UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

TIAGO SOARES DOS REIS

TRANSMATEMÁTICA

RIO DE JANEIRO

2015

TIAGO SOARES DOS REIS

TRANSMATEMÁTICA

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly
Coorientador: Walter Gomide do Nascimento Junior

RIO DE JANEIRO
2015

Reis, Tiago S. dos

R375t Transmatemática / Tiago Soares dos Reis. - - Rio de Janeiro, 2015.

124 f.

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly.

Coorientador: Walter Gomide do Nascimento Junior.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Decania do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza, Programa de Pós Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, 2015.

1. Transmatemática 2. Números transreais 3. Divisão por zero I. Kubrusly, Ricardo Silva, orient. II. Gomide, Walter do Nascimento Junior, coorient. III. Título.

TIAGO SOARES DOS REIS

TRANSMATEMÁTICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Aprovada em 04 de março de 2015

____

Orientador, Ricardo Silva Kubrusly, Dr., HCTE/UFRJ

____

Coorientador, Walter Gomide do Nascimento Junior, Dr., UFMT

____

Carlos Antônio de Moura, Dr., UERJ

____

Francisco Antonio de Moraes Accioli Doria, Dr., HCTE/UFRJ

____

Renata Arruda Barros, Dr., IFRJ

____

Sérgio Exel Gonçalves, Dr., HCTE/UFRJ

Dedico este trabalho à memória de meu pai Joel A. dos Reis, homem a quem admiro, respeito, amo e sou grato pelo que sou.

Agradeço ao Deus que me proporciona a vida e caminha comigo; à minha amada esposa Larissa pelo companherismo, amor, paixão e parceria; à minha doce filha Giovanna pela inspiração; ao meu recém chegado filho Samuel por me proporcionar tamanha alegria; à minha mãe Ester pelo amor e o suporte durante o doutoramento; à minha irmã Joice pela amizade e o suporte durante o doutoramento; ao meu professor e orientador Ricardo Kubrusly pelo apoio, inspiração e entusiasmo e a Walter Gomide e James Anderson pela parceria na pesquisa, troca de ideias e discussões.

RESUMO

REIS, Tiago S. dos. Transmatemática. Rio de Janeiro, 2015. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) - Programa em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Os números transreais são uma extensão dos números reais. Este novo conjunto é fechado sob as quatro operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Em particular, a divisão por zero é permitida. Neste texto, contextualizamos o leitor fazendo um resumo da concepção dos números transreais. Fazemos um apanhado histórico do desenvolvimento do conceito de número. Propomos uma construção do conjunto dos números transreais, o que demonstra a consistência de sua aritmética. Desenvolvemos o cálculo transreal, estabelecendo os conceitos de topologia, sequências, limite, continuidade, derivada e integral nos números transreais. Propomos uma semântica total, isto é, uma semântica que engloba os valores lógicos clássicos, *fuzzy*, de contradição e de indeterminação e definimos um espaço lógico, onde proposições e mundos possíveis são objetos matemáticos bem definidos. Desta forma, podemos definir matematicamente diversos conceitos lógicos. Como, por exemplo, relações de acessibilidade, necessidade e possibilidade, transformações lógicas e um critério pra distinguir quando uma proposição é ou não clássica. Mostramos que existe um mundo possível que pode acessar qualquer outro por aproximação. Por fim, fazemos uma discussão geral sobre a transmatemática, suas novidades e o desafio de adentrar o meio acadêmico.

PALAVRAS-CHAVE: Transmatemática; Números transreais; Divisão por zero; Infinito, *nullity*; Conceito de número; Aritmética transreal; Cálculo transreal; Lógica; Semântica total; Lógicas clássicas; Lógicas *fuzzy*; Lógicas paraconsistentes; Espaço lógico; Mundos possíveis; Vetores hipercíclicos.

ABSTRACT

REIS, Tiago S. dos. Transmatemática. Rio de Janeiro, 2015. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) - Programa em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

The transreal numbers are an extension of the real numbers. This new set is closed under the four arithmetical operations: addition, subtraction, multiplication and division. In particular division by zero is allowed. In this text we contextualize the reader with a summary of the transreal numbers. We give a historical overview of the development of the concept of number. We introduce a construction of the transreal numbers which proves the consistency of their arithmetic. We develop transreal calculus, establishing topology, sequences, limits, continuity, derivatives and integrals on transreal numbers. We introduce a total semantics, that is, a semantics which encompasses the truth values of classical and fuzzy logic, as well as the contradictory values of paraconsistent logic and a gap value with no degree of truthfulness and falsehood. We define a logical space where possible worlds and propositions are well-defined mathematical objects. Hence we define several logical concepts mathematically. For example we define logical transformations and the relations of accessibility, necessity and possibility. We give a criterion to distinguish which propositions are classical and which are not. We prove that there is a possible world which can access any other by approximation. Finally we engage in a general discussion about transmathematics, their novelties and the challenges they face in gaining academic acceptance.

KEY-WORDS: Transmathematics; Transreal numbers; Division by zero; Infinity, Nullity; Number concept; Transreal arithmetic; Transreal calculus; Logic; Total semantics; Classic logics; Fuzzy logics; Paraconsistent logics; Logical space; Possible worlds; Hypercyclic vectors.

Sumário

Introdução

A impossibilidade da divisão por zero é um fato bem conhecido na matemática. Dado $a \in \mathbb{R}$, sabemos que não é possível que $\dfrac{a}{0} \in \mathbb{R}$ de acordo com as definições usuais da aritmética em $\mathbb{R}$. De fato, no conjunto dos números reais, divisão nada mais é que a multiplicação pelo inverso multiplicativo. Ou seja, se $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b}$ significa $a \times b^{-1}$, onde b^{-1} representa o inverso multiplicativo de b, isto é, b^{-1} é um número real tal que $b \times b^{-1} = 1$. Ora, se quisermos permitir o denominador zero, com o mesmo significado que possui para qualquer outro número real, devemos ter um inverso multiplicativo de zero. O que não é possível, pois se existisse $c \in \mathbb{R}$ tal que $0 \times c = 1$, teríamos $0 = 0 \times c = 1$, o que é um absurdo. Isto posto, fica claro que se quisermos a divisão por zero, precisamos estender a definição de divisão e, quiçá, a definição de número.

Na década de 2000, James Anderson[1] introduz o conjunto dos números transreais. A motivação de Anderson foi tornar possível a divisão por zero. Seu desejo foi aplicar esta teoria à programação de computadores, afim de que estes não voltassem mensagem de erro quando do aparecimento de uma divisão por zero durante seu processamento. Os computadores atuais têm uma limitação de processamento, a saber, as exceções aritméticas que ocorrem na divisão por zero. Fornecer detecção e processamento a tais exceções causa um gasto excessivo de memória, espaço no processador, tempo de processamento e energia elétrica e desperdiça o tempo do programador em antecipar e lidar com os erros. Um novo computador que não tem exceções tem sido desenvolvido, por James Anderson, com base nos números transreais (ANDERSON, 1997, 2005). A aritmética IEEE do ponto-flutuante é largamente utilizada na computação. Segundo Anderson, a introdução dos

[1] James A. D. W. Anderson é atualmente professor e pesquisador na School of Systems Engineering, University of Reading, na Inglaterra.

números transreais na aritmética IEEE traz diversas vantagens. Esta utilização remove um *binade* de pontos flutuantes redundante, dobrando a precisão numérica da aritmética, remove oito operações relacionais entre pontos flutuantes e a operação de ordem total redundantes. Além disso, substitui o operador de igualdade que é não-reflexivo por um operador de igualdade reflexivo e, como consequência, algumas das exceções podem ser removidas (ANDERSON, 2014). Este texto não intenta abordar, de forma direta, o desenvolvimento do novo computador. No entanto, cabe ressaltá-lo, pois consiste em uma importante aplicação da aritmética transreal.

Segundo Anderson, o conjunto dos números transreais, denotado por $\mathbb{R}^T$, e sua aritmética consistem numa extensão dos números e aritmética reais. Em $\mathbb{R}^T$, as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) são fechadas, isto é, o resultado de qualquer uma destas operações entre números transreais é um número transreal. Em particular, divisão por zero é permitida. O conjunto $\mathbb{R}^T$ é formado por todos os números reais e mais três novos elementos, $-\infty$, ∞ e Φ, denominados respectivamente por *menos infinito*, *infinito* e *nullity*. Desta forma, $\mathbb{R}^T = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty, \Phi\}$. Anderson postula que $\dfrac{-1}{0} = -\infty$, $\dfrac{1}{0} = \infty$ e $\dfrac{0}{0} = \Phi$.

Note que Anderson impetra que $\dfrac{0}{0} = \Phi$. É claro que tal caminho para resolver-se o problema da divião por zero é passível da opinião de que apenas foi dado um nome para o objeto $\dfrac{0}{0}$, que não é um número! Esta observação, a um primeiro olhar, não está equivocada. Porém, lembramos que este é um processo comum na história da matemática. Em diversos momentos, um problema foi inicialmente resolvido de forma supositiva, isto é, supondo-se a existência de um determinado objeto e que este objeto gozava de propriedades já conhecidas de outros. Por exemplo, quando Rafael Bombelli encontrou a raiz quadrada de um número negativo na fórmula de resolução de uma equação de terceiro grau, teve a audácia de operar com este objeto supondo que pra ele valiam as propriedades aritméticas dos números reais. E, ao final de seu cálculo, encontrou de fato uma solução da equação em questão. Naquele momento, Bombelli não se preocupou com rigor, tal como o concebemos hoje, ou com uma interpretação do objeto estranho, ele apenas encorajou-se na hipótese de existência de outros entes que pudessem ser chamados de números. Bombelli não deu o rigor que a matemática atual exige, mas matemáticos posteriores estabeleceram de forma construtiva e rigorosa o conjunto dos números complexos, hoje tão aceito e importante na matemática e em diversas ciências.

A primeira menção à divisão por zero, por James Anderson, foi inspirada na geometria projetiva. Um modelo para esta geometria é definir cada ponto no plano projetivo como sendo uma determinada classe de pontos em $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$. Para Anderson, a inclusão do ponto $(0,0,0)$ no modelo projetivo concede diversas vantagens à computação, sobretudo em controle de robôs que precisam compreender a forma e disposição dos objetos no espaço e como eles mudam com o tempo. Anderson defende sua tese e refere-se ao ponto $(0,0,0)$ como *point at nullity* (ANDERSON, 1997). Desde então, diversos trabalhos foram produzidos no desenvolvimento dos números transreais. Em 2002, Anderson considera o uso sintático das regras de operações entre frações, ainda que, com o denominador zero. Em 2006, Anderson propõe o conjunto dos números transracionais, $\mathbb{Q}^T = \mathbb{Q} \cup \{-\infty, \infty, \Phi\}$. Um tempo depois, é apresentada uma lista de axiomas que estabelecem o conjunto e a aritmética dos números transreais (ANDERSON, VÖLKER e ADAMS, 2007). Em 2007, Anderson estende as funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais aos números transreais e, em 2008, ele propõe uma topologia para o espaço transreal e estabelece o conceito de transmétrica. Reis, Gomide e Kubrusly (2013) fazem uma analogia do momento pelo qual passam os números transreais com momentos históricos de diversas outras categorias de números. Ainda, em 2013, Gomide e Reis fazem um estudo das motivações de Anderson na concepção dos transreais e comparam os números transfinitos de Cantor aos transreais, afirmando que estes últimos possibilitam a extensão do conceito de métrica às distâncias infinitas e indeterminadas. Ainda, Anderson e Gomide (2014) propõem uma aritmetização de uma lógica paraconsistente utilizando os números transreais. Anderson e Reis (2014) estabelecem os conceitos de limite e continuidade no espaço transreal e Reis e Anderson estabelecem os conceitos de derivada e integral no espaço transreal (2014a) e propõem o conjunto dos números transcomplexos fazendo uma construção deste a partir dos números complexos (2014b). Ainda, Reis (2014) propõe uma interpretação contextual para as operações aritméticas entre os transreais. Em texto ainda não publicado, Reis e

Gomide propõem uma construção do conjunto dos números transreais a partir dos reais.

O presente texto consiste em duas partes. A primeira é formada por conteúdos preliminares e a segunda por nossas contribuições ao tema. No primeiro capítulo, contextualizamos o leitor fazendo um resumo da concepção, de James Anderson, dos números transreais. No segundo capítulo, fazemos um apanhado histórico do desenvolvimento do conceito de número. De como o homem, em diversos momentos, necessitou ampliar o que entendia por número. E observaremos que cada uma destas ampliações se deu inicialmente de forma intuitiva, sem preocupação com rigor, vindo depois a formalização do novo conjunto numérico. Iniciando a segunda parte, no terceiro capítulo, nós apresentamos uma construção do conjunto dos números transreais. Definiremos, em uma determinada classe de subconjuntos de pares de números reais, operações de adição e multiplicação (utilizando a adição e a multiplicação de números reais) e mostraremos que existe uma "cópia" dos reais nesta classe. Esta classe de pares ordenados executa o papel do conjunto dos números transreais. Desta forma, os números transreais, com a aritmética proposta por James Anderson, tornam-se consequências destas definições e das propriedades dos números reais. Esta construção prova a consistência da aritmética transreal. No quarto capítulo, desenvolvemos o cálculo transreal, onde diversos resultados análogos aos do cálculo real são estabelecidos com destaque aos conceitos de topologia, sequências, limite, continuidade, derivada e integral. Iniciamos propondo uma topologia para o conjunto dos números transreais. Sabendo que $\mathbb{R}^T$ é um espaço topológico, mostramos que $\mathbb{R}^T$ é um espaço de Hausdorff, separável, desconexo, compacto e completamente metrizável. Mostramos que os limites de sequências na topologia transreal concordam com os limites na topologia real. Em seguida, demonstramos, numa versão transreal, alguns teoremas sobre sequências. Mostramos que limite e continuidade transreais de uma função concordam com limite e continuidade usuais e estendemos a derivada real à derivada transreal. Em seguida, definimos uma integral no sentido transreal e mostramos que esta integral transreal concorda com a integral usual. No quinto capítulo, propomos uma aplicação dos transreais à lógica estabelecendo uma tradução, no conjunto dos números transreais, dos valores lógicos das proposições. Desta forma, uma semântica total é criada, isto é, uma semântica que abarca os valores lógicos clássicos, *fuzzy*, de contradição e de indeterminação. Estabelecemos ainda o espaço lógico, conceito inspirado na concepção de Wittgenstein de que a forma lógica do mundo é dada por uma "configuração de objetos". Assim como os objetos físicos estão dispostos em um espaço físico, os objetos que configuram logicamente o mundo estão situados em um "espaço lógico" (FLOYD, 2005). Wittgenstein não definiu de forma precisa seu espaço lógico, entretanto seguindo a ideia intuitiva de que os elementos deste espaço são as proposições e que as interações entre elas são os conectivos, tentamos estabelecer o espaço lógico como uma estrutura matemática bem definida. Algo parecido com um espaço vetorial, com as proposições sendo os "vetores" e os conectivos sendo transformações vetoriais. Nós estabelecemos um espaço transcartesiano onde os eixos são proposições, as entradas das coordenadas são números transreais, pontos são mundos possíveis, e o conjunto de todos os pontos é o conjunto de todos os mundos possíveis. Mostramos que este conjunto é um espaço topológico métrico de modo que podemos medir distâncias entre mundos possíveis. Generalizamos espaços vetoriais a espaços transvetoriais de modo que podemos aplicar transformações lineares a mundos possíveis. Definimos relações de acessibilidade entre mundos possíveis em termos de transformações lineares. Provamos a existência de mundos hipercíclicos neste espaço transreal de todos os mundos possíveis, o que significa dizer que provamos que existem mundos possíveis universais, qualquer um deles aproxima todos os mundos por aplicações recursivas de um único operador linear. Além do espaço dos mundos possíveis, estabelecemos o espaço das proposições. Um espaço transcartesiano onde os eixos são mundos possíveis, as entradas das coordenadas são números transreais e os pontos são proposições. Definimos neste espaço transformações lógicas e um critério pra distinguir quando uma proposição é ou não clássica. Finalmente, no sexto capítulo, nós fazemos uma discussão, um tanto quanto romântica, sobre a transmatemática e os números transreais. Sobre as novidades que os transreais trazem e o desafio de serem aceitos pelo meio acadêmico. Propomos uma interpretação contextual para as operações aritméticas entre os transreais, discutimos o fato de os transreais terem nascido na computação e não na matemática e divagamos sobre a introdução dos novos números $\frac{1}{0}$ e $\frac{0}{0}$.

Primeira parte

Capítulo 1

A concepção dos números transreais por James Anderson

James Anderson introduz os transreais de forma intuitiva e axiomática. Ele define os transreais como sendo os reais unidos a três novos elementos: infinito, menos infinito e o *nullity*.

A concepção do infinito e do menos infinito unidos ao conjunto dos números reais já é conhecida. Bartle (2001) comenta que, na teoria da medida e integração, é conveniente unir os dois símbolos ∞ e $-\infty$ ao conjunto dos números reais e salienta ainda que estes símbolos não são números. Bartle, assim como outros autores de teoria da medida e integração, chama o conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ de conjunto dos números reais estendidos, estabelece a relação $-\infty < x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e define as seguintes operações algébricas entre os símbolos $\pm\infty$ e os elementos $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll}
\infty + \infty = \infty, & \infty \times (-\infty) = -\infty, \\
\infty + x = \infty, & \infty \times x = \infty \text{ (se } x > 0), \\
x + \infty = \infty, & x \times \infty = \infty \text{ (se } x > 0), \\
-\infty + (-\infty) = -\infty, & \infty \times x = -\infty \text{ (se } x < 0), \\
-\infty + x = -\infty, & x \times \infty = -\infty \text{ (se } x < 0), \\
x + (-\infty) = -\infty, & (-\infty) \times (-\infty) = \infty, \\
\infty \times \infty = \infty, & (-\infty) \times \infty = -\infty,
\end{array}$$

$-\infty \times x = -\infty$ (se $x > 0$), $\quad -\infty \times x = \infty$ (se $x < 0$) e

$x \times (-\infty) = -\infty$ (se $x > 0$), $\quad x \times (-\infty) = \infty$ (se $x < 0$).

Note-se que estas operações são definidas de forma que a aritmética dos limites que divergem a um dos infinitos, ∞ ou $-\infty$, é respeitada. Bartle ainda salienta que algumas operações não são definidas, como por exemplo, $\infty + (-\infty)$ ou quocientes quando o denominador é ∞ ou $-\infty$. É interessante perceber que Tao (2011), semelhantemente a outros autores, diz que as operações $\infty - \infty$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$ são deixadas indefinidas, pois não se pode atribuir um valor a elas sem quebrar várias das regras da álgebra. No entanto, Bartle e Tao definem, ainda, $\infty \times 0 = 0$, $0 \times \infty = 0$, $-\infty \times 0 = 0$ e $0 \times (-\infty) = 0$. Tao (2011) defende esta definição argumentando que uma vez que adota-se a convenção $\infty \times 0 = 0 \times \infty = 0$, a multiplicação torna-se *crescente contínua* (no sentido de que se $x_n \in [0, \infty]$ cresce em direção a $x \in [0, \infty]$ e $y_n \in [0, \infty]$ cresce em direção a $y \in [0, \infty]$, então $x_n y_n$ cresce em direção a xy). A página da internet Wikilivros define a multiplicação acima da mesma forma e argumenta que "... verifica-se facilmente que, com esta escolha, em $\overline{\mathbb{R}}_+$ continuam valendo as propriedades comutativa, associativa e distributiva, sem qualquer restrição." (WIKILIVROS, 2014).

O *nullity*, por sua vez, foi concebido por Anderson inspirado na geometria projetiva. Um modelo para o plano projetivo se dá identificando pontos a retas e retas a planos. Mais precisamente, no espaço euclidiano xyz (que aqui será tratado indistintamente de $\mathbb{R}^3$) com origem O, escolhe-se um plano π paralelo, não coincidente, ao plano xy. Cada ponto P do plano π é identificado à única reta que passa por O e por P (Figura 1.1), e cada reta r em π é identificada ao único plano que passa por O e por r (Figura 1.1). Assim, existe uma aplicação injetiva do conjunto formado por todos os pontos e retas em π e o conjunto formado por todas as retas e planos em $\mathbb{R}^3$ que passam por O. Porém esta aplicação não é sobrejetiva. Pois as retas contidas no plano xy que passam por O não correspondem a nenhum ponto em π (Figura 1.2) e o plano xy não corresponde a nenhuma reta em π (Figura 1.2). Observe que as retas contidas no plano xy que passam por O possuem vetor diretor do tipo (x, y, z), onde $z = 0$ e x e y não são simultaneamente nulos, e o plano xy possui vetor normal do tipo $(0, 0, w)$, onde $w \neq 0$.

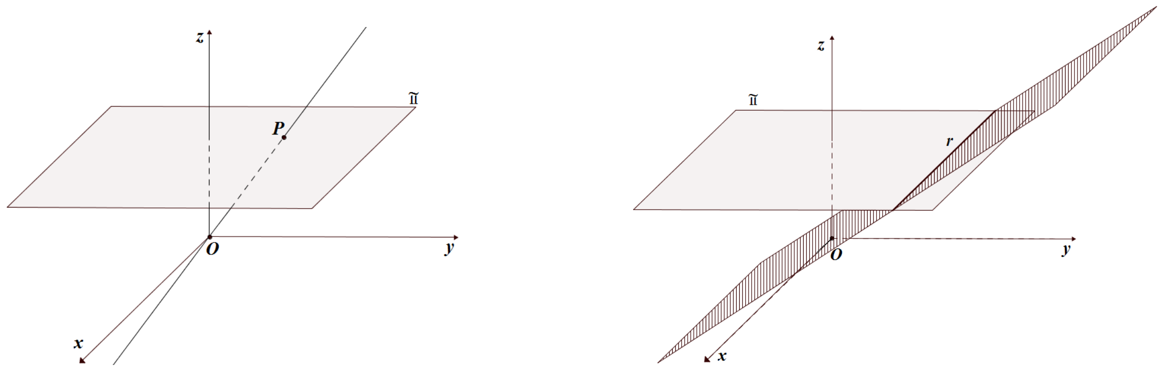


Figura 1.1: Ponto P e reta r no plano π

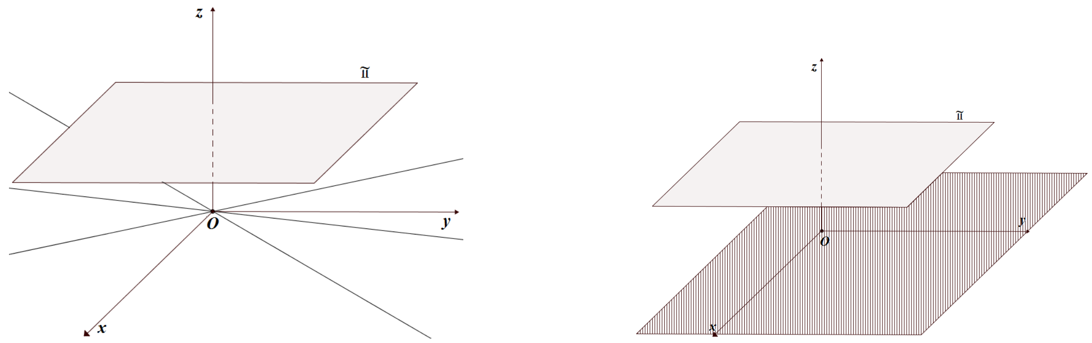


Figura 1.2: Retas no plano xy e o plano xy

Agora, notemos o seguinte. Sejam s uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa por O e (x, y, z) um vetor diretor de s. O vetor (x', y', z') é também um vetor diretor de s se, e só se, existe um número real k não nulo tal que $x = kx'$, $y = ky'$ e $z = kz'$. Isto induz a seguinte relação em $\mathbb{R}^3$: dois vetores (x, y, z) e (x', y', z') em $\mathbb{R}^3$ são ditos equivalentes se, e apenas se, existe um número real k não nulo tal que $x = kx'$, $y = ky'$ e $z = kz'$. Observe que para cada ponto no plano π, existe uma única classe de equivalência de vetores (x, y, z), onde $z \neq 0$. E analogamente, para cada reta no plano π, existe uma única classe de equivalência de vetores (u, v, w), onde u e v não são simultaneamente nulos. Afim de se ter uma correspondência biunívoca entre os pontos no plano projetivo e as retas em $\mathbb{R}^3$ que passam por O e uma correspondência biunívoca entre os retas no plano projetivo e os planos em $\mathbb{R}^3$ que passam por O adotam-se as seguintes definições. Um ponto no plano projetivo é a classe de equivalência de todos os vetores (x, y, z) que são vetores diretores de uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa por O, isto é, uma classe de equivalência de um vetor em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Uma reta no plano projetivo é a classe de equivalência de todos os vetores

(u, v, w) que são vetores normais a uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa por O, isto é, uma classe de equivalência de um vetor em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ (PENNA e PATTERSON, 1986). Desta forma, a classe do ponto $(0,0,0)$ não faz parte do plano projetivo.

Suponha que o plano π seja o plano de equação $z = c$ para alguma constante real c não nula. Observe que todo ponto de π tem coordenada (x', y', c). Observe também que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das classes de equivalência de coordenadas (x, y, z) com $z \neq 0$ e o conjunto dos pontos (x', y', c). A univocidade se dá pelo fato de (x, y, z) ser equivalente a $\left(\frac{xc}{z}, \frac{yc}{z}, c\right)$. O que não faria sentido se $z = 0$. Com isso, considerar também as classes de pontos da forma (x, y, z) com $z = 0$ e x e y não simultaneamente nulos, contorna o problema de aparecer $\left(\frac{xc}{0}, \frac{yc}{0}, \frac{0}{0}\right)$. Os pontos deste tipo são chamados de *pontos ideais*. Quaisquer duas retas no plano π paralelas (no sentido euclidiano) se intersectam (no sentido projetivo) em um ponto ideal. Por esta razão os pontos ideais são também chamados de *pontos no infinito*. Para mais sobre o assunto ver (PENNA e PATTERSON, 1986). Anderson observa que o caso $\left(\frac{0}{0}, \frac{0}{0}, \frac{0}{0}\right)$ é deixado de lado. Para ele, a inclusão do ponto $(0,0,0)$ no modelo projetivo traz diversas vantagens em computação, sobretudo em controle de robôs que precisam compreender a forma e disposição dos objetos no espaço e como eles mudam com o tempo. Em (ANDERSON, 1997), Anderson defende sua tese e se refere ao ponto $(0,0,0)$ como *point at nullity*.

Motivado nos reais estendidos e no *nullity*, Anderson postula a existência do novo conjunto numérico: $\mathbb{R}^T = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty, \Phi\}$. Postula, ainda, que $\frac{x}{0} = -\infty$ para todo x real negativo, $\frac{x}{0} = \infty$ para todo x real positivo e $\frac{0}{0} = \Phi$. Para estabelecer a aritmética e relação de ordem nos transreais Anderson e colaboradores (2007) propõem uma lista de trinta e dois axiomas. Abaixo, os transcrevemos exatamente como aparecem no artigo original. Para todos $a, b, c \in \mathbb{R}^T$, segue que:

[A1] Associatividade da Adição: $a + (b + c) = (a + b) + c$

[A2] Comutatividade da Adição: $a + b = b + a$

[A3] Elemento Neutro da Adição: $0 + a = a$

[A4] Adição por *Nullity*: $\Phi + a = \Phi$

[A5] Adição por Infinito: $a + \infty = \infty : \ a \neq -\infty, \Phi$

[A6] Subtração como Soma pelo Oposto: $a - b = a + (-b)$

[A7] Bijetividade do Oposto: $-(-a) = a$

[A8] Inverso Aditivo: $a - a = 0 : \ a \neq \pm\infty, \Phi$

[A9] Oposto de *Nullity*: $-\Phi = \Phi$

[A10] Subtração de Infinito não Nula: $a - \infty = -\infty : \ a \neq \infty, \Phi$

[A11] Subtração de Infinito por infinito: $\infty - \infty = \Phi$

[A12] Associatividade da Multiplicação: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

[A13] Comutatividade da Multiplicação: $a \times b = b \times a$

[A14] Elemento Neutro da Multiplicação: $1 \times a = a$

[A15] Multiplicação por *Nullity*: $\Phi \times a = \Phi$

[A16] Infinito vezes zero: $\infty \times 0 = \Phi$

[A17] Divisão: $a \div b = a \times (b^{-1})$

[A18] Elemento Inverso da Multiplicação: $a \div a = 1 : \ a \neq 0, \pm\infty, \Phi$

[A19] Bijetividade do Recíproco: $(a^{-1})^{-1} = a : \ a \neq -\infty$

[A20] Recíproco de zero: $0^{-1} = \infty$

[A21] Recíproco do Oposto do Infinito: $(-\infty)^{-1} = 0$

[A22] Recíproco do *Nullity*: $\Phi^{-1} = \Phi$

[A23] Positivo: $\infty \times a = \infty \Leftrightarrow a > 0$

[A24] Negativo: $\infty \times a = -\infty \Leftrightarrow 0 > a$

[A25] Infinito Positivo: $\infty > 0$

[A26] Ordem: $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$

[A27] Menor que: $a > b \Leftrightarrow b < a$

[A28] Maior ou igual que: $a \geq b \Leftrightarrow (a > b) \vee (a = b)$

[A29] Menor ou igual que: $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$

[A30] Quadricotomia: Exatamente um: $(a < 0),\ (a = 0),\ (a > 0),\ (a = \Phi)$

[A31] Distributividade: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) : \neg((a = \pm\infty) \wedge (\operatorname{sgn}(b) \neq \operatorname{sgn}(c)) \wedge (b + c \neq 0, \Phi))$

[A32] Completude: O conjunto, X, de todos os números transreais exceto Φ é completo, porque:

$\forall Y : Y \subseteq X \Rightarrow (\exists u \in X : (\forall y \in Y : y \leq u) \wedge (\forall v \in X : (\forall y \in Y : y \leq v) \Rightarrow u \leq v))$

Em resumo, a aritmética dos transreais se dá da seguinte forma. Para todos $a, b \in \mathbb{R}^T$:

i) $-\Phi = \Phi, \quad -(\infty) = -\infty \quad \text{e} \quad -(-\infty) = \infty.$

ii) $0^{-1} = \infty, \quad \Phi^{-1} = \Phi, \quad \infty^{-1} = 0 \quad \text{e} \quad (-\infty)^{-1} = 0.$

iii) $\Phi + a = \Phi,\ \infty + a = \begin{cases} \Phi, & \text{se } a \in \{-\infty, \Phi\} \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases} \text{ e } -\infty + a = \begin{cases} \Phi, & \text{se } a \in \{\infty, \Phi\} \\ -\infty, & \text{caso contrário} \end{cases}.$

iv) $\Phi \times a = \Phi,\ \infty \times a = \begin{cases} \Phi & , \text{ se } a \in \{0, \Phi\} \\ -\infty & , \text{ se } a < 0 \\ \infty & , \text{ se } a > 0 \end{cases} \quad \text{e } -\infty \times a = -(\infty \times a).$

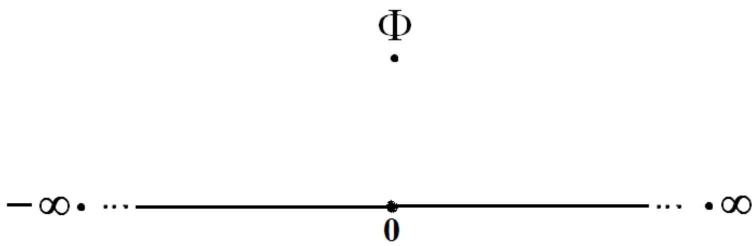
v) $a - b = a + (-b).$

vi) $a \div b = a \times b^{-1}.$

vii) Se $a \in \mathbb{R}$ então $-\infty < a < \infty$.

viii) Não ocorre que $a < \Phi$ nem $\Phi < a$.

Abaixo segue uma imagem pictórica da reta transreal.



