. O que isso significa especificamente é que um ser humano com falta de tudo na vida de uma forma extrema, é mais provável que sua maior motivação seja as necessidades fisiológicas mais do que qualquer outra. Uma pessoa que está sem comida, segurança, amor autoestima estaria, provavelmente, mais avidamente desejando comida do que qualquer outra coisa.
Se nenhuma necessidade é satisfeita, o organismo é então dominado pelas necessidades fisiológicas e, todas as outras, podem simplesmente se tornarem inexistentes ou serem empurradas para o segundo plano.

esse Conhecimento das formigas seja homeostático. Embora a afirmação de Vertosick possa ser questionável, sabemos que pessoas com a falta dessa habilidade sensitiva são capazes de obter crenças e Conhecimentos, logo, a Homeostase não pode ser reduzida à dor – embora a auxilie – pois há vida e Conhecimento sem ela.

Pessoas que são incapazes de sentirem dor ou com uma sensibilidade reduzida) são portadoras da síndrome de Riley-Day, uma doença rara quase que exclusiva de descendentes do leste europeu de um ramo do judaísmo conhecido como asquenaze (MANCINI, 1990, p. 202). Essas pessoas, dentre inúmeros sintomas, apresentam um atraso no aprendizado:

> Its symptoms and signs as a life-long disorder include defective lacrimation with an inability to shed tears when crying, corneal ulceration, absent corneal, axonal, and tendon reflexes, unstable blood pressure with episodes of hypertension and postural hypotension, unstable body temperature, vomiting spasms, profuse sweating, sialorrhea, impairment of vestibular function, repeated infections, an initial delay in mental development (with the subsequent achievement of intellectual parity with one's peers by age 4)[...][70] (MANCINI, 1990, p. 202).

E isso parece mostrar que a dor tem um papel importante na cognição. De fato, Vertosick, por outros motivos, sustenta exatamente isso:

> Pain only matters to organisms with an advanced talent for learning, remembering, and adapting. Buddha's dogma must therefore be reformulated: Pain isn't synonymous with life; it's synonymous with *intelligence*. Cognition of pain, like cognition in general, requires sophisticated neurological hardware.[71] (VERTOSICK, 2000, p. 2).

Contudo há aprendizado, mesmo na ausência da dor, pois há equiparação intelectual e alguns continuam crescendo, produzindo crenças e Conhecimentos,

---

70 Seus sintomas e sinais, além de transtornos ao longo da vida, incluem lacrimejamento defeituoso com uma incapacidade de derramar lágrimas quando choram, ulceração da córnea, ausência corneana, dos axônios e de reflexos dos tendões, pressão sanguínea instável com episódios de hipertensão e hipotensão postural, temperatura do corpo instável, vômitos, sudorese em demasia, sialorreia, comprometimento da função vestibular, infecções recorrentes, um atraso inicial no desenvolvimento mental (com o subsequente alcanço da equiparação intelectual com seus semelhantes a idade de 4 anos).

71 A dor só interessa a organismos com um talento avançado para a aprendizagem, memorização e adaptação. Por isso, o dogma de Buda deve ser reformulado: dor não é sinônimo de vida; ela é sinônimo de *inteligência*. A cognição da dor, como a cognição em geral, requer um sofisticado hardware neurológico.

tendo uma vida “normal” com sérios riscos de se machucarem gravemente, conforme vemos no documentário “A Life Without Pain”[72] (GILBERT, 2005); isso porque os organismos dessas pessoas buscam o equilíbrio homeostático, embora com maior dificuldade, o que podemos ver com as temperaturas e pressões instáveis e, por isso, causam um atraso na aprendizagem.

Sustentar que a Homeostase é fundamental para a cognição nos fornece um outro questionamento, a saber: outros organismos vivos, como as plantas, por exemplo, podem formar uma Crença ou Conhecimento? Não podemos esquecer que estes Conhecimentos precisam ser armazenados, ou seja, memorizados; assim, se estes organismos não apresentam estruturas para a memorização, eles não poderão aprender com a sua própria regulação e, consequentemente, não poderão gerar Conhecimento, a menos que possuam algum outro mecanismo.

No entanto, algumas plantas podem, realmente, produzir os *Incitavita*. Em um artigo de Monica Gagliano (et al, 2014), ela e sua equipe buscam saber se as plantas podem ser ensinadas, isto é, se elas podem aprender. Gagliano utilizou a espécie “Mimosa Pudica”, conhecida popularmente como dormideira, pois, quando elas recebem um estímulo mecânico em suas folhas, como passar a mão, elas se fecham rapidamente como se fossem dormir; acredita-se que esse fechamento das folhas, segundo Gagliano (et al, 2014, p. 64), seja uma tática para reduzir o risco de predação. Para conseguir a resposta, a equipe de pesquisadores usou um dos tipos de aprendizagem mais básicos: a habituação:

> We have performed this test here by applying ecological theory developed for animals [...] to the defensive leaf-folding reflex of Mimosa pudica [...], a plant known for its leaf-folding behaviour in response to physical disturbance [...], to examine the behavioral phenomenon of habituation in this plant. Often considered to be the simplest form of learning, habituation is an adaptive process that enables an organism to focus on the important information in its environment, while filtering out stimuli or events that, over time, have repeatedly proven to be irrelevant and innocuous.[73] (GAGLIANO

---

72 Uma Vida Sem Dor.

73 Nós fizemos este teste aqui, aplicando teoria ecológica desenvolvida para animais […] ao reflexo defensivo de compactação de folhas da Mimosa pudica […], uma planta conhecida por seu comportamento de compactação de folhas em reposta a uma perturbação física […], para examinar o fenômeno comportamental da habituação nesta planta. Normalmente considerada como a forma mais simples de aprendizagem, a Habituação é um processo adaptativo que permite os organismos focarem em informação importante em seu ambiente, enquanto exclui estímulos ou eventos que, ao longo do tempo, se mostram repetidamente irrelevante e inócuo.

et al, 2014, p. 64).

Esse processo de habituação também é homeostático:

> One way of viewing these two behavioral changes, i.e. habituation and sensitization,[74] is that they are homeostatic processes which optimize an organism's likelihood of detecting and assessing the significance of a stimulus in a new iterative series or a change in it.[75] (EISENSTEIN et al, 2001, p. 251).

Assim, vemos que os resultados, obtidos pela equipe sobre a cognição das plantas, estão ligados à Homeostase, mostrando, então, ser um Conhecimento *Incitavita*.

O experimento com a dormideira consistiu em fazê-la se habituar a um estímulo não perigoso para verificar se ela aprenderia a ignorá-lo. Dessa forma, submeteram um vaso com a planta a diversas quedas de quinze centímetros; esse evento era reconhecido por ela como perigoso, pois ela fechava as suas folhas; mas, como o evento era inofensivo, ela parou de fechar as folhas e pode reter essa informação por, pelo menos, vinte e oito dias. Ao contrário do que se possa pensar, a planta não perdeu a sua capacidade de fechar suas folhas, pois ao passar por um processo de desabituação, ela voltou ao comportamento anterior (GAGLIANO et al, 2014, pp. 65-70).

7.2 A INCAPACIDADE DE PRECISÃO

É verdade que desde pequenos, estamos sujeitos a milhares de experiências sensoriais; identificar cada uma no meio de tantas é uma tarefa desafiadora, talvez até impossível. O que ajuda a nossa estrutura cognitiva nesse processo de memorização e identificação é a nossa Incapacidade de Precisão, visto

---

74 A sensibilização é o oposto da habituação; um organismo pode não responder a certos estímulos de início, mas ao perceber que se trata de uma ameaça ao equilíbrio homeostático, ele começa a reagir. (EISENSTEIN, 2001, p. 251)

75 Uma maneira de ver essas duas mudanças comportamentais, isto é, a habituação e a sensibilização, é que elas são processos homeostáticos que otimizam a probabilidade de um organismo detectar e estimar a importância de um estímulo em uma nova série iterativa ou uma mudança nela.

que, dessa forma, várias experiências distintas podem ser identificadas como uma única e isso vai proporcionar a possibilidade de identificar uma experiência como repetida. Sem repetição não há Conhecimento, pois tudo seria novo e não haveria como relacionar as experiências entre si.

Imagine que estivéssemos mudando de ambientes com temperaturas, diferentes entre si, de menos de um décimo de grau Celsius, assim, nosso organismo, por ser incapaz, não perceberia a diferença e atribuiria a uma única experiência.

Poincaré mencionou a nossa Incapacidade de Precisão ao tentar explicar como criamos o conceito da continuidade na Matemática, mas Poincaré não percebeu que a nossa Incapacidade de Precisão é condição para o Conhecimento:

> On a observé, par exemple, qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes: $A=B$, $B=C$, $A<B$, qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique.
> Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable, et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraints à inventer le continu mathématique.
> On est donc forcé de conclure que cette notion a été créée de toutes pièces par l'esprit, mais que c'est l'expérience qui lui en a fourni l'occasion.
> Nous ne pouvons croire que deux quantités égales à une même troisième ne soient pas égales entre elles, et c'est ainsi que nous sommes amenés à supposer que A est différent de B et B de C, mais que l'imperfection de nos sens ne nous avait pas permis de les discerner.[76] (POINCARÉ, 1902, p. 40).

Como todas as sensações vindas de nossos sentidos são simultâneas, a

76 Observamos, por exemplo, que um peso A de 10 gramas e um peso B de 11 gramas produziam sensações idênticas, o peso B também não poderia ser discernido de um peso C de 12 gramas, mas se distinguiria facilmente o peso A do peso C. Os resultados brutos da experiência podem, portanto, ser expressos pelas relações seguintes: $A=B$, $B=C$, $A<B$, que podem ser vistos como a fórmula do contínuo físico.
Existe aí, com o princípio da contradição, um desacordo intolerável e é a necessidade de acabar com isso que nós obrigou a inventar o contínuo matemático.
Estamos, portanto, forçados a concluir que essa noção foi criada somente pela mente, mas a experiência é que forneceu a ocasião.
Nós não podemos acreditar que duas quantidades iguais a uma mesma terceira não sejam iguais entre si e, assim, somos levados a supor que A é diferente de B e B de C, mas que a imperfeição de nossos sentidos não nos permitiu discernir.

Incapacidade de Precisão também nos auxilia, em alguns casos, a isolar uma experiência. Por exemplo, imagine que todas as sensações são mínimas de modo que o nosso organismo não consegue perceber como experiências distintas e, de repente, apenas um tipo de sensação causa o desequilíbrio homeostático; com isso, o nosso organismo seria capaz de classificar (identificar ou apontar) essa experiência de uma forma negativa para o seu próprio equilíbrio. Este processo de isolar uma experiência também é feito pela habituação, um processo homeostático mencionado na seção 7.1.

Para cada estímulo, o organismo tem uma reação, assim, se ele consegue perceber que houve a repetição de um estímulo, ele teria mais facilidade em dar a resposta de forma mais eficiente, por isso, essa capacidade de identificar a repetição possibilita a formação da ideia de igualdade, pois seria um meio encontrado pelo nosso organismo de tornar a Homeostase mais eficiente. Obviamente não é uma igualdade estrita e, possivelmente, leva um bom tempo para que nossa estrutura cognitiva (nossa mente) perceba isso como um conceito e não apenas como algo operacional.

7.3 A FUNÇÃO DO SONO

O sonho têm um papel fundamental nos processos de aprendizagem, pois eles são importantíssimos para a memória (RIBEIRO, 2003). Além disso, o sono REM[77] – o qual está relacionado com a criatividade (CAI et al, 2009) – nos ajuda a *f*ormar o princípio da não contradição. E, também, uma das formas de concluir que o aprendizado se inicia ainda no período de gestação é feita através das informações que temos da função cognitiva do sonho.

Sidarta Ribeiro nos mostra que durante o sono, nosso cérebro repete os padrões das experiências que tivemos durante o período de vigília para que possamos memorizá-los e que esse processo ocorre tanto no sono sem sonho, quanto no sono com sonhos (sono REM); este último, responsável pela memória de

---

77 Rapid Eye Movement (Movimento Rápido dos Olhos).

longo prazo:

> […] a ciência começou a reconhecer o papel decisivo do sono na consolidação de memórias. Os principais achados a favor desta visão são: o efeito negativo da privação de sono sobre a aprendizagem, o aumento da quantidade de sono após a aquisição de memórias, e o fato de que ritmos hipocampais típicos do estado de alerta comportamental também caracterizam o sono REM [...] Conforme expus acima, a noção de que o sistema nervoso adormecido reativa-se de maneira a repetir padrões de atividade da vigília é um fato científico amplamente verificado para ambas as fases do sono. Existe ainda sólida evidência de que a reativação neural durante o sono provoca o processamento neurofisiológico e gênico das memórias recentes, explicando o papel central do sono e sobretudo dos sonhos no aprendizado. (RIBEIRO, 2003, pp. 60-61).

> […] electrophysiological and molecular data suggesting that SW and REM sleep play distinct and complementary roles on memory consolidation: While postacquisition neuronal reverberation depends mainly on SW sleep episodes, transcriptional events able to promote long-lasting memory storage are only triggered during ensuing REM sleep.[78] (RIBEIRO & NICOLELIS, 2004, p. 686).

Assim, podemos concluir que os fetos podem aprender, com base na constatação da presença do sono REM intrauterino (SCHWAB et al, 2009); e, também, através de experiências, nas quais é possível verificar a aprendizagem por habituação (DIRIX et al, 2009), condicionamento clássico[79] e *imprinting* (aprendizagem por exposição)[80] nos fetos: “There is a large amount of evidence from habituation, classical conditioning and exposure learning research in animals and humans that the fetus can learn.” [81] (JAMES, 2010, p. 51).

---

78 Dados moleculares e eletrofisiológicos sugerem que os sonos sem sonhos e o REM desempenham papéis distintos e complementares na consolidação da memória: enquanto a reverberação neural de pós aquisição depende principalmente de episódios do sono sem sonhos, eventos transcricionais capazes de promover o armazenamento da memória de longa duração são acionados durante o sono REM que se segue.

79 É um tipo de aprendizagem em que dois estímulos – um com uma responda e o outro não – apresentam a mesma resposta após o condicionamento. Um exemplo típico é de um cachorro que ao ser estimulado pela visão da comida tem uma resposta de apresentar saliva na boca, mas essa resposta não aparece quando ele recebe o estímulo do barulho do saco plástico onde a comida é guardada. Após o condicionamento – que nesse caso acontece de forma natural – o cachorro passa a salivar também com o barulho do saco plástico, mesmo sem ver ou sentir o faro da comida. Este tipo de aprendizagem também é conhecido como condicionamento pavloviano. (JAMES, 2010, p. 46).

80 O *imprinting* é qualquer aprendizado que pode ocorrer em uma idade ou estágio particular da vida que é rápido e independente das consequências do comportamento. Exemplo, o bebê que sabe quem é a sua mãe. (JAMES, 2010, p. 46).

81 Existe uma grande quantidade de evidência de habituação, de condicionamento clássico e de aprendizagem por exposição de pesquisa em animais e humanos de que o feto pode aprender.

Com isso, podemos dizer que, de fato, existe conhecimento inato – pois ocorre aprendizado ainda no útero – no entanto, este não é independente da experiência, visto que é a partir dela que o feto aprende. Além de tudo, isso explica porque um estudo sobre epistemologia não deve só analisar uma mente adulta para descobrir a origem do Conhecimento como fez Kant.