É possível observar que alguns dos resultados axiomatizados por Anderson, assim como os resultados da teoria de medida e integração, podem ter sido motivados na aritmética dos limites. Por exemplo,

$-\infty + (-\infty) = -\infty,$ $\quad$ $\infty + a = \infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

$-\infty + a = -\infty,$ $\quad$ $-\infty \times (-\infty) = \infty,$

$\infty + \infty = \infty$ e $\quad$ $-\infty \times b = -\infty,$

$-\infty \times c = \infty,$

$-\infty \times \infty = -\infty,$

$\infty \times \infty = \infty,$

$\infty \times b = \infty,$

$\infty \times c = -\infty$ e

$\infty \times (-\infty) = -\infty$ para todos $b, c \in \mathbb{R}$ com $b > 0$ e $c < 0$;

$0^{-1} = \infty,$

$(-\infty)^{-1} = 0$ e

$\infty^{-1} = 0.$

Notamos que estes resultados refletem o seguinte. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f, g, h, p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0} h(x) = \infty$, $\lim_{x\to x_0} p(x) = \infty$ então

$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty,$

$\lim_{x\to x_0} (f(x) + a) = -\infty,$

$\lim_{x\to x_0} (h(x) + p(x)) = \infty$ e

$\lim_{x\to x_0} (h(x) + a) = \infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

$\lim_{x\to x_0} (f(x) \times g(x)) = \infty,$

$\lim_{x\to x_0} (f(x) \times b) = -\infty,$

$\lim_{x\to x_0} (f(x) \times c) = \infty,$

$\lim_{x\to x_0} (f(x) \times h(x)) = -\infty,$

$\lim_{x\to x_0} (h(x) \times p(x)) = \infty,$

$\lim_{x\to x_0} (h(x) \times b) = \infty,$

$\lim_{x\to x_0} (h(x) \times c) = -\infty$ e

$\lim_{x\to x_0} (h(x) \times f(x)) = -\infty$ para todos $b, c \in \mathbb{R}$ com $b > 0$ e $c < 0$;

$\lim_{x\to 0^+} x^{-1} = \infty,$

$\lim_{x\to -\infty} x^{-1} = 0$ e

$\lim_{x\to \infty} x^{-1} = 0.$

Apesar destes resultados da aritmética transreal serem condizentes com a aritmética dos limites, notamos, em seus trabalhos, que Anderson se inspirou na própria aritmética de frações para estabelecer os axiomas dos transreais. Anderson se aventurou em aplicar as regras usuais, de forma sintática, isto é, abdicando de qualquer significado e, até mesmo, de qualquer definição para um objeto do tipo $\frac{x}{0}$, a frações permitindo denominador zero. Primeiro, observe que toda fração usual, isto é, toda fração entre números reais em que o denominador é diferente de zero, pode ser reescrita como uma fração equivalente onde o denominador é positivo. De fato, se $x, y \in \mathbb{R}$ e $y < 0$, temos que $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ e $-y > 0$. Agora note que duas frações de números reais $\frac{x}{y}$ e $\frac{w}{z}$, onde $y, z > 0$, são equivalentes, isto é, $\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$ se, e só se, existe um número real $\alpha > 0$ tal que $x = \alpha w$ e $y = \alpha z$. Se aplicarmos esta mesma regra trocando $y, z > 0$ por $y, z \geq 0$, isto é, duas frações de números reais $\frac{x}{y}$ e $\frac{w}{z}$, onde $y, z \geq 0$, são equivalentes se, e só se, existe um número real $\alpha > 0$ tal que $x = \alpha w$ e $y = \alpha z$, obtemos $\frac{x}{0} = \frac{-1}{0}$ para todo número real $x < 0$, $\frac{x}{0} = \frac{1}{0}$ para todo número real $x > 0$ e $\frac{x}{0} = \frac{0}{0}$ para todo número real $x = 0$. Assim, para permitirmos, sintaticamente, frações com denominador zero, precisamos apenas de mais três elementos além dos números reais, a saber: $\frac{-1}{0}$, $\frac{1}{0}$ e $\frac{0}{0}$. Continuando. Se aplicarmos as regras

$$\frac{x}{y} + \frac{w}{z} = \begin{cases} \dfrac{2x}{y} & , \text{ se } \dfrac{x}{y} = \dfrac{w}{z} \\ \dfrac{xz + wy}{yz} & , \text{ se } \dfrac{x}{y} \neq \dfrac{w}{z} \end{cases},$$

$$\frac{x}{y} - \frac{w}{z} = \frac{x}{y} + \frac{-w}{z},$$

$$\frac{x}{y} \times \frac{w}{z} = \frac{xw}{yz} \quad \text{e}$$

$$\frac{x}{y} \div \frac{w}{z} = \begin{cases} \dfrac{x}{y} \times \dfrac{z}{w} & , \text{ se } w \geq 0 \\ \dfrac{x}{y} \times \dfrac{-z}{-w} & , \text{ se } w < 0 \end{cases},$$

análogas às regras das operações aritméticas entre frações usuais, às frações que permitem denominador zero, obtemos exatamente a aritmética axiomatizada por Anderson. Para não ficar extenso, tomaremos como exemplo apenas a adição por ∞. No que segue, a denota um número real arbitrário:

$$\infty + a = \frac{1}{0} + \frac{a}{1} = \frac{1 \times 1 + a \times 0}{0 \times 1} = \frac{1}{0} = \infty,$$

$$\infty + (-\infty) = \frac{1}{0} + \frac{-1}{0} = \frac{1 \times 0 + (-1) \times 0}{0 \times 0} = \frac{0}{0} = \Phi,$$

$$\infty + \infty = \frac{1}{0} + \frac{1}{0} = \frac{2 \times 1}{0} = \frac{2}{0} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{e}$$

$$\infty + \Phi = \frac{1}{0} + \frac{0}{0} = \frac{1 \times 0 + 0 \times 0}{0 \times 0} = \frac{0}{0} = \Phi.$$

Isto mostra a simplicidade operacional da aritmética dos transreais.

Salientamos que, do ponto de vista conceitual, Anderson não define a divisão por zero e nem o que é um número transreal. Entretanto, ele obteve sucesso em se inspirar na aritmética das frações para estabelecer o conjunto dos números transreais por meio axiomático. Do ponto de vista construtivista, pode-se questionar a concepção de James Anderson, entretanto à luz do formalismo, não há problema em sua apresentação, uma vez que seus axiomas não apresentaram inconsistências e os autores de (Anderson e colaboradores, 2007) afirmam ter uma máquina de prova que estabelece a consistência dos axiomas da aritmética transreal.

1.1 Não confunda alhos com bugalhos: *Nullity* não é NaN, aritmética transreal não é aritmética IEEE do ponto-flutuante

Certa feita, o presente autor foi questionado se a aritmética transreal não é o mesmo, com outro nome, que o padrão IEEE para aritmética de ponto-flutuante. O próprio propositor dos transreais já foi interpelado pelo mesmo motivo (ANDERSON, 2010). Então, motivado nesta questão, segue um arrazoado.

Ponto-flutuante é uma forma de representação dos números reais utilizada em computação. O padrão IEEE 754 é o mais amplamente utilizado para aritmética do ponto-flutuante. Este padrão suporta um modelo para a aritmética real e, afim de fazer do ponto-flutuante um modelo total manuseando a divisão por zero, suporta também um infinito positivo, um infinito negativo, um zero negativo e vários estados NaNs (*Not-a-number*). NaN não é um número, mas é utilizado para representar operações inválidas, tais como $\infty \div \infty$, $\infty - \infty$ ou $\sqrt{-1}$ (IEEE COMPUTER SOCIETY, 1985).

Sobre se *nullity* é NaN, a resposta direta é a seguinte. *Nullity* é um número único, bem definido, e os NaNs formam uma classe de diversos objetos distintos que, como a sigla diz, não são números. Assim, *nullity* difere tanto quantitativa como qualitativamente dos NaNs. Podemos detalhar a questão. Essencialmente o operador igualdade, =, na aritmética IEEE é não reflexivo. Isto é, o IEEE suporta objetos x tais que $x = x$ não é verdadeiro. Segundo Anderson (2010), a igualdade *bit* a bit, $x = y$ é reflexiva quando x e y estão na forma canônica, mas não é reflexiva em caso contrário. Por exemplo, no IEEE, $\infty - \infty = \text{NaN}$, $\infty \div \infty = \text{NaN}$, mas $\infty - \infty \neq \infty \div \infty$. A rigor, deveríamos escrever $\infty - \infty = \text{NaN}_i$ e $\infty \div \infty = \text{NaN}_j$ salientando que NaN_i e NaN_j não representam o mesmo objeto. Outra diferença entre as duas aritméticas é que a transreal possui um único zero, que é isomorfo ao zero real, e a IEEE possui dois zeros, o positivo e o negativo. Os zeros IEEE são aritmeticamente diferentes, mas, com respeito a relação de ordem, são iguais. Temos como exemplo que, segundo o padrão IEEE do ponto-flutuante, $1 \div \infty = 0$ e $1 \div (-\infty) = -0$, mas quando comparados com respeito a relação $\leq$ tem-se $0 = -0$. Pode-se notar, também que no padrão IEEE a função *negate*(x) não é o mesmo que *subtraction*$(0, x)$, assim $-x$ não é sempre idêntico a $0 - x$ (ANDERSON, 2014).

Segundo Anderson (2014), a aritmética transreal não precisa de um zero negativo, nem modelos finitos de computação baseados nesta aritmética. Ela é suficiente para mudar caminhos de execução em um *underflow* de um número negativo, de modo que qualquer divisão por zero opera em um numerador negativo. Suponha que queremos calcular $k \div 0$ para algum k positivo. No caso em que o zero é exato ou produzido por um *underflow* de um número positivo, ambas as aritméticas resultam $k \div 0 = \infty$. No caso em que o zero é produzido por *underflow* de um número negativo, a aritmética de ponto-flutuante IEEE calcula $k \div (-0) = -\infty$ em um único caminho de execução e a aritmética transreal muda para um segundo percurso de execução fazendo $k \div (-0) = -k \div 0$ e $-k \div 0 = -\infty$. Assim, ambas as aritméticas calculam resultados equivalentes. A postura de mudança de caminho para trabalhar com *underflow* de um número negativo é um custo adicional que a transaritmética paga. A vantagem é que ela ganha uma semântica mais simples do que a aritmética IEEE do ponto-flutuante.

A rigor, o padrão IEEE do ponto-flutuante não é uma aritmética porque se aplica a objetos NaNs, que não são números. Existem dois tipos de NaNs, NaNs silenciosos que se propagam e NaNs com sinal que desencadeiam uma exceção que pode ou não terminar, dependendo de como o programador implementa um programa. A aritmética transreal, foi concebida para ser uma aritmética total acrescentando três números bem definidos:

$-\infty$, ∞ e Φ. Por outro lado, a aritmética IEEE é totalizada de forma *ad hoc*. As duas aritméticas discordam em cálculos que envolvem o *nullity* e os NaNs. Por exemplo a aritmética transreal tem $\infty - \infty = \Phi$ mas o padrão IEEE tem $\infty - \infty \to \mathrm{NaN}_i \neq \mathrm{NaN}_j$. Subtrair dois infinitos transreais resulta em *nullity*, número único, que, como todos os números transreais, é igual a si mesmo. Isso justifica escrever o sinal de igualdade em $\infty - \infty = \Phi$. Em contrapartida, subtrair dois infinitos no padrão IEEE produz algum NaN não especificado, o que justifica a seta em $\infty - \infty \to \mathrm{NaN}_i \neq \mathrm{NaN}_j$, mas NaN não é igual a si mesmo, o que justifica o sinal de não-igual (ANDERSON, 2014).

Capítulo 2

A evolução do conceito de número

James Anderson concebeu os números transreais de forma intuitiva. Ele supôs a existência de números além dos já conhecidos, de forma que, de posse destes novos números, a divisão por zero é permitida. Como no âmbito dos números reais ou dos complexos, que são os números reinantes, demonstra-se que não é possível a divisão por zero, a expressão "dividir por zero" soa, no mínimo, de forma estranha. Por isso, é de se esperar que este novo conjunto numérico tenha difícil aceitação. Entretanto, pensamos que o conjunto dos números transreais passam por um processo no qual outras categorias de números já passaram. A história mais uma vez se repete. Um tipo de número é concebido primeiramente de forma intuitiva, imaginativa, supositiva e depois ganha o status de número, tão número quanto os anteriormente já assim aceitos.

Algumas categorias de números como, por exemplo, os negativos, irracionais, imaginários e infinitesimais, foram concebidos inicialmente como entidades transitórias, que apareciam apenas durante os cálculos, mas que não eram números em si. Não eram objetos com existência própria, mas seus aparecimentos estavam sempre condicionados aos números "verdadeiros". Por exemplo, o símbolo -2 não representava um número, mas apenas a operação de subtração por 2 (ROQUE, 2012). Quando no Cálculo escrevemos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, de certa forma, fazemos o mesmo. Em geral, os professores e os livros enfatizam que o símbolo ∞ na expressão acima não representa um número, mas é apenas um símbolo para indicar que a função f assume valores arbitrariamente grandes quando toma-se, no domínio da função, valores suficientemente próximos de x_0. Ou quando escreve-se $\infty + \infty = \infty$, enfatiza-se que esta não é uma equação mostrando o resultado de uma adição entre números, mas apenas uma representação do fato de que a soma de duas funções assume valores tão grandes quanto se queira se cada uma das funções assume valores tão grandes quanto. Ora, isto é o mesmo que nossos colegas faziam a alguns séculos atrás. Davam aos objetos que não se encaixavam às regras em vigor a categoria de "não ser", de apenas entes imaginários no desenvolvimento da teoria. Este tema será explorado no presente capítulo. Conforme estes objetos se tornavam cada vez mais presentes nos estudos, desprezá-los já não era possível. Buscava-se, então, formas de interpretá-los tentando-se enquadrá-los às categorias dos números já aceitos. Assim, foram surgindo, para estes, interpretações geométricas e aritméticas e sendo estabelecidas regras convincentes (que eram análogas as já existentes) de operação e até sua fundamentação em números já aceitos. Como por exemplo, a concepção de número real como um corte no conjunto dos números racionais ou como uma classe de sequências de Cauchy de números racionais, de número complexo como um par ordenado de números reais ou de número hiperreal como uma classe de sequência de números reais. O mesmo acontece agora com os transreais. Eles receberam uma fundamentação a partir dos reais (REIS e GOMIDE, 2014) que será apresentada no Capítulo 3. Desta forma, esta categoria de número não tem o caráter apenas intuitivo nem apenas o axiomático, mas também pode ser encarada como consequência dos números reais. A consistência dos números transreais está fundamentada, então, na consistência dos números reais. No presente capítulo apresentaremos uma breve exposição sobre a evolução do conceito de número. É claro que não temos o objetivo de que este seja um tratado da história dos números, mas esperamos apresentar o suficiente para que o leitor possa fazer uma analogia do momento que vive os transreais com outros momentos da história da matemática.

A divisão deste capítulo em seções tem o estrito objetivo de organizar o conteúdo apresentado. Deixamos claro que não vemos meio de dividir a história dos números em etapas cronologicamente definidas e disjuntas entre si. Por exemplo, diversos fatos sobre os números irracionais ocorreram contemporaneamente a fatos sobre números complexos e não apenas contemporaneamente mas também concomitantemente. Desta forma, o leitor deve ter em mente que, neste capítulo, os eventos de uma seção não são independentes dos de outra. Não temos a intenção de descrever a evolução dos conjuntos numéricos como extensões sucessivas, cronológicas e bem determindas. Como já dito, a divisão em seções tem caráter estritamente organizacional.

Em diversos momentos na história, a matemática passou por discussões epistemológicas e de legitimação de seus conceitos. Mergulhado nestas discussões esteve o conceito de número. Como afirma Abraham Robinson[1], citado por Dauben (1988), quando da concepção dos números hiperreais, a coleção de todos os sistemas numéricos não está totalmente finalizada, mas tem sido, e será, uma área crescente e dinâmica, agregando novos sistemas e descartando ou engavetando antigos. O que entendemos por número nem sempre foi como é hoje. Como em toda matemática e nas ciências, os conceitos não nascem prontos nas páginas dos livros e artigos, nem nas mentes de seus pesquisadores, mas evoluem, mudam e são aprimorados ao longo do tempo. Não foi diferente com a ideia de número. Hoje estamos familiarizados com diversos conjuntos numéricos. Os principais são os naturais, os inteiros, os racionais, os reais, os complexos e os hiperreais, mas não foi assim desde o início da história da humanidade. Ao menos, como a conhecemos hoje.

2.1 Números inteiros e fracionários

Podemos encontrar nos primeiros registros da espécie humana noções primitivas relacionadas ao conceito de número. As primeiras percepções do que seria um número parecem estar ligadas a dessemelhanças. Por exemplo, a diferença entre alimentar uma pessoa e alimentar muitas pessoas, locomover um boi morto e locomover vários bois mortos, fabricar uma ferramenta e fabricar duas ferramentas. Percebidas as diferenças entre grupos de um mesmo tipo de coisa, passa-se a observar as semelhanças entre grupos de coisas diferentes. Qual seria a semelhança entre um casal de coelhos e uma dupla de homens? E entre uma dupla de homens e um par de recipientes? A princípio, estes três grupos são bem diferentes. No exemplo, um casal de coelhos, uma dupla de homens e um par

[1]ROBINSON, A. Numbers – What Are They e What Are They Good For? *Yale Scientific Magazine*, 47, 1973, p. 14-16.

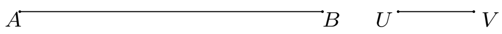
de recipientes são coisas diferentes, possuem significados diferentes, porém notamos uma regularidade quando passamos a falar de um grupo para outro. Se cada homem comer um coelho, não sobrará, nem faltará coelho e se cada homem usar um recipiente, não sobrará nem faltará recipiente. Podemos dizer que estes três grupos estão em correspondência um a um. Para cada homem há um coelho e há um recipiente, assim como para cada coelho e cada recipiente há um homem. Uma característica comum a estes três grupos é a noção intuitiva de que todos são formados pela mesma quantidade de objetos. O homem primitivo, para expressar o montante de um determinado grupo, seja de ovelhas, de pessoas, ou de frutas passou a utilizar marcações em ossos ou tábuas de barro de forma que cada marca feita correspondia a um determinado objeto do grupo. Estes são, talvez, os primeiros indícios da utilização de representações numéricas. Neste caso, o homem abstraia a característica peculiar de cada objeto e usava os mesmos símbolos para representar quantidades ainda que de coisas diferentes (ROQUE, 2012). Com esta noção, o homem começou a utilizar o que hoje chamamos de número. Estes números que nascem de processos de contagem são os, atualmente, denominados números naturais.

Por muito tempo, os únicos entes compreendidos como números eram os números naturais. Porém, não é difícil de conjecturar que, em algum momento na história, se iniciaria o uso de frações. Por vezes, precisamos representar uma parte no todo. Não são poucos os exemplos de momentos em que dividimos algo em partes iguais e tomamos algumas destas partes. Um dos registros mais antigos que se tem da ideia de número fracionário é o Papiro de Rhind (ou Papiro de Ahmes). Datado de aproximadamente 1650 a.C., é um papiro egípcio que contém, dentre outros, problemas de divisão. Um destes é o problema de dividir um pão para dez homens. O papiro dá a solução e a seguinte justificativa: cada homem receberá $1/10$ de pão, pois se um homem recebe $1/10$ de pão, então dois homens recebem $2/10$ ou $1/5$, consequentemente quatro homens receberão $2/5$ ou $1/3 + 1/15$, donde oito homens receberão $2/3 + 2/15$ ou $2/3 + 1/10 + 1/30$ e, portanto, oito mais dois homens receberão $2/3 + 1/10 + 1/30 + 1/5$ (BOYER, 1974, p. 11). Toda esta representação se justifica porque os egípcios faziam uso apenas do que chamamos hoje de frações unitárias, isto é, aquelas de numerador igual a 1. As demais frações, com exceção de 2/3, não tinham um símbolo específico, mas eram representadas como soma de frações unitárias. Por exemplo, a fração 2/15 era representada por $1/10 + 1/30$. Problemas de multiplicação e divisão entre frações também são encontrados no Papiro de Rhind e mostram que os egípcios já eram familiarizados com algumas propriedades aritméticas como a comutatividade da adição e da multiplicação.

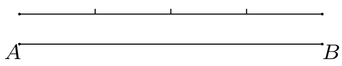
Cabe destacar, também, os registros babilônicos com algoritmos para o cálculo de raiz quadrada e tabelas com o inverso multiplicativo e operações de multiplicação e divisão. Uma dessas tabelas mostra os inversos dos números 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 12. A tabela não exibe os inversos de 7 e de 11. O motivo, provavelmente, é o fato de 7 e 11 não terem representação sexagesimal finita (60 era a base de numeração babilônica). Isto revela que, apesar de notáveis o conceito de número e a aritmética babilônica, sua matemática não possuía todas as operações atuais entre racionais positivos. Apesar disso, algumas exceções são encontradas. Por exemplo, uma tabela contém a aproximação $1/59 = 0{,}111$. O interessante é que os babilônios não perceberam ou preferiram não registrar a expansão infinita $1/59 = 0{,}111\ldots$ (análogo a $1/9 = 0{,}111\ldots$ no sistema decimal) (BOYER, 1974). Com isso, podemos observar que nos registros babilônicos, os números cujas representações sexagesimais não eram finitas não possuíam o mesmo papel dos demais.

2.2 Números irracionais e reais

Além dos inversos multiplicativos, as tabelas babilônicas também apresentavam soluções de raízes quadradas. Algumas dessas soluções apresentavam valores aproximados para raízes que hoje sabemos serem irracionais. Uma questão intimamente ligada aos números irracionais é o conceito de grandezas incomensuráveis. O conceito de número está relacionado a ideia de medida. Por exemplo, medida do comprimento de um segmento de reta e medida da área de uma figura plana. Em um primeiro olhar, podemos crer que todas as grandezas mensuráveis podem ser medidas por uma unidade comum. Por exemplo, se queremos medir um segmento de reta $\overline{AB}$, escolhemos um segmento que nos sirva de unidade, por exemplo $\overline{UV}$.



Então comparamos $\overline{AB}$ a $\overline{UV}$. Imaginemos que justapondo-se quatro segmentos $\overline{UV}$ de forma que fiquem na mesma linha reta, o segmento obtido tenha mesma medida do segmento $\overline{AB}$. Concluímos, então, que o segmento $\overline{AB}$ tem o quádruplo do tamanho de $\overline{UV}$, isto é, $\overline{AB} = 4\overline{UV}$.



Suponhamos agora que medimos um segmento $\overline{CD}$ e que quando este fosse comparado a $\overline{UV}$, verificássemos que $\overline{CD}$ é n_1 vezes $\overline{UV}$ mais um segmento $\overline{R_1S_1}$ menor que o $\overline{UV}$. Então teríamos

$$\overline{CD} = n_1\overline{UV} + \overline{R_1S_1}.$$

Daí, comparamos $\overline{UV}$ a $\overline{R_1S_1}$. Se $\overline{UV}$ for a justaposição de segmentos $\overline{R_1S_1}$, teremos

$$\overline{CD} = n_1(n_2\overline{R_1S_1}) + \overline{R_1S_1},$$

para algum n_2 natural. Chamando $n_1n_2 + 1$ de m_1 teremos $\overline{CD} = m_1\overline{R_1S_1}$. Concluímos que

$$\overline{CD} = \frac{m_1}{n_2}\overline{UV}.$$

Mas se $\overline{CD}$ for a justaposição de segmentos $\overline{R_1S_1}$ mais um segmento $\overline{R_2S_2}$ menor que $\overline{R_1S_1}$ teremos

$$\overline{UV} = n_2\overline{R_1S_1} + \overline{R_2S_2}$$

para algum natural n_2 e comparamos $\overline{R_1S_1}$ a $\overline{R_2S_2}$. Podemos acreditar que em algum momento repetindo-se o processo um número finito de vezes o último segmento obtido será exatamente igual a algum número de vezes o penúltimo,

$$\overline{R_{k-1}S_{k-1}} = n_{k+1}\overline{R_kS_k}.$$

E então chegamos a relação

$$\overline{CD} = \frac{m}{n}\overline{UV},$$

para alguns m e n naturais. Neste caso dizemos que os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{UV}$ são comensuráveis. Duas grandezas A e B são ditas comensuráveis se existe uma terceira que sirva de unidade comum para as duas, isto é, se existe uma terceira grandeza que mede A e B um número inteiro de vezes. Isto pode ser traduzido, na linguagem atual, por dizer que duas grandezas são comensuráveis se a razão entre elas é dada por um número racional. Quando do contrário, dizemos que as duas grandezas são incomensuráveis.

Em determinado momento da história, a matemática se deparou com o problema de lidar com grandezas incomensuráveis. Não se sabe exatamente quando se deu a descoberta de tais grandezas, mas o certo é que isto mudou o rumo da história dos números (ROQUE, 2012). Vejamos um exemplo clássico de duas grandezas incomensuráveis. Seja $ABCD$ um quadrado, d a medida da sua diagonal e l a medida do seu lado. Suponhamos que estas duas grandezas são comensuráveis, isto é, $d = mx$ e $l = nx$ para alguma medida comum x e para alguns números naturais m e n. Marcamos o ponto E na diagonal $\overline{AC}$ tal que $\overline{BC} = \overline{EC}$ e o ponto F no lado $\overline{AB}$ tal que $\overline{EF}$ seja perpendicular a $\overline{AC}$. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, o triângulo ABC é isósceles e, como o ângulo $A\hat{B}C = 90°$, temos $C\hat{A}B = A\hat{C}B = 45°$. Como $E\hat{A}F = C\hat{A}B = 45°$ e $A\hat{E}F = 90°$, temos $A\hat{F}E = 45°$. Então o triângulo AFE é isósceles, com $\overline{AE} = \overline{EF}$. Como FBC e FEC são triângulos retângulos com a mesma hipotenusa e com um dos catetos congruentes ($\overline{BC} = \overline{EC}$), pelo Teorema de Pitágoras, o outro cateto também é congruente, $\overline{BF} = \overline{EF} = \overline{AE}$. Denotando por G o ponto de interseção da reta paralela ao segmento $\overline{AE}$ que passa pelo ponto F com a reta paralela a $\overline{EF}$ que passa pelo ponto A, obtemos um novo quadrado $AEFG$. Designando por d_1 a medida da sua diagonal e l_1 a medida do seu lado, temos

$$l_1 = \overline{AE} = \overline{AC} - \overline{EC} = \overline{AC} - \overline{BC} = d - l \quad \text{e}$$

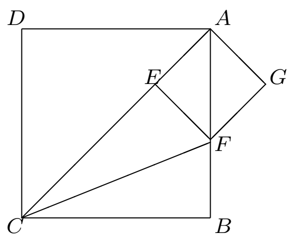
$$d_1 = \overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF} = \overline{AB} - \overline{AE} = l - (d - l) = 2l - d.$$

Como $d = mx$ e $l = nx$, temos

$$l_1 = mx - nx = (m - n)x = n_1 x \quad \text{e}$$

$$d_1 = 2nx - mx = (2n - m)x = m_1 x,$$

onde $n_1 = m - n$ e $m_1 = 2n - m$ são números naturais. Não é difícil verificar que $m_1 < m$. Procedendo da mesma forma com o quadrado $AEFG$, obtemos um novo quadrado cuja diagonal é $d_2 = m_2 x$ e cujo lado é $l_2 = n_2 x$, onde $n_2 = m_1 - n_1$ e $m_2 = 2n_1 - m_1$ são números naturais com $m_2 < m_1 < m$.



Uma vez que podemos continuar indefinidamente a construir novos quadrados, obtemos uma sucessão estritamente decrescente de números naturais $m_1 > m_2 > m_3 > \cdots$ tal que $m_i < m$, para todo $i \in \mathbb{N}$. O que é absurdo, dado que não pode haver uma infinidade de números naturais distintos menores que m. Logo, a diagonal e o lado do quadrado $ABCD$ são grandezas incomensuráveis.

Nos livros de Euclides encontramos duas teorias sobre razões e proporções. Uma que aplica-se apenas a razões entre números inteiros e outra que aplica-se a grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Pelo contexto da época, acredita-se que a teoria existente era inadequada para tratar as grandezas incomensuráveis, o que levou à busca de uma técnica que pudesse ser confiável (ROQUE, 2012). Dificuldades em se lidar com as grandezas incomensuráveis levaram os matemáticos da época a tratar a teoria das razões de um modo formal e cuidadoso, afim de que não houvesse erros ou equívocos provenientes de um olhar intuitivo. Por volta dos séculos V e IV a.C. algumas questões difíceis apareceram, tais como expressar o comprimento da diagonal em termos do lado de um quadrado. Como já dito, é provocador à intuição o fato de o lado e a diagonal de um quadrado não possuirem uma unidade de medida comum. É fácil crer que se tomarmos um segmento tão pequeno quanto necessário, ele servirá de medida comum. Os matemáticos tinham de lidar com a complexidade e a abstração de alguns problemas que contradiziam a intuição e não eram acessíveis por meio de cálculos. Com isso houve uma necessidade de se organizar a aritmética e a geometria deixadas pelos antecessores. Isto deve ter levado a um questionamento natural sobre a forma de tratamento do conteúdo matemático culminando na busca por critérios claros e livres da intuição para chegar-se a conclusões lógicas dos resultados obtidos. Com a descoberta dos incomensuráveis, não se podia mais confiar nos sentidos ou na intuição simplesmente. As afirmações, agora, necessitavam de demonstração para serem aceitas. Além disso, os objetos estudados deviam ser entes abstratos, já que a interpretação poderia induzir ao erro.

A busca pelo rigor se tornou cada vez mais acentuada. Do século XVIII para o século XIX, problemas matemáticos foram surgindo de forma que as ferramentas da época não eram suficientes para abordá-los. Um exemplo importante foi a crítica à concepção dos números como quantidades. Esta concepção se mostrou bastante limitada uma vez que, dessa forma, diversos problemas não conseguiam ser desenvolvidos. Enquanto prevalecia a necessidade de se relacionar os objetos matemáticos a alguma noção de realidade, difícil era a aceitação de quantidades negativas como números, por exemplo. Tornou-se, então, latente a necessidade de um conceito abstrato de número, um conceito que não estivesse ligado a noção de quantidade. O estudo das equações algébricas no século XVII permitiu o conhecimento das soluções negativas e imaginárias, porém estes objetos eram tidos como quantidades irreais. Os números irracionais, por sua vez, surgiam em resoluções de problemas, mas também não tinham ainda um status bem definido. Tanto o é que os atuais números irracionais eram designados por números "surdos" ou "inexprimíveis" (ROQUE, 2012). Isto mostra que eles não eram aceitos como números no mesmo sentido dos inteiros e racionais positivos. A necessidade de incorporá-los fez parte do processo de generalização pelo qual passou a matemática. O século XIX se encarregou da fundamentação do Cálculo ou da Análise e esta fundamentação não pôde se esquivar do problema da extensão do conceito de número. Para que os conceitos da Análise pudessem ser estabelecidos de forma rigorosa, foi preciso enxergar os números como entes abstratos e não mais como quantidades. Por muito tempo, os irracionais eram considerados como números não verdadeiros, mas apenas símbolos. Sua existência era condicionada a grandezas geométricas. Até então isto não era um problema, as regras usuais dos números eram aplicadas aos irracionais livremente.

O Cálculo, com os estudos das curvas, áreas, séries, tangentes e taxas de variação, consolidou a ideia de que existia uma correspondência entre os pontos numa reta e os números. Com a Geometria Analítica e a associação de curvas a equações, era uma percepção geométrica que os números correspondiam aos pontos numa reta sem preocupar-se com o status dos números irracionais. Entretanto, conceitos fundamentais do Cálculo, tais como o de limite, dependem intimamente das propriedades dos números reais (irracionais unidos aos racionais). Com isso, tornou-se necessário o entendimento conceitual de número real. Até então, os números eram vistos como contínuos ou discretos. Os discretos eram os númeors naturais ou racionais positivos e os contínuos eram números reais entendidos geometricamente como segmentos de reta. A designação de número "real" começou a ser empregada para distinguir essas quantidades das negativas e imaginárias, que ainda não eram consideradas do "mundo real". Diversos problemas do Cálculo, como o estudo de convergência de séries, limites de funções e continuidade, trouxeram à tona o problema de como os números reais se distribuem na reta.