Uma outra função importante do sono, mas especificamente do sono REM, é a criatividade: "REM, not incubation, improves creativity […] Compared with quiet rest and non-REM sleep, REM enhanced the formation of associative networks and the integration of unassociated information."[82] (CAI et al, 2009, p. 10130). Dessa forma, o indivíduo pode descobrir relações não pensadas antes e isso ajuda o formar o princípio lógico tido como o mais essencial de todos, segundo Aristóteles: o princípio da não contradição, o qual será analisado, bem como este processo, na próxima seção.

Agora, é possível entender melhor a ideia de estrutura cognitiva já mencionada acima; ela seria uma conjugação da nossa mente com todos os processos que possibilitem o aprendizado e a memória e, dessa forma, o sonho também faz parte dessa estrutura, visto que é um importante processo para a memória e o aprendizado..

7.4 OS PRINCÍPIOS LÓGICOS

Os princípios lógicos desempenham um papel fundamental em nosso raciocínio, a ponto de Aristóteles afirmar que não é possível dizer alguma coisa com significado sem fazer uso do princípio da não contradição. Dessa forma, veremos, nesta seção, como é possível os princípios lógicos serem decorrentes de nossas experiências. Primeiro, vamos entender como a interação entre os Conhecimentos *Incitavita*, a experiência e a nossa estrutura cognitiva produzem as noções lógicas dos três principais princípios: identidade, não contradição e terceiro excluído. E, em

82 REM, não a incubação, melhora a criatividade […] Comparado com o repouso e com o sono não REM, REM aprimorou a formação de redes associativas e a integração de informações não associadas.

seguida, vamos entender como esse processo não é circular, ou seja, que ele já contenha os princípios lógicos.

No capítulo 2.2, página 20, vimos uma citação de Newton da Costa, na qual ele defende que a Lógica não é *a priori*; o próprio Costa (2008) desenvolveu um sistema lógico em que flexibiliza o princípio da não contradição, isto é uma Lógica paraconsistente; e, ainda, mesmo nos sistemas clássicos, onde os três princípios são válidos, eles podem aparecer como um teorema e isso ocorre nos *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead (1910); se eles são teoremas, significa que eles não são os mais fundamentais naquele sistema. Contudo, nossa civilização desenvolveu seu método de raciocínio em cima destes três princípios e, por isso, veremos como eles, e não outros, foram aprendidos pela nossa estrutura cognitiva, mas primeiro vamos defini-los:

Princípio da Identidade. Qualquer coisa é igual a ela mesma, não se confundindo com outra: $x=x$.

Esse princípio ignora o tempo e, assim, o devir; caso contrário, em um determinado tempo, se x sofrer alterações, ele, obrigatoriamente, deixará de ser igual a si mesmo ($x\neq x$), pelo menos, no mundo sensível, mas, conceitualmente, ainda poderia se dizer que $x=x$, mesmo que uma instância de x não existisse mais.

Princípio da Não Contradição. Tudo aquilo que é verdadeiro não pode ser falso e vice-versa: $\neg(p\wedge\neg p)$.

Princípio do Terceiro Excluído. Uma coisa só pode ser falsa ou verdadeira, não existindo uma terceira hipótese.

Agora, com os princípios definidos, vamos ver como a nossa estrutura cognitiva junto com a experiência e os Conhecimentos *Incitavita* alcança uma forma rudimentar desses princípios e, a partir daí, o ser humano pode montar qualquer sistema lógico, nos quais eles poderão ser enfraquecidos ou ter a forma mais rígida como apresentado anteriormente.

Nossa estrutura cognitiva armazena cada tríade estímulo-resposta-consequência, que é o Conhecimento *Incitavita*; caso aja a percepção de que houve a repetição de um estímulo, o nosso organismo procura apresentar a mesma resposta se, de fato, houve uma consequência positiva anteriormente. Esse processo faz com que a nossa mente vá formando, aos poucos, uma ideia rudimentar de igualdade e, assim, conforme a experiência vai fortalecendo essa ideia, vai se formando, também, um conceito rudimentar do princípio da igualdade.

O processo de aprendizagem da habituação, e consequentemente sua desabituação, não deixam essa ideia de igualdade e do princípio do terceiro excluído serem rígidos, pois para um mesmo estímulo pode haver uma habituação produzindo uma nova resposta com a mesma consequência para o organismo, assim, como no exemplo da dormideira na seção 7.1.

Se considerarmos a tríade x como a queda-fechamento-equlibrio (queda do vaso com a dormideira, fechamento de suas folhas e que o equilíbrio homeostático foi mantido), podemos ver que ela vai se trnsformando, aos poucos, em queda-aberta-equilíbrio (as folhas se mantiveram abertas) em seu processo de habituação, pois nas primeiras quedas ela mantinha algumas folhas abertas e outras quase fechadas, ou seja, considerando o devir, a nova tríade x não é mais igual a anterior.

> We observed leaves starting to re-open even before the first train of drops was delivered in full (i.e. after the first four to six drops) and when repeatedly elicited over the course of the training, leaves were not only completely open by the end of a train but also stopped closing altogether.[83] (GAGLIANO et al, 2014, p. 66).

Alguém poderia dizer que a tríade x original foi mantida e, dessa forma, a nova seria uma outra, uma tríade y, mantendo, assim, $x=x$; mas isso é apenas conceitual, o que a nossa mente entende agora, pois para o organismo a original foi apagada (removida, deixou de existir) no momento que a dormideira começou a manter todas as folhas abertas completamente, ou seja, há uma mudança de

83 Nós observamos que as folhas começaram a abrir novamente antes da conclusão da primeira sequência de quedas (isto é, após as primeiras quatro ou seis quedas) e quando estimuladas sucessivamente ao longo das quedas, as folhas não só estavam completamente abertas no final da sequência como também pararam de fechar completamente.

identidade, passando a valer $x \neq x$, pois nossa estrutura cognitiva aprende que algumas coisas podem permanecer ou sumir depois de um tempo. Dessa forma, existem experiência que vão enfraquecer ou fortalecer o princípio da identidade.

Uma outra forma de entender essa perda de identidade é imaginar que cada tríade $x, y, z,$ armazenada em algum lugar da mente, em algum momento pode ser substituída por outra, o que faz com que aquele determinado lugar passa a ter uma nova informação, gerando na mente a noção de instabilidade do devir com o passar dos tempos. Por isso, que não é o princípio da identidade que se mantém, mas uma forma rudimentar dele, ou seja, que ele pode existir em alguns casos ou por um determinado tempo.

O princípio da não contradição também é formado rudimentarmente. Na seção 7.3, vimos a importância do sono REM para criatividade, formando redes associativas e integrando informações não associadas, ou seja, que ele mistura as tríades dos nossos Conhecimentos *Incitavita*. Dessa forma, durante o sono, podem surgir associações de tríades não associadas, formando contradições. Imaginemos, por exemplo, as tríades x-y-equlíbrio e w-z-desequilíbrio sendo associadas pelo sono REM, produzindo x-y-desequlíbrio e w-z-equilíbrio; agora, são quatro informações, sendo duas contraditórias entre si, mas, como, durante a vigília, o organismo pode nunca experimentar as tríades sonhadas, então ele acaba concluindo que elas são impossíveis, o que, aos poucos, vai formando a noção do princípio da não contradição. Mas por que ele é rudimentar, e não estrito, rígido?

Por causa da nossa Incapacidade de Precisão, pode acontecer de identificarmos como x um estímulo um pouco diferente e que, associado com a resposta y, pode oferecer um certo desequilíbrio; assim, poderia ocorrer x-y-equlíbrio em algumas vezes e x-y-desequlíbrio em outras. Esse processo não parece ser muito frequente, logo, o princípio da não contradição deve ser mais forte que os demais.

Já princípio do terceiro excluído pode ser formado, através da nossa estrutura cognitiva, pela própria dualidade equilíbrio e desequilíbrio; contudo, ele seria o mais rudimentar de todos, pois podem haver muitos estados de desequilíbrio distintos, o que torna compreensível a existência de muito mais que apenas duas possibilidades.

Mas, dentro das diversas experiências que podem fortalecê-lo, podemos destacar uma proposta por Ricardo Kubrusly, na qual ele relaciona a nossa impossibilidade de comer e respirar com geração do princípio:

> […] respirar e engolir simultaneamente, essências de seu futuro possível. Esse mecanismo é mantido pelas crianças […] Marcado por este “corte” essencialmente topológico, já não mais consegue engolir e respirar ao mesmo tempo, sem engasgar, sufocar-se e morrer. Da prática dessa dificuldade excludente, introjetada em seu ser, surge sua humanidade, a fala e a imposição de uma lógica, que se fez clássica, a do Terceiro Excluído. (KUBRUSLY & DANTAS, 2011, pp. 5-6).

Assim, vimos como os Conhecimentos *Incitavita* estão relacionados com a geração de rudimentos dos três princípios lógicos. No entanto, os mais conservadores poderiam alegar que esses três princípios já são pressupostos pela nossa estrutura cognitiva, pois não poderíamos formar tais conceitos sem auxílio deles mesmos; baseando-lhes em Aristóteles, diriam que não podemos dizer alguma coisa com sentido sem já não supor o princípio da não contradição.

O terceiro excluído é o mais fácil de eliminar, pois percebemos, facilmente, que poderíamos prescindir dele; poderíamos ter o verdadeiro, o falso e o indeterminado e isso não causa nenhum desconforto ou estranheza. Já os outros dois, podem ser respondidos de forma análoga e, por isso, vamos nos concentrar no princípio da não contradição (PNC), visto que é o mais sensível e defendido por Aristóteles (JULIANI et al, 2009).

Imagine que alguém pretenda dizer algo determinado; algo com um significado x; obviamente, essa pessoa não está querendo dizer que o significado é y ou z, ou algum outro, logo, ela já faz uso do princípio da não contradição, pois ela não aceita que não x signifique o mesmo que x; se ela aceitar que qualquer significado não x faça parte de x, então não significará nada. Essa é a argumentação aristotélica (*apud* JULIANI et al, 2009, pp. 801-803).

Se x significa “a é b”, não x seria “a não é b”; então poderíamos dizer que “a é c”, assim, “a” fica determinado por “b” e “c”; se insistirmos em negar o princípio da não contradição, continuaríamos que “a” também é “d”, é também “e” e, assim, por diante, logo, “a” seria tudo, ou seja, não significaria nada. Dessa forma, a nossa estrutura cognitiva não seria capaz de formar nada com sentido se ela já não tivesse

esse princípio como um fundamento seu.

Apesar dessa dificuldade em negar o princípio, Russell (2007, p. 240) alega que ele não tem qualquer primazia sobre qualquer outro e que a percepção da contradição necessita de conceitos que não aparecem no princípio. A própria definição da negação, como explica Newton da Costa (2008, p. 46), não é determinada pelo PNC.

Hilbert em “Foundations of Geometry”,[84] mostra que os termos primitivos[85] são definidos apenas pelos axiomas que os relacionam. Desta maneira a negação é entendida, de modo que o PNC não faz sentido se não levarmos em conta todos os axiomas que dependem da negação. Assim sendo, ele pode ser um teorema.

Com isso, podemos dizer que, dentro de um sistema de Lógica clássica, ao associarmos algo com um significado x, não estamos excluindo diretamente não x, essa exclusão é feita a partir de uma análise de todo o sistema e, ao verificar a existência do PNC, a negação acaba tomando sentido, de maneira que possamos constatar que não x não faz parte do sistema.

Assim, o mesmo acontece com nossa estrutura cognitiva ao fazer alguma atribuição x, nada se pode dizer de não x; de fato, pode ser constatado que essa atribuição possa ter diversos significados (potencialmente infinitos) e ela será descartada, pois ela não significaria nada; mas, talvez até em sonho, durante o sono REM, possa ser cogitado não x; depois, a experiência acaba mostrando que ele está descartado da atribuição x, de forma a ir formando, pouco a pouco, o sentido da atribuição.

Por isso, é o PNC que deriva das experiências e das relações entre os Conhecimentos *Incitavita*, afinal, no momento de uma atribuição x, não há nem mesmo a consciência da existência de não x, algo que é percebido posteriormente, através das experiências.

84 Fundamentos da Geometria.

85 São termos que não podem ser definidos diretamente para que o sistema não seja circular. Como não se pode definir tudo, sob pena de ficar infinitamente fazendo definições, admite-se alguns termos como não definidos, ou seja, primitivos.

7.5 O CONCEITO DE NÚMERO E OS CONHECIMENTOS *INCITAVITA*

Os Conhecimentos *Incitavita* são um tipo bastante rudimentar de Conhecimento que são obtidos da Homeostase, por isso, é somente através das relações entre eles que se formam as noções dos princípios lógicos necessários para chegarmos ao conceito de número. Contudo, pode ser muito difícil definir o que venha a ser *número*, assim, o artigo “What Numbers Could Not Be?” de Benacerraf (1964) não nos surpreende; se há problemas em defini-lo, então procuramos dizer o que ele não pode ser. No entanto, como está escrito no início dessa tese, conceitos estão em constante mudanças e, como buscamos saber a origem do Conhecimento, não é necessário enfrentar essa problemática; por isso, não há, aqui, necessidade alguma de nos preocuparmos com definições formais.

É preciso dizer que os números não ocorrem necessariamente a partir dos Conhecimentos *Incitavita*, visto que existem sociedades que não possuem um sistema numérico, conforme visto no capítulo 4.1; logo, não podemos esperar uma consequência lógica, isto é, que seja inevitável que a Homeostase, ao produzir os *Incitavita*, gerará em nós o conceito de número; assim, é condição necessária que a ocasião seja fornecida.

Essa ocasião aparece nos livros de História da Matemática (BOYER, 1996) (EVES, 2011) (MURPHY, 2005) como sendo a vida em sociedades de grandes dimensões: na contagem de estoque, de riquezas, de súditos e nas resoluções de conflitos de demarcações de terra etc.

Como a contagem é um tipo de comparação, é necessário que se entenda que a quantidade das coisas não se altera conforme mudamos as disposições delas; isso acontece com as crianças hoje em dia; elas demoram a ter plena consciência disso:

> Antes de chegar ao conceito de número, é preciso que a criança conserve quantidade. A conservação de quantidade ocorre de forma gradual. Marília Toledo lembra-nos de que, para construir o conceito de número, é imprescindível que a criança esteja segura de que a quantidade de objetos de uma coleção permanece a mesma quando se modifica seu arranjo espacial. A conservação de quantidade depende de uma condição mental chamada por Piaget de “reversibilidade”, que é a capacidade de fazer e desfazer mentalmente a mesma ação. Pesquisas de Piaget mostram que a

> criança conquista totalmente a reversibilidade, por volta dos sete ou oito anos. Comparar quantidades, classificar e seriar são operações que fundamentam o conceito de número. (KLEIN & GIL, 2012, p. 16).

Também é preciso compreender que as coisas a serem comparadas vão manter suas quantidades em um amplo intervalo de tempo; por exemplo, se um ser humano observasse que seus riscos em um osso permanecem por um bom tempo e, assim, percebesse que a quantidade de riscos permanecerá a mesma, de nada adiantaria se em uma coleção de pedras – na qual ele gostaria de contar as unidades – ocorresse que algumas delas simplesmente se desintegrassem de forma aleatória, fazendo com que a coleção não mantivesse a sua quantidade. Por isso, é importante a percepção de que muitos objetos ao nosso redor se conservam, o que, ao mesmo tempo, vai fortalecendo a noção do princípio da identidade, ao passo que pequenas alterações vão sendo ignoradas; isso, com tempo, vai fortalecendo a ideia de Parmênides de que existe algo imutável, e não só a mudança de Heráclito.