Uma questão muito importante no entendimento dos números reais foi o estudo das raízes de equações polinomiais de grau ímpar. Reconhecia-se que se uma função assume valores negativos e valores positivos, então seu gráfico deveria interceptar o eixo OX em algum ponto. Admitia-se, então, que este ponto correspondia a um número real. Hoje sabemos que este resultado é dado pelo Teorema do Valor Intermediário, que depende intimamente do conceito de continuidade. Era intuitivo que a reta é contínua. O problema é que a propriedade "continuidade" ainda não era plenamente compreendida. Isto é, o conceito de continuidade carecia de uma definição rigorosa. Ora, para cada número racional, existe um segmento de reta cujo comprimento é este número. Assim escolhendo-se um ponto na reta para ser a origem, isto é, o zero, cada número racional possui um ponto na reta correspondente. Porém, sendo já conhecida a existência dos incomensuráveis, sabe-se que a recíproca não é verdadeira. Isto é, existem pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional. Por exemplo, o ponto correspondente a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Necessitava-se então entender o que era a continuidade da reta, isto é, qual propriedade a reta possui que falta aos racionais. O primeiro a caracterizar a continuidade da reta foi Dedekind. Ele percebeu que a continuidade no âmbito dos números era uma pressuposição implícita e, juntamente com o próprio conceito de número, não definida. Até então os números, simplesmente, existiam e não era necessário serem definidos. Dedekind percebeu que toda vez que se fazia um "corte" na reta, este corte passava por um ponto, no seguinte sentido: se a reta for dividida em duas partes de tal forma que todo ponto de uma está à esquerda de todo ponto da outra, existe um e somente um ponto que faz esta separação (CARAÇA, 1989). Esta era a caracterísica da reta que faltava aos racionais. Existem cortes nos racionais que não passam por nenhum número racional. Por exemplo, sejam $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x < 0 \text{ ou } x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$. Note que $A \cup B = \mathbb{Q}$ e $a < b$ para todos $a \in A$ e $b \in B$, mas não existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a \leq c \leq b$ para todos $a \in A$ e $b \in B$. Dedekind usou sua noção de corte para obter uma construção dos números irracionais a partir dos números racionais. Desta forma, Dedekind definiu, de maneira adequada, os números irracionais a apartir dos racionais. Assim os irracionais não dependiam apenas da suposição de sua existência, mas agora eram definidos de modo preciso e sua consistência estava fundamentada na consistência dos números racionais. Posteriormente outras construções foram dadas aos números reais, como por exemplo, a construção devido a Cantor, a partir de determinadas classes de sequências de números racionais.

2.3 Números negativos e imaginários

O reconhecimento e a utilização de números inteiros negativos surgiu bem depois dos números fracionários. É possível que a ampla aceitação desses números (que complementam o conjunto dos naturais para formar o conjunto dos inteiros) se deu quando da aceitação de raízes negativas de polinômios no decorrer do século XVI (BOYER, 1974). Apesar disso, existem evidências do reconhecimento de números negativos na antiguidade.

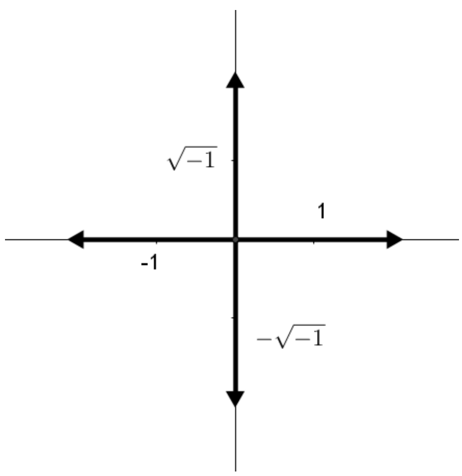
Os primeiros registros que se tem desses números são na China. Em meados do século XIII, Li Yeh introduziu uma notação para números negativos. Ele fazia um traço diagonal no último dígito de um número para indicar que este era negativo. Na Índia, por volta do século VII, já se trabalhava com soluções negativas de equações. Cardano, em seu livro Ars Magna, admite soluções negativas de equações. Vale ressaltar que, na mesma obra, Cardano também admite raiz quadrada de número negativo como solução válida de equações. O estudo das equações algébricas tem papel fundamental no desenvolvimento dos números negativos e imaginários. Foi a busca por soluções destas equações que trouxe à tona a discussão sobre estas entidades. Como por exemplo na clássica equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, que em sua fórmula de resolução apresenta $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. O termo $\sqrt{-121}$ implicaria em a equação não ter solução. Porém não é difícil ver que 4 é solução dela. Desta forma, surgia a necessidade de operar raízes de números negativos, objetos que não eram considerados números. Até então, quando uma tal raiz aparecia na resolução de uma equação, dizia-se que a equação não possuia solução. Entretanto, com o exemplo acima, não mais era possível ignorar tais objetos.

Descartes, com seu desenvolvimento da Geometria Analítica, aplicou métodos geométricos na solução de equações. Ele desenvolveu métodos em que as operações aritméticas correspondiam a transformações em segmentos de reta no plano. Por exemplo, ele podia obter o produto de dois segmentos de reta como um terceiro segmento. Estes métodos permitiam mesclar a aritmética e a geometria, tidas como campos de estudos distintos. O interessante é que Descartes rejeitava as raízes negativas, pois, para ele, as soluções das equações eram segmentos de reta. Logo não faziam sentido soluções negativas. Descartes considerava que uma equação possui tantas raízes quanto for seu grau. Porém ele diz que algumas dessas raízes podem ser “falsas”. Ele completa, ainda, que tanto as raízes verdadeiras quanto as falsas não são sempre reais, mas às vezes apenas imaginárias. Isto é, nem sempre existe uma quantidade para as raízes que imaginamos (ROQUE, 2012). Os números negativos eram, até então, entendidos não como números, mas como objetos transitórios em operações aritméticas. Da mesma forma, acontecia com as raízes quadradas dos números negativos. Cardano, por exemplo, apesar de não aceitar tais objetos como números, os operava com as regras aritméticas usuais, assim como Bombelli que realizou cálculos com $\sqrt{-121}$ para concluir que a solução 4 da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ podia ser obtida pela fórmula $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$. Os resultados de Bombelli não tiveram grande reconhecimento e a aceitação das entidades negativas ainda era controversa no meio matemático. Seu estatuto como números era ignorado, porém elas eram utilizadas sem maiores preocupações com sua natureza, já que eram úteis na realização dos cálculos. O desenvolvimento dos estudos algébricos permitiu a expansão das operações aritméticas proporcionando, assim, um esgotamento do entendimento de número como quantidade.

Euler foi um dos precursores em entender que o objeto de estudo da matemática não eram as quantidades, mas sim os números e suas operações. Para ele, os negativos eram tão números quanto os positivos. Euler introduziu a nomenclatura "naturais" para os números $0, 1, 2, \ldots$ que eram obtidos somando-se sucessivas vezes a unidade. Para ele, os números $0, -1, -2, \ldots$ eram obtidos de forma semelhante com a diferença de que a unidade era subtraída sucessivamente. Euler chamou a união destas duas categorias de números de números "inteiros" para diferenciá-los dos fracionários.

É interessante notar que, nos anos iniciais do século XIX na França, que era um dos principais centros de desenvolvimento da matemática da época, os números negativos e imaginários eram abordados como o objeto de estudo em si, apenas fora das publicações acadêmicas centrais e por pessoas de fora do círculo de pesquisadores reconhecidos. Um caso conhecido é o do padre Adrien-Quentin Buée, que não integrava a comunidade científica. Ele usava a sugestão de Fontenelle sobre os números negativos que descrevemos a seguir. Fontenelle deu uma ideia de posição ou sentido aos números negativos. Para ele, os números possuiam não só o aspecto quantitativo, mas também o qualitativo. Desta forma, as quantidades positivas e as negativas deveriam ser opostas. Nesse sentido caminhou também a proposta de Argand, que sugeriu um modelo que dava, de certa forma, uma realidade aos negativos e os tirava do status de imaginários. Argand propôs o exercício mental de supor uma balança com dois pratos A e B. Ao prato A acrescenta-se a quantidade x sucessivas vezes, fazendo que este possua sucessivamente x, $2x$, $3x$, $\ldots$.

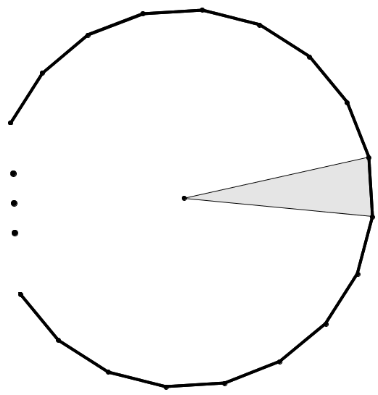
Se agora retiramos a quantidade x sucessivamente em algum momento obtemos o equlíbrio. Para Argand, após este momento, poderia-se continuar retirando quantidades x do prato A se isso fosse entendido por acrescentar as quantidades x ao prato B. Desta forma, se estabelece uma equivalência entre retirar quantidades do prato A e acrescentar quantidades ao prato B. Para Argand, para cada número positivo havia exatamente um outro número com o mesmo valor absoluto e com orientação oposta. Isto nos dá uma ótima brecha para observar que, nesta concepção, o zero não era um símbolo do nada ou um representante de nenhuma quantidade, mas um ponto neutro, um ponto de partida entre as direções opostas. Argand também propôs um interessante modelo para os raízes de números negativos. Como para os negativos, ele utilizou as ideias de valor absoluto e de orientação. Contudo, para a inclusão do número $\sqrt{-1}$ no sistema, não bastavam apenas dois sentidos em uma mesma direção, mas também uma direção perpendicular. Suponha que os números sejam representados por vetores. Assim o número 1 e o número -1 são vetores de mesmo comprimento (mesmo valor absoluto) mas de sentidos opostos na mesma direção. A fim de obtermos $1 \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ a multiplicação por $\sqrt{-1}$ deve ser alguma transformação tal que aplicada duas vezes ao vetor 1 o leve ao vetor -1. Ora, uma transformação capaz de gerar este resultado é a rotação em 90^o. Isto é, a multiplicação de um vetor por $\sqrt{-1}$ deve ser a rotação deste vetor em 90^o. Desejando-se manter o 1 como neutro multiplicativo, espera-se que $1 \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$. Desta forma, o número (vetor) $\sqrt{-1}$ deve ser o resultado da rotação do número 1 em 90^o, donde $\sqrt{-1}$ está na direção perpendicular à direção de 1. E o $-\sqrt{-1}$ está na mesma direção de $\sqrt{-1}$ em sentido oposto.



Este foi um importante passo no esforço de se estabeler as raízes de números negativos. Entretanto o trabalho não estava completo. Os estudos de Cauchy em Análise de Variáveis Complexas traziam a necessidade da definição desses números de forma rigorosa. Isto se deu no mesmo momento em que a matemática intensificou a preocupação com a clareza e coesão dos seus objetos e das afirmações feitas. Gauss foi um matemático que trabalhou fortemente na direção de que os objetos matemáticos deveriam ser entes abstratos não dependendo de um representante no mundo concreto. Gauss foi o primeiro matemático influente a defender publicamente as quantidades imaginárias. Com os trabalhos de Gauss sobre estes números, as quantidades negativas e imaginárias começam a deixar o status de números "falsos", "fictícios", "impossíveis", "absurdos", "sofísticos" ou "imaginários". Eles deveriam ser vistos como números tanto quanto os reais positivos. O nome "imaginários" para as raízes de negativos foi substituído por "complexos". Para Gauss, "o processo de generalização da álgebra, que levava à extensão dos domínios numéricos, era um dos principais instrumentos dessa disciplina" (ROQUE, 2012). Gauss deu importantes contribuições na concepção dos números complexos como pontos no plano, mas o estabelecimento destes números se deu de forma completa com a definição rigorosa de Hamilton de número complexo como um par ordenado de números reais (ou como vetores no plano) com as operações aritméticas bem definidas em termos destes pares. Deste modo, Hamilton definiu os números complexos a apartir dos reais. Assim os complexos não dependiam apenas da suposição de sua existência, mas agora eram definidos de modo preciso e sua consistência estava fundamentada na consistência dos números reais.

2.4 Números infinitesimais

Na matemática, em algumas definições, resoluções de equações e demonstrações de teoremas é preciso, por um lado, que um determinado número seja igual a zero e, por outro, que este mesmo número seja diferente de zero. É comum, atualmente, se tentar resolver este problema tomando o limite da expressão em questão com o número citado tendendo a zero. Um exemplo clássico aparece no desejo de se definir velocidade instantânea. Por exemplo, se a posição s de um móvel é dada em função do tempo t, então a velocidade deste móvel no instante t_0 é definida por $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{s(t+t_0)-s(t_0)}{t}$, se este limite existir. A ideia de limite vem sendo utilizada desde a antiguidade. Por exemplo, Eudoxo e Arquimedes lançaram mão do que seria um embrião deste conceito. O, atualmente denominado, método de exaustão (BOYER, 1974). Já Leibniz, que é tido como um dos precursores do Cálculo, não tinha formatada a ideia de limite. Ele não tomava o limite de uma variável tendendo a zero. Leibniz tomava um número infinitamente pequeno ou infinitamente próximo de zero. Ele considerava uma quantidade infinitamente pequena chamada de “diferencial” e denotada por dx. Neste momento, não podemos deixar de fazer alusão aos trabalhos de Kepler e Cavalieri no século XVII. Eles utilizavam-se de métodos infinitesimais no cálculo de área de regiões planas e de volumes de sólidos. Kepler, por exemplo, considerava que o círculo podia ser compreendido como um polígono de infinitos lados de medidas infinitamente pequenas.



Desta forma, sua área seria a soma das áreas dos infinitos triângulos que têm como um dos lados o lado do polígono e como o vértice oposto o centro do círculo. Assim, denotando por r e A o raio e a área do círculo, respectivamente e b_i e A_i o lado e a área do i-ésimo triângulo, respectivamente, temos que $A = A_1 + A_2 + \cdots = \dfrac{b_1 r}{2} + \dfrac{b_2 r}{2} + \cdots = \dfrac{r}{2}(b_1 + b_2 + \cdots)$. Como o polígono, na verdade é o círculo, o seu perímetro é igual ao comprimento do círculo. Assim, $A = \dfrac{r}{2}(b_1 + b_2 + \cdots) = \dfrac{r}{2} 2\pi r = \pi r^2$. Note que Kepler não se atentou ao rigor tal como o concebemos hoje. Ele não se preocupou com propriedades aritméticas de somas infinitas, tais como a distributividade, e nem para a análise de convegência de tais somas, entretanto o resultado obtido está correto. Cavalieri, de forma semelhante, considerava que os sólidos eram formados por infinitas partes planas, isto é, por infinitas partes de comprimentos infinitamente pequenos. Com isto, ele enunciou seu famoso princípio: Se dois sólidos de mesma altura, produzem figuras de mesma área quando interceptados por um plano paralelo ao plano base, então os sólidos possuem o mesmo volume.

Voltando ao cálculo de Leibniz, a questão é que uma quantidade diferencial ora era diferente de zero e ora, esta mesma quantidade, era igual a zero. Por exemplo, cosidere s e t como no parágrafo anterior e suponha que $s(t) = t^2$. Leibniz afirmava que a velocidade do móvel em um determinado instante t_0 era dada pela velocidade média deste móvel numa variação de tempo infinitamente pequena a partir de t_0. Ele tomava então um intervalo de tempo infinitesimal dt e calculava a velocidade por $v(t_0) = \dfrac{s(t_0 + dt) - s(t_0)}{dt} = \dfrac{(t_0 + dt)^2 - t_0^2}{dt} = \dfrac{2t_0dt + (dt)^2}{dt}$. A parcela $(dt)^2$ era descartada por ser de ordem infinitamente menor que a parcela $2t_0dt$. Assim $v(t_0) = \dfrac{2t_0dt}{dt} = 2t_0$. Note que quando Leibniz toma dt no denominador de uma fração está considerando este objeto aritmeticamente diferente de zero, mas quando despreza a parcela $(dt)^2$, considera dt aritmeticamente igual a zero. Esta consideração foi motivo de diversas controvérsias sobre os números infinitesimais. Entretanto, o que era questionada não era a eficácia destes métodos mas sim a falta de fundamentação para estes novos números. Leibniz chegou a dizer que estes números eram apenas ficções úteis no desenvolvimento dos cálculos.

Berkeley foi um dos críticos mais ferrenhos ao cálculo infinitesimal. Ele argumenta, sobre os que faziam uso dos infinitesimais, que além de considerar as diferenças entre quantidades finitas, eles também consideravam as diferenças destas diferenças, as diferenças das diferenças das diferenças e assim indefinidamente. Desta forma, consideravam quantidades infinitamente menores que qualquer quantidade discernível e, sem um fim, quantidades infinitamente menores que as anteriores, originando uma sequência infinita de infinitesimais, cada um menor que o anterior. Berkeley[2], citado por CARVALHO e D'OTTAVIANO (2006) ironiza o fato de se somar milhões de milhões de parcelas de números infinitesimais e esta soma nunca ser um número comum (número real) . Esta crítica de Berkeley está relacionada ao que hoje denominamos de "propriedade arquimediana". O conjunto dos números hiperreais (que contém os infinitesimais) não é arquime-

[2]BERKELEY, G. The analyst. Dublin, Trinity College. Versão eletrônica adaptada por David R. Wilkins a partir de texto de 1898, de George Sampson. 2002.

diano, isto é, existem números hiperreais positivos a e b tais que $a + \cdots + a < b$ qualquer que seja a quantidade de parcelas em $a + \cdots + a$.

A despeito das críticas e, mesmo sem ter uma definição rigorosa para este tipo de número, Leibniz deduziu diversos resultados do Cálculo atual e, assim, seus trabalhos foram sendo divulgados. L'Hospital, por exemplo, propôs uma axiomática para lidar com os números infinitesimais. Ele postula que se a diferença entre duas quantidades a e b é uma quantidade infinitesimal, então pode-se tomar indiferentemente a ou b e que uma linha curva pode ser considerada como uma linha poligonal com infinitos lados, todos de comprimento infinitesimal. Entretanto, como destacam CARVALHO e D'OTTAVIANO (2006),

> Nem todo esforço dispendido por Newton e Leibniz no tratamento formal dos infinitésimos e os avanços obtidos com a obra de l'Hospital seriam suficientes para garantir a adequação dos infinitésimos como base segura para a construção do cálculo diferencial e integral. É o que mostram matemáticos e filósofos da Academia Real de Ciências de Paris, cujas opiniões divergentes sobre o tema dariam início a um longo ciclo de discussões entre adeptos e contrários à nova teoria matemática de Newton e Leibniz.

Os debates continuaram a acontecer até que os críticos aos infinitesimais sentiram-se vitoriosos após a criação de uma comissão conciliatória pela academia de Paris, umas vez que não foram apresentados argumentos sólidos e satisfatórios para a existência dos infinitesimais. Estes números ganham sentença de morte com o surgimento da teoria dos limites no século XIX. Com esta teoria, o Cálculo pôde ser aritmetizado e, desta forma, ganhou o rigor que o era exigido podendo estabelecer-se como um campo sólido da matemática. Desta forma, o uso dos infinitesimais foi completamente abandonado.

Os números infinitesimais permaneceram durante muito tempo no esquecimento tendo como sua última lembrança a frustração de seus defensores na tentativa de os justificar. Até que na década de 1960 Abraham Robinson ressuscita os infinitésimos propondo uma construção destes números a apartir dos números reais. Neste caminho, Robinson estabelece de forma rigorosa, o conceito de infinitésimos, números infinitamente pequenos, e infinitos, números infinitamente grandes. Estes números pertenceriam a uma extensão dos números reais, o conjunto dos números hiperreais, denotado por $^*\mathbb{R}$. Robinson toma uma determinada relação de equivalência no conjunto de todas as sequências de números reais e define uma aritmética e ordem convenientes para as classes desta equivalência. A Análise desenvolvida a partir dos números hiperreais é denominada análise não-standard (CARVALHO e D'OTTAVIANO, 2006). Com a análise não-standard, Robinson deduz exatamente os mesmos resultados da análise usual com a vantagem de diversas demonstrações se tornarem significantemente mais simples. Desta forma, Robinson não apenas deu a fundamentação aos números infinitesimais que tanto desejavam os críticos dos séculos anteriores, mas mostrou também que são de fato ferramentas úteis na matemática moderna. Aqui cabe o questionamento sobre o porquê de a análise não-standard não ser amplamente conhecida e utilizada no meio acadêmico e em cursos universitários. Não nos deteremos a esta discussão, mas conjecturaremos que é muito menos desconfortável "deixar as coisas como estão".

Cabe comentar que as grandezas infinitesimais tiveram, ainda, outras abordagens além da de Robinson. Por exemplo, a de Newton da Costa que se utiliza das grandezas infinitesimais no seu cálculo diferencial paraconsistente. Conceito este que permite o estudo de teorias inconsistentes e o tratamento de problemas que, a primeira vista, não poderiam ser abordados pelo cálculo diferencial clássico. Um outro exemplo é o de John Bell que origina seus infinitesimais na teoria das categorias (CARVALHO e D'OTTAVIANO, 2006).

Segunda Parte

Capítulo 3

Prova de consistência da aritmética transreal: Construção do conjunto dos números transreais

Acreditamos que o processo pelo qual passam os números transreais é um processo comum na história da matemática. Como visto no Capítulo 2, diversas classes de números foram concebidas inicialmente de forma intuitiva. No mesmo caminho, os transreais foram propostos por James Anderson inicialmente inspirados na geometria projetiva e, posteriormente, aplicando-se, mesmo sem rigor, as regras usuais de operações aritméticas entre frações.

A seguir, propomos uma construção do conjunto dos números transreais a partir do conjunto dos números reais. Definiremos, em uma determinada classe de subconjuntos de pares de números reais, operações de adição e multiplicação (utilizando a adição e a multiplicação de números reais) e mostraremos que existe uma "cópia" dos reais nesta classe. Desta forma, os números transreais com a aritmética proposta por James Anderson tornam-se consequências destas definições e das propriedades dos números reais. Esta construção demonstra que a consistência da aritmética transreal é uma consequência da consistência dos números reais.

Definição 3.1. Seja $T := \big\{(x,y);\ x,y \in \mathbb{R},\ y \geq 0\big\}$. Dados $(x,y),(w,z) \in T$, dizemos que $(x, y) \sim (w, z)$, isto é, que (x, y) é equivalente a (w, z) pela relação $\sim$ se, e só se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ positivo tal que $x = \alpha w$ e $y = \alpha z$.

Proposição 3.2. A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em T.

Demonstração. A propriedade reflexiva é imediata. Agora sejam $(x, y), (w, z), (u, v) \in T$ tal que $(x, y) \sim (w, z)$ e $(w, z) \sim (u, v)$. Então existem positivos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $x = \alpha w$, $y = \alpha z$, $w = \beta u$ e $z = \beta v$. A propriedade simétrica segue de $w = \dfrac{1}{\alpha}x$ e $z = \dfrac{1}{\alpha}y$. A propriedade transitiva segue de $x = \alpha\beta u$ e $y = \alpha\beta v$. $\square$

Para cada $(x, y) \in T$, denotaremos a classe de equivalência de (x, y) por $[x, y]$, isto é, $[x, y] := \big\{(w, z) \in T;\ (w, z) \sim (x, y)\big\}$. O que significa que $[x, y]$ é o conjunto de todos os pares que são equivalentes a (x, y). O conjunto quociente de T com respeito a $\sim$ será $T/\!\sim$, isto é, $T/\!\sim := \big\{[x, y];\ (x, y) \in T\big\}$. Em outras palavras, $T/\!\sim$ é o conjunto de todas as classes de equivalência de elementos de T.

Proposição 3.3. $T/\!\sim\ = \ \big\{[t, 1];\ t \in \mathbb{R}\big\} \bigcup \big\{[0, 0], [1, 0], [-1, 0]\big\}$. Além diso, para cada $t \in \mathbb{R}$, os elementos $[t, 1]$, $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[-1, 0]$ são dois a dois distintos e para cada $t, s \in \mathbb{R}$, segue que $[t, 1] \neq [s, 1]$ sempre que $t \neq s$.

Demonstração. Se $[x, y] \in T/\!\sim$, então ou $y > 0$ ou $y = 0$. Se $y > 0$, então $[x, y] = \left[\dfrac{x}{y}, 1\right] \in \Big\{[t, 1];\ t \in \mathbb{R}\Big\}$, pois $x = y\dfrac{x}{y}$ e $y = y \times 1$. Por outro lado,

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } x = 0, \text{ então } [x, y] = [0, 0] \\ \text{se } x > 0, \text{ então } [x, y] = [1, 0] \quad \text{pois } x = x \times 1 \text{ e } y = x \times 0 \\ \text{se } x < 0, \text{ então } [x, y] = [-1, 0] \text{ pois } x = -x \times (-1) \text{ e } y = -x \times 0 \end{cases}.$$

O restante segue de forma imediata. $\square$

Agora, definimos em $T/\!\sim$ operações que estenderão as operações aritméticas entre números reais.

Definição 3.4. Dados $[x, y], [w, z] \in T/\!\sim$ quaisquer, definimos:

a) (Adição) $[x, y] \oplus [w, z] := \begin{cases} [2x, y] & , \text{ se } [x, y] = [w, z] \\ [xz + wy, yz] & , \text{ se } [x, y] \neq [w, z] \end{cases},$

b) (Multiplicação) $[x, y] \otimes [w, z] := [xw, yz]$,

c) (Simétrico) $\ominus[x, y] := [-x, y]$,

d) (Recíproco) $[x, y]^{(-1)} := \begin{cases} [y, x] & , \text{ se } x \geq 0 \\ [-y, -x] & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$,

e) (Subtração) $[x, y] \ominus [w, z] := [x, y] \oplus (\ominus[w, z])$ e

f) (Divisão) $[x, y] \oslash [w, z] := [x, y] \otimes [w, z]^{(-1)}$.

Proposição 3.5. As operações $\oplus$, $\otimes$, $\ominus$ e $^{(-1)}$ estão bem definidas. Isto é, $[x, y] \oplus [w, z]$, $[x, y] \otimes [w, z]$, $\ominus[x, y]$ e $[x, y]^{(-1)}$ independem da escolha dos representantes das classes $[x, y]$ e $[w, z]$.

Demonstração. Sejam $[x, y], [w, z] \in T/\sim$, $(x', y') \in [x, y]$ e $(w', z') \in [w, z]$. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ positivos tais que $x = \alpha x'$, $y = \alpha y'$, $w = \beta w'$ e $z = \beta z'$.

a) Se $[x, y] = [w, z]$, então $[x', y'] = [w', z']$. Assim $[x, y] \oplus [w, z] = [2x, y] = [2x', y'] = [x', y'] \oplus [w', z']$. Se $[x, y] \neq [w, z]$, então $[x', y'] \neq [w', z']$ e $xz + wy = \alpha x' \beta z' + \beta w' \alpha y' = \alpha\beta(x'z' + w'y')$ e $yz = \alpha y' \beta z' = \alpha\beta y'z'$. Assim $[x, y] \oplus [w, z] = [xz + wy, yz] = [x'z' + w'y', y'z'] = [x', y'] \oplus [w', z']$.

b) Note que $xw = \alpha x' \beta w' = \alpha\beta x'w'$ e $yz = \alpha y' \beta z' = \alpha\beta y'z'$, donde $[x, y] \otimes [w, z] = [xw, yz] = [x'w', y'z'] = [x', y'] \otimes [w', z']$.

c) Note que $-x = -(\alpha x') = \alpha(-x')$ e $y = \alpha y'$. Assim $\ominus[x, y] = [-x, y] = [-x', y'] = \ominus[x', y']$.

d) Note que $y = \alpha y'$, $x = \alpha x'$, $-y = \alpha(-y')$ e $-x = \alpha(-x')$. Assim se $x \geq 0$, então $[x, y]^{(-1)} = [y, x] = [y', x'] = [x', y']^{(-1)}$ e se $x < 0$, então $[x, y]^{(-1)} = [-y, -x] = [-y', -x'] = [x', y']^{(-1)}$.

$\square$

Definimos, agora, uma relação de ordem em $T/\sim$.

Definição 3.6. Sejam $[x, y], [w, z] \in T/\sim$ arbitrários. Dizemos que $[x, y] \prec [w, z]$ se, e somente se, ou $[x, y] = [-1, 0]$ e $[w, z] = [1, 0]$ ou ainda $xz < wy$. Além diso, dizemos que $[x, y] \preceq [w, z]$ se, e somente se, $[x, y] \prec [w, z]$ ou $[x, y] = [w, z]$.

Note que a relação $\preceq$ está bem definida e é uma relação de ordem sobre $T/\sim$.

O teorema a seguir nos garante que, em um certo sentido, $T/\sim$ contém $\mathbb{R}$.

Teorema 3.7. O conjunto $R := \big\{[t, 1];\ t \in \mathbb{R}\big\}$ é um corpo ordenado completo.

Demonstração. Segue do fato de $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow R$, $\pi(t) = [t, 1]$ ser bijetiva e, para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$,

i) $\pi(t) \oplus \pi(s) = \pi(t + s)$,

ii) $\pi(t) \otimes \pi(s) = \pi(ts)$ e

iii) $\pi(t) \preceq \pi(s)$ se, e somente se, $t \leq s$,

e do fato de $\mathbb{R}$ ser um corpo ordenado completo.

$\square$

Observe que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\ominus[t, 1] = [-t, 1]$ e se $t \neq 0$, $[t, 1]^{(-1)} = [t^{-1}, 1]$.

Observação 3.8. Note que, como π é um isomorfismo de corpos ordenados completos entre R e $\mathbb{R}$, podemos dizer que R é uma "cópia" de $\mathbb{R}$ em $T/\sim$. Sendo assim, faremos os seguintes abusos de linguagem e notação: R será denotado por $\mathbb{R}$ e será chamado de conjunto dos números reais e cada $[t, 1] \in R$ será denotado, simplesmente, por t e será chamado de número real. Neste sentido, podemos dizer que $\mathbb{R} \subset T/\sim$ e substituiremos os símbolos $\oplus$, $\otimes$, $\ominus$, $\oslash$, ${}^{(-1)}$, $\preceq$ e $\prec$ respectivamente por, $+$, $\times$, $-$, $/$, ${}^{-1}$, $\leq$ e $<$.

Definiremos e denotaremos *menos infinito*, *infinito* e *nullity*, respectivamente, por $-\infty := [-1, 0]$, $\infty := [1, 0]$ e $\Phi := [0, 0]$. Chamaremos cada elemento de $T/\sim$ de *número transreal* e, assim, $T/\sim$ será o *conjunto dos números transreais*. Denotaremos $\mathbb{R}^T := T/\sim$. Desta forma, $\mathbb{R}^T = T/\sim = \big\{[t, 1];\ t \in \mathbb{R}\big\} \bigcup \big\{[-1, 0], [1, 0], [0, 0]\big\} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty, \Phi\}$. Os elementos $-\infty, \infty$ e Φ serão chamados de números *estritamente transreais*.

O próximo teorema nos mostra a aritmética e a ordem dos números transreais.

Teorema 3.9. Para cada $x \in \mathbb{R}^T$, segue que:

a) $-\Phi = \Phi, \quad -(\infty) = -\infty \quad \text{e} \quad -(-\infty) = \infty.$

b) $0^{-1} = \infty, \quad \Phi^{-1} = \Phi, \quad (-\infty)^{-1} = 0 \quad \text{e} \quad \infty^{-1} = 0.$

c) $\Phi + x = \Phi,\ -\infty + x = \begin{cases} \Phi, & \text{se } x \in \{\infty, \Phi\} \\ -\infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$ e $\infty + x = \begin{cases} \Phi, & \text{se } x \in \{-\infty, \Phi\} \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases}.$

d) $\Phi \times x = \Phi,\ -\infty \times x = \begin{cases} \Phi, & \text{se } x \in \{0, \Phi\} \\ \infty, & \text{se } x < 0 \\ -\infty, & \text{se } x > 0 \end{cases}$ e $\infty \times x = \begin{cases} \Phi, & \text{se } x \in \{0, \Phi\} \\ -\infty, & \text{se } x < 0 \\ \infty, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$

e) Se $x \in \mathbb{R}$, então $-\infty < x < \infty$.

f) Não é o caso que $x < \Phi$ e não é o caso que $\Phi < x$.

Demonstração. Denotemos $x = [x_1, x_2]$.

a) $-\Phi = -[0,0] = [0,0] = \Phi,$

$-(\infty) = -[1,0] = [-1,0] = -\infty$ e

$-(-\infty) = -[-1,0] = [1,0] = \infty.$

b) $0^{-1} = [0,1]^{-1} = [1,0] = \infty,$

$\Phi^{-1} = [0,0]^{-1} = [0,0] = \Phi,$

$(-\infty)^{-1} = [-1,0]^{-1} = [-0, -(-1)] = [0,1] = 0$ e

$\infty^{-1} = [1,0]^{-1} = [0,1] = 0.$

c) $\Phi + x = [0,0] + [x_1, x_2] = [0 \times x_2 + x_1 \times 0, 0 \times x_2] = [0,0] = \Phi,$

$\infty + (-\infty) = [1,0] + [-1,0] = [1 \times 0 + (-1) \times 0, 0 \times 0] = [0,0] = \Phi,$

$\infty + \Phi = [1,0] + [0,0] = [1 \times 0 + 0 \times 0, 0 \times 0] = [0,0] = \Phi$ e

$\infty + \infty = [1,0] + [1,0] = [2,0] = [1,0] = \infty.$

Se $x \in \mathbb{R}$, $\infty + x = [1,0] + [x,1] = [1 \times 1 + x \times 0, 0 \times 1] = [1,0] = \infty.$

A adição $-\infty + x$ segue de forma análoga.

d) $\Phi \times x = [0,0] \times [x_1, x_2] = [0 \times x_1, 0 \times x_2] = [0,0] = \Phi$,

$\infty \times 0 = [1,0] \times [0,1] = [1 \times 0, 0 \times 1] = [0,0] = \Phi$ e

$\infty \times \Phi = [1,0] \times [0,0] = [1 \times 0, 0 \times 0] = [0,0] = \Phi$.

Se $x < 0$, então $x_1 < 0$, donde $\infty \times x = [1,0] \times [x_1, x_2] = [1 \times x_1, 0 \times x_2] = [x_1, 0] = [-1, 0] = -\infty$.

Se $x > 0$, então $x_1 > 0$, donde $\infty \times x = [1,0] \times [x_1, x_2] = [1 \times x_1, 0 \times x_2] = [x_1, 0] = [1, 0] = \infty$.

A multiplicação $-\infty \times x$ segue de forma análoga.

e) Se $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}$, então $x_2 > 0$, donde $-1 \times x_2 = -x_2 < 0 = x_1 \times 0$ e $x_1 \times 0 = 0 < x_2 = 1 \times x_2$.

f) $\Phi \neq [-1, 0]$, $\Phi \neq [1, 0]$ e $x_1 \times 0 = 0 \nless 0 = 0 \times x_2$.

□

Corolário 3.10. Seja $x, y \in \mathbb{R}$ onde $x > 0$ e $y < 0$. Segue que:

a) $\dfrac{x}{0} = \infty$,

b) $\dfrac{y}{0} = -\infty$ e

c) $\dfrac{0}{0} = \Phi$.

Demonstração. a) $\dfrac{x}{0} = x \times 0^{-1} = x \times \infty = \infty$,

b) $\dfrac{y}{0} = y \times 0^{-1} = y \times \infty = -\infty$ e

c) $\dfrac{0}{0} = 0 \times 0^{-1} = 0 \times \infty = \Phi$.

□

A seguir, estabelecemos em $\mathbb{R}^T$ algumas das propriedades aritméticas e de ordem válidas em $\mathbb{R}$. Com respeito as propriedades que não seguem para todo número transreal, indicamos as restrições necessárias.

Teorema 3.11. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^T$. Segue que:

a) (Comutatividade da adição) $x + y = y + x$,

b) (Associatividade da adição) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

c) (Elemento neutro da adição) $x + 0 = 0 + x = 0$,

d) (Elemento oposto da adição) Se $x \notin \{-\infty, \infty, \Phi\}$, então $x - x = 0$,

e) (Comutatividade da multiplicação) $x \times y = y \times x$,

f) (Associatividade da multiplicação) $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$,

g) (Elemento neutro da multiplicação) $x \times 1 = 1 \times x = x$,

h) (Elemento inverso da multiplicação) Se $x \notin \{0, -\infty, \infty, \Phi\}$, então $\dfrac{x}{x} = 1$,

i) (Distributividade) Se $x \notin \{-\infty, \infty\}$ ou $yz > 0$ ou $y + z = 0$ ou $x, y, z \in \{-\infty, \infty\}$, então $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ e $(y + z) \times x = (y \times x) + (z \times x)$,

j) (Monotonicidade da adição) Se não acontecem simultaneamente $z = -\infty$, $x = -\infty$ e $y = \infty$ e não acontecem simultaneamente $z = -\infty$, $x \in \mathbb{R}$ e $y = \infty$ e não acontecem simultaneamente $z = \infty$, $x = -\infty$ e $y = \infty$ e não acontecem simultaneamente $z = \infty$, $x = -\infty$ e $y \in \mathbb{R}$, então

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$$

k) (Monotonicidade da multiplicação) Se não acontecem simultaneamente $z = 0$, $x = -\infty$ e $y \in \mathbb{R}$ e não acontecem simultaneamente $z = 0$, $x \in \mathbb{R}$ e $y = \infty$, então

$$x \leq y \;\text{ e }\; z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz \;\text{ e}$$

l) (Existência de supremo) Se $A \subset \mathbb{R}^T \setminus \{\Phi\}$ é não vazio, então A possui supremo em $\mathbb{R}^T$.

Note que, como mostram o exemplos seguintes, as restrições nos itens (d), (h), (i), (j) e (k) do Teorema 3.11 são, de fato, necessárias.

Exemplo 3.12. Do Teorema 3.9, $\Phi - \Phi = -\infty - (-\infty) = \infty - \infty = \Phi$.

Exemplo 3.13. Do Teorema 3.9, segue que $\dfrac{0}{0} = \dfrac{\Phi}{\Phi} = \dfrac{-\infty}{-\infty} = \dfrac{\infty}{\infty} = \Phi$.

Exemplo 3.14. $\infty \times (-2+3) = \infty \times 1 = \infty \neq \Phi = -\infty + \infty = (\infty \times (-2)) + (\infty \times 3)$.

$\infty \times (0+3) = \infty \times 3 = \infty \neq \Phi = \Phi + \infty = (\infty \times 0) + (\infty \times 3)$.

$\infty \times (-\infty+3) = \infty \times (-\infty) = -\infty \neq \Phi = -\infty + \infty = (\infty \times (-\infty)) + (\infty \times 3)$.

Exemplo 3.15. $-\infty \leq \infty$ e $-\infty + (-\infty) = -\infty \not\leq \Phi = \infty + (-\infty)$.

Se $x \in \mathbb{R}$, $x \leq \infty$ e $x + (-\infty) = -\infty \not\leq \Phi = \infty + (-\infty)$.

$-\infty \leq \infty$ e $-\infty + \infty = \Phi \not\leq \infty = \infty + \infty$.

Se $y \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq y$ e $-\infty + \infty = \Phi \not\leq \infty = y + \infty$.

Exemplo 3.16. Se $y \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq y$ e $-\infty \times 0 = \Phi \not\leq 0 = y \times 0$.

Se $x \in \mathbb{R}$, $x \leq \infty$ e $x \times 0 = 0 \not\leq \Phi = \infty \times 0$.

Embora, um tanto quanto tediosa, se faz necessária a demonstração do teorema anterior.

Note que se não ocorre $[x,y] = [w,z] = [-1,0]$ nem $[x,y] = [w,z] = [1,0]$, então $[x,y] + [w,z] = [xz + wy, yz]$, ainda que $[x,y] = [w,z]$. Além diso, relembramos que a função sinal é definida por

$$\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ se } x < 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \\ 1 & , \text{ se } x > 0 \end{cases}.$$

Observe que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sgn}(x) \times \mathrm{sgn}(y) = \mathrm{sgn}(xy)$. Além disso, $[x,0] = [\mathrm{sgn}(x), 0]$. Usaremos estas observações adiante.

Demonstração do Teorema 3.11. Denotemos $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2]$ e $z = [z_1, z_2]$.

a) Se $x = y$, o resultado é imediato. Caso contrário, $x + y = [x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1y_2 + y_1x_2, x_2y_2] = [y_1x_2 + x_1y_2, y_2x_2] = [y_1, y_2] + [x_1, x_2] = y + x$,

b) Se $y = \Phi$, então

$x + (\Phi + z) = x + \Phi = \Phi = \Phi + z = (x + \Phi) + z$.

Se $y = -\infty$, então

$\Phi + (-\infty + \Phi) = (-\infty + \Phi) + \Phi = (\Phi + (-\infty)) + \Phi$.

$\Phi + (-\infty + (-\infty)) = \Phi + (-\infty) = (\Phi + (-\infty)) + (-\infty)$.

$\Phi + (-\infty + \infty) = \Phi + \Phi = \Phi = \Phi + \infty = (\Phi + (-\infty)) + \infty$.

$\Phi + (-\infty + z) = \Phi + (-\infty) = \Phi = \Phi + z = (\Phi + (-\infty)) + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

$-\infty + (-\infty + \Phi) = -\infty + \Phi = (-\infty + (-\infty)) + \Phi$.

$-\infty + (-\infty + (-\infty)) = -\infty = (-\infty + (-\infty)) + (-\infty)$.

$-\infty + (-\infty + \infty) = -\infty + \Phi = \Phi = -\infty + \infty = (-\infty + (-\infty)) + \infty$.

$-\infty + (-\infty + z) = -\infty + (-\infty) = -\infty = -\infty + z = (-\infty + (-\infty)) + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

$\infty + (-\infty + \Phi) = \infty + \Phi = \Phi = \Phi + \Phi = (\infty + (-\infty)) + \Phi$.

$\infty + (-\infty + (-\infty)) = \infty + (-\infty) = \Phi = \Phi + (-\infty) = (\infty + (-\infty)) + (-\infty)$.

$\infty + (-\infty + \infty) = \infty + \Phi = \Phi + \infty = (\infty + (-\infty)) + \infty$.

$\infty + (-\infty + z) = \infty + (-\infty) = \Phi = \Phi + z = (\infty + (-\infty)) + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

$x + (-\infty + \Phi) = x + \Phi = \Phi = -\infty + \Phi = (x + (-\infty)) + \Phi$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$x + (-\infty + (-\infty)) = x + (-\infty) = -\infty = -\infty + (-\infty) = (x + (-\infty)) + (-\infty)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$x + (-\infty + \infty) = x + \Phi = \Phi = -\infty + \infty = (x + (-\infty)) + \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$x + (-\infty + z) = x + (-\infty) = -\infty = -\infty + z = (x + (-\infty)) + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $y = \infty$, o resultado segue de forma análoga ao caso $y = -\infty$.

Se $y \in \mathbb{R}$, então

$\Phi + (y + \Phi) = (y + \Phi) + \Phi = (\Phi + y) + \Phi.$

$\Phi + (y + (-\infty)) = \Phi + (-\infty) = (\Phi + y) + (-\infty).$

$\Phi + (y + \infty) = \Phi + \infty = (\Phi + y) + \infty.$

$\Phi + (y + z) = \Phi = \Phi + z = (\Phi + y) + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

$-\infty + (y + \Phi) = -\infty + \Phi = (-\infty + y) + \Phi.$

$-\infty + (y + (-\infty)) = -\infty + (-\infty) = (-\infty + y) + (-\infty).$

$-\infty + (y + \infty) = -\infty + \infty = (-\infty + y) + \infty.$

$-\infty + (y + z) = -\infty = -\infty + z = (-\infty + y) + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

$\infty + (y + \Phi) = \infty + \Phi = (\infty + y) + \Phi.$

$\infty + (y + (-\infty)) = \infty + (-\infty) = (\infty + y) + (-\infty).$

$\infty + (y + \infty) = \infty + \infty = (\infty + y) + \infty.$

$\infty + (y + z) = \infty = \infty + z = (\infty + y) + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

$x + (y + \Phi) = x + \Phi = \Phi = (x + y) + \Phi$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$x + (y + (-\infty)) = x + (-\infty) = -\infty = (x + y) + (-\infty)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$x + (y + \infty) = x + \infty = \infty = (x + y) + \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$x + (y + z) = (x + y) + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, pela associatividade da adição entre números reais.

c) $x + 0 = [x_1, x_2] + [0, 1] = [x_1 \times 1 + 0 \times x_2, x_2 \times 1] = [x_1, x_2] = x,$

d) O resultado segue do isomorfismo entre R e $\mathbb{R}$.

e) $x \times y = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] = [x_1 y_1, x_2 y_2] = [y_1 x_1, y_2 x_2] = [y_1, y_2] \times [x_1, x_2] = y \times x,$

f) $(x \times y) \times z = ([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) \times [z_1, z_2] = ([x_1 y_1, x_2 y_2]) \times [z_1, z_2] = [(x_1 y_1) z_1, (x_2 y_2) z_2]$ $= [x_1(y_1 z_1), x_2(y_2 z_2)] = [x_1, x_2] \times [y_1 z_1, y_2 z_2] = [x_1, x_2] \times ([y_1, y_2] \times [z_1, z_2]) = x \times (y \times z),$

g) $x \times 1 = [x_1, x_2] \times [1, 1] = [x_1 \times 1, x_2 \times 1] = [x_1, x_2] = x,$

h) O resultado segue do isomorfismo entre R e $\mathbb{R}$.

i) (I) $x \notin \{-\infty, \infty\}$.

Suponha $x = \Phi$. Temos que $x \times (y + z) = \Phi \times (y + z) = \Phi = \Phi + \Phi = (\Phi \times y) + (\Phi \times z) = (x \times y) + (x \times z)$.

Suponha $x \in \mathbb{R}$. Se $y = z = \infty$ ou $y = z = -\infty$, então $x \times (y + z) = x \times y = y = y + y = (x \times y) + (x \times y) = (x \times y) + (x \times z)$. Caso contrário, $x \times (y + z) = [x, 1] \times ([y_1, y_2] + [z_1, z_2]) = [x, 1] \times [y_1z_2 + z_1y_2, y_2z_2] = [x \times (y_1z_2 + z_1y_2), 1 \times (y_2z_2)] = [xy_1z_2 + xz_1y_2, y_2z_2] = [xy_1, y_2] + [xz_1, z_2] = ([x, 1] \times [y_1, y_2]) + ([x, 1] \times [z_1, z_2]) = (x \times y) + (x \times z)$.

(II) $yz > 0$. Note que $\text{sgn}(y_1) = \text{sgn}(z_1)$.

Se $y = z = \infty$ ou $y = z = -\infty$, então $x \times (y + z) = [x_1, x_2] \times ([y_1, 0] + [z_1, 0]) = [x_1, x_2] \times ([\text{sgn}(y_1), 0] + [\text{sgn}(z_1), 0]) = [x_1, x_2] \times ([\text{sgn}(y_1), 0] + [\text{sgn}(y_1), 0]) = [x_1, x_2] \times [\text{sgn}(y_1), 0] = [x_1\text{sgn}(y_1), x_2 \times 0] = [x_1\text{sgn}(y_1), 0] = [x_1\text{sgn}(y_1), 0] + [x_1\text{sgn}(y_1), 0] = [x_1\text{sgn}(y_1), 0] + [x_1\text{sgn}(z_1), 0] = [x_1\text{sgn}(y_1), x_2 \times 0] + [x_1\text{sgn}(z_1), x_2 \times 0] = ([x_1, x_2] \times [\text{sgn}(y_1), 0]) + ([x_1, x_2] \times [\text{sgn}(z_1), 0]) = ([x_1, x_2] \times [y_1, 0]) + ([x_1, x_2] \times [z_1, 0]) = (x \times y) + (x \times z)$. Caso contrário, temos que $x_2 = 0$ ou $x_2 > 0$. Se $x_2 = 0$, então $x \times (y + z) = [x_1, 0] \times ([y_1, y_2] + [z_1, z_2]) = [x_1, 0] \times [y_1z_2 + z_1y_2, y_2z_2] = [x_1 \times (y_1z_2 + z_1y_2), 0 \times (y_2z_2)] = [x_1(y_1z_2 + z_1y_2), 0] = [\text{sgn}(x_1)\text{sgn}(y_1z_2 + z_1y_2), 0] = [\text{sgn}(x_1)\text{sgn}(y_1), 0]$ e $(x \times y) + (x \times z) = ([x_1, 0] \times [y_1, y_2]) + ([x_1, 0] \times [z_1, z_2]) = [x_1y_1, 0 \times y_2] + [x_1z_1, 0 \times z_2] = [x_1y_1, 0] + [x_1z_1, 0] = [\text{sgn}(x_1)\text{sgn}(y_1), 0] + [\text{sgn}(x_1)\text{sgn}(z_1), 0] = [\text{sgn}(x_1)\text{sgn}(y_1), 0] + [\text{sgn}(x_1)\text{sgn}(y_1), 0] = [\text{sgn}(x_1)\text{sgn}(y_1), 0]$. Se $x_2 > 0$, então $x \times (y + z) = [x_1, x_2] \times ([y_1, y_2] + [z_1, z_2]) = [x_1, x_2] \times [y_1z_2 + z_1y_2, y_2z_2] = [x_1 \times (y_1z_2 + z_1y_2), x_2 \times (y_2z_2)] = [x_1(y_1z_2 + z_1y_2), x_2y_2z_2] = [x_2x_1(y_1z_2 + z_1y_2), x_2(x_2y_2z_2)] = [x_1y_1x_2z_2 + x_1z_1x_2y_2, x_2x_2y_2z_2] = [x_1y_1, x_2y_2] + [x_1z_1, x_2z_2] = ([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) + ([x_1, x_2] \times [z_1, z_2]) = (x \times y) + (x \times z)$.

(III) $y + z = 0$.

Temos que $[y_1z_2 + z_1y_2, y_2z_2] = [y_1, y_2] + [z_1, z_2] = [0, 1]$. Logo $y_2 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$, donde $y, z \in \mathbb{R}$ e $z = -y$. Assim $x \times (y + z) = x \times 0 = [x_1, x_2] \times [0, 1] = [x_1 \times 0, x_2 \times 1] = [0, x_2] = [0 \times x_2, x_2x_2] = [0, x_2x_2] = [x_1yx_2 - x_1yx_2, x_2x_2] = [x_1y, x_2] + [-x_1y, x_2] = [x_1y, x_2 \times 1] + [x_1(-y), x_2 \times 1] = ([x_1, x_2] \times [y, 1]) + ([x_1, x_2] \times [-y, 1]) = ([x_1, x_2] \times [y, 1]) + ([x_1, x_2] \times [z, 1]) = (x \times y) + (x \times z)$.

(IV) $x, y, z \in \{-\infty, \infty\}$.

Se $y \neq z$, sem perda de generalidade, suponhamos $x = \infty$, $y = -\infty$ e $z = \infty$, donde $x \times (y + z) = \infty \times (-\infty + \infty) = \infty \times \Phi = \Phi = -\infty + \infty = (\infty \times (-\infty)) + (\infty \times \infty) =$

$(x \times y)+(x \times z)$. Caso contrário, sem perda de generalidade, suponhamos $x = -\infty$, $y = \infty$ e $z = \infty$, donde $x \times (y + z) = -\infty \times (\infty + \infty) = -\infty \times \infty = -\infty = -\infty + (-\infty) = (-\infty \times \infty) + (-\infty \times \infty) = (x \times y) + (x \times z)$.

A igualdade $(y + z) \times x = (y \times x) + (z \times x)$ segue da igualdade anterior e da comutatividade da multiplicação.

j) Suponha que $x \leq y$. Temos que

$$\begin{cases} (\mathrm{a}_1)\ z = \Phi \text{ ou} \\ (\mathrm{b}_1)\ z = -\infty \text{ ou} \\ (\mathrm{c}_1)\ z = \infty \text{ ou} \\ (\mathrm{d}_1)\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (\mathrm{a}_2)\ x = \Phi \text{ ou} \\ (\mathrm{b}_2)\ x = -\infty \text{ ou} \\ (\mathrm{c}_2)\ x = \infty \text{ ou} \\ (\mathrm{d}_2)\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (\mathrm{a}_3)\ y = \Phi \text{ ou} \\ (\mathrm{b}_3)\ y = -\infty \text{ ou} \\ (\mathrm{c}_3)\ y = \infty \text{ ou} \\ (\mathrm{d}_3)\ y \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Observe que os pares de condições (a_2) e (b_3), (a_2) e (c_3), (a_2) e (d_3), (b_2) e (a_3), (c_2) e (a_3), (d_2) e (a_3) não acontecem, pois se $x = \Phi$ ou $y = \Phi$, então $x = y = \Phi$. Também não acontecem os pares (c_2) e (b_3), (c_2) e (d_3), pois se $x = \infty$, então $y = \infty$. Além disso não acontece o par (d_2) e (b_3), pois se $y = -\infty$, então $x = -\infty$.

Se acontece (a_1), então $x + z = x + \Phi = \Phi = y + \Phi = y + z$.

Se acontece (b_1), analisemos. Se acontece o par (a_2) e (a_3), então $x+z = \Phi+(-\infty) = y+z$. Se acontece o par ($\mathrm{b}_2$) e ($\mathrm{b}_3$), então $x+z = -\infty+(-\infty) = y+z$. Por hipótese, não acontece o par (b_2) e (c_3). Se acontece o par (b_2) e (d_3), então $x + z = -\infty + (-\infty) = -\infty = y+(-\infty) = y+z$. Se acontece o par ($\mathrm{c}_2$) e ($\mathrm{c}_3$), então $x+z = \infty+(-\infty) = y+z$. Por hipótese, não acontece o par (d_2) e (c_3). Se acontece o par (d_2) e (d_3), então $x + z = x + (-\infty) = -\infty = y + (-\infty) = y + z$.

Se acontece (c_1), o resultado segue de forma análoga a anterior.

Se acontece (d_1), analisemos. Se acontece o par (a_2) e (a_3), então $x+z = \Phi+z = y+z$. Se acontece o par (b_2) e (b_3), então $x+z = -\infty+z = y+z$. Se acontece o par (b_2) e (c_3), então $x + z = -\infty + z = -\infty < \infty = \infty + z = y + z$. Se acontece o par ($\mathrm{b}_2$) e ($\mathrm{d}_3$), então $x+z = -\infty+z = -\infty < y+z$. Se acontece o par ($\mathrm{c}_2$) e ($\mathrm{c}_3$), então $x+z = \infty+z = y+z$. Se acontece o par (d_2) e (c_3), então $x + z < \infty = \infty + z = y + z$. Se acontece o par ($\mathrm{d}_2$)

e (d_3), então o resultado segue da relação de ordem e da adição de números reais.

k) Suponha que $x \leq y$. Temos que

$$\begin{cases} (a_1)\ z = \infty \text{ ou} \\ (b_1)\ z \in \mathbb{R} \text{ com } z \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (a_2)\ x = \Phi \text{ ou} \\ (b_2)\ x = -\infty \text{ ou} \\ (c_2)\ x = \infty \text{ ou} \\ (d_2)\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (a_3)\ y = \Phi \text{ ou} \\ (b_3)\ y = -\infty \text{ ou} \\ (c_3)\ y = \infty \text{ ou} \\ (d_3)\ y \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Observe que os pares de condições (a_2) e (b_3), (a_2) e (c_3), (a_2) e (d_3), (b_2) e (a_3), (c_2) e (a_3), (d_2) e (a_3) não acontecem, pois se $x = \Phi$ ou $y = \Phi$, então $x = y = \Phi$. Também não acontecem os pares (c_2) e (b_3), (c_2) e (d_3), pois se $x = \infty$, então $y = \infty$. Além disso não acontece o par (d_2) e (b_3), pois se $y = -\infty$, então $x = -\infty$.

Se acontece (a_1), analisemos. Se acontece o par (a_2) e (a_3), então $x \times z = \Phi \times \infty = y \times z$. Se acontece o par ($b_2$) e ($b_3$), então $x \times z = -\infty \times \infty = y \times z$. Se acontece o par ($b_2$) e ($c_3$), então $x \times z = -\infty \times \infty = -\infty < \infty = \infty \times \infty = y \times z$. Se acontece o par ($b_2$) e ($d_3$), então $x \times z = -\infty \times \infty = -\infty < \infty = y \times \infty = y \times z$. Se acontece o par ($c_2$) e ($c_3$), então $x \times z = \infty \times \infty = y \times z$. Se acontece o par ($d_2$) e ($c_3$), então $x \times z = x \times \infty = \infty = \infty \times \infty = y \times z$. Se acontece o par ($d_2$) e ($d_3$), então $x \times z = x \times \infty = \infty = y \times \infty = y \times z$.

Se acontece (b_1), analisemos. Se acontece o par (a_2) e (a_3), então $x \times z = \Phi \times z = y \times z$. Se acontece o par ($b_2$) e ($b_3$), então $x \times z = -\infty \times z = y \times z$. Se acontece o par ($b_2$) e ($c_3$), então $x \times z = -\infty \times z \leq \infty \times z = y \times z$. Se acontece o par ($b_2$) e ($d_3$), observe que neste caso, por hipótese, $z \neq 0$, donde $x \times z = -\infty \times z = -\infty < y \times z$. Se acontece o par ($c_2$) e ($c_3$), então $x \times z = \infty \times z = y \times z$. Se acontece o par ($d_2$) e ($c_3$), observe que neste caso, por hipótese, $z \neq 0$, donde $x \times z < \infty = \infty \times z = y \times z$. Se acontece o par ($d_2$) e ($d_3$) , então o resultado segue da relação de ordem e da multiplicação de números reais.

l) Se $\infty \notin A$ e A é limitado superiormente, então o resultado segue do Axioma do Supremo. Caso contrário, ∞ é a única cota superior de A, donde $\infty = \sup A$.

$\square$

A ideia dos números transreais não tem sido de fácil aceitação entre os matemáticos

(ANDERSON, VÖLKER e ADAMS, 2007). Acreditamos que um dos motivos da resistência à proposta de James Anderson, é que, em sua apresentação, o conjunto dos transreais é definido por $\mathbb{R}^T := \mathbb{R} \cup \left\{ \frac{-1}{0}, \frac{1}{0}, \frac{0}{0} \right\}$. Ao definir $\mathbb{R}^T$ desta forma, Anderson acaba por apresentar um pensamento cíclico. Define os transreais como sendo os reais unidos aos elementos $\frac{-1}{0}$, $\frac{1}{0}$ e $\frac{0}{0}$ e define estes elementos como números transreais não reais. Isto é, os objetos $\frac{-1}{0}$, $\frac{1}{0}$ e $\frac{0}{0}$ são utilizados para definir a eles próprios. Um outro motivo de estranheza ao conjunto $\mathbb{R}^T$, é que nos novos objetos aparece o símbolo "/", que no contexto, é um símbolo sem definição. Usualmente, este símbolo significa divisão e, nos números reais (que é o conjunto do qual já estão estabelecidas as propriedades), uma fração com denominador zero não possui qualquer definição. É utilizado um símbolo "antigo" para representar uma operação "nova". Isto é, utiliza-se o símbolo de divisão entre números reais para representar algo ainda não definido, a divisão entre números transreais. Cabe comentar que, em nosso texto, a partir de um determinado momento, passamos também a utilizar o símbolo "/" para representar divisão entre números transreais, porém tal fato é justificado pela Observação 3.8. Salientamos que este procedimento é deveras comum na matemática. Dedekind define, no conjunto de cortes, operações de adição e multiplicação e, como existe um isomorfismo de corpos ordenados entre um determinado subconjunto de cortes e o conjunto dos números racionais, Dedekind toma a liberdade de utilizar, para as novas operações, os mesmos símbolos de adição e multiplicação da "antiga" aritmética dos racionais. O mesmo ocorre em tantos outros casos: na construção dos complexos a partir dos reais, na construção dos hiperreais a partir dos reais, dos racionais a partir dos inteiros e dos inteiros a partir dos naturais.

Para resolvermos o problema do pensamento cíclico, recorremos ao conceito de relação de equivalência. Observe que um desejo é que o novo conjunto possua as frações $\frac{-1}{0}$, $\frac{1}{0}$ e $\frac{0}{0}$ como elementos. Ora, cada fração é determinada por dois números reais, cada um em uma posição específica. Então, o ponto de partida foi pensar em cada transreal como um par ordenado de números reais. O próximo passo, foi estabelecer os critérios para considerar-se duas "frações" (pares ordenados) como "frações" equivalentes. Isto justifica a relação criada na Definição 3.1. E assim passamos a considerar o conjunto quociente

$T/\sim$ e não mais T apenas. Isto é, um número transreal não seria um par de números reais, mas sim uma classe de pares de números reais.

Na Definição 3.4, estendemos as operações aritméticas aos transreais. Observe que as regras de obtenção dos resultados destas operações são as mesmas regras práticas usuais entre frações de números reais, exceto pela adição, cuja definição precisou ser desmembrada em dois casos. Mesmo assim, a adição pode ser obtida de forma semelhante à regra prática bem conhecida para frações de números reais:

Para obter a soma entre as frações x e y de números reais . Se x e y possuem o mesmo denominador, repete-se o denominador e somam-se os numeradores. Em caso contrário, multiplicam-se numerador e denominador de x pelo denominador de y, multiplicam-se numerador e denominador de y pelo denominador de x e, então, das duas novas frações (respectivamente equivalentes às anteriores), repete-se o denominador e somam-se os numeradores.

No caso transreal:

Para obter a soma entre os números transreais x e y. Se $x = y$, então repete-se a segunda coordenada e somam-se as primeiras coordenadas. Em caso contrário, multiplicam-se ambas as coordenadas de x pela segunda coordenada de y, multiplicam-se ambas as coordenadas de y pela segunda coordenada de x e, então, dos dois novos pares obtidos (respectivamente equivalentes aos anteriores), repete-se a segunda coordenada e somam-se as primeiras coordenadas.

Observamos também que, é claro que, o simétrico não mais significa inverso aditivo e recíproco não mais significa inverso multiplicativo. Entretanto, salientamos que a mudança de significado das operações, quando estende-se o conceito de número, é um fato comum. Por exemplo, para os números naturais 3 e 6, o resultado de $\frac{6}{3}$ é o quantidade de parcelas, todas iguais a 3, que somadas deixam resultado 6. Este significado não tem sentido para a operação $\frac{3}{6}$. Não existe uma quantidade de parcelas, todas iguais a 6, que somadas deixam resultado 3. É claro que, no conjunto dos números racionais, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, porém esta divisão não tem mais o significado anterior. Não faz sentido dizer que a soma de $\dfrac{1}{2}$ parcelas, todas iguais a 6, é igual a 3. Salientamos que, se $[x, y] \in T/\sim$, então $-[x, y]$ não significa o inverso aditivo de $[x, y]$, mas significa a imagem de $[x, y]$ pela função $[x, y] \longmapsto [-x, y]$. Da mesma forma, $[x, y]^{-1}$ não significa o inverso multiplicativo de $[x, y]$, mas significa a imagem de $[x, y]$ pela função $[x, y] \longmapsto \begin{cases} [y, x], & x \geq 0 \\ [-y, -x]\,, & x < 0 \end{cases}$. Apesar disso, observamos também que quando restritas a números reais, as operações aritméticas definidas nos transreais, coincidem com as operações "antigas" dos reais. Observamos, que estamos propondo a ampliação do conceito de número. E que, como já comentado, este não é um processo novo no desenvolvimento da matemática. Estamos cônscios de que o novo conjunto numérico $\mathbb{R}^T$ possui algumas propriedades um tanto quanto "anormais" aos números. Para citar uma, não vale a propriedade distributiva para todos os números transreais, como visto no Exemplo 3.14. Porém, em diversos momentos de extensão de conceitos, perdem-se algumas propriedades. Dentre outros muitos exemplos, podemos destacar que, o conjunto dos complexos não é um corpo ordenado como é o conjunto dos reais, os hiperreais não possuem a propriedade arquimediana que possuem os reais, o produto matricial não é comutativo, assim como não o é o produto entre os quatérnios de Hamilton e na aritmética transfinita de Cantor, não vale a comutatividade da adição.

Capítulo 4

Cálculo transreal

Este capítulo é uma versão dos textos (ANDERSON e REIS, 2014) e (REIS e ANDERSON, 2014). Este segundo foi o vencedor do prêmio de melhor artigo da *International Conference on Computer Science and Applications* 2014. Nele estabelecemos um cálculo transreal. Isto é, estendemos os conceitos de limite, continuidade, derivada e integral a $\mathbb{R}^T$. Sempre que infinitos ocorrem como símbolos no cálculo real, eles ocorrem de forma idêntica no cálculo transreal, mas como números bem definidos. Além disso, o resultado de qualquer operação de limite, derivada ou integral no cálculo real continua válido no cálculo transreal, exceto as integrais impróprias que tem a restrição da convergência absoluta. Isto é, estendemos a integral própria à transintegral e a integral imprópria de funções absolutamente convergentes à transintegral de funções absolutamente convergentes.

4.1 Topologia de $\mathbb{R}^T$

Definiremos em $\mathbb{R}^T$ uma topologia que, exceto pelo elemento $\{\Phi\}$, é a topologia usualmente definida em teoria de medida e integração no conjunto dos números reais estendido $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definição 4.1. Seja $A \subset \mathbb{R}^T$. Diremos que $x \in \mathbb{R}^T$ é ponto *transinterior* a A se, e só se, uma das seguintes condições é verificada:

i) $x \in \mathbb{R}$ e existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$,

ii) $x = -\infty$ e existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $[-\infty, b) \subset A$,

iii) $x = \infty$ e existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a, \infty] \subset A$ ou

iv) $x = \Phi$ e $\{\Phi\} \subset A$.

Denotaremos o conjunto de todos os pontos transinteriores a A por t-int$A$. Diremos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^T$ é *transaberto* se, e só se, $A =$ t-int$A$.