Observando os Pirahãs (Capítulo 4.1), podemos ver que o princípio da não contradição é um pouco relativizado (afrouxado), visto que “hói” pode ser o mesmo que “1” e o mesmo que “não 1”, pois pode também ser traduzido como “alguns” ou “uma pequena quantidade”, e não só como a unidade. Com isso, as práticas que formaram o conceito de número que estamos habituados se valeram de um conceito mais forte do princípio da não contradição.

Ao que tudo indica, as práticas que nos levaram aos números ao mesmo tempo fortaleceram os princípios lógicos de modo a deixá-los mais rígidos de acordo com a forma que eles são formulados na Lógica clássica; o que pode explicar a crença popular de que as pessoas das chamadas Ciências Exatas são mais rígidas, enquanto que as das Ciências Humanas ou das Artes aceita mais facilmente uma contradição em determinados casos. Tudo isso nos faz pensar: será possível uma Aritmética paraconsistente?

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos, através deste trabalho, que a Matemática é mais dinâmica do que muitos pensam; conceitos que se alteram, que se espelham na experiência e que constituem a base desse saber. Os ecos desses alvoroços já estão por toda parte:

> A velha visão de uma matemática formal e rigorosa, totalmente mecânica e completamente estática, formulada por Hilbert há um século, constituiu uma tentativa mal conduzida que pretendeu demonstrar a absoluta certeza do raciocínio matemático. Já é tempo de nos recuperarmos dessa doença! (CHAITIN, 2009, p. 23).

Sem considerarmos a sensibilidade como uma base, ocorre o problema da exatidão igual ao apontado por Descartes, isto é, o problema de como saber quais objetos e processos que podem ser considerados válidos. No entanto, a solução que ele propôs – usar a Geometria euclidiana plana como base – já não é mais suficiente, visto que há possibilidades de diferentes geometrias planas consistentes ou, ao menos, tão consistentes quanto a euclidiana. Isso, também, fez com que a consistência não fosse mais critério para definir os procedimentos válidos, afinal, um jogo ou uma fantasia também são consistentes. Além disso, o mesmo não ocorre apenas com a Geometria, mas sim com toda a Matemática.

Resolver o problema da exatidão através do contexto da justificação não nos pareceu a atitude mais correta, pois esse contexto também passa por um processo de criação, se alterando com o tempo. Além de tudo, o problema da exatidão é, precisamente, um problema de justificação, ou seja, ele é inerente a esse contexto em questão.

Pelos motivos expostos nos dois parágrafos anteriores, a experiência – e não os sintéticos *a priori* kantiano, conforme visto nesta tese – se mostrou necessária, e indispensável, para solucionar o problema da exatidão, fazendo com que o velho desejo de Kant – isto é, de que a Matemática tenha um ponto de apoio a fim de não se tornar uma fantasia – pudesse ser alcançado; com ela, o Conhecimento perde a sua eternidade (ou seja, nunca foi eterno) e encontra dificuldades em relação a possibilidade de existência, visto que para sabermos alguma coisa, necessitamos de Conhecimentos prévios.

A partir desse ponto, abrimos um caminho, oferecendo uma solução que se mostra promissora: atribuir à Homeostase a função de gerar – através da experiência – Conhecimentos básicos chamados de *Incitavita*, os quais forneceriam a base de todo o Conhecimento. Algumas pessoas, porém, poderiam argumentar que a Homeostase já pressupõe os princípios lógicos básicos, ou seja, poderiam atribuir à Logica uma condição *sine qua non* para que seja possível dizer (memorizar/pensar) algo com sentido, assim como, de forma semelhante, fez Aristóteles ao sustentar a primazia do princípio da não contradição. Mas o holismo dos sistemas lógicos atuais e as dificuldades impostas ao apriorismo nos permitem cogitar algo anterior a esses sistemas; e assim, a experiência, ou o mundo sensível, seria responsável por fixar a fronteira entre a fantasia e a Matemática; e a Homeostase, por fornecer a base das primeiras crenças e Conhecimentos. Essa abordagem elimina a necessidade de um Conhecimento *a priori* e alinha esta tese às ideias de uma epistemologia naturalizada.

Convém destacar que foi possível encontrar, na literatura científica, essa gênese do Conhecimento através de processos homeostáticos como a habituação e a sensibilização; no entanto, a abordagem é mais relacionada à cognição, o que difere da função epistemológica oferecida nesta tese. Após a entrega desta tese, pude verificar que a Epistemologia Genética de Piaget (1972) tem muitas semelhanças, mas devido o nome de Piaget não ser muito conhecido na Filosofia (inclusive a banca não percebeu a semelhança), eu não citei o seu trabalho, pois não o conhecia. No entanto, o objetivo da “Epistemologia Genética” é descobrir como conseguimos de um pequeno Conhecimento anterior obter um maior; já, esta tese, se preocupou em como obter esse “pequeno Conhecimento anterior”.

A vantagem da abordagem empirista é oferecer a liberdade defendida por Cantor (*apud* EVES, 2011, p. 545), mas, ao mesmo tempo, manter o ponto de apoio almejado por Kant. Essa liberdade permite flexibilidade no contexto da descoberta e na formação do contexto da justificação, mas não permite a comparação com os jogos e com os livros de ficção. A hora da recuperação chegou!

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARISTÓTELES (séc. IV a. C). **Metaphysics**. In: The Complete Works of Aristotle: The revised Oxford Translation. (ed. J. Barnes). 2 vols. Princeton: Oxford University Press, 1984.

ARQUIMEDES (séc. III a. C.). **Quadrature of the Parabola**. Trad. HEATH, T. L. Works of Archimedes. Cambridge. Cambrigde University Press. 1897.

ARTSTEIN, Z. **Mathematics and the Real World: The Remarkable Role of Evolution in the Making of Mathematics**. Amherst: Prometheus Books, 2014.

BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.

BEHRENS, C.I E. Empiricism: An Environment for Humanist Mathematics. In: **Journal of Humanistic Mathematics**: vol. 2, iss. 1, article 7, 2012.

BENACERRAF, P. **What Numbers Could Not Be**, In: Benacerraf, P., Putnam, H. Philosophy of Mathematics: selected readings. Cambrigde: Cambrigde University Press, 1964.

BONGIOVANNI, V. Euclides, Hilbert e Birkhoff: História da Geometria e do seu Ensino. In: **Anais do VII Seminário Nacional de História da Matemática**, pp. 19-35. Guarapuava: UNICENTRO, 2007.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BUTTERWORTH, B., REEVE, R. Verbal Counting and Spatial Strategies in Numerical Tasks: Evidence from Indigenous Australia. In: **Philosophical Psychology**, vol. 21, n. 4, 443–457, 2008.

CAI DJ, Mednick SA, Harrison EM, Kanady JC, & Mednick SC. REM, not incubation, improves creativity by priming associative networks.In: **PNAS**, vol. 106, n. 5, pp. 10130-10134, 2009.

CASULLO, A. Epistemic Overdetermination and A Priori Justification. In: **Philosophical Perspectives**, vol. 19, iss. 1, pp. 41-58, Dezembro, 2005.

CHAITIN, J. G. **MetaMat!: em busca do ômega**. Tradução de G. K. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva, 2009.

CHALMERS, A. F. **O que é ciência afinal?** São Paulo: Brasiliense, 1993.

COMTE, A. **Curso de Filosofia Positiva**. São Paulo: Abril Cultural, 1978. (Os Pensadores - Comte), 1830.

COSTA, N. C. A. **Ensaio Sobre os Fundamentos da Lógica**. São Paulo: HUCITEC, 2008.

COSTA, N. C. A.; DORIA, F. A. On the incompleteness of axiomatized theories for the empirical sciences. **Philosophica**, v. 50, pp. 73-100, 1992.