Observe que para qualquer $A \subset \mathbb{R}^T$, t-int$A \subset A$.

Teorema 4.2. A classe de todos os conjuntos transabertos em $\mathbb{R}^T$ é uma topologia sobre $\mathbb{R}^T$. Isto é,

a) $\emptyset, \mathbb{R}^T$ são transabertos,

b) Uma união qualquer de conjuntos transabertos é um conjunto transaberto.

c) Uma intersecção finita de conjuntos transabertos é um conjunto transaberto.

Demonstração. a) Note que t-int$\emptyset = \emptyset$ e que, direto da definição de ponto transinterior, segue que $\mathbb{R}^T \subset$ t-int$\mathbb{R}^T$.

b) Sejam I um conjunto qualquer e $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, onde A_α é transaberto para todo $\alpha \in I$. Se $x \in A$, então $x \in A_\alpha$ para algum $\alpha \in I$, donde $x \in$ t-intA_α. Como A_α é transaberto, temos que ou $x \in \mathbb{R}$, donde existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\alpha \subset A$, ou $x = -\infty$, donde existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $[-\infty, b) \subset A_\alpha \subset A$, ou $x = \infty$, donde existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a, \infty] \subset A_\alpha \subset A$, ou $x = \Phi$, donde $\{\Phi\} \subset A_\alpha \subset A$. Em qualquer caso $x \in$ t-int$A$, donde $A \subset$ t-int$A$.

c) Sejam $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^T$ transabertos. Se $x \in A_1 \cap A_2$, então $x \in A_1$ e $x \in A_2$, donde $x \in$ t-intA_1 e $x \in$ t-intA_2. Se $x \in \mathbb{R}$, então existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ positivos tais que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset A_2$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, temos que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1 \cap A_2$. Se $x = -\infty$, então existem $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tais que $[-\infty, b_1) \subset A_1$ e $[-\infty, b_1) \subset A_1$. Tomando $b = \min\{b_1, b_2\}$, temos que $[-\infty, b) \subset A_1 \cap A_2$. Se $x = \infty$, então existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $(a_1, \infty] \subset A_1$ e $(a_2, \infty] \subset A_1$. Tomando $a = \max\{a_1, a_2\}$, temos que $(a, \infty] \subset A_1 \cap A_2$. Finalmente se $x = \Phi$, então $\{\Phi\} \subset A_1$ e $\{\Phi\} \subset A_2$, donde $\{\Phi\} \subset A_1 \cap A_2$. Em qualquer caso, $x \in$ t-int$(A_1 \cap A_2)$, donde $A_1 \cap A_2 \subset$ t-int$(A_1 \cap A_2)$. $\square$

No sentido topológico, chamaremos um conjunto transaberto de aberto, um ponto transinterior de ponto interior e o transinterior de um conjunto A de interior do conjunto A.

Lembramos que um subconjunto de um espaço topológico é dito fechado se, e só se, seu complementar é aberto.

Exemplo 4.3. Os conjuntos $\{\Phi\}$, $(-\infty, x)$, (x, ∞), $[-\infty, x)$, $(x, \infty]$, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, $[-\infty, \infty]$, $[-\infty, \infty)$, $(-\infty, \infty]$ e (x, y) são abertos em $\mathbb{R}^T$ onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $x < y$.

Exemplo 4.4. Os conjuntos $\{-\infty\}$, $\{\infty\}$, $\{x\}$, $[-\infty, x]$, $[x, \infty]$, $(-\infty, x]$, $[x, \infty)$, $(x, y]$, $[x, y)$ e $[x, y]$ não são abertos em $\mathbb{R}^T$ onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $x < y$.

Exemplo 4.5. Os conjuntos $\{\Phi\}$, $\{-\infty\}$, $\{\infty\}$, $\{x\}$, $[-\infty, \infty]$, $[-\infty, x]$, $[x, \infty]$ e $[x, y]$ são fechados em $\mathbb{R}^T$ onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $x < y$. De fato, $\mathbb{R}^T \setminus \{\Phi\} = [-\infty, \infty]$, $\mathbb{R}^T \setminus \{-\infty\} = \mathbb{R} \cup (1, \infty] \cup \{\Phi\}$, $\mathbb{R}^T \setminus \{\infty\} = \mathbb{R} \cup [-\infty, 1) \cup \{\Phi\}$, $\mathbb{R}^T \setminus \{x\} = [-\infty, x) \cup (x, \infty] \cup \{\Phi\}$, $\mathbb{R}^T \setminus [-\infty, \infty] = \{\Phi\}$, $\mathbb{R}^T \setminus [-\infty, x] = (x, \infty] \cup \{\Phi\}$, $\mathbb{R}^T \setminus [x, \infty] = [-\infty, x) \cup \{\Phi\}$ e $\mathbb{R}^T \setminus [x, y] = [-\infty, x) \cup (y, \infty] \cup \{\Phi\}$ são abertos.

Exemplo 4.6. Os conjuntos $(-\infty, x)$, (x, ∞), $[-\infty, x)$, $(x, \infty]$, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, $[-\infty, \infty)$, $(-\infty, \infty]$, $(-\infty, x]$, $[x, \infty)$, (x, y), $(x, y]$ e $[x, y)$ não são fechados em $\mathbb{R}^T$ onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $x < y$.

Proposição 4.7. $\mathbb{R}^T$ é um espaço de Hausdorff.

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^T$ distintos. Se x ou y é igual a Φ, digamos $x = \Phi$, basta tomarmos $A = \{\Phi\}$ e B uma vizinhança de y tal que $\Phi \notin B$. Se um é igual a $-\infty$ e o outro igual a ∞, digamos $x = -\infty$ e $y = \infty$, basta tomarmos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, $A = [-\infty, a)$ e $B = (b, \infty]$. Se um é igual a $-\infty$ e o outro for um número real, digamos $x = -\infty$ e $y \in \mathbb{R}$, basta tomarmos $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo, $b \in \mathbb{R}$ com $b < y - \varepsilon$, $A = [-\infty, b)$ e $B = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Se um é igual a ∞ e o outro for um número real, digamos $x = \infty$ e $y \in \mathbb{R}$, basta tomarmos $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo, $a \in \mathbb{R}$ com $y + \varepsilon < a$, $A = (a, \infty]$ e $B = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Se $x, y \in \mathbb{R}$, basta tomarmos $\varepsilon \in \mathbb{R}$ com $2\varepsilon < |x - y|$, $A = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ e $B = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. Em qualquer caso, A é uma vizinhança de x, B é uma vizinhança de y e $A \cap B = \emptyset$.

□

Proposição 4.8. A topologia sobre $\mathbb{R}$ induzida pela topologia de $\mathbb{R}^T$ coincide com a topologia usual de $\mathbb{R}$. Isto é, se $A \subset \mathbb{R}^T$ é aberto em $\mathbb{R}^T$, então $A \cap \mathbb{R}$ é aberto (no sentido usual) em $\mathbb{R}$ e se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto (no sentido usual) em $\mathbb{R}$, então A é aberto em $\mathbb{R}^T$.

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^T$ aberto em $\mathbb{R}^T$. Se $x \in A \cap \mathbb{R}$, então, como $x \in A$, $x \in \text{int}A$. Por isso e pelo fato de $x \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$, donde $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A \cap \mathbb{R}$. Logo $x \in \text{int}(A \cap \mathbb{R})$, onde $\text{int}(A \cap \mathbb{R})$ denota o interior de $A \cap \mathbb{R}$ na topologia usual de $\mathbb{R}$.

Agora, seja $A \subset \mathbb{R}$ é aberto (no sentido usual) em $\mathbb{R}$. Se $x \in A$, então existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$. Logo $x \in \text{int}A$.

□

Corolário 4.9. Se $A \subset \mathbb{R}^T$ é fechado em $\mathbb{R}^T$, então $A \cap \mathbb{R}$ é fechado (no sentido usual) em $\mathbb{R}$.

Proposição 4.10. $\mathbb{R}^T$ é desconexo.

Demonstração. Basta observar que $\mathbb{R}^T = [-\infty, \infty] \cup \{\Phi\}$ e que $[-\infty, \infty]$ e $\{\Phi\}$ são abertos.

□

Observe que Φ é o único ponto isolado de $\mathbb{R}^T$.

Proposição 4.11. $\mathbb{R}^T$ é um espaço separável.

Demonstração. Basta observar que $\mathbb{Q} \cup \{\Phi\}$ é denso em $\mathbb{R}^T$.

□

Proposição 4.12. $\mathbb{R}^T$ é compacto.

Demonstração. Seja I um conjunto qualquer e $\{A_\alpha;\ \alpha \in I\}$ uma cobertura aberta de $\mathbb{R}^T$. Temos que $\Phi, -\infty, \infty \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Logo existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in I$ tais que $\Phi \in A_{\alpha_1}$, $-\infty \in A_{\alpha_2}$ e $\infty \in A_{\alpha_3}$. Daí, $\{\Phi\} \subset A_{\alpha_1}$ e existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ tais que $[-\infty, a) \subset A_{\alpha_2}$ e $(b, \infty] \subset A_{\alpha_3}$. Além disso, $[a,b] \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, donde $[a,b] \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap \mathbb{R})$. Assim, $\{A_\alpha \cap \mathbb{R};\ \alpha \in I\}$ é uma cobertura aberta de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$. Como $[a,b]$ é compacto em

$\mathbb{R}$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_4, \ldots, \alpha_n$ tais que $[a, b] \subset \bigcup_{i=4}^{n} (A_{\alpha_i} \cap \mathbb{R}) = \left(\bigcup_{i=4}^{n} A_{\alpha_i} \right) \cap \mathbb{R} \subset \bigcup_{i=4}^{n} A_{\alpha_i}$.
Portanto $\mathbb{R}^T = ([-\infty, a) \cup [a, b] \cup (b, \infty] \cup \{\Phi\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$. □

Corolário 4.13. Seja $A \subset \mathbb{R}^T$. Segue que A é compacto se, e só se, A é fechado.

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^T$. Se A é compacto, como $\mathbb{R}^T$ é de Hausdorff, A é fechado (MUNKRES, 2000, Teorema 26.3). Se A é fechado, como $\mathbb{R}^T$ é compacto, A é compacto (MUNKRES, 2000, Teorema 26.2). □

Agora, vejamos que $\mathbb{R}^T$ é um espaço metrizável. Seja $\varphi : [-\infty, \infty] \to [-1, 1]$ definido por

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ se } x = -\infty \\ \dfrac{x}{1 + |x|} & , \text{ se } x \in \mathbb{R} \\ 1 & , \text{ se } x = \infty \end{cases} .$$

Note que φ é um função crescente e φ é um homeomorfismo. Agora, seja $d : \mathbb{R}^T \times \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x = y \\ 2 & , \text{ se } x = \Phi \text{ ou (exclusivo) } y = \Phi \\ |\varphi(x) - \varphi(y)| & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

Proposição 4.14. $\mathbb{R}^T$ é metrizável. Mais especificamente, d como definida acima é uma métrica em $\mathbb{R}^T$ que induz a topologia de $\mathbb{R}^T$.

Demonstração. Vejamos que d é, de fato, uma métrica em $\mathbb{R}^T$. Claramente, para todos $x, y \in \mathbb{R}^T$, $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ e $d(x, y) \geq 0$. Se $x, y, z \in [-\infty, \infty]$ então $d(x, z) = |\varphi(x) - \varphi(z)| = |\varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(y) - \varphi(z)| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - \varphi(z)| = d(x, y) + d(y, z)$. O leitor pode verificar que a desigualdade triangular também é verdadeira quando não é o caso de $x, y, z \in [-\infty, \infty]$.

Agora, vejamos que a topologia induzida por d e a topologia transreal são a mesma. Lembre que, em espaços métricos, $B(x, r)$ denota a bola de centro x e raio r, isto é, $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^T;\ d(y, x) < r\}$. Vejamos que todo conjunto aberto na topologia transreal é também aberto na topologia induzida por d. Seja U um aberto arbitrário na topologia transreal e $x \in U$. Se $x = \Phi$, então tomamos $B(x,1)$ e assim $B(x,1) = \{\Phi\} \subset U$. Se $x \neq \Phi$, como φ^{-1} é contínua, existe $\delta \in \mathbb{R}$ com $0 < \delta < 2$ tal que $y \in U$ sempre que $|\varphi(y) - \varphi(x)| < \delta$. Assim $B(x,\delta) \subset U$.

Agora, vejamos que toda bola na métrica d é um conjunto aberto na topologia transreal. Sejam $x \in \mathbb{R}^T$ e $r \in \mathbb{R}$ positivo arbitrários. Se $x = \Phi$, tomamos a vizinhança $U = \{\Phi\}$ de Φ e assim $U \subset B(x,r)$. Se $x \neq \Phi$, como φ é contínua, existe uma vizinhança U de x tal que $|\varphi(y) - \varphi(x)| < r$ sempre que $y \in U$. Assim $U \subset B(x,r)$. $\square$

Corolário 4.15. $\mathbb{R}^T$ é um espaço métrico completo.

Demonstração. Segue do fato de todo espaço métrico compacto ser completo. $\square$

4.2 Sequências em $\mathbb{R}^T$

Utilizaremos a definição usual de convergência de sequências em espaços topológicos. Isto é, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^T$ converge para $x \in \mathbb{R}^T$ se, e só se, para cada $V \subset \mathbb{R}^T$ vizinhança de x, existe $n_V \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_V$.

Note que, como $\mathbb{R}^T$ é um espaço de Hausdorff, o limite de uma sequência, quando existe, é único.

Observação 4.16. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Note que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ em $\mathbb{R}^T$ se, e só se, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ (no sentido usual) em $\mathbb{R}$. Além disso, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a menos infinito no sentido usual se, e só se, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ em $\mathbb{R}^T$. Da mesma forma, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a infinito no sentido usual se, e só se, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ em $\mathbb{R}^T$.

Observação 4.17. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Note que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Phi$ se, e só se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = \Phi$ para todo $n \geq k$.

Proposição 4.18. Toda sequência monótona de números transreais é convergente.

Demonstração. Suponhamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^T$ não-decrescente. O caso $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^T$ não-crescente é análogo. Se $x_k = \Phi$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $x_n = \Phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois

$x_i \leq \Phi \leq x_j$ para todo $i \leq k$ e $j \geq k$. Se $x_n = -\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Se $x_n \neq \Phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_k \neq -\infty$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $x_n > -\infty$ para todo $n \geq k$, donde existe $s = \sup\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Se $s = \infty$, então, para cada $a \in \mathbb{R}$, existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_a} > a$. Como $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (a, \infty]$ para todo $n \geq n_a$, donde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Se $s \in \mathbb{R}$, então $(x_{k+n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona e limitada de números reais, logo convergente. Por consequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

□

A seguir generalizamos o Teorema de Bolzano-Weierstrass para o espaço $\mathbb{R}^T$. A demonstração aqui feita é a mesma, frequentemente, utilizada nos livros de Análise Real a menos de pequenas adaptações.

Teorema 4.19. Toda sequência de números transreais possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^T$. Se $\{n;\ x_n \neq \Phi\}$ é finito, então claramente $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Phi$. Se $\{n;\ x_n \neq \Phi\}$ é infinito, então denotemos $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de todos os elementos de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distintos de Φ. Seja $J = \{k;\ y_k > y_m \text{ para todo } m > k\}$. Se J é infinito, escrevemos $J = \{k_1, k_2, \dots\}$ com $k_1 < k_2 < \cdots$. Como, para cada $i \in \mathbb{N}$, $k_i \in J$, temos que $y_{k_i} > y_{k_j}$ sempre que $i < j$. Logo $(y_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente. Se J é finito, seja k_1 maior que todos os elementos de J. Como $k_1 \notin J$, existe $k_2 > k_1$ tal que $y_{k_2} \geq y_{k_1}$. Como $k_2 > k_1$, donde $k_2 \notin J$. Daí existe $k_3 > k_2$ tal que $y_{k_3} \geq y_{k_2}$. Por indução, construímos uma subsequência $(y_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente. Em ambos os casos, pela Proposição 4.18, $(y_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ é convergente.

□

Proposição 4.20. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^T$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^T$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Segue que:

a) Se não acontece simultaneamente $x, y \in \{-\infty, \infty\}$ e $x+y = \Phi$, então $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = x + y$;

b) Se não acontece simultaneamente $x, y \in \{0, \infty, -\infty\}$ e $xy = \Phi$, então $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$;

c) Se $y \neq 0$, então $\lim_{n\to\infty} (y_n^{-1}) = y^{-1}$ e

d) Se $y = 0$ e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y_n < 0$ para todo $n \geq k$, então $\lim_{n\to\infty} (y_n^{-1}) = -(y^{-1})$. Se $y = 0$ e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y_n > 0$ para todo $n \geq k$, então $\lim_{n\to\infty} (y_n^{-1}) = y^{-1}$.

Teorema 4.21 (do Sanduíche)**.** Sejam $L \in \mathbb{R}^T$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^T$ tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} z_n = L$. Se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \geq N$, então $\lim_{n\to\infty} y_n = L$.

Demonstração. Se $L = \Phi$, o resultado segue imediatamente da Observação 4.17.

Se $L \in \mathbb{R}$, seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ com $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = L$, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $L - \varepsilon < x_n$ para todo $n \geq N_1$ e $z_n < L + \varepsilon$ para todo $n \geq N_2$. Tomando $N_3 = \max\{N, N_1, N_2\}$, temos que $L - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L + \varepsilon$ para todo $n \geq N_3$.

Se $L = -\infty$, seja $b \in \mathbb{R}$ arbitrário. Como $\lim_{n\to\infty} z_n = L$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in [-\infty, b)$ para todo $n \geq N_1$. Tomando $N_2 = \max\{N, N_1\}$, temos que $y_n \leq z_n < b$ para todo $n \geq N_2$, donde $y_n \in [-\infty, b)$ para todo $n \geq N_2$.

Se $L = \infty$, o resultado segue de forma análoga ao caso anterior.

□

Definiremos o limite inferior e o limite superior de uma sequência como é feito usualmente no cálculo real.

Se $x, y \in \mathbb{R}^T$, escrevemos $x \not< y$ se, e somente se, $x < y$ não acontece e escrevemos $x \not> y$ se, e somente se, $x > y$ não acontece. Note que $\not<$ não é equivalente a $\geq$. Por exemplo, $\Phi \not< 0$, mas $\Phi \geq 0$ não acontece.

Definição 4.22. Seja $A \subset \mathbb{R}^T$. Dizemos que $u \in \mathbb{R}^T$ é o *supremo de* A, e escrevemos $u = \sup A$, se, e somente se, uma das seguintes condições ocorre:

i) $A = \{u\}$ ou

ii) $u \not< x$ para todo $x \in A$ e, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo, existe $x \in A$ tal que $u - \varepsilon < x$. E dizemos que $v \in \mathbb{R}^T$ é o *ínfimo de* A, e escrevemos $v = \inf A$, se, e somente se, uma das seguintes condições ocorre:

iii) $A = \{v\}$ ou

iv) $x \not< v$ para todo $x \in A$ e para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo, existe $x \in A$ tal que $x < v + \varepsilon$.

Definição 4.23. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^T$. Denotemos $v_n = \inf\{x_k,\ k \geq n\}$ e $u_n = \sup\{x_k,\ k \geq n\}$. Definimos e denotamos o *limite inferior* e o *limite superior* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivemente, por

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} v_n \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Observe que $v_n \not> v_{n+1}$ e $u_n \not< u_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{v_n\}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{u_n\}$. Por isso, justificam-se as notações $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n}\{x_k\}$ e $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n}\{x_k\}$ para limite inferior e limite superior, respectivamente.

Proposição 4.24. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^T$. Segue que existe o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ se, e só se, $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. E neste caso, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

4.3 Limite e continuidade de funções em $\mathbb{R}^T$

Lembramos que se X é um espaço topológico, então $x_0 \in A \subset X$ é um ponto de acumulação de A se, e só se, para toda vizinhança V de x_0 segue que $V \cap (A \setminus \{x_0\}) = \emptyset$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de A é denotado por A'.

Utilizaremos a definição usual de limites de funções em espaços topológicos. Isto é, se A é um subconjunto de $\mathbb{R}^T$, $f : A \to \mathbb{R}^T$ é uma função, x_0 é um ponto de acumulação de A e L é um número transreal, diremos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ se, e só se, para cada vizinhança V de L, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $f(A \cap U \setminus \{x_0\}) \subset V$.

Observação 4.25. Note que, dados $x_0, L \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ em $\mathbb{R}^T$ se, e só se, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ (no sentido usual) em $\mathbb{R}$. O mesmo se pode dizer sobre $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$.

Observação 4.26. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^T$, note que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \Phi$ se, e só se, existe uma vizihança U de x_0 tal que $f(x) = \Phi$ para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$.

Proposição 4.27. Sejam $A \subset \mathbb{R}^T$, $f : A \to \mathbb{R}^T$, $x_0 \in A'$ e $L \in \mathbb{R}^T$. Segue que as duas sentenças são equivalentes:

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$,

ii) $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$ sempre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ e $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Demonstração. Sejam $A \subset \mathbb{R}^T$, $f : A \to \mathbb{R}^T$, $x_0 \in A'$ e $L \in \mathbb{R}^T$. Suponhamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$ tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Seja V vizinhança de L arbitrária. Existe U vizinhança de x_0 tal que $f(A \cap U \setminus \{x_0\}) \subset V$. Como $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, existe n_U tal que $x_n \in U$ sempre que $n \geq n_U$. Logo $f(x_n) \in f(A \cap U \setminus \{x_0\}) \subset V$ sempre que $n \geq n_U$.

Agora, suponhamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$. Existe V vizinhança de L tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A$ tal que, ou $0 < |x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ (se $x_0 \in \mathbb{R}$) ou $x_n \in (-\infty, -n)$ (se $x_0 = -\infty$) ou $x_n \in (n, \infty)$ (se $x_0 = \infty$), e $f(x_n) \notin V$. Desta maneira $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\}$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ e $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq L$.

$\square$

Proposição 4.28. Sejam $L, M \in \mathbb{R}^T$, $A \subset \mathbb{R}^T$, $f, g : A \to \mathbb{R}^T$ e $x_0 \in A'$ tais que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$. Segue que:

a) Se não acontece simultaneamente $L, M \in \{-\infty, \infty\}$ e $L + M = \Phi$, então $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = L + M$;

b) Se não acontece simultaneamente $L, M \in \{0, \infty, -\infty\}$ e $LM = \Phi$, então $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = LM$;

c) Se $M \neq 0$, então $\lim_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{M}$ e

d) Se $M = 0$ e existe U vizinhança de x_0 tal que $g(x) < 0$ para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$, então $\lim_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = -(M^{-1})$. Se $M = 0$ e existe U vizinhança de x_0 tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in U \setminus \{x_0\}$, então $\lim_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = M^{-1}$.

Utilizaremos a definição usual de continuidade em espaços topológicos. Isto é, se $A \subset \mathbb{R}^T$, $f : A \to \mathbb{R}^T$ é uma função, $x_0 \in A$, diremos que f é contínua em x_0 se, e só se, para cada vizinhança V de $f(x_0)$, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $f(A \cap U) \subset V$.

Observação 4.29. Note que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, f é contínua em x_0 em $\mathbb{R}^T$ se, e só se, f é contínua em x_0 (no sentido usual) em $\mathbb{R}$.

Observação 4.30. Note que se $\Phi \in \mathrm{Dm}(f)$ ($\mathrm{Dm}(f)$ denota o domínio de f), então f é contínua em Φ.

Proposição 4.31. Sejam $A \subset \mathbb{R}^T$, $f : A \to \mathbb{R}^T$ e $x_0 \in A$. As duas sentenças são equivalentes:

i) f é contínua em x_0,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ sempre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Proposição 4.32. Sejam $A \subset \mathbb{R}^T$, $f, g : A \to \mathbb{R}^T$ e $x_0 \in A$ tais que f e g são contínuas em x_0. Segue que:

a) Se não acontece simultaneamente $f(x_0), g(x_0) \in \{-\infty, \infty\}$ e $(f+g)(x_0) = \Phi$, então $f + g$ é contínua em x_0;

b) Se não acontece simultaneamente $f(x_0), g(x_0) \in \{0, \infty, -\infty\}$ e $(fg)(x_0) = \Phi$, então fg é contínua em x_0;

c) Se $g(x_0) \neq 0$, então $\dfrac{1}{g}$ é contínua em x_0 e

d) Se $g(x_0) = 0$ e existe U vizinhança de x_0 tal que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in U$, então $\dfrac{1}{g}$ é contínua em x_0.

Observe que se $g(x_0) = 0$ e não existe U vizinhança de x_0 tal que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in U$, então $\dfrac{1}{g}$ não é contínua em x_0.

Proposição 4.33. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^T$, $f : A \to \mathbb{R}^T$ e $g : B \to \mathbb{R}^T$ tais que $f(A) \subset B$. Se f é contínua em x_0 e g é contínua em $f(x_0)$, então $g \circ f$ é contínua em x_0.

Proposição 4.34. Sejam $A \subset \mathbb{R}^T$ aberto e $f : A \to \mathbb{R}^T$. Segue que f é contínua em A se, e só se, $f^{-1}(B)$ é aberto, sempre que $B \subset \mathbb{R}^T$ é aberto.

4.4 Derivada em $\mathbb{R}^T$

Definição 4.35. Seja $A \subset \mathbb{R}^T$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Aqui A' denota o conjunto dos pontos de acumulação de A.

i) Se $x_0 \in \mathbb{R} \cap A'$, dizemos f é *derivável em x_0 sobre* $\mathbb{R}^T$ se, e somente se, f é derivável em x_0 no sentido usual. E, neste caso, chamamos $f'(x_0)$ de *derivada de f em x_0 sobre* $\mathbb{R}^T$ e a denotamos por $f'_{\mathbb{R}^T}(x_0)$.

ii) Se $x_0 \in \{-\infty, \infty\} \cap D'$ (onde D denota o conjunto dos pontos em A nos quais f é derivável no sentido usual), dizemos que f é *derivável em x_0 sobre* $\mathbb{R}^T$ se, e somente se, o seguinte limite existe
$$\lim_{x \to x_0} f'(x).$$
E, se este limite existe, então ele é chamado de *derivada de f em x_0 sobre* $\mathbb{R}^T$ e é denotado por $f'_{\mathbb{R}^T}(x_0)$.

iii) Se $x_0 \notin A'$ definimos a *derivada de f em x_0 sobre* $\mathbb{R}^T$ por $f'_{\mathbb{R}^T}(x_0) := \Phi$.

Note que escolhemos o caminho intuitivo de definir a derivada sobre $\mathbb{R}^T$ como inclinação da reta tangente. Assim, a derivada sobre $\mathbb{R}^T$, em um número real é a derivada usual naquele número. E temos a ideia intuitiva de que se o limite das inclinações das retas tangentes em x, quando x tende a ∞ (ou $-\infty$), é $L \in \mathbb{R}^T$, então a inclinação da tangente em ∞ (ou $-\infty$) é L. Por isso, escolhemos definir $f'_{\mathbb{R}^T}(\infty) = \lim_{x \to \infty} f'(x)$ $\left(f'_{\mathbb{R}^T}(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f'(x)\right)$.

Observe que não é possível definir a derivada em $x_0 \notin A'$ por meio de um limite, pois, como é conhecido, se tentarmos aplicar a definição de limite a $x_0 \notin A'$, qualquer $L \in \mathbb{R}^T$ poderia ser o limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$. De fato, como $x_0 \notin A'$, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $A \cap U = \emptyset$, por isso, para qualquer vizinhança V de L, $f(x) \in V$ para todo $x \in A \cap U$. Por vacuidade, não existe $x \in A \cap U$ tal que $f(x) \notin V$. Ao invés de aceitar a indeterminância da derivada em $x_0 \notin A'$, escolhemos definir $f'_{\mathbb{R}^T}(x_0) = \Phi$. Isso nos permitirá ter a função exponencial idêntica a sua própria derivada, $e'(x) = e(x)$, de modo que as propriedades usuais desta importante função permanecem válidas quando estendida a $\mathbb{R}^T$.

Exemplo 4.36. Seja $f(x) = e^x$. Segue da Definição 4.35 que $f'_{\mathbb{R}^T}(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}^T$. Particularmente, $f'_{\mathbb{R}^T}(-\infty) = 0$, $f'_{\mathbb{R}^T}(\infty) = \infty$ e $f'_{\mathbb{R}^T}(\Phi) = \Phi$.

Observação 4.37. Note que diferenciabilidade sobre $\mathbb{R}^T$ não implica continuidade. Por exemplo, seja $f : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$, onde

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , \text{ se } x \neq \infty \\ 1 & , \text{ se } x = \infty \end{cases}.$$

Claramente f não é contínua em ∞, mas $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = \infty$, donde f é derivável em ∞ sobre $\mathbb{R}^T$. Para definição de e^x em $\mathbb{R}^T$ veja (ANDERSON, 2007).

A derivada usual é geralmente definida como uma taxa de variação da função. Isto é, se $x_0 \in \mathbb{R}$, então $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Nossa definição pode não mostrar explicitamente, mas a derivada, sobre $\mathbb{R}^T$, em ∞ ou $-\infty$, é também uma taxa de variação da função. As proposições 4.39 e 4.40 mostram isto. Antes, precisamos da seguinte definição.

Definição 4.38. Seja $A \subset \mathbb{R}^T$, $f : A \times A \to \mathbb{R}^T$, $x_0 \in A'$ e $L \in \mathbb{R}^T$. Dizemos que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to x_0}} f(x, y) = L$$

se, e somente se, dado uma vizinhança arbitrária V de L, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $f(x, y) \in V$ sempre que $x \neq y$ e $x, y \in A \cap U \setminus \{x_0\}$.

Note que a definição de $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to x_0}} f(x, y)$ é diferente da definição de $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, x_0)} f(x, y)$, o limite, no sentido usual, de uma função de duas variáveis.

Proposição 4.39. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f : (a, \infty] \to \mathbb{R}^T$ tal que f é derivável em (a, ∞). Segue que f é derivável em ∞ se, e somente se, existe $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$. E neste caso,

$$f'_{\mathbb{R}^T}(\infty) = \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f : (a, \infty] \to \mathbb{R}^T$ tal que f é derivável em (a, ∞). Observe que f é contínua em (a, ∞).

Primeiro, suponha que $f'_{\mathbb{R}^T}(\infty) = L \in \mathbb{R}^T$, isto é, $\lim\limits_{z \to \infty} f'_{\mathbb{R}^T}(z) = L$. Seja V uma vizinhança arbitrária de L. Então existe $M > a$ tal que $f'_{\mathbb{R}^T}(z) \in V$ para todo $z \in (M, \infty)$.

Seja $x, y \in (M, \infty)$ tal que $x \neq y$. Digamos $x < y$. Como f é contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y), pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (x, y)$ tal que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'_{\mathbb{R}^T}(z)$. Como $z \in (x, y) \subset (M, \infty)$ temos

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'_{\mathbb{R}^T}(z) \in V.$$

Assim $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = L$.

Agora, suponha que $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = L$. Note que $L \neq \Phi$, pois $f'_{\mathbb{R}^T}(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in (a, \infty)$. Se $L \in \mathbb{R}$, seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrário. Então existe $M \geq a$ tal que $-\dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} - L < \dfrac{\varepsilon}{2}$ sempre que $x, y \in (M, \infty)$ e $x \neq y$. para cada $x \in (M, \infty)$, tomando o limite na desigualdade acima comcima com y tendendo a x, obtemos $-\varepsilon < -\dfrac{\varepsilon}{2} \leq \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} - L \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, donde $-\varepsilon < f'_{\mathbb{R}^T}(x) - L < \varepsilon$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to \infty} f'_{\mathbb{R}^T}(x) = L$. Se $L = \infty$, seja $N \in \mathbb{R}^+$ arbitrário. Então existe $M \geq a$ tal que $2N < \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ sempre que $x, y \in (M, \infty)$ e $x \neq y$. Para cada $x \in (M, \infty)$, tomando o limite na desigualdade com y tendendo a x, obtemos $N < 2N \leq \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$, donde $N < f'(x)$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to \infty} f'_{\mathbb{R}^T}(x) = \infty$. Se $L = -\infty$ o resultado segue analogamente. □

Proposição 4.40. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $[-\infty, a) \to \mathbb{R}^T$ tal que f é derivável em $[-\infty, a)$. Segue que f é derivável em $-\infty$ se, e somente se, existe $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$. E neste caso,

$$f'_{\mathbb{R}^T}(-\infty) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Demonstração. A demonstração é análoga a demonstração da Proposição 4.39. □

E quanto ao limite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to x_0}} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ quando $x_0 \in \mathbb{R}$? As Proposições 4.41 e 4.43 mostram que ainda segue $f'_{\mathbb{R}^T}(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to x_0}} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$, entretanto precisamos de uma condições adicionais.

Proposição 4.41. Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A \cap A'$. Se f é contínua em x_0 e existe o limite $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to x_0}} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$, então f é derivável em x_0 e

$$f'_{\mathbb{R}^T}(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to x_0}} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

Demonstração. Seja f contínua em x_0 tal que existe o limite $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to x_0}} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$, digamos $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to x_0}} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = a$. Como f é contínua em x_0, $\lim\limits_{y\to x_0} f(y) = f(x_0)$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrário. Então existe um $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que para cada $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$, segue que

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - a < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $y \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$.

Tomando o limite na desigualdade acima com y tendendo a x_0, obtemos $-\dfrac{\varepsilon}{2} \leq \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Assim

$$-\varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para todo $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$, donde $f'_{\mathbb{R}^T}(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$. □

Observação 4.42. Note que, na Proposição 4.41, a hipótese de continuidade de f é, de fato, necessária. Por exemplo, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ se } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}.$$

Claramente f não é derivável em 0, mas $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = 1$.

Proposição 4.43. Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A \cap A'$. Se f é continuamente derivável em x_0 (o que significa que f é derivável em x_0 e $f'_{\mathbb{R}^T}$ é contínua em x_0), então existe $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ e

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to x_0}} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'_{\mathbb{R}^T}(x_0).$$

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A \cap A'$ tal que f é continuamente derivável em x_0. Denote por a a derivada de f em x_0, isto é, $f'_{\mathbb{R}^T}(x_0) = a$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrário. Como $f'_{\mathbb{R}^T}$ é contínua em x_0, existe um $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $f'_{\mathbb{R}^T}(z) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ sempre que $z \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Agora, seja $x, y \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ tal que $x \neq y$. Digamos $x < y$. Como f é contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y), pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (x, y)$ tal que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'_{\mathbb{R}^T}(z)$. Como $z \in (x, y) \subset A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, temos

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'_{\mathbb{R}^T}(z) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Assim $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to x_0}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a$. □

Observação 4.44. Note que na Proposição 4.43, a hipótese de continuidade de $f'_{\mathbb{R}^T}$ é, de fato, necessária. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}.$$

Note que $f'_{\mathbb{R}^T}(0) = 0$ mas $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to x_0}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ não existe. De fato, dado $\delta \in \mathbb{R}^+$arbitrário, tomemos um número natural ímpar n suficientemente grande para que $\dfrac{1}{n\pi} \in (-\delta, \delta)$. Denotando $x = \dfrac{1}{n\pi}$, $y = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ e $z = \dfrac{1}{(n+1)\pi + \frac{\pi}{2}}$, temos $x, y, z \in (-\delta, \delta)$ e $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = -\dfrac{4n}{2n\pi + \pi}$ e $\dfrac{f(x) - f(z)}{x - z} = \dfrac{4n}{6n\pi + 9\pi}$.

Se fizermos algumas mudanças na definição de $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to x_0}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$, então, sob condições adequadas, podemos retirar a hipótese de continuidade de $f'_{\mathbb{R}^T}$ na Proposição 4.43. Isto é explicado na seguinte proposição.

Proposição 4.45. Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A \cap A'_- \cap A'_+$. Se f é derivável em x_0, então, dado uma vizinhança V de $f'_{\mathbb{R}^T}(x_0)$ arbitrária, existe um vizinhança U de x_0 tal que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \in V$, sempre que $x, y \in A \cap U$ e $x < x_0 < y$.

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A \cap A'_- \cap A'_+$ tal que f é derivável em x_0. Denotemos por a a derivada de f em x_0, isto é, $f'_{\mathbb{R}^T}(x_0) = a$.

Seja $V = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Então existe um $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ sempre que $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0)$ e $\left|\dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} - a\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ sempre que $y \in A \cap (x_0, x_0+\delta)$. Agora, seja $x, y \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$ tal que $x < x_0 < y$. Observe que $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - a = \dfrac{y-x_0}{y-x}\left(\dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} - a\right) - \dfrac{y-x_0}{y-x}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right) + \left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right)$ e que $\left|\dfrac{y-x_0}{y-x}\right| < 1$. Por isso $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - a\right| \leq \left|\dfrac{y-x_0}{y-x}\right|\left|\dfrac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} - a\right| + \left|\dfrac{y-x_0}{y-x}\right|\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right| + \left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Assim $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \in V$. $\square$

Observação 4.46. Note que a recíproca da Proposição 4.45 é falsa. De fato, seja f a função da Observação 4.42. Para toda vizinhança V de 1, existe uma vizinhança U de 0 tal que $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \in V$, sempre que $x, y \in A \cap U$ e $x < 0 < y$, mas f não é derivável em 0. Isto significa que, mesmo com a mudança na definição de $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to x_0}} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$, a hipótese de continuidade de f' na Proposição 4.41 não pode ser retirada.

4.5 Integral em $\mathbb{R}^T$

Definição 4.47. Seja $a, b \in \mathbb{R}^T$. Definimos:

a) $(a,b) := \{x \in \mathbb{R}^T;\ a < x < b\}$, $(a,b] := (a,b) \cup \{b\}$, $[a,b) := \{a\} \cup (a,b)$ e $[a,b] := \{a\} \cup (a,b) \cup \{b\}$. Dizemos que A, com $A \subset \mathbb{R}^T$, é um *intervalo* se, e somente se, A é um dos quatro tipos de conjuntos acima.

Note que poderíamos definir $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^T;\ a \leq x \leq b\}$, mas, desta forma, teríamos $[a,\Phi] = \emptyset$. Entretanto, da nossa definição, temos que $[a,\Phi] = \{a,\Phi\}$. Note também que $(a,\Phi) = \emptyset = (\Phi,a)$, $(a,\Phi] = \{\Phi\} = [\Phi,a)$, $[a,\Phi) = \{a\} = (\Phi,a]$ e $[\Phi,a] = \{\Phi,a\}$ para todo $a \in \mathbb{R}^T$.

b) Se $I \in \{(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]\}$, definimos o *comprimento* de I por

$$|I| := \begin{cases} 0 & \text{, se } I = \emptyset \\ k-k & \text{, se } I = \{k\} \text{ para algum } k \in \mathbb{R}^T \\ b-a & \text{, caso contrário} \end{cases}.$$

Note que poderíamos definir, simplesmente, $|I| = b - a$. Mas $|I|$ não estaria bem definido. Porque teríamos, para $a \in \mathbb{R}$, $|[a, \Phi)| = \Phi - a = \Phi$ e $|[a, a)| = a - a = 0$, mas $[a, \Phi) = \{a\} = [a, a)$. E, portanto, teríamos o absurdo $\Phi = |[a, \Phi)| = |[a, a)| = 0$.

c) Seja $A \subset \mathbb{R}^T$. Dizemos que $\mathcal{X}_A$ é a *função característica* de A se, e somente se,

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in A \\ 0 & , \text{ se } x \notin A \end{cases} .$$

d) Seja $[a, b]$ um intervalo. O conjunto P é dito ser uma *partição* de $[a, b]$ se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ tal que $P = (x_0, \ldots, x_n)$ onde $x_0 = a$, $x_n = b$ e, além disso, se $n = 2$, $x_0 \leq x_1$ e se $n > 2$, $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$.

Note que poderíamos requerer, simplesmente, $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ mas, então o intervalo $[a, \Phi]$, para $a \in \mathbb{R}$, não teria alguma partição, porque não é o caso que $a \leq \Phi$. Note também que, no caso $n = 2$, nós requeremos $x_0 \leq x_1$ afim de $P = (a, a, \Phi)$ ser uma partição de $[a, \Phi]$. Isto nos permite definir a função escada sobre $[a, \Phi]$, $\varphi = \varphi(a)\mathcal{X}_{(a,a]} + \varphi(\Phi)\mathcal{X}_{(a,\Phi]}$.

e) Dizemos que $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^T$ é uma *função escada sobre* $[a, b]$ se, e somente se, existe um partição $P = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ e $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^T$ tal que

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{X}_{I_j},$$

onde $I_j = (x_{j-1}, x_j]$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Note que a representação de uma função escada não é única.

Denotamos por $\mathcal{S}([a, b])$ o conjunto de todas as funções escada sobre $[a, b]$.

Definição 4.48. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^T$ e $\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{X}_{I_j}$ uma função escada sobre $[a, b]$. Definimos a *integral em* $\mathbb{R}^T$ *de* φ *sobre* $[a, b]$ por

$$\underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^b} \varphi(x)\ dx := \sum_{\substack{j=1 \\ j;\ c_j \neq 0}}^{n} c_j\, |I_j| \,.$$

Note que a integral de uma função escada é independente da representação particular usada.

Definição 4.49. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^T$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}^T$. Dizemos que f é *integrável em* $\mathbb{R}^T$ *sobre* $[a, b]$ se, e somente se,

$$\inf \left\{ \underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^b} \varphi(x)\ dx;\ \varphi \in \mathcal{S}([a, b]) \text{ e } \varphi \not> f \right\} = \sup \left\{ \underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^b} \sigma(x)\ dx;\ \sigma \in \mathcal{S}([a, b]) \text{ e } f \not> \sigma \right\}.$$

E neste caso, a *integral de* f *em* $\mathbb{R}^T$ *sobre* $[a, b]$ é definida por

$$\underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^b} f(x)\ dx := \inf \left\{ \underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^b} \varphi(x)\ dx;\ \varphi \in \mathcal{S}([a, b]) \text{ e } \varphi \not> f \right\}.$$

Veja a Definição 4.22 para relembrar as definições de sup e inf.

Note que se φ é uma função escada sobre $[a, b]$, então as definições 4.48 e 4.49 dão o mesmo resultado.

Proposição 4.50. a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Segue que f é Riemann integrável em $\mathbb{R}$ se, e somente se, f é integrável em $\mathbb{R}^T$. E neste caso,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^b} f(x)\ dx.$$

b) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$ uma função Riemann integrável sobre todo subintervalo fechado de $[a, \infty)$. A integral de Riemann imprópria $\displaystyle\int_a^\infty |f|(x)\ dx$ existe se, e somente se, f é integrável em $\mathbb{R}^T$. E neste caso,

$$\int_a^\infty f(x)\ dx = \underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^\infty} f(x)\ dx.$$

c) Sejam $b \in \mathbb{R}$ e $f : [-\infty, b] \to \mathbb{R}$ uma função Riemann integrável sobre todo subintervalo fechado de $(-\infty, b]$. A integral de Riemann imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^b |f|(x)\ dx$ existe se, e somente se, f é integrável em $\mathbb{R}^T$. E neste caso,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\ dx = \underset{\mathbb{R}^T}{\int_{-\infty}^b} f(x)\ dx.$$

d) Seja $f : [-\infty, \infty] \to \mathbb{R}$ uma função Riemann integrável sobre todo subintervalo fechado de $(-\infty, \infty)$. A integral de Riemann imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} |f|(x)\ dx$ existe se, e somente se, f é integrável em $\mathbb{R}^T$. E neste caso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \underset{\mathbb{R}^T}{\int_{-\infty}^{\infty}} f(x)\ dx.$$

e) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}^T$ uma função tal que $f((a, b]) \subset \mathbb{R}$, $f(a) = \infty$ e f é Riemann integrável sobre todo subintervalo fechado de $(a, b]$. A integral de Riemann imprópria $\int_a^b |f|(x)\ dx$ existe se, e somente se, f é integrável em $\mathbb{R}^T$. E neste caso

$$\int_a^b f(x)\ dx = \underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^b} f(x)\ dx.$$

f) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}^T$ uma função tal que $f([a, b)) \subset \mathbb{R}$, $f(b) = \infty$ e f é Riemann integrável sobre todo subintervalo fechado de $[a, b)$. A integral de Riemann imprópria $\int_a^b |f|(x)\ dx$ existe se, e somente se, f é integrável em $\mathbb{R}^T$. E neste caso

$$\int_a^b f(x)\ dx = \underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^b} f(x)\ dx.$$

Demonstração. a) É suficiente observar que, como $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, a integral $\underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^b} f(x)\ dx$ é precisamente a integral de Darboux, que, como conhecido, é equivalente à integral de Riemann.

b), c), d), e) e f) É suficiente notar que se $[a, b] \subset [-\infty, \infty]$ e $f : [a, b] \to [-\infty, \infty]$ é uma função não negativa Lebesgue integrável, então a integral $\underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^b} f(x)\ dx$ é igual à integral de Lebesgue de f sobre (a, b). Veja (STEIN e SHAKARCHI, 2005), Seção 2.1 e use os Teoremas 37, 38, 45 e 46 em (NG, 2012). $\square$

Exemplo 4.51. Sejam $f : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$ e $a \in \mathbb{R}^T$. Segue que:

a) Se $a \in \mathbb{R}$ e $f(a) \in \mathbb{R}$, então $\underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^a} f(x)\ dx = 0$. Porque $\underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^a} f(x)\ dx = f(a)\,|(a, a]| =$

$f(a) \times 0 = 0$;

b) Se $a \in \{-\infty, \infty, \Phi\}$, então $\underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^a} f(x)\, dx = \Phi$. Porque $\underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^a} f(x)\, dx = f(a)|(a,a]| = f(a) \times \Phi = \Phi$;

c) $\underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^\Phi} f(x)\ dx = \underset{\mathbb{R}^T}{\int_\Phi^a} f(x)\ dx = \Phi$. Vejamos, seja $\varphi \in \mathcal{S}([a, \Phi])$. Por isso, $\underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^\Phi} \varphi(x)\ dx = \varphi(a)|(a,a]| + \varphi(\Phi)|(a,\Phi]| = \varphi(a)|(a,a]| + \varphi(\Phi)\Phi = \varphi(a)|(a,a]| + \Phi = \Phi$. Assim, $\underset{\mathbb{R}^T}{\int_a^\Phi} f(x)\ dx = \Phi$.

O leitor pode observar que poderíamos definir a integral em $\mathbb{R}^T$ de uma forma mais geral, por exemplo definindo-a de forma análoga à integral de Lebesgue, substituindo funções escada por funções simples. Entretanto, neste texto tivemos o objetivo de dar uma modesta primeira definição de integral em $\mathbb{R}^T$. Escolhemos uma definição de forma que a integral em $\mathbb{R}^T$ é totalmente coincidente com integral de Riemann quando domínio e contradomínio de f são subconjuntos de números reais, isto é, $\mathrm{Dm}(f) \subset \mathbb{R}$ e $\mathrm{CDm}(f) \subset \mathbb{R}$.

Capítulo 5

Espaço lógico

Neste capítulo propomos um modelo matemático para uma semântica total e um espaço lógico. Por semântica total entendemos um sistema lógico que contenha os valores clássicos de verdade e falsidade; um valor de contradição, inspirado nas lógicas paraconsistentes; valores que correspondam a graus de veracidade e graus de falsidade, inspirados nas lógicas *fuzzy* e um valor *gap* que corresponda à indeterminação, isto é, um valor que não contenha informação sobre a veracidade ou falsidade de uma sentença. Além disso, este sistema deve possuir os conectivos lógicos de negação, disjunção e conjunção agindo de forma adequada nos valores acima citados, isto é, tendo a ação esperada sobre os valores clássicos, de contradição, *fuzzy* e *gap*. A ideia de espaço lógico, por sua vez, é inspirada na concepção de Wittgenstein de que a forma lógica do mundo é dada por uma "configuração de objetos". Assim como os objetos físicos estão dispostos em um espaço físico, os objetos que configuram logicamente o mundo estão situados em um "espaço lógico" (FLOYD, 2005). Wittgenstein não definiu de forma precisa seu espaço lógico, entretanto seguindo a ideia intuitiva de que os elementos deste espaço são as proposições e que as interações entre elas são os conectivos, tentamos estabelecer o espaço lógico como uma estrutura matemática bem definida. Algo parecido com um espaço vetorial, com as proposições sendo os "vetores" e os conectivos sendo "transformações vetoriais".

Escolhemos o conjunto dos números transreais para traduzir o conjunto dos valores semânticos, pois, como será visto ao longo do capítulo, os transreais se mostram adequados aos nossos objetivos.

Definimos o conjunto dos valores semânticos por $\mathbb{R}^T$. Definimos em $\mathbb{R}^T$ os conectivos negação, disjunção e conjunção e mostramos, num sentido adequado, que esta estrutura contém as estruturas clássica, paraconsistente, *fuzzy* e o valor *gap*. Em seguida, nós definimos o espaço das sequências de números transreais, $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$, como o conjunto dos mundos possíveis e utilizamos a estrutura topológica e transvetorial deste espaço para modelarmos diversos conceitos lógicos. Um espaço topológico é um conjunto onde faz sentido falar em vizinhança, proximidade e convergência. Como veremos, isto nos permitirá dar um sentido matemático à ideia de um mundo possível está próximo a outro e a ideia de uma sucessão de mundos possíveis convergir a um outro. Desta forma, podemos, por exemplo, dar uma definição matemática para a noção de relação de acessibilidade, motivada na logica modal. Mostramos que existe um mundo possível que pode acessar qualquer outro por aproximção. Definimos, ainda, um determindado subconjunto de $(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ como o espaço das proposições, definimos neste subconjunto os conectivos negação, disjunção e conjunção e damos um sentido matemático para a noção de transformação lógica. Por fim, estabelecemos um critério para determinar se uma proposição é ou não clássica em um dado mundo possível.

5.1 Semântica total

Nesta seção, propomos um modelo para uma semântica total. Como já foi dito, uma semântica que contém os valores semânticos clássicos, um valor de contradição, valores *fuzzy* e um valor *gap*.

As lógicas clássicas estão fundamentadas no príncipio de que cada proposição assume um, e somente um, dos seguintes valores semânticos: verdadeiro ou falso. Assim, o conjunto dos valores semânticos é dado por $\{F, T\}$ e os conectivos são determinados pelas funções:

$$\begin{array}{c} \neg_C : \{F, T\} \longrightarrow \{F, T\} \\ \neg_C(F) = T, \quad \neg_C(T) = F \end{array},$$

$$\begin{array}{ll} \vee_C : \{F,T\} \times \{F,T\} \longrightarrow \{F,T\} & \\ F \vee_C F = F, \qquad F \vee_C T = T & \text{e} \\ T \vee_C F = T, \qquad T \vee_C T = T & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \wedge_C : \{F,T\} \times \{F,T\} \longrightarrow \{F,T\} & \\ F \wedge_C F = F, \qquad F \wedge_C T = F & . \\ T \wedge_C F = F, \qquad T \wedge_C T = T & \end{array}$$

O subíndice "C" é para indicar que os conectivos estão definidos na lógica clássica.

Nas lógicas paraconsistentes o *dialetheism* é permitido, isto é, adimite-se a existência de uma proposição verdadeira cuja negação é também verdadeira (PRIEST, 1979, 2006). As lógicas paraconsistentes abrangem muitos cálculos. A propriedade comum desses cálculos é que eles não explodem no aparecimento de uma contradição. Na lógica clássica, se admitirmos uma contradição como premissa ou hipótese de uma inferência, então cada fórmula bem formada da língua é um teorema. Lógicas paraconsistentem bloqueiam essas "explosões sintáticas". Desta forma, temos um valor semântico δ que representa a contradição. Isto é, δ é o valor semântico de uma proposição que é tanto verdadeira quanto falsa. A forma mais simples de lógica paraconsistente é a que considera o conjunto de valores semânticos por $\{F, \delta, T\}$ e os conectivos são determinados pelas funções:

$$\begin{array}{c} \neg_P : \{F,\delta,T\} \longrightarrow \{F,\delta,T\} \\ \neg_P(F) = T, \quad \neg_P(\delta) = \delta, \quad \neg_P(T) = F \end{array} ,$$

$$\begin{array}{ll} \vee_P : \{F,\delta,T\} \times \{F,\delta,T\} \longrightarrow \{F,\delta,T\} & \\ F \vee_P F = F, \quad F \vee_P \delta = \delta, \quad F \vee_P T = T & \\ \delta \vee_P F = \delta, \quad \delta \vee_P \delta = \delta, \quad \delta \vee_P T = T & \text{e} \\ T \vee_P F = T, \quad T \vee_P \delta = T, \quad T \vee_P T = T & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \wedge_P : \{F,\delta,T\} \times \{F,\delta,T\} \longrightarrow \{F,\delta,T\} & \\ F \wedge_P F = F, \quad F \wedge_P \delta = F, \quad F \wedge_P T = F & \\ \delta \wedge_P F = F, \quad \delta \wedge_P \delta = \delta, \quad \delta \wedge_P T = \delta & . \\ T \wedge_P F = F, \quad T \wedge_P \delta = \delta, \quad T \wedge_P T = T & \end{array}$$

O subíndice "P" é para indicar que os conectivos estão definidos em uma lógica paraconsistente.

Nas lógicas *fuzzy* adimiti-se que as proposições possam assumir graus de veracidade e graus de falsidade. Em geral, esses graus variam de forma contínua. Assim, o conjunto dos valores semânticos é dado, comumente, pelo intervalo de números reais $[0,1]$ e os conectivos são determinados pelas funções (ZADEH, 1975):

$$\begin{array}{c} \neg_F : [0,1] \longrightarrow [0,1] \\ \neg_F(x) = 1 - x \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \vee_F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \\ x \vee_F y = \max\{x, y\} \end{array} \quad \text{e}$$

$$\begin{array}{c} \wedge_F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \\ x \wedge_F y = \min\{x, y\} \end{array}.$$

O subíndice "F" é para indicar que os conectivos estão definidos nas lógicas *fuzzy*.

Podemos destacar, ainda, um valor semântico γ que corresponde a um "*gap*". Isto é, γ é o valor semântico de uma proposição que não é nem verdadeira nem falsa. Este valor é inspirado nas ideias de Quine e Strawson (DECKERT, 1973). Para determinarmos a ação dos conectivos lógicos em γ recorremos ao Princípio de Composicionalidade de Frege. De acordo com o Princípio de Composicionalidade de Frege, se admitirmos um todo no qual uma das suas partes carece de referência, então o todo também carece de referência. Segundo Jansen, o Princípio de Composicionalidade de Frege pode ser definido da seguinte forma: "The meaning de a compound expression é a function de the meaning de its parts e the syntactic rule por which they are combined" (JANSEN, 2001, p.115). Mais precisamente, neste texto o que é chamado de Princípio de Composicionalidade de Frege é um exemplo particular de tal princípio, quando a expressão considerada tem, pelo menos, uma das suas partes, sem qualquer referência. Sob esta circunstância, toda a expressão carece de referência. Em termos de proposições, se permite-se que uma proposição molecular, no qual uma proposição atômica é um *gap*, então a proposição molecular é um *gap*. O princípio de Frege é bastante intuitivo e, basicamente, ele diz que um todo deve ter todas as suas partes, caso contrário não é um todo, mas é nada. Como conseqüência do princípio de Frege, temos que

$$\neg_G(\gamma) = \gamma, \qquad \gamma \vee_G x = x \vee_G \gamma = \gamma \qquad \text{e} \qquad \gamma \wedge_G x = x \wedge_G \gamma = \gamma$$

para todo x.

A seguir, propomos um modelo para uma semântica total. Nosso desejo é obter um conjunto numérico que possa servir como conjunto dos valores semânticos e que contenha os valores clássicos, de contradição, *fuzzy* e o valor *gap*. Iniciamos com o conjunto dos valores semânticos.

Definição 5.1. Chamamos cada elemento de $\mathbb{R}^T$ de *valor semântico* e, portanto, $\mathbb{R}^T$ de *conjunto dos valores semânticos*.

O próximo passo é definir, sobre $\mathbb{R}^T$, funções negação, disjunção e conjunção.

Definição 5.2. Sejam $\neg$ a função *negação* dada por

$$\begin{array}{rccl} \neg: & \mathbb{R}^T & \longrightarrow & \mathbb{R}^T \\ & x & \longmapsto & \neg(x) = -x \end{array},$$

$\vee$ a função *disjunção* dada por

$$\begin{array}{rccl} \vee: & \mathbb{R}^T \times \mathbb{R}^T & \longrightarrow & \mathbb{R}^T \\ & (x,y) & \longmapsto & x \vee y = \begin{cases} \Phi & , \text{ se } x = \Phi \text{ ou } y = \Phi \\ \max\{x,y\} & , \text{ caso contrário} \end{cases} \end{array}$$

e $\wedge$ a função *conjunção* dada por

$$\begin{array}{rccl} \wedge: & \mathbb{R}^T \times \mathbb{R}^T & \longrightarrow & \mathbb{R}^T \\ & (x,y) & \longmapsto & x \wedge y = \begin{cases} \Phi & , \text{ se } x = \Phi \text{ ou } y = \Phi \\ \min\{x,y\} & , \text{ caso contrário} \end{cases} \end{array}.$$

Queremos mostrar que a estrutura acima definida contém as estruturas clássica, paraconsistente, *fuzzy* e o valor *gap* definidos no início desta seção. Para isto, necessitamos precisar o que queremos dizer por “uma estrutura contém outra”.

Definição 5.3. Uma *álgebra transbooleana* é uma estrutura $(X, \neg, \vee, \wedge, \bot, \top)$, onde X é um conjunto, $\bot, \top \in X$, $\neg$ é uma função de X em X e $\vee$ e $\wedge$ são funções de $X \times X$ em X tais que são satisfeitas as propriedades: para todos $x, y, z \in X$,

i)	(do neutro)	$x \vee \bot = x$	e	$x \wedge \top = x$,
ii)	(comutativa)	$x \vee y = y \vee x$	e	$x \wedge y = y \wedge x$,
iii)	(associativa)	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	e	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ e
iv)	(distributiva)	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	e	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Observe que a estrutura das definições 5.1 e 5.2 é uma álgebra transbooleana. Isto é, $(\mathbb{R}^T, \neg, \vee, \wedge, -\infty, \infty)$ é uma álgebra transbooleana. Observe também que $(\{F, T\}, \neg_C, \vee_C, \wedge_C, F, T)$, $(\{F, \delta, T\}, \neg_P, \vee_P, \wedge_P, F, T)$ e $([0,1], \neg_F, \vee_F, \wedge_F, 0, 1)$ definidos no início desta seção são álgebras transbooleanas.

Definição 5.4. Sejam $(X, \neg_X, \vee_X, \wedge_X, \bot_X, \top_X)$ e $(Y, \neg_Y, \vee_Y, \wedge_Y, \bot_Y, \top_Y)$ duas álgebras transbooleanas e $f : X \longrightarrow Y$. Dizemos que f é um homomorfismo de álgebras transbooleanas se, e só se,

i) $\neg_Y \circ f = f \circ \neg_x$,

ii) $\vee_Y \circ (f \times f) = f \circ \vee_X$,

iii) $\wedge_Y \circ (f \times f) = f \circ \wedge_X$,

iv) $f(\bot_X) = \bot_Y$ e

v) $f(\top_X) = \top_Y$.

Teorema 5.5. Existem homomorfismos de álgebras transbooleanas:

de $(\{F, T\}, \neg_C, \vee_C, \wedge_C, F, T)$ em $(\mathbb{R}^T, \neg, \vee, \wedge, -\infty, \infty)$,

de $(\{F, \delta, T\}, \neg_P, \vee_P, \wedge_P, F, T)$ em $(\mathbb{R}^T, \neg, \vee, \wedge, -\infty, \infty)$ e

de $([0,1], \neg_F, \vee_F, \wedge_F, 0, 1)$ em $(\mathbb{R}^T, \neg, \vee, \wedge, -\infty, \infty)$.

Demonstração. Sejam $f : \{F, \delta, T\} \longrightarrow \mathbb{R}^T$, $f(F) = -\infty$, $f(\delta) = 0$, $f(T) = \infty$ e $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^T$, $g(x) = \tan\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ para todo $x \in [0,1]$. Não é difícil ver que

$\neg \circ f_{|\{F,T\}} = f_{|\{F,T\}} \circ \neg_C$, $\vee \circ (f_{|\{F,T\}} \times f_{|\{F,T\}}) = f_{|\{F,T\}} \circ \vee_C$, $\wedge \circ (f_{|\{F,T\}} \times f_{|\{F,T\}}) = f_{|\{F,T\}} \circ \wedge_C$, $f_{|\{F,T\}}(F) = -\infty$ e $f_{|\{F,T\}}(T) = \infty$;

$\neg \circ f = f \circ \neg_P$, $\vee \circ (f \times f) = f \circ \vee_P$, $\wedge \circ (f \times f) = f \circ \wedge_P$, $f(F) = -\infty$ e $f(T) = \infty$ e

$\neg \circ g = g \circ \neg_F$, $\vee \circ (g \times g) = g \circ \vee_F$, $\wedge \circ (g \times g) = g \circ \wedge_F$, $g(0) = -\infty$ e $g(1) = \infty$.

Portanto, $f_{|\{F,T\}}$, f e g são, respectivamente, os homomorfismos enunciados. □

Observação 5.6. Pelo Teorema 5.5, dizemos que a álgebra transbooleana $(\mathbb{R}^T, \neg, \vee, \wedge, -\infty, \infty)$ contém as álgebras transbooleanas $(\{F,T\}, \neg_C, \vee_C, \wedge_C, F, T)$, $(\{F, \delta, T\}, \neg_P, \vee_P, \wedge_P, F, T)$ e $([0,1], \neg_F, \vee_F, \wedge_F, 0, 1)$. Além disso, $\neg(\Phi) = \Phi$, $\Phi \vee x = x \vee \Phi = \Phi$ e $\Phi \wedge x = x \wedge \Phi = \Phi$ para todo $x \in \mathbb{R}^T$.

Pela Observação 5.6, podemos fazer a seguinte interpretação do conjunto de valores semânticos $\mathbb{R}^T$:

i) $-\infty$ e ∞ correspondem, respectivamente, aos valores clássicos falso e verdadeiro;

ii) 0 corresponde ao valor de contradição;

iii) o intervalo $[-\infty, \infty]$ corresponde aos valores *fuzzy* e

iv) Φ corresponde ao valor *gap*.

5.2 Espaço dos mundos possíveis

O conceito de mundo possível é muito importante na lógica. De acordo com Leibniz, Deus tem em sua mente todos os mundos que poderiam ser criados, estes são factíveis em sua mente. Ele escolhe um desses mundos para ser o mundo real (o melhor mundo que ele poderia criar). De acordo com Leibniz existem leis ou declarações que são verdadeiras em cada mundo, estas são proposições necessárias ou verdades da razão, enquanto algumas outras proposições são verdadeiras para o mundo real, mas não em todos os mundos: há um mundo em que essas proposições contingentes não se sustentam. Portanto, temos, na abordagem de Leibniz, uma base metafísica para interpretar a relação entre proposições e mundos possíveis. Para concepção de mundos possíveis de Leibniz ver (LEIBNIZ, 1998).

Intuitivamente, um mundo possível é uma evaluação das proposições nos valores semânticos. Como todas as proposições são compostas por uma ou mais proposições atômicas, um mundo possível é uma evaluação das proposições atômicas nos valores semânticos. Isto é, em um dado mundo possível, cada proposição atômica assume um valor semântico em $\mathbb{R}^T$. Assumiremos como um axioma que o conjunto das proposições atômicas é um conjunto enumerável. Isto é, ele pode ser escrito da forma $\{P_i;\ i \in \mathbb{N}\} = \{P_1, P_2, P_3, \dots\}$, onde $P_i \neq P_j$ sempre que $i \neq j$. Desta forma, podemos interpretar um mundo possível como uma função de $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ em $\mathbb{R}^T$. Mas isto forma uma sequência de elementos de $\mathbb{R}^T$. Assim, denotando por $(\mathbb{R}^T)^\mathbb{N}$ o conjunto das sequências de elementos de $\mathbb{R}^T$, adotaremos a seguinte definição.

Definição 5.7. Chamamos cada elemento de $(\mathbb{R}^T)^\mathbb{N}$ de *mundo possível* e, portanto, $(\mathbb{R}^T)^\mathbb{N}$ de *conjunto dos mundos possíveis*.

Desta forma, cada mundo possível é um ponto no espaço $(\mathbb{R}^T)^\mathbb{N}$. Dado um mundo possível $w = (w_i)_{i\in\mathbb{N}}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, w_i corresponde ao valor semântico de P_i em w.