DELEUZE, G.; GUATTARI, F. **O Que é Filosofia?** São Paulo: Editora 34, 1991.

DIRIX, C. E. H.; NIJHUIS, J. G.; JONGSMA, H. W.; HONSTRA, G. Aspect of Fetal Learning and Memory. In: **Child Development**, vol. 80, n. 4, pp. 1251-1258, 2009.

DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

DORATO, M. Why is the Language of Nature Mathematical?, in G. Antonini, A. Altamore (eds.), **Galileo and the Renaissance Scientific Discourse**, pp.65-71. Roma: Edizioni Nuova Cultura, 2010.

EISENSTEIN, E. M.; EISENSTEIN, D.; SMITH, J. C. The evolutionary significance of habituation and sensitization across phylogeny: A behavioral homeostasis model. In: **Integrative Physiological & Behavioral Science**, vol. 36, iss. 4, pp. 251-265, 2001.

EUCLIDES (300 a.C.). **Os Elementos**. Em VITRAC, B. Les Éléments. Paris: Presses Universitaires de France, 1990.

EVERETT, D. Cultural Constraints on Grammar and Cognition in Pirahã. In: **Current Anthropology**, vol. 46, n. 4, 2005.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. Domingues, H. H. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FIELD, H. H. **Science Without Numbers: A Defence of Nominalism.** Princeton: Princeton University Press, 1980.

FREGE, G. 1884. **The Foundations of Arithmetic**. Translated by Austin, J. L. New York: Harper & Brothers Publishers, 1960.

GAGLIANO, M.; RENTON, M.; DEPCZYNSKI, M.; MANCUSO, S. Experience teaches plants to learn faster and forget slower in environments where it matters. In: **Oecologia**, vol. 175, iss. 1, pp. 63-72, 2014.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Álgebra: um curso de introdução**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.

GILBERT, M. A Life Without Pain. Direção e produção de Melody Gilbert, USA: Frozen Feet Films, 2005.

GIUSTI, M. V. G. Da Substância ao Processo: a mudança da base metafísica da ciência no século XX. 2013. 130f.: il. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, HCTE, Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2013.

GORDON, P. Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia. In: **Science**, vol. 306, 2004.

GROSHOLZ, E. R. Teaching the Complex Numbers. In: **Journal of Humanistic Mathematics**, vol. 3, iss. 1, pp. 62-73, 2013.

GURKA, D. A Missing Link: The Influence of László Kalmár's Empirical View on Lakatos' Philosophy of Mathematics. In: **Perspectives on Science**. vol. 14, n. 3, pp. 263-281, 2006.

HADAMARD, J. S. **Psicologia da invenção na matemática**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2009.

HECNHAUSEN, J., HECKHAUSEN, H. **Motivation and action**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

HEIM, K. **Psychologismus oder Antipsychologismus? Entwurf einer erkenntnistheoretischen Fundamentierung der modernen Energetik**. Berlin: Schwetschke, 1902.

HEYMANS, G. **Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens: Ein Lehrbuch der Erkenntnistheorie in Grundzu¨gen**, vol. 1, 2nd, rev. ed. Leipzig: Barth, 1905.

HILBERT, D. **Foundations of Geometry, The**. Projeto Gutenberg. 2005.

______. (1918) Axiomatic Thought. In EWALD, W. B. From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, 2 vols. Oxford: Oxford University Press, 1996.

HYLTON, P. Analiticidade e holismo no pensamento de Quine. Trad. NASCIMENTO, L.M. In **Sképsis**, ano V, n. 8, 2012.

HOFFMAN, S. **Mathematics as Make-Believe: a Constructive Empiricist Account**. (Tese de Doutorado em Filosofia), 1999.

______. Kitcher, Ideal Agents, and Fictionalism. In **Philosophia Mathematica**. N1, Vol. 12, pp. 3–17, 2004.

HOMERO (séc. VIII a. C.. **Ilíada**. Tradução Robert Fagles – Introdução e Notas de

Bernard Knox. New York: Peguin Books, 1991.

HUSSERL, E. 1900. **Logische Untersuchungen**. Erster Band: Prolegomena zur reinen Logik, E. Holenstein (ed.), Husserliana XVIII, The Hague: Nijhoff. 1975.

JAMES, D. K. Fetal Learning: a Critical Review. In: **Infant and Child Development**. Vol. 19, iss. 1, pp. 45-54, 2010.

JAMMER, M. **Conceitos de Espaço: A História das Teorias do Espaço na Física**. Rio de Janeiro: Contraponto & PUC-Rio, 2010.

JULIANI, R. T. A Aritmética do Relógio. **Scientiarum Historia**. In: 1º Congresso de História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, p. 39-46, 2008.

______. Geometria: A Busca Pela Episteme Perdida. 2010. 94f.: il. Dissertação (Mestrado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, HCTE, Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2010.

JULIANI, Rafael Tavares; CARUSO, Francisco. Da Matemática e da fuga dos falseadores. In: **Congresso Scientiarum Historia VI**, pp. 1-5. Promovido pelo Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia/HCTE da UFRJ. Rio de Janeiro: HCTE, 2013.

JULIANI, R. T. ; SCHMIDT, A. R. ; KUBRUSLY, R. S. O Princípio da Não Contradição Pode Ser Teorema? In: **Anais Scientiarum Historia II**, Encontro Luso-Brasileiro de História da Ciência, v. 1, p. 801-806, 2009.

KANT, I.1787. **Crítica da Razão Pura.** Utilizou-se da Trad. Dos Santos, M. P.; Morujão, A. F. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

______. **Kant's Inaugural dissertation of 1770**. Contributions to Philosophy, Psichology and Education vol. 1 No 2, trad. Eckoff, W. J. New York: Columbia College, 1894.

KITCHER, P. **The Nature of Mathematical Knowledge**. Oxford: Oxford University Press, 1984.

KLEIN, A. M.; GIL, M. C. S. **Ensino da Matemática**. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2012.

KOYRÉ, A. **Metaphysics and Measurement**. Cambridge: Harvard University Press, 1968.

KUBRUSLY, R. S.; DANTAS, Regina M. M. C. A Consciência e seu Destino Histórico: 3 Lógicas e 3 Momentos. In: **XXVI Simpósio Nacional de História**, v. 1. pp. 1-11. São Paulo: ANPUH SP, 2011.

KUSCH, M. **Psychologism: The Sociology of Philosophical Knowledge**. London: Routledge, 1995. (Philosophical Issues in Science)

______. Philosophy and the Sociology of Knowledge. In: **Studies in History and Philosophy of Science**. Vol. 30, n. 4, pp. 651-685, 1999.

LAKATOS, I. **Proof and Refutations: the logical of Mathematical discovery.** Cambridge: Cambridge Univesity Press, 1977.

______. A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. In: **The British Journal for the Philosophy of Science**, Vol. 27, No. 3, pp. 201-223. Oxford: Oxford University Press, 1976.

LAPP, A. **Die Wahrheit: Ein erkenntnistheoretischer Versuch orientiert an Rickert**, Husserl und an Vaihinger's 'Philosophie des Als-Ob' . Stuttgart: Spemann, 1913.

LOCKE, J. **An Essay Concerning Human Understanding**. New York: Prometheus Books, 1995.

MANCINI, L. S. Riley-Day Syndrome, Brain Stimulation and the Genetic Engineering of a World Without Pain. In: **Medical Hypotheses Journal**, 1990.

MASLOW, A. H. A Theory of Human Motivation. In: **Psychological Review**, n. 50, pp. 370-396, 1943.

______. **Motivation and personality.** New York: Harper & Row, 1970.

MIGUEL, L. G.; VIDEIRA, A. A. P. A distinção entre os "contextos" da descoberta e da justificação à luz da interação entre a unidade da ciência e a integridade do cientista: o exemplo de William Whewell. In: **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v.4, n.1, p. 33-48, jan/jun, 2011.

MILL, J. S. **System of Logic, Ratiocinative and Inductive, Being a Connected View of The Principles of Evidence, and The Methods of Scientific Investigation.** Ed. 8. New York: Harper & Brothers, Publishers, Franklin Square, 1882. (Projeto Gutenberg, 31 de Janeiro de 2009)

MOLINA, J. A. Lakatos como Filósofo da Matemática. In: **Episteme**, Porto Alegre, n. 13, p. 129-153, jul/dez, 2001.

MURPHY, N. The Story of 1. England: BBC, 2005.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. **A Prova de Gödel.** São Paulo: Perspectiva, 2003.

PANZA, M. **Problema di Platone, II**, 2009. Disponível em <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/43/30/02/PDF/Panza-Sereni_-_ProblemaPlatone-1.pdf> Acessado em 15/01/2010.

______. Rethinking Geometrical Exactness. (Elsevier). In: **Historia Mathematica**, vol. 38, p. 42-95, 2011.

PENSADORES, COLEÇÃO OS. Tempo de Deuses e Heróis. In: **Os Pensadores: Os Pré-Socráticos**. São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda, 1996. ISBN 85-351-0694-4.

PIAGET, J. **The Principles of Genetic Epistemology**. New York: Basic Books, 1972.

PLATÃO (séc. IV a. C. [1]). **A República**. Trad. Maria Helena da Rocha Pereira. 9 ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

PLATÃO (séc. IV a. C. [2]). **Mênon**. Trad. Maura Iglésias. Rio de Janeiro: Ed. PUC-Rio, 2001.

POINCARÉ, J. H. 1902. **La Science et L'Hypothèse.** Paris: Éd. de la Bohème (Rueil-Malmaison), 1992.

POPPER, K. **Conjectures and refutations**: the growth of scientific knowledge. London: Routledge, 2004.

______. **A Lógica da Pesquisa Científica**. São Paulo: Cultrix, 2000.

PUTNAM, H. Mathematics Without Foundations**.** In: BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. Philosophy of Mathematics: Selected Readings, pp. 295-311. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

QUINE, W.V.O. Two Dogmas of Empiricism. In: **The Philosophical Review** 60, pp. 20-43, 1951.

______."Success and Limits of Mathematization", in T**heories and Things**, pp. 148–155., Cambridge, MA: Harvard University Press, 1981.

______. Carnap and Logical Truth in: BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. Philosophy of Mathematics: Selected Readings, pp.355-376. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

RIBEIRO, S. Sonho, memória e o reencontro de Freud com o cérebro. In: **Revista Brasileira de Psiquiatria**, 25(Supl II), pp. 59-63, 2003.

RIBEIRO, S. ; NICOLELIS, M. A. L. Reverberation, storage, and postsynaptic propagation of memories during sleep. In: **Learning & Memory** (Cessou em 2008. Cont. ISSN 1549-5485 Learning & Memory (Cold Spring Harbor, N.Y. : Online)), v. 11, n.6, p. 686-696, 2004.

RODRIGUES, L. P. DA FISIOLOGIA À SOCIOLOGIA? Elementos para uma revisão da história teórica da sociologia sistêmica. In: **Revista Brasileira de Ciências Sociais**, vol. 28, n. 82, pp. 165-178, Junho, 2013.

RUSSELL, B. **História do Pensamento Ocidental**. Rio de Janeiro: Ediouro, 2004.

______. **Introdução à Filosofia Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

RUSSEL, B. WHITEHEAD, A. N. **Principia Mathematica**, Vol. I. Cambridge:Cambridge University Press, 1910.

SACCHERI, G. **Euclides Vindicatus**. Trad.: Halsted, G. B.; The Open Court Publishing Company: Chicago, 1920.

SCHWAB, K., GROH, T., SCHWAB, M. WITTE, H. Nonlinear analysis and modeling of cortical activation and deactivation patterns in the immature fetal electrocorticogram. In: **Chaos Journal of Nonlinear Science** n.19, 2009.

SCHLICK, M. ‘Das Wesen der Wahrheit nach der modernen Logik’, **Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie und Soziologie** 34, 386–477, 1910.

______. **Allgemeine Erkenntnislehre**. Berlin: Springer, 1918.

STEIN, S. I. A. A epistemologia naturalizada e a negação de princípios a priori do conhecimento. In: **Rumos da Epistemologia**, vol.3 (Pincípios: seu papel na filosofia e nas ciências), pp. 191-202, 2000.

VERTOSICK, F. **Why We Hurt: The Natural History of Pain**. San Diego: Harcourt, 2000.

WHITE, M. **Isaac Newton: The Last Sorcerer**. London:Fourth Estate, 1997.

WIGNER, E. P. **The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.** in Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, No. 1, pp. 1-14. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1960.

ZAHAR, E. **Why Science Needs Metaphysics: A Plea for Structural Realism**. Chicago: Open Court, 2007.

ANEXO I

Demonstração de que d definido como $max|A-B|$, sendo $A, B \in M$, é uma métrica. Definindo:

Métrica. A função $d: MxM \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma métrica onde o conjunto $M \neq \emptyset$ e d satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$.
2. $d(x, y)=d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z)+d(z, y)$

Sejam $A, B e C$ pontos do espaço munido da operação d [86], sendo $A=(x_{1,} y_1)$, $B=(x_{2,} y_2)$ e $C=(x_{3,} y_3)$, portanto, $M \in \mathbb{R}^2_+$.

<u>**Provando**</u> **(1) -** $d(A, B)=0 \Leftrightarrow A=B$:

$(\Rightarrow)$

Se $d(A, B)=0$, teremos que $d=max|A-B|=0$, ou seja,

86 Ou seja, um conjunto e a operação d .

$d = max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) = 0$, então, $x_1 - x_2 = 0$ e $y_1 - y_2 = 0$, logo, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, daí $A = B$.

$(\Leftarrow)$

Sendo $A = B$, temos $A - B = 0$, ou seja, $(x_1 - x_{2,} y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$ e $y_1 - y_2 = 0$, então, $max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) = 0$, logo, $d(A, B) = 0$.

<u>Provando</u> (2) - $d(A, B) = d(B, A)$:

Temos que $d(A, B) = max\,|A - B| = max\,|(x_1 - x_{2,} y_1 - y_2)|$ e temos, também, que $d(B, A) = max\,|B - A| = max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$, mas sabemos que o módulo da subtração, no conjunto dos reais, é comutativo, logo, $max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) = max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$, ou seja, $d(A, B) = d(B, A)$.

<u>Provando</u> (3) - $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$:

Sabemos que $d(A, B) = max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$ e podemos manter essa igualdade ao adicionar zero nas duas coordenas, mas nas formas $-x_3 + x_3$ e $-y_3 + y_3$, então $d(A, B) = max(|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|)$, mas, pela propriedade do valor absoluto, temos: $max(|x_1 - x_3 + x_3 - x_2|, |y_1 - y_3 + y_3 - y_2|) \leq max(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|)$, o que também é maior ou igual a $max(|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|) + max(|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|)$ que é igual a $d(A, C) + d(C, B)$, ou seja, $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Além disso, como a imagem da função valor absoluto é zero e os reais positivos, vemos que a imagem de d é $\mathbb{R}_+$; logo, d é uma métrica. (Q.E.D).

ANEXO II

Usando a métrica do anexo I, foi definido a variferência, ou seja, o conjunto de pontos cuja distância, chamada de raio, de cada ponto até o ponto denominado de centro varia, alternando a cada 45^o do raio maior para o menor e do menor para o maior até completar 360^o, sendo a razão entre o maior raio e o menor igual à $\sqrt{2}$ e, ainda, o ângulo e os raios estão em uma relação biunívoca a cada 45^o. Agora, vamos verificar que o gráfico dela é o mesmo do que o da circunferência na métrica euclidiana. No entanto, como nenhuma literatura sobre esse assunto foi encontrada, vamos estudar a circunferência da métrica euclidiana e isso será apenas um esboço, não buscando a equação da variferência.