Uma questão que surge é se existe alguma relação entre mundos possíveis. Motivados na lógica modal de Kripke (KRIPKE, 1963), nos perguntamos como se dão as interações entre mundos possíveis, isto é, como eles se comunicam. Kripke oferece uma semântica para a lógica modal com base na noção de uma "estrutura modal". A estrutura modal é um par, $< W, R >$, onde W é um conjunto de mundos possíveis e R é uma relação binária entre mundos possíveis. Essa relação é chamada de "relação de acessibilidade". Intuitivamente, a relação de acessibilidade pode ser vista como um "caminho" entre os mundos. Queremos propor um objeto matemático que possa fazer o papel da relação de acessibilidade. Isto é, para dizermos que existe uma relação de acessibilidade de um mundo possível w em um mundo possível u queremos que exista um objeto matemático T que relacione w a u e que satisfaça as propriedades reflexiva e simétrica. Como veremos, a existência de uma transformação linear T em $(\mathbb{R}^T)^\mathbb{N}$ tal que $T(w) = u$ é uma relação com tais características. Entretanto, transformações translineares são, usualmente, definidas em espaços vetoriais, mas, devido a estrutura dos números transreais, $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ não é um espaço vetorial. Contudo, não é o caso que $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ possui nemhuma das propriedades de um espaço vetorial, isto é, $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ não possui todas, mas possui algumas das propriedades de um tal espaço. Motivados nisso, definimos um espaço transvetorial como segue.

Definição 5.8. Um conjunto não vazio V é chamado *espaço transvetorial sobre* $\mathbb{R}^T$ se, e somente se, existem duas operações $+ : V \times V \longrightarrow V$ e $\cdot : \mathbb{R}^T \times V$ (nomeadas, respectivamente, *adição* e *multiplicação escalar*) tal que, para qualquer $w, u, v \in V$ e $x, y \in \mathbb{R}^T$:

i) (Comutatividade da adição) $w + u = u + w$,

ii) (Associatividade da adição) $w + (u + v) = (w + u) + v$,

iii) (Associatividade da multiplicação escalar) $x \cdot (y \cdot w) = (xy) \cdot w$,

iv) (Neutro aditivo) existe $o \in V$ tal que $o + w = w$ (o é costumeiramente denotado por 0) e

v) (Neutro da multiplicação escalar) $1 \cdot w = w$.

Os elementos de V são chamados *transvetores*. Além disso, $x \cdot w$ é costumeiramente denotado por $w \cdot x$ ou xw ou wx.

Sejam $w, u \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$, onde $w = (w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e $u = (u_j)_{j \in \mathbb{N}}$, e $x \in \mathbb{R}^T$. Definimos $w + u := (w_j + u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e $x \cdot w := (xw_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e denotamos $(0, 0, 0, \dots) \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ simplesmente por 0. Estamos cônscios de que cometemos um abuso de notação na definição acima. Entretanto, o leitor não terá dificuldade em perceber que, em $w + u := (w_j + u_j)_{j \in \mathbb{N}}$, o símbolo $+$ à esquerda da igualdade refere-se à adição que está sendo definida em $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ e o símbolo $+$ à direita da igualdade refere-se à adição em $\mathbb{R}^T$. Analogamente para $x \cdot w := (xw_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Observe que com estas operações $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ é um espaço transvetorial sobre $\mathbb{R}^T$.

Definição 5.9. Sejam V e W espaços transvetoriais sobre $\mathbb{R}^T$. Dizemos que $T : V \to W$ é uma *transformação translinear sobre* V se, e somente se, para todo $w, u \in V$ e $x \in \mathbb{R}^T$,

i) $T(w + u) = T(w) + T(u)$ e

ii) $T(xw) = xT(w)$.

Definição 5.10. Dados dois mundos possíveis $w, u \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ arbitrários, dizemos que $T : (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}} \longrightarrow (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ é uma *comunicação de w em u* se, e só, se T é uma transformação translinear contínua e satisfaz

i) para cada $v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ tal que $v_i = v_1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, $T(v) = v$ e

ii) $T(w) = u$.

Definição 5.11. Dados dois mundos possíveis $w, u \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ arbitrários, dizemos que wRu se, e só se, existe uma comunicação de w em u. Chamamos a relação R de *relação de acessibilidade*. Dizemos que *w acessa u* ou que *u é acessível por w* se, e só se, wRu.

Proposição 5.12. A relação de acessibilidade, R, possui as propriedades reflexiva e transitiva. Isto é, para todos $w, u, v \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$,

i) wRw e

ii) se wRu e uRv, então wRv.

Demonstração. Sejam $w, u, v \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ arbitrários. A função identidade Id é uma comunicação de w em w, logo wRw. Agora suponha que wRu e uRv, isto é, existe uma comunicação T de w em u e uma comunicação de S de u em v. Assim, existem $T, S : (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}} \longrightarrow (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ transformações translineares tais que, para cada $v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ tal que $v_i = v_1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, tem-se $T(v) = v$ e $S(v) = v$ e, além disso, $T(w) = u$ e $S(u) = v$. Como a composta entre transformações translineares contínuas é uma transformação translinear contínua, $S \circ T$ é uma transformação translinear contínua. Além disso, $(S \circ T)(v) = v$ para todo $v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ stisfazendo $v_i = v_1$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $(S \circ T)(w) = S(T(w)) = S(u) = v$. Logo $S \circ T$ é uma comunicação de w em v, donde wRv. $\square$

5.2.1 Um mundo possível que acessa qualquer outro por aproximação

O conjunto dos mundos possíveis $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ é um espaço topológico, onde a topologia é a topologia produto. Isto é, um conjunto $U \subset (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ é aberto se, e somente se, $U = \prod_{j\in\mathbb{N}} A_j$, onde A_j é aberto sobre $\mathbb{R}^T$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $A_j = \mathbb{R}^T$ exceto para um número finito de índices j (MUNKRES, 2000).

Observação 5.13. Observe que, como $\mathbb{R}^T$ é um espaço de Hausdorff separável, $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ é também um espaço de Hausdorff separável. Note também que, como $\mathbb{R}^T$ é compacto, pelo Teorema de Tychonoff ((MUNKRES, 2000), Teorema 37.3), $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ é compacto.

Um espaço topológico é um espaço que nos permite falar de vizinhanças, proximidade e convergência. Num espaço topológico podemos dar um sentido exato à noção de "estar próximo de". Em um espaço topológico E, uma vizinhança de um ponto $a \in E$ é um conjunto aberto que contém a. Dizer que para qualquer vizinhança U de a existe $b \in U$ diferente de a significa que pode-se obter um ponto b tão próximo de a quanto se queira. Ora, de acordo com nosso modelo, mundos possíveis são pontos do espaço topológico $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$. Isto nos permite falar em proximidade e convergência com respeito a mundos possíveis. Isto é, temos o sentido exato de "um mundo possível está próximo de outro" ou de "uma sucessão de mundos possíveis converge para um outro determinado".

Usaremos a definição usual de convergência de sequências em espaços topológicos. Isto é, uma sequência $(w^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ converge a $w \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ ou w é limite de $(w^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\lim_{n\to\infty} w^{(n)} = w$ se, e somente se, para cada $U \subset (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ vizinhaça de w, existe $n_U \in \mathbb{N}$ tal que $w^{(n)} \in U$ para todo $n \geq n_U$. Observe que, como $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ é um espaço de Hausdorff, o limite de uma sequência, se existe, é único (MUNKRES, 2000).

Além de espaço topológico, $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ é também um espaço métrico. Com métrica compatível com a topologia falada acima. Em um espaço métrico, podemos falar de distância entre seus elementos. Desta forma, podemos falar de distância entre mundos possíveis. E, como a métrica em questão é compatível com a topologia, os conceitos citados nos parágrafos anteriores, vizinhanças, proximidade e convergência são todos respeitados pela métrica.

Em (MUNKRES, 2000) há uma construção de uma métrica em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ compatível com sua topologia. Abaixo, nós apenas adaptamos esta construção para o espaço $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$. Lembre-se que $\mathbb{R}^T$ é um espaço metrizável (Proposição 4.14) pela métrica $d : \mathbb{R}^T \times \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x = y \\ 2 & , \text{ se } x = \Phi \text{ ou (exclusivo) } y = \Phi \\ |\varphi(x) - \varphi(y)| & , \text{ caso contrário} \end{cases} \cdot$$

onde $\varphi : [-\infty, \infty] \to [-1, 1]$, definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ se } x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|} & , \text{ se } x \in \mathbb{R} \\ 1 & , \text{ se } x = \infty \end{cases} ,$$

é um homeomorfismo.

Proposição 5.14. $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ é metrizável. Mais especificamente, para cada $w, u \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$, denote $w = (w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $u = (u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, e defina $D : (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ por

$$D(w,u) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{d(w_j, u_j)}{j} \right\}.$$

D é uma métrica sobre $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ que induz a topologia de $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Primeiro, vejamos que D é, de fato, uma métrica sobre $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$. Claramente, para todos $w, u \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$, $d(w,u) = 0$ se, e somente se, $w = u$, $d(w,u) = d(u,w)$ e $d(w,u) \geq 0$. Agora, se $w, u, v \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ então, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d(w_j, v_j)}{j} \leq \frac{d(w_j, u_j)}{j} + \frac{d(u_j, v_j)}{j} \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{d(w_j, u_j)}{j} \right\} + \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{d(u_j, v_j)}{j} \right\} = D(w,u) + D(u,v)$$

donde $D(w,u)+D(u,v)$ é um cota superior de $\left\{\dfrac{d(u_j,v_j)}{j};\ j\in\mathbb{N}\right\}$. Portanto

$$D(w,v)=\sup_{j\in\mathbb{N}}\left\{\frac{d(w_j,v_j)}{j}\right\}\leq D(w,u)+D(u,v).$$

Agora, vejamos que a topologia induzida por D e a topologia produto de $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ são a mesma. Vejamos que todo conjunto aberto sobre a topologia produto é também aberto na topologia induzida por D. Seja U um aberto arbitrário sobre a topologia produto e $w\in U$. Temos que $U=\prod_{j\in\mathbb{N}}A_j$, onde existe $n\in\mathbb{N}$ tal que A_j é aberto sobre $\mathbb{R}^T$ para todo $j\in\{1,\ldots,n\}$ e $A_j=\mathbb{R}^T$ para todo $j>n$. Além disso, $w_j\in A_j$ para todo $j\in\{1,\ldots,n\}$. Para cada $j\in\{1,\ldots,n\}$, se $w_j=\Phi$ tomamos $r_j=1$ e assim $B(w_j,r_j)=\{\Phi\}\subset A_j$, se $w_j\neq\Phi$, como φ^{-1} é contínua, existe um $r_j\in\mathbb{R}$ positivo tal que $B(w_j,r_j)\subset A_j$. Agora, seja $r:=\min\left\{\dfrac{r_j}{j};\ 1\leq j\leq n\right\}$. Se $u\in B(w,r)$ então

$$\frac{d(w_j,u_j)}{j}\leq D(w,u)<r$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Para cada $j\in\{1,\ldots,n\}$, $r\leq\dfrac{r_j}{j}$ donde

$$\frac{d(w_j,u_j)}{j})<r\leq\frac{r_j}{j}.$$

Por isso, $d(w_j,u_j)<r_j$ donde $u_j\in B(w_j,r_j)\subset A_j$, de modo que $u_j\in A_j$ para todo $j\in\{1,\ldots,n\}$. Portanto $u\in U$ donde $B(w,r)\subset U$.

Agora, vejamos que toda bola sobre a métrica D é um conjunto aberto sobre a topologia produto. Sejam $w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ e $r\in\mathbb{R}$ positivo. Seja $n\in\mathbb{N}$ tal que $n>\dfrac{2}{r}$ donde $\dfrac{2}{n}<r$. Para cada $j\in\{1,\ldots,n\}$, se $w_j=\Phi$, tomamos $A_j=\{\Phi\}$ e assim $A_j\subset B(w_j,r)$, se $w_j\neq\Phi$, como φ é contínua, existe uma vizinhança A_j de w_j tal que $A_j\subset B(w_j,r)$. Seja $U=A_1\times\cdots\times A_n\times\mathbb{R}^T\times\mathbb{R}^T\times\cdots$. Se $u\in\mathbb{R}^T$ então $\dfrac{d(w_j,u_j)}{j}\leq\dfrac{2}{n}$ para todo $j\geq n$. Por isso,

$$D(w,u)\leq\max\left\{\frac{d(w_1,u_1)}{1},\ldots,\frac{d(w_n,u_n)}{n},\frac{2}{n}\right\}.$$

Portanto, se $u \in U$ então

$$D(w,u) \leq \max\left\{\frac{d(w_1,u_1)}{1}, \dots, \frac{d(w_n,u_n)}{n}, \frac{2}{n}\right\} < r.$$

Logo $u \in B(w,r)$ donde $U \subset B(w,r)$. □

Corolário 5.15. $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ é um espaço métrico completo.

Demonstração. Segue do fato de todo espaço métrico compacto ser completo. □

Introduziremos agora o conceito de operador hipercíclico. Um operador hipercíclico é um objeto oriundo da análise funcional. Os primeiros exemplos de operadores hipercíclicos foram obtidos na primeira metade do século XX por G. Birkhoff (BIRKHOFF, 1929) e G. MacLane (MACLANE, 1952/53). Desde então, diversos aspectos nesse tema têm sido desenvolvidos. Para um panorama geral veja (GROSSE-ERDMANN E PERIS, 2011). Tomaremos emprestado este conceito da análise funcional e o interpretaremos em nosso modelo de mundos possíveis.

Um operador é uma função cujo domínio e contra-domínio são um mesmo conjunto. Formalmente, um operador T é hipercíclico se existe um elemento x do domínio, tal que todo e qualquer elemento do domínio pode ser aproximado por aplicações recursivas de T em x. Isto é, conhecendo-se apenas um operador T e um elemento hipercíclico relativo a T, podemos obter todos os outros elementos do domínio por aproximação topológica. Operadores Hipercíclicos são geralmente definidos em espaços vetoriais topológicos. A despeito disto, a ideia de operador hipercíclico faz sentido em espaço topológicos arbitrarios. Assim, podemos definir tal conceito em $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$.

Dados um conjunto X e uma função $f : X \longrightarrow X$, definimos as *iteradas* de f por

$$f^0 = \mathrm{Id}_X,\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f,\ f^3 = f \circ f^2,\ \dots\ ;$$

onde Id_X denota a função identidade em X. Além disso, para cada $x \in X$, definimos a *órbita de x com respeito a f* por

$$\mathrm{orb}(x,f) := \{x, f(x), f^2(x), \dots\}.$$

Definição 5.16. Seja X um espaço topológico. Um operador linear contínuo T em X é dito *hipercíclico* se existe $x \in X$ tal que $\mathrm{orb}(x, T)$ é densa em X. Neste caso, x é chamado um *elemento hipercíclico* de T. O conjunto dos elementos hipercíclicos de T é denotado por $HC(T)$.

Agora veremos que existe um operador hipercíclico em $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ e, em seguida, interpretaremos este fato em nosso modelo de mundos possíveis. Seja $B : (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}} \longrightarrow (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$, $B(w_1, w_2, w_3, \dots) = (w_2, w_3, w_4, \dots)$. O operador B é chamado de *deslocamento à esquerda* sobre $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$. Observe que B é uma transformação translinear sobre $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$. Veremos que B é um operador hipercíclico sobre $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$. Rolewicz foi quem mostrou que o operador B é hipercíclico sobre o espaço de Hilbert ℓ_2 (ROLEWICZ, 1969). Nós facilmente adaptaremos sua demonstração para o espaço $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$.

Proposição 5.17. O operador B é contínuo em $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Seja $U \subset (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ um conjunto aberto arbitrário. Temos que $U = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots$, onde A_j é aberto sobre $\mathbb{R}^T$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $A_j = \mathbb{R}^T$ exceto para um número finito de índices j. Observe que $B^{-1}(U) = B^{-1}(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots) = \mathbb{R}^T \times A_1 \times A_2 \times \cdots$. De fato,

$$
\begin{aligned}
&(w_1, w_2, w_3, \dots) \in B^{-1}(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots) && \Leftrightarrow \\
&(w_2, w_3, w_4, \dots) = B(w_1, w_2, w_3, \dots) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots && \Leftrightarrow \\
&(w_1, w_2, w_3, \dots) \in \mathbb{R}^T \times A_1 \times A_2 \times \cdots .
\end{aligned}
$$

Claramente, $\mathbb{R}^T \times A_1 \times A_2 \times \cdots$ é aberto. Como a pré-imagem de um conjunto aberto por B é aberto, B é contínuo ((MUNKRES, 2000), Teorema 18.1). $\square$

Observe que B é uma transformação translinear contínua e que, para cada $v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ tal que $v_i = v_1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, $B(v) = v$. Desta forma B é uma comunicação entre um mundo w e qualquer elemento de $\mathrm{orb}(w, B)$.

Lema 5.18 (Teorema de Transitividade de Birkhoff). Seja X um espaço métrico completo separável e $f : X \longrightarrow X$ uma função contínua. Se f é *topológicamente transitiva*, no seguinte sentido: para qualquer par U, V de subconjuntos abertos não vazios de

X, existe $n \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, então f é hipercíclico. E neste caso, o conjunto dos elementos hipercíclicos é um conjunto denso em X.

Demonstração. Suponha que f seja topológicamente transitiva. Como X possui um conjunto enumerável denso, a topologia de X tem base enumerável. Seja $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma enumeração desta base. Daí, x possui órbita densa se, e só se, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^n(x) \in U_k$. Isto é, o conjunto D dos pontos cuja órbita é densa é dado por

$$D = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} (f^n)^{-1}(U_k).$$

Como f é contínuo, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} (f^n)^{-1}(U_k)$ é aberto em X. Além disso, cada um desses conjuntos é denso em X. De fato, se V é um subconjunto aberto não vazio arbitrário de X, então, pela hipótese de transitividade topológica de f, temos que $(f^n)^{-1}(U_k) \cap V \neq \emptyset$ para algum $n \in \mathbb{N}_0$, donde $\bigcup_{n=0}^{\infty} (f^n)^{-1}(U_k) \cap V \neq \emptyset$. Como X é um espaço métrico completo, pelo Teorema de Baire (RUDIN, 1991; Teorema 2.2), D é denso e, em particular, não vazio. □

Lema 5.19. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$ funções contínuas. Se g é hipercíclico e existe uma função contínua $\phi : Y \longrightarrow X$ com imagem densa tal que $f \circ \phi = \phi \circ g$, então f também é hipercíclico.

Demonstração. Seja $y \in Y$ com órbita densa com respeito a g. Se U é um subconjunto aberto não vazio de X, então $\phi^{-1}(U)$ é aberto não vazio de Y, pois ϕ é contínua e tem imagem densa. Logo, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $g^n(y) \in \phi^{-1}(U)$. Como $f(\phi(y)) = \phi(g(y))$, verifica-se, por indução, que $f^n(\phi(y)) = \phi(g^n(y))$. Portanto, $f^n(\phi(y)) = \phi(g^n(y)) \in U$. Logo, $\phi(y)$ tem órbita densa com respeito a f.

□

Sejam X, Y conjuntos quaisquer e $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$ funções. A função $f \times g : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ é definida por

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Claramente, $(f \times g)^n = f^n \times g^n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Além disso, se X, Y são espaços topológicos e f, g são contínuas, então $f \times g$ também é contínua na topologia produto de $X \times Y$.

Teorema 5.20. O operador B é hipercíclico em $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denote $e^{(n)} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ coordenadas}}, 1, 0, 0, \ldots)$, Isto é, $e^{(n)} = (w_j)_{j \in \mathbb{N}}$, onde $w_n = 1$ e $w_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$. Observe que $\lim_{n\to\infty} e^{(n)} = 0$. De fato, seja $U \subset (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ uma vizinhaça de 0. Temos que $U = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots$, onde A_j é um vizinhaça de 0 em $\mathbb{R}^T$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e existe $n_U \in \mathbb{N}$ tal que $A_j = \mathbb{R}^T$ para todo $j \geq n_U$. Portanto $e^{(n)} \in U$ para todo $n \geq n_U$.

Agora, denote por c_{00}^T o conjunto de todas as sequências de números transreais tais que apenas um número finito de coordenadas não são iguais a zero. c_{00}^T é denso em $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$. De fato, para cada $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ arbitrário, tomamos uma sequência $\left(\sum_{j=1}^{n} w_j e^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset c_{00}^T$ e sabemos que $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} w_j e^{(j)} = (w_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Seja $F : c_{00}^T \to c_{00}^T$, onde $F(w_1, w_2, w_3, \ldots) = (0, w_1, w_2, \ldots)$. Observe que

$$B^n(F^n(u)) = u, \text{ para todo } u \in c_{00}^T \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} B^n(w) = 0, \text{ para todo } w \in c_{00}^T. \tag{5.2}$$

Além disso, se $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots) \in c_{00}^T$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $u_j = 0$ para todo $j > k$, donde $u = u_1 e^{(1)} + \cdots + u_k e^{(k)}$ e, então, $F^n(u) = F^n(u_1 e^{(1)} + \cdots + u_k e^{(k)}) = F^n(u_1 e^{(1)}) + \cdots + F^n(u_k e^{(k)}) = u_1 e^{(1+n)} + \cdots + u_k e^{(k+n)}$. Como $\lim_{n\to\infty} e^{(n)} = 0$, temos que $\lim_{n\to\infty} F^n(u) = \lim_{n\to\infty} (u_1 e^{(1+n)} + \cdots + \lim_{n\to\infty} u_k e^{(k+n)}) = \lim_{n\to\infty} (u_1 e^{(1+n)}) + \cdots + \lim_{n\to\infty} (u_k e^{(k+n)}) = u_1 \lim_{n\to\infty} e^{(1+n)} + \cdots + u_k \lim_{n\to\infty} e^{(k+n)} = u_1 \cdot 0 + \cdots + u_k \cdot 0 = 0$. Portanto

$$\lim_{n\to\infty} F^n(u) = 0, \text{ para todo } u \in c_{00}^T. \tag{5.3}$$

Agora, seja $W_1, W_2, U_1, U_2 \subset (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ e conjuntos abertos não vazios arbitrários. Como

c_{00}^T é denso em $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$, existem $w^{(1)} \in W_1 \cap c_{00}^T$, $w^{(2)} \in W_2 \cap c_{00}^T$, $u^{(1)} \in U_1 \cap c_{00}^T$ e $u^{(2)} \in U_2 \cap c_{00}^T$. Segue de (5.1) e (5.2) que

$$\lim_{n\to\infty} B^n(w^{(1)} + F^n(u^{(1)})) = \lim_{n\to\infty} B^n(w^{(1)}) + \lim_{n\to\infty} B^n(F^n(u^{(1)})) = 0 + u^{(1)} = u^{(1)}.$$

e segue de (5.3) que

$$\lim_{n\to\infty}(w^{(1)} + F^n(u^{(1)})) = w^{(1)} + 0 = w^{(1)}.$$

Portanto, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $w^{(1)} + F^n(u^{(1)}) \in W_1$ e $B^n(w^{(1)} + F^n u^{(1)}) \in U_1$ para todo $n \geq n_1$. Da mesma forma, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $w^{(2)} + F^n u^{(2)} \in W_2$ e $B^n(w^{(2)} + F^n u^{(2)}) \in U_2$ para todo $n \geq n_2$. Escolhendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, vemos que $(T \times T)^{n_0}(W_1 \times W_2) \cap (U_1 \times U_2) \neq \emptyset$. Portanto, $B \times B$ é topológicamente transitiva, donde, pelo Lema 5.18, $B \times B$ é hipercíclico em $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$.

Claramente, a função $\phi : (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$, $\phi(x, y) = x$ satisfaz as condições do Lema 5.19 para $B \times B$ e B. Portanto, B é hipercíclico. $\square$

Como B é um operador hipercíclico, existe um transvetor hipercíclico w com respeito a B. Como B é uma transformação translinear contínua satisfazendo, para cada $v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ tal que $v_i = v_1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, $B(v) = v$, B é uma comunicação entre w e qualquer elemento de $\mathrm{orb}(w, B)$. Logo w acessa qualquer elemento de $\mathrm{orb}(w, B)$. Como B é hipercíclico, $\mathrm{orb}(w, B)$ é densa em $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$. Isto significa que dado um mundo possível arbitrário u, existe uma sequência de elementos de $\mathrm{orb}(w, B)$ que converge para u. Isto é, existe uma sequência de elementos acessíveis por w que converge para u. O conjunto dos mundos possíveis, $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ possui uma métrica compatível com a topologia produto. Desta forma, a topologia produto permite a noção de distância. Em resumo, podemos interpretar a existência de um operador hipercíclico em $(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ da seguinte forma:

Existe um mundo possível w tal que, dado qualquer mundo possível u, existe um mundo possível v tão próximo de u quanto se queira tal que w acessa v.

Isto quer dizer que w "acessa por aproximação topológica" qualquer mundo possível.

5.3 Espaço das proposições

Esta seção é uma versão do texto (GOMIDE, REIS e ANDERSON, no prelo).

Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja p_i o funcional coordenada $p_i : (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^T$, $p_i\big((w_j)_{j\in\mathbb{N}}\big) = w_i$. Dado $i \in \mathbb{N}$, note que para cada mundo possível w, interpretamos $p_i(w)$ como o valor semântico da i-ésima proposição atômica, P_i, no mundo possível w. Desta forma, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\big(p_i(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ é uma $(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$-upla que expressa o valor semântico da proposição atômica P_i em cada mundo possível. Deste modo, cada proposição atômica P_i se faz representar por $\big(p_i(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$. Observe que as $(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$-uplas

$$\big(p_1(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}},\ \big(p_2(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}},\ \big(p_3(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}},\ \ldots$$

são duas a duas distintas. De fato, note que, para cada $i, k \in \mathbb{N}$ tal que $i \neq k$, existe $u \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ tal que $p_i(u) \neq p_k(u)$. Logo $\big(p_i(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \neq \big(p_k(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ sempre que $i \neq k$.

Definição 5.21. Seja $\mathcal{P} := \Big\{\big(p_1(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \big(p_2(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \big(p_3(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \ldots\Big\}$. Chamamos cada elemento de $\mathcal{P}$ de *proposição atômica* e, portanto, $\mathcal{P}$ de *conjunto das proposições atômicas.*

Pela Definição 5.21 cada proposição atômica é um ponto no espaço $(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$. Ainda, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\big(p_i(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ corresponde a i-ésima proposição atômica, isto é, $\big(p_i(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} = P_i$. E, para cada $w \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$, $p_i(w)$ corresponde ao valor semântico de P_i no mundo possível w.

Definição 5.22. Sejam $\neg : (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \longrightarrow (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$,

$$\neg\big(p_w\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} = \big(\neg(p_w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \tag{5.4}$$

$\vee : (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \times (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \longrightarrow (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$

$$(p_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \vee (q_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} = \big(p_w \vee q_w\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \tag{5.5}$$

e $\wedge : (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \times (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \longrightarrow (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$

$$(p_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \wedge (q_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} = \big(p_w \wedge q_w\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}. \tag{5.6}$$

Na definição acima, mais uma vez cometemos um abuso de notação. Entretanto, o leitor não terá dificuldade em perceber que, em (5.4), o símbolo $\neg$ à esquerda da igualdade refere-se à função que está sendo definida em $(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ e o símbolo $\neg$ à direita da igualdade refere-se à função já definida em $\mathbb{R}^T$. Analogamente para $\vee$ em (5.5) e para $\wedge$ em (5.6).

Definição 5.23. Sejam $A \subset (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ e $\mathcal{L}_A$ definido como a classe de todos os conjuntos $X_A \subset (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ onde X_A tem as seguintes propriedades:

i) $A \subset X_A$ e

ii) se $p, q \in X_A$ então $\neg p, p \vee q, p \wedge q \in X_A$.

Definamos $L_A := \bigcap\limits_{X_A\in\mathcal{L}_A} X_A$. Seja $p \in (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$, dizemos que p é uma *combinação lógica de elementos de* A se, e somente se, $p \in L_A$. Dado $B \subset (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$, dizemos que B é um conjunto *logicamente independente* se, e somente se, para todo $p \in B$, p não é uma combinação lógica de elementos de $B \setminus \{p\}$.

Proposição 5.24. O conjunto $\mathcal{P}$ é logicamente independente.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{P}$ não é logicamente independente. Isto quer dizer que existe um elemento de $\mathcal{P}$ que é combinação lógica de outros elementos de $\mathcal{P}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\big(p_1(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ é combinação lógica de alguns elementos de $\Big\{\big(p_2(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \big(p_3(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \dots\Big\}$. Assim, $\big(p_1(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ é o resultado de uma determinada composições entre as funções $\neg$, $\vee$ e $\wedge$ aplicadas a alguns elementos de $\Big\{\big(p_2(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \big(p_3(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \dots\Big\}$. Denotemos por T esta composição e, para algum $m \in \mathbb{N}$, $\big(p_{j_1}(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \big(p_{j_2}(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \dots, \big(p_{j_m}(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ os elementos de $\Big\{\big(p_2(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \big(p_3(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \dots\Big\}$ nos quais T é aplicada. Assim

$$\begin{aligned}\big(p_1(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} &= T\Big(\big(p_{j_1}(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \big(p_{j_2}(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, \dots, \big(p_{j_m}(w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}\Big)\\ &= \Big(T\big(p_{j_1}(w), p_{j_2}(w), \dots, p_{j_m}(w)\big)\Big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$p_1(w) = T\big(p_{j_1}(w), p_{j_2}(w), \dots, p_{j_m}(w)\big) \text{ para todo } w \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}. \tag{5.7}$$

Agora, seja $(u_1, u_2, \dots) \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ arbitrário e tome $u' \neq T(u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_m})$ e $v = (v_1, v_2, v_3 \dots) := (u', u_2, u_3, \dots)$. Temos que $v \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ e $v_1 \neq T(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_m})$. Logo $p_1(v) \neq T\big(p_{j_1}(v), p_{j_2}(v), \dots, p_{j_m}(v)\big)$. O que é uma contradição com (5.7). Logo $\mathcal{P}$ é logicamente independente. □

Isto justifica chamarmos as proposições de $\mathcal{P}$ de atômicas.

Definição 5.25. Seja $\Pi := L_{\mathcal{P}}$, isto é,

$$\Pi = \big\{q \in (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}};\ q \text{ é combinação lógica de elementos de } \mathcal{P}\big\}.$$

Chamamos Π de *espaço das proposições* e cada elemento de Π de *proposição*.

Proposição 5.26. O conjunto Π é enumerável.

Demonstração. Cada elemento de Π pode ser escrito como uma sequência finita de símbolos de $S := \mathcal{P} \cup \{\neg, \vee, \wedge, (,)\}$. Por isso, um elemento de Π pode ser visto como um elemento de S^n para algum $n \in \mathbb{N}$. Portanto Π pode ser visto como um subconjunto de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n$. Como S é enumerável, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n$ é enumerável, donde Π é enumerável. □

Corolário 5.27. O espaço das proposições, Π, é diferente de $(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$. Isto é, Π é um subconjunto próprio de $(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$.

Demonstração. Denotemos a cardinalidade de Π por $|\Pi|$, a cardinalidade de $(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ por $|(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}|$ e $\mathfrak{c}$ a cardinalidade do contínuo. Note que, usando a aritmética transfinita de Cantor, $|\Pi| = \aleph_0$, mas $|(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}| = \mathfrak{c}^{(\mathfrak{c}^{\aleph_0})} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \times \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} > \aleph_0$. Por isso $|\Pi| < |(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}|$ donde $\Pi \neq (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$. □

Note que, como $\mathbb{R}^T$ é um espçao topológico, $(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ é um espaço topológico onde a topologia em questão é a topologia produto e, como $\Pi \subset (\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$, Π é um espaço topológico com a topologia induzida por $(\mathbb{R}^T)^{(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$.

Por comodidade, denotaremos as restrições $\neg_{|\Pi}$, $\vee_{|\Pi}$ e $\wedge_{|\Pi}$ apenas por $\neg$, $\vee$ e $\wedge$, respectivamente. Note que Π é fechado para $\neg$, $\vee$ e $\wedge$. Isto é, para todos $p, q \in \Pi$, segue que $\neg(p), p \vee q, p \wedge q \in \Pi$.

Proposição 5.28. A estrutura $\left(\Pi, \neg, \vee, \wedge, (-\infty)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}, (\infty)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}\right)$ é uma álgebra trans-booleana.

Proposições são tuplas cujos eixos são mundos possíveis e tal entendimento das proposições pode introduzir algumas novidades em relação a conceitos metalógicos. Por exemplo, no espaço das proposições Π, uma proposição informa-nos sobre todos os seus modelos, isto é, os valores semânticos desta proposição em todos os mundos possíveis são dados de uma só vez. Além disso, podemos performar operações lógicas em todos os mundos possíveis simultaneamente e esta possibilidade mostra-nos que tipo de afinidade as proposições têm entre elas. Por exemplo, podemos estabelecer um critério para definir a relação de necessidade e a relação de possibilidade, ambas motivadas na lógica modal.