Primeiro, precisamos entender que a métrica do anexo I (doravante apenas “métrica”) toma como distância a maior coordenada em módulo da diferença entre dois pontos. Para facilitar, vamos usar a Geometria analítica e considerar a variferência e circunferência como centradas na origem; vamos, também, usar as coordenadas polares e, dessa forma, a equação da circunferência é:

$P(x,y)=r(\cos(q), sen(q))$, onde $0\leq q\leq 360^0$ ou $0\leq q\leq 2\pi$ e r é o raio. (1)

Vamos considerar o raio da variferência como a, sendo o maior igual a_0 e o menor, a_1. Como uma métrica não permite números negativos, vamos usar o módulo das funções seno e cosseno.

Sabemos que, nos primeiros 45^o, a função cosseno decresce e é maior que a função seno; o que na nossa métrica quer dizer que a distância do centro da variferência até um ponto dela (raio) vai ser dada pelo valor do cosseno da métrica euclidiana; dos 45^o até aos 90^o, a situação se inverte, o seno é crescente e é maior que o cosseno, logo, o raio da variferência será dado pelo seno; observe que o raio diminui nos primeiros 45^o e, depois, dos 45^o até aos 90^o, ele aumenta; essa alternância acontecerá até aos 360^o. Repare no gráfico abaixo:

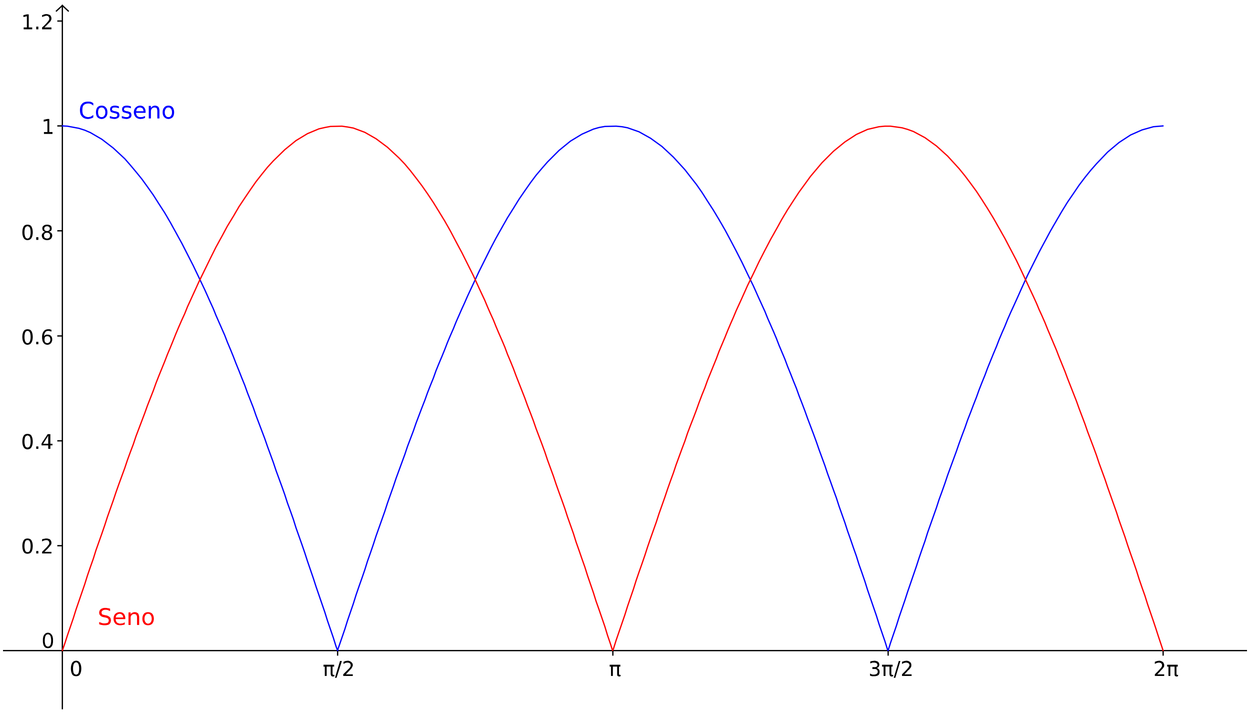


Figura 7: Módulo de Seno e Cosseno.

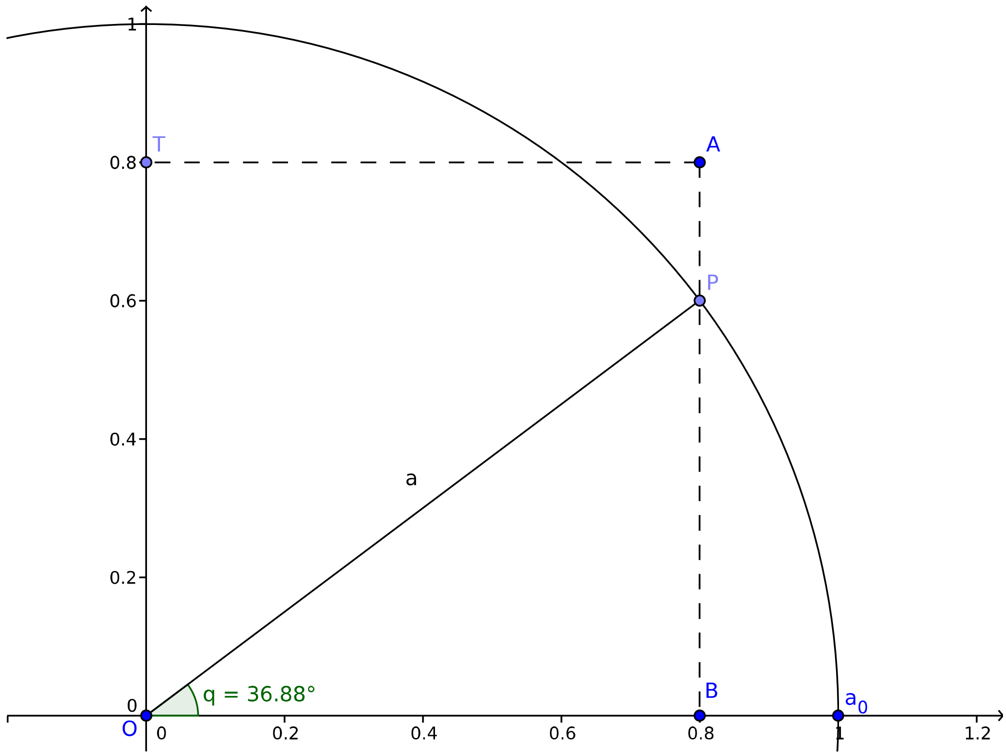
Então, percebemos que a razão entre o raio maior e o menor é:

$$\frac{a_0}{a_{0.}\cos(45^0)} \qquad (2)$$

Ou seja:

$$\frac{a_0}{a_1} = \sqrt{2} \qquad (3)$$

Como a intenção não é buscar uma equação para a variferência, podemos parar aqui, pois já dá para verificar que a definição apresenta um gráfico igual ao da circunferência euclidiana. Se a intenção foi encontrar uma equação, ainda seria preciso verificar mais um detalhe; observe a figura abaixo:



Perceba que o raio é $a=0{,}8$ para um ângulo $q=36{,}88^0$; mas, em qualquer ponto do segmento $\overline{AB}$, o raio teria a mesma medida, ou seja, para diversos ângulos. Se o ângulo q que não for o domínio da função, é preciso garantir que o ângulo e o raio estarão em uma relação biunívoca a cada 45^o.