Definição 5.29. Dizemos que uma proposição $(p_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \in \Pi$ é necessária em um mundo possível v se, e só se, para todo $u \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ tal que v acessa u, $p_u > 0$. E $(p_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \in \Pi$ é possível em um mundo possível v se, e só se, eixste $u \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ tal que v acessa u e $p_u > 0$.

5.3.1 Transformações lógicas

Nas lógicas clássicas o conectivo condicional, $\rightarrow$, é definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \rightarrow: \{F, V\} \times \{F, V\} \longrightarrow \{F, V\} & \\ F \rightarrow F = V, & F \rightarrow V = V \\ V \rightarrow F = F, & V \rightarrow V = V \end{array}.$$

O que significa que:

i) se o antecedente é falso, então o condicional é verdadeiro independente do valor do consequente e

ii) se o consequente é verdadeiro, então o condicional é verdadeiro independente do valor do antecedente.

Nas lógicas não clássicas o condiconal é definido de diversas formas. Entretanto, a observação acima nos dá a ideia intuitiva de que o condicional é verdadeiro se, e só se, o grau de verdade do consequente é maior ou igual ao grau de verdade do antecedente. Motivados nisso, propomos a seguinte definição.

Definição 5.30. Seja $T : \Pi \longrightarrow \Pi$ e, para cada $(p_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \in \Pi$, denote $\big(T(p_w)\big)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} := T\left((p_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}\right)$. Chamamos T de *transformação lógica* se, e só se, $p_w \leq T(p_w)$ para todo $w \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$.

É bem conhecido que, no cálculo proposicional clássico, pode-se derivar qualquer proposição do *bottom*, $\perp$, isto é:

$$\text{para todo } p \text{ no sistema, } \perp\vdash p. \tag{5.8}$$

Considere $\Gamma := \left\{(p_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \in \Pi;\ p_w \in \{-\infty, \infty\}\right\}$.

Em Γ, o meta-teorema em (5.8) é equivalente a uma resposta afirmativa a questão: *existe algum ponto em* Γ *pode-se derivar, por meio de uma transformação lógica, qualquer ponto em* Γ? Este ponto é $(-\infty)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$. Isto é,

$$\text{para todo } p \in \Gamma, \text{ existe uma transformação lógica } T \text{ tal que } T\left((-\infty)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}\right) = p.$$

De maneira análoga, podemos ler o meta-teorema: pode-se derivar o *top*, $\top$, de qualquer proposição, isto é:

$$\text{para todo } p \text{ no sistema, } p \vdash \top.$$

O $(\infty)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ é um ponto que pode ser acessado de qualquer outro ponto, isto é:

$$\text{para todo } p \in \Gamma, \text{ existe uma transformação lógica } T \text{ tal que } T(p) = (\infty)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}.$$

Se considerarmos um cálculo proposicional em que permite-se graus contínuos de verdade e falsidade e, além disso, as proposições podem ser ao mesmo tempo verdadeiras e falsas, então o "ponto-*bottom*" ainda é um ponto de onde todo ponto pode ser derivado e o "ponto-*top*" ainda é um ponto ao qual todo ponto pode derivar. A verificação disto é análoga ao caso clássico, mas agora consideramos $\Sigma := \left\{(p_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \in \Pi;\ p_w \in [-\infty,\infty]\right\}$ ao invés de Γ. E assim,

$$\text{para todo } p \in \Sigma, \text{ existe uma transformação lógica } T \text{ tal que } T\left((-\infty)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}\right) = p \text{ e}$$

$$\text{para todo } p \in \Sigma, \text{ existe uma transformação lógica } T \text{ tal que } T(p) = (\infty)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}.$$

Se estendermos o cálculo proposicional a Π, então o "ponto-*bottom*" não é mais um "lugar privilegiado" do qual podemos derivar qualquer ponto de Π. De fato, seja $q = (q_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \in \Pi$ tal que, para algum $k \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$, $q_k = \Phi$. A k-ésima coordenada do "ponto-*bottom*" é $-\infty$ e, como não é o caso que $-\infty \leq \Phi$, não podemos acessar q de $(-\infty)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ por uma transformação lógica. Portanto q é um ponto inacessível de Π por meio de uma transformação lógica que tem como pontos iniciais aqueles cujas coordenadas pertencem a $[-\infty,\infty]$. Pontos tais como q, aqueles que tem Φ como valor de alguma coordenada, são acessados apenas a partir de pontos cujas coordenadas de mesmo índice são também Φ.

5.3.2 Um critério para distinguir proposições clássicas de proposições não-clássicas

Como uma proposição é um ponto no espaço das proposições e como um eixo u deste espaço é um mundo possível, se uma proposição comporta-se classicamente, então o seu valor numérico em u é $-\infty$ (falso clássico) ou ∞ (verdadeiro clássico). Por isso, sua contraditória é um ponto no espaço das proposições que tem a coordenada u: $\neg(-\infty) = \infty$ ou $\neg(\infty) = -\infty$. Portanto se, em um dado mundo possível u, uma proposição é clássica, então o valor absoluto da diferença entre a coordenada u da proposição e a coordenada u de sua contraditória é $|(-\infty) - (\infty)|$ ou $|\infty - (-\infty)|$, de qualquer forma $|(-\infty)-(\infty)| = |\infty-(-\infty)| = \infty$. Reciprocamente, se o valor absoluto da diferença entre a coordenada u de uma proposição $p = (p_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}}$ e a coordenada u de sua contraditória é ∞, então $\infty = |p_u - \neg(p_u)| = |p_u - (-p_u)| = 2|p_u|$ donde $p_u = -\infty$ ou $p_u = \infty$. Por isso p é clássica no mundo possível u. Isso demonstra a seguinte proposição.

Proposição 5.31. Seja $p = (p_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} \in \Pi$ e $(q_w)_{w\in(\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}} = \neg(p)$. A proposição p é clássica no mundo possível $u \in (\mathbb{R}^T)^{\mathbb{N}}$ se, e somente se, $|p_u - q_u| = \infty$.

Portanto no espaço das proposições, onde pode-se traduzir uma semântica total, nós estipulamos um critério para distinguir proposições clássicas de proposições não-clássicas. É interessante notar que, usualmente, não existe maneira para distinguir proposições atômicas que se comportam classicamente de proposições atômicas que não se comportam classicamente. Usualmente o conjunto das proposições atômicas não tem estrutura interna e, portanto, nenhuma característica que possa ser utilizada como critério para tal distinção. Quais são e quais não são as proposições clássicas é decidido por critérios arbitrários. Mas, como pontos localizados em coordenadas no espaço das proposições, as proposições atômicas são elementos de um espaço estruturado e essa estrutura oferece um critério para classicidade e não classicidade de uma proposição atômica.

Capítulo 6

A inexorabilidade do pirão gera o *nullity*: Divagações e devaneios acerca dos transreais

Neste capítulo fazemos uma digressão a respeito da transmatemática, números transreais, o infinito nos transreais e o *nullity*. Sobre as novidades que os transreais trazem à matemática e sobre o desafio de adentrar o seleto grupo das teorias bem aceitas pelo meio acadêmico. A matemática, tida como uma ciência exata, possui, como uma de suas ideias fundamentais, o conceito de número. Não obstante, a história mostra que o entendimento que se tem deste objeto não é um dogma, mas uma percepção que muda com o tempo e com as necessidades que se apresentam no desenvolvimento da sociedade. Alguns capítulos desta história já foram escritos: passamos de números fracionários para irracionais, de positivos para negativos e de reais para imaginários. No presente momento vivemos o surgimento de um novo conjunto numérico. James Anderson propôs os transreais, onde divisão por zero é permitida. Como acontece com uma teoria em seu estado inicial, os transreais passam por um momento de afirmação no meio acadêmico. Trazemos à luz esta discussão. Não há dúvidas de que foi proposto um conceito inovador na matemática. Todavia, apesar de, segundo Anderson, serem aplicados na computação, os transreais não despertaram ainda maiores interesses na comunidade matemática. Teriam eles uma estrutura frágil e inconsistente? Ou consistente, porém irrelevante? Reservam-nos um interessante resultado no futuro ou sua utilidade se restringe aos devaneios poéticos e filosóficos que proporcionam?

6.1 Interpretação contextual dos transreais

A interpretação das operações aritméticas mudam a cada vez que o conjunto numérico é estendido. Por exemplo, a multiplicação $5 \times 3 = 15$ pode ser interpretada por dizer que 15 é a quantidade de elementos de um conjunto oriundo da união disjunta de 5 conjuntos cada um contendo 3 elementos. Tal significado não pode ser dado à multiplicação $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Entretanto, podemos interpretar esta operação por dizer que $\sqrt{6}$ é o vetor obtido pela homotetia, neste caso ampliação, de fator $\sqrt{2}$ do vetor $\sqrt{3}$. Esta mesma interpretação cabe à multiplicação anterior, isto é, podemos dizer que 15 é o vetor obtido pela homotetia de fator 5 do vetor 3. Contudo esta explicação não pode ser dada à multiplicação $i \times 2i = -2$. Ainda assim, podemos dizer que -2 é o vetor, no plano bidimensional, obtido pela homotetia de fator $|i|$ e rotação pelo ângulo $\mathrm{Arg}(i)$ do vetor $2i$. E esta mesma interpretação cabe aos dois casos anteriores. Com estes exemplos, percebemos que a ampliação do significado de um objeto matemático não é uma novidade. E sobre as operações entre números transreais? Ora, números reais são interpretados como vetores na reta orientada. Podemos interpretar, também, cada número transreal como um vetor. O ∞ como um vetor orientado positivamente cujo "tamanho" (módulo) é maior que o tamanho de qualquer vetor real. Não necessariamente, ∞ tem um tamanho fixo. Podemos olhar para o tamanho deste vetor como sendo análogo à localização de um elétron em seu orbital. Isto é, a cada momento que ∞ é operado, ele possui algum tamanho, que certamente é maior que o tamanho de qualquer vetor real, mas não necessariamente é o mesmo tamanho de um instante anterior. Enfatizamos que não estamos interpretando o ∞ como diversos vetores, isto é, um vetor indeterminado. Ao invés disso, ∞ é um vetor determinado, único, porém com tamanho variável. Analogamente, interpretamos $-\infty$ como um vetor orientado negativamente cujo tamanho é maior que o tamanho de qualquer vetor real. Semelhantemente, o Φ pode ser entendido como um vetor cujo tamanho assume um valor a cada vez que é operado, mas diferente de ∞, o tamanho de Φ não tem a restrição de ser maior que qualquer número real. O número Φ é único, definido e determinado, porém seu tamanho, como vetor, é um a cada momento em que Φ opera. Além disso, entendemos que Φ não revela informação sobre seu tamanho. Isto é, a cada instante que Φ é operado ele possui um determinado tamanho que, entretanto, é desconhecido. Desta forma, se $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, então a adição $x + \infty$ pode ser interpretada como a translação de x por ∞. Assim, como $x \in \mathbb{R}$ tem tamanho finito, se $x \in \mathbb{R}$, então $x + \infty$ tem algum tamanho maior que qualquer número real donde $x + \infty = \infty$. A adição $\infty + (-\infty)$ pode ser interpretada como a translação de um vetor de orientação positiva de tamanho desconhecido maior que qualquer número real por um vetor de orientação negativa de tamanho desconhecido maior que qualquer número real (não necessariamente igual ao do vetor positivo). Assim $\infty + (-\infty)$ tem tamanho completamente desconhecido. Por isso $\infty + (-\infty) = \Phi$. A esta altura o leitor já pode deduzir a interpretação para $\infty + \Phi = \Phi$ e para as demais operações de adição e multiplicação. Nos números reais a divisão também não possui uma interpretação vetorial. A não ser a de que divisão é o inverso da multiplicação. Isto é, se $x, y \in \mathbb{R}$ e $y \neq 0$, então $x \div y = x \times y^{-1}$. Isto pode ser reescrito por $x \div y = \frac{x}{1} \div \frac{y}{1} = \frac{x}{1} \times \frac{1}{y}$. Isto é, "divisão por" é a "multiplicação pelo recíproco de". E o recíproco pode ser tomado em frações de numerador zero, entendendo recíproco como meramente a inversão de papéis de numerador e denominador. Assim, divisão por zero é, simplesmente, a multiplicação por $\frac{1}{0}$.

6.2 A proposta de divisão por zero não veio de dentro da matemática

É interessante notar que a ideia de divisão por zero surgiu de um não matemático. Anderson é cientista da computação e propôs os transreais a fim de evitar o travamento do computador. Podemos conjecturar dois motivos para o fato de a proposta de divisão por zero ter vindo não de dentro da matemática. O primeiro é que os matemáticos não viram na falta de divisão por zero um problema, pois nunca tiveram necessidade dela.

Na computação, a divisão por zero é um problema que se apresenta. Na matemática, o problema não se apresenta. A matemática já estabeleceu que a divisão por zero é não definida, é impossível. Por isso, todos os sistemas matemáticos já estão preparados para não operarem tal divisão. Quando aparece uma divisão por zero, o sistema diz: Isso não! A divisão por zero é um indício, nos modelos físicos que usam a matemática, de uma singularidade, de algo que relaciona uma quantidade infinita a uma quantidade nula. Essa relação entre o infinito e o nada não pode ser concretizada na natureza. A natureza não tem singularidade. Então a matemática tem um alerta contra singularidades. Que é a proibição à divisão por zero. Na computação, a divisão por zero é um problema. E como tal, os problemas exigem solução. E na matemática não é um problema. É um problema ocultado, por isso, não mais problema. É aquilo sobre o qual não se pode falar. É um tabu! "Colocamos uma pedra em cima disso e vida que segue!". A divisão por zero é um tabu. Que não pode, ou não quer ser resolvido. Os números transreais, que introduzem divisão por zero dentro do corpo teórico matemático, de alguma forma, trazem desconforto. Todo sistema que se estrutura necessita de uma proibição. Não apenas no âmbito científico acadêmico. Não precisa-se de muitas, com uma única proibição o sistema se estrutura. É preciso de uma lei, caso contrário o caos domina. E não é um caos determinista. É um caos grego, um caos inicial. Um caos sem solução. Um caos que não gera ordem. A proibição matemática é: não se pode dividir por zero. Claro que a matemática possui diversos postulados, mas a proibição à divisão por zero é a proibição padrão. Uma teoria que propõe uma divisão por zero desestabiliza o sistema. O zero é o conversador numérico do vazio. E isso é apavorante ao homem. O homem acha que qualquer descontinuidade é a morte que o vem buscar. Então, ele não gosta de nada que faça com que ele converse consigo mesmo. Que é uma conversa com sua própria morte. O homem não tolera vácuo. Não tolera vazio. Ao olharmos a história da ciência, o vácuo sempre foi proibido. E ainda o é com a matéria escura. Não suporta-se não haver nada. Não suporta-se o zero. O zero como símbolo da ausência é insuportável. E zero sobre zero é um duplo insuportável. Porque o que se vê é o zero barrado por ele mesmo. A divisão denotada pelo sobre. O sobre como uma barra, como um impedimento de existência. É o zero impedido por si!

Um segundo motivo para a divisão por zero não ter vindo de dentro da matemática é o próprio engessamento da prática. Em geral, um bom matemático conhece muito bem as regras do jogo que pratica. E, assim, está mergulhado nelas. O que o dificulta, ou até impede, de elucubrar sobre algo fora do comum. Pessoas não educadas na matemática podem falar absurdos quando falam matemática, entretanto, algumas vezes esses absurdos abrem espaço para se pensar algo fora do comum. E talvez o que era absurdo pode dar origem a um objeto matemático bem definido e estruturado. Em geral, um matemático não propõem algo fora do comum, pois está preso as regras já estabelecidas. Em alguns momentos, a academia se assemelha a uma linha de montagem ou a uma fabricação em série. O estudante entra e, no durante, não é estimulado a produzir, mas sim a reproduzir. O estudante sai da academia, não com o objetivo de criar matemática, mas sim fortalecer a manutenção do que já é. A educação, em alguns momentos, impõe um mundo menor do que ele pode ser. A academia é, de certa forma, paradoxal. A princípio, estamos aqui fazendo pesquisa, mas quando surge algo completamente novo, que parece não ter uma aplicação imediata, este algo é rechaçado. Só interessa, à academia, as inovações que se inserem no contexto antigo. O que não puder ser descrito e abarcado pelo antigo deve ser expulso. Porque quebra paradigmas.

6.3 O infinito

Uma das característica dos transreais é a adjunção do infinito ao corpo dos números reais. Obviamente, o infinito não é uma novidade na matemática. Entretanto, observamos uma clara diferença no tratamento que os transreais dão ao infinito comparado a tratamentos já existentes na matemática. A primeira abordagem sistemática do infinito se dá no âmbito conjuntista. Como exemplo paradigmático do infinito tratado como conjunto está a abordagem pioneira de Cantor. É interessante notar o que diz Tatiana Roque:

> Além de ser tida como o ápice da busca pelo rigor que marcou o século XIX, a teoria dos conjuntos é associada à admissão, no interior da matemática, de ideias complexas, como a de infinito, antes renegadas ou entregues a espe-

> culações filosóficas. Na última metade do século XIX, Cantor teria introduzido o infinito na matemática, um dos ingredientes principais para o florescimento espetacular da matemática moderna. Na narrativa tradicional, a repulsa ao infinito, o *horror infiniti*, teria reinado entre os matemáticos desde os gregos, impedindo os avanços dessa ciência, até que Cantor venceu todas as barreiras e logrou fazer com que o infinito fosse, finalmente, aceito.
>
> (ROQUE, 2012)

Em grandes linhas, podemos afirmar que Cantor introduziu o que hoje é chamada de "teoria ingênua de conjuntos" a partir da necessidade de entender as propriedades estruturais do contínuo numérico - o pano de fundo das construções conjuntísticas de Cantor é a tentativa de analisar quais eram as propriedades estruturais do conjunto dos números reais. Na pesquisa de Cantor, a noção de infinito é um objeto essencial da teoria conjuntística - definir de forma satisfatória a noção de infinito, a partir da noção de conjunto, é uma das tarefas a que se propõe Cantor. O infinito, ou melhor dizendo, os infinitos de Cantor surgem como cardinalidade de conjuntos, não como extensões de números reais. Isto é, diferentemente dos infinitos transreais, não como números que podem operar aritmeticamente com qualquer número real.

Um entendimento, intimamente ligado aos infinitos cantorianos, é o de infinito potencial. Isto é, de infinito como algo que pode ser indefinidamente aumentado ou estendido. Por exemplo, a sucessão de números naturais $1, 2, 3, \ldots$ é infinita pois pode-se tomar, indefinidamente, um elemento após o último tomado. Relacionado ao infinito potencial está o conceito de limite divergente ao infinito. Quando, na análise matemática, diz-se que $\lim f(x) = \infty$, significa-se que a função f assume valores tão grandes quanto se queira. Isto é, pode-se aumentar, indefinidamente, os valores de $f(x)$. Comentário análogo pode ser feito para $\lim f(x) = -\infty$. Estes dois símbolos, $-\infty$ e ∞, são adjuntados aos números reais formando os reais estendidos. Onde permite-se a extensão contínua de funções que divergem a um dos infinitos. Entretanto esta adjunção se dá no âmbito topológico, não no aritmético. Nos reais estendidos, os símbolos $-\infty$ e ∞ (chamados símbolos pois nem os que com eles trabalham os consideram números), diferentemente de nos transreais, não operam aritmeticamente com os números reais e não são gerados por divisão por zero. Alguns livros de medida e integração definem nos reais estendidos o que é conveniente. Definem a relação de ordem, definem soma de infinito com infinito, multiplicação de infinito com infinito, mas não definem, por exemplo, infinito menos infinito, zero dividido por zero ou infinito dividido por zero. A maioria destes exemplos são indeterminações clássicas. Surge o infinito e define-se as operações aritméticas que não geram problema, isto é, aquelas que não falham as regras aritméticas usuais, como por exemplo, comutatividade, associatividade e distributividade. As operações aritméticas que gerariam falhas nas regras usuais não são definidas.

Os hiperreais, que começaram com os infinitesimais de Leibniz, e depois foram estabelecidos por Robinson, de certa forma, também tratam de números infinitos. Os hiperreais possuem números infinitamente pequenos e infinitamente grandes, mas não o infinito absoluto, o maior número. Ou o infinito vindo da divisão por zero. Os hiperreais possuem números estritamente positivos e, ao mesmo tempo, menores que qualquer número real. Por esta propriedade, estes números são chamados de infinitesimais ou infinitamente pequenos. Os inversos multiplicativos destes números são maiores que qualquer número real, por isso, são chamados de infinitos ou de infinitamente grandes. Apesar de, nos hiperreais, estes números possuírem algum sentido de infinito, eles não são, diferentemente de nos transreais, oriundos do processo de divisão por zero.

Pensando como matemático, o infinito como número é um horror. O infinito é a ponte que liga os números à filosofia, à humanidade. O infinito é do homem e não do sistema numérico. No momento em que o infinito é introduzido ao sistema numérico, surgem dois horrores possíveis. Ou o homem é número ou o número é humanizado. E essas duas coisas são horríveis porque são completamente fora de nossa zona de conforto. Nós os humanos, sentimos, gostamos de poesia e fazemos matemática. E os números que não são nada, não são entes, não podem ser infinitos porque de alguma maneira ao número não é permitida a transcendência, a religiosidade que o infinito clama. O infinito tem sempre um deus por detrás. É deus que é infinito. Por isso que é um horror matemático. No fundo, o horror da ciência é perceber que as religiões e a ciência estão muito mais interligadas do que se percebe, do que se quer. Que arte, religião, filosofia e ciência é uma única coisa. Esse é um grande horror. Um número infinito leva a isso. Este horror é inerente ao ser humano. Isto é a incompletude humana, talvez. É o que leva à intolerância com certos tabus. O infinito como número é um tabu difícil de ser vencido. O entendimento de infinito como número agrega complexidade ao sistema, refaz o conceito, tanto de número, quanto de homem. Toda criança sabe que um positivo dividido por zero dá infinito e um negativo dividido por zero dá menos infinito. Porque o zero, quando no denominador, é amigo do numerador. Dificilmente pensa-se que pode ser um zero negativado. Um zero que tenha uma memória negativa. Ganha-se o pensamento de que o zero pode ser negativado ou positivado depois que estuda-se limites. O zero é neutro e ele segue a positividade ou a negatividade do numerador. Dividir por meio dá o dobro que dividir por um. Dividir por um quarto dá o dobro que dividir por meio e assim sucessivamente. Logo, é claro que dividir por zero dá infinito. Isso toda criança sabe, depois é que desaprende. Depois é que se proibi. E proibi-se, pois considera-se que o zero pode ser negativado ou positivado. Logo a divisão de um por zero poderia dar menos infinito, caso o zero fosse negativado, ou poderia dar mais infinito, caso o zero fosse positivado. Como algo poderia dar dois resultados tão distantes? Na verdade, mais e menos infinito são nomes da mesma coisa. O ser é múltiplo. É um ser divinizado. Feminino e masculino, positivo e negativo simultaneamente. Esse é o infinito.

Divisão por zero

Zero.

Que número é este que está aí, mas representa nada?

Representa nada? Então por que aí está?

Zero representa nenhuma quantidade. E se não há, então é não-ser.

Mas o não-ser não pode ser. Portanto o zero não é, garante Parmênides.

Mas, se tudo que existe é ser e, portanto, o não-ser não é, como o que existe veio a ser?

Como o primeiro ser se tornou?

Será que algo que não existe trouxe outralgo a existência?

Será que o não-ser de alguma forma é?

Será que existe alguma forma de ser diferente do ser?

Será que o não-ser é, mas apenas não se manifestou?

Não ser e não não-ser. Eis a questão!

Moisés testemunha, Javé disse "Eu sou o EU SOU".

O EU SOU se mostrou. O não-ser agora ser é.

O não-ser, agora ser, EU SOU disse "Haja luz!". E tudo houve!

Houve do não-ser. Do nada, tudo se tornou ser. Do nada, tudo. Nada gerou tudo.

Isto está muito complicado!

Recorramos a matemática! Quem mais poderia descomplicar e dar ao louco alguma sanidade?

Nada gerou tudo. Zero gerou infinito. 0 gerou ∞.

Mas eu não sei entender! Eu só sei matematicar. Preciso trocar o "gerar" por um cidadão matemático.

Que objeto matemático transforma 0 em ∞?

...

O recíproco! A divisão!

$0^{-1} = \frac{1}{0} = \infty$.

Entendi! O tudo surgiu de uma divisão por zero!

Correção. Matematiquei! O tudo surgiu de uma divisão por zero!

O zero continha tudo e o compartilhou conosco, meros mortais.

6.4 O *nullity*

Topologicamente falando, o *nullity* é um ponto isolado. O *nullity* é como algo que explodiu, porque não cabia mais. É como fazer um pirão. Mexe-se, mexe-se e, de repente, ele começa a espocar. Se continua-se mexendo, vão aparecendo bolhas e elas podem espocar e fazer aparecer um ponto de pirão no teto. Aquele ponto do teto é pirão e não é pirão. É pirão porque veio do pirão e não é pirão porque está fora. Ele é fruto de uma emergência ortogonalizante. É como rodar-se numa espiral e entender o mundo numa vertical que não faz parte do plano da espiral. O *nullity* está fora por emergência. Ele surge por emergência. O *nullity* é algo que aparentemente deu errado no preparo do pirão, mas que era inevitável. Na verdade, ele deu certo! O *nullity* nasce na inexorabilidade do pirão. A inexorabilidade do pirão gera o *nullity*. É como quando se está trabalhando num lugar de conforto e o inesperado aparece inesperadamente. O inesperado não é a morte que contamos com ela desde que nascemos. O inesperado é aquilo que nem a morte consegue ser. É o *nullity*.

Pela matemática não ser da natureza, por ela ser da mente humana, ela tem uma semelhança muito grande com as artes. Assim como o principal nas artes é a conversa com o que transcende, a matemática precisa seguir este mesmo caminho. Com os transreais, na verdade antes, desde os hiperreais de Robinson, desde Cantor, desde o entendimento dos reais como *continuum* esta conversa vem se aprimorando. Se transcendentalizando. Quando percebe-se a possibilidade de ser diferente do que é, já se está radicalmente diferente do que era. Este é o trabalho do artista. Quando o artista intui a sua obra. A obra já está em construção. Existe uma distância infinita entre a zona de conforto em que estamos e as possibilidades que ainda não sabemos, mas quando suspeitamos de uma destas possibilidades, já percorremos esta distancia infinita e o resto é finito novamente até a construção do mundo com estas novas possibilidades. A matemática é poesia desencarnada. Se desencarnarmos um poema, o que surge é uma matemática. Então a matemática é um esqueleto de poesia. E o *nullity* é a descoberta de um ser novo. De um ser novo potencialmente poético. Há de criar-se uma nova palavra: *nullity*. Que entrará em um poema e depois noutro. E de repente ela é uma palavra poética que está habitando os poemas do mundo. E as mutações desta palavra: os hipernullitys, os quase-nullitys, os nullitys do bem, os nullitys do mal, as guerras de *nullity*, amores de *nullity*, paixões de *nullity*.

Nullity

O que é o *nullity*?

Nullity é zero dividido por zero.

Mas o que é zero dividido por zero?

Zero sobre zero é *nullity* e *nullity* é zero sobre zero.

Mas zero sobre zero é indeterminado. Até os matemáticos sabem disso!

Então o *nullity* é indeterminado?

Não. O *nullity* é um número. Número transreal. Tão real quanto um real.

Mas *nullity* é igual a zero sobre zero e zero sobre zero é indeterminado.

Então *nullity* não é indeterminado porque é um número, mas é um número que traduz o indeterminado.

Um número que traduz o indeterminado? Não sabia que podia haver um número que o indeterminado traduz.

Nullity, um indeterminado bem definido.

Nullity é um número absorvente. Mais, menos, vezes, dividido por *nullity* tudo dá *nullity*!

Nullity absorve todo número que opera com ele. Seria o *nullity* um buraco negro dos números?

Que audácia minha!

É *nullity* a distância entre dois mundos superpostos?

É *nullity* o hyle de Aristóteles ou o ápeiron de Anaximandro?

É *nullity* a medida da complexidade mútua entre dois objetos gerados por milagres?

Ah, *nullity*. A que tu vistes? Por que desperta-me de meu conforto?

Nullity.

Zero sobre zero. Aquele que não pode ser dito.

Aquele que traz pra si todos os outros. Você é um zero?

Você é antagônico ao zero?

Vocês brigam?

São amigos?

Zero tudo gera e *nullity* tudo encerra?

Zero é o Big Bang e *nullity* é o Big Crunch?

Nullity, o que tu trazes a nós? Guardas algo?

Por que estás aí isolado?

És um sol que ilumina a estrada real?

Não há um caminho para achegar-se a ti?

Por que não te ordenas entre nós?

És superior? Por que não se dás a comparar?

Nota: As ideias de *nullity* como a distância entre dois mundos superpostos, o hyle de Aristóteles ou o ápeiron de Anaximandro e medida da complexidade mútua entre dois objetos gerados por milagres foram inspiradas em trabalhos ainda não publicados de GOMIDE, W.

Referências

ANDERSON, J. A. D. W. Representing geometrical knowledge. *Philosophical Transactions of the Royal Society* B, v. 352, p. 1129–1140, 1997.

ANDERSON, J. A. D. W. Exact numerical computation of the rational general linear transformations. *Vision Geometry XI Proceedings of the SPIE*, v. 4794, p. 22–28, 2002.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspex machine II: Visualisation. *Vision Geometry XIII Proceedings of the SPIE*, v. 5675, p. 100–111, 2005.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspex machine VII: The universal perspex machine. *Vision Geometry XIV Proceedings of the SPIE*, v. 6066, p. 1–17, 2006.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspex machine IX: Transreal analysis. *Vision Geometry XV Proceedings of the SPIE*, v. 6499, p. 1–12, 2007.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspex machine XI: Topology of the transreal numbers. In: INTERNATIONAL MULTICONFERENCE OF ENGINEERS AND COMPUTER SCIENTISTS, 2008. Hong Kong. Anais... International Association of Engineers, 2008. p. 330–338.

ANDERSON, J. A. D. W. Perspex Machine XII: Transfloating-point e transcomplex arithmetic with applications in mathematical physics, 2010. Disponível em: <http://www.bookofparagon.com/Mathematics/PerspexMachineXII_web.pdf> Acesso em: 16 de dez. 2014.

ANDERSON, J. A. D. W. Trans-floating-point arithmetic removes nine quadrillion redundancies from 64-bit IEEE 754 floating-point arithmetic. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014, p. 80–85.

ANDERSON, J. A. D. W.; GOMIDE, W. Transreal arithmetic as a consistent basis for paraconsistent logics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais... International Association of Engineersp, 2014, p. 103–108.

ANDERSON, J. A. D. W.; REIS, T. S. dos. Transreal limits expose category errors in IEEE 754 floating-point arithmetic e in mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014. p. 86–91.

ANDERSON, J. A. D. W.; VÖLKER, N.; ADAMS A. A. Perspex Machine VIII: Axioms of transreal arithmetic. *Vision Geometry XV Proceedings of the SPIE*, v. 6499, p. 649903.1–649903.12, 2007.

BARTLE, R. G. A Modern Theory of Integration. Graduate Studies in Mathematics. v. 32. Providence: American Mathematical Society, 2001.

BIRKHOFF, G. D. Démonstration d'un théorème élémentaire sur les functions entières. *Comptes Rendus de l'Académie des sciences Paris*, v. 189, p. 473-475, 1929.

BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Edigard Blücher, 1974.

CARAÇA, B. J. Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: Sá Da Costa, 1989.

CARVALHO, T. F. de; D'OTTAVIANO, I. M. L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, v.8, n.1, São Paulo, PUC-SP, 2006.

DAUBEN, J. W. Abraham Robinson e Nonstandard Analysis: History, Philosophy, e Foundations of Mathematics. In: William Aspray e Philip Kitcher, eds. History e philosophy of modern mathematics (Minneapolis, MN, 1985), Minnesota Studies in History e Philosophy of Science, XI, University Minnesota Press, Minneapolis, MN, 1988, p. 177–200.

DECKERT M. Quine, Strawson and Logical Truth. *Philosophical Studies*, v. 24, p. 52–56, 1973.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. 5. ed. Campinas: UNICAMP, 2011.

FLOYD, Juliet. Wittgenstein on Philosophy of Logic e Mathematics. In Stewart Shapiro, editor, Oxford Handbook of Philosophy of Logic e Mathematics, capítulo 4, páginas 75–128. Oxford University Press, 2005.

GOMIDE, W; REIS, T. S. dos. Números Transreais: Sobre a Noção de Distância. *Synesis*, v. 5, n. 2, p. 197–210, 2013.

GOMIDE, W; REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Logical Space of All Propositions. Transactions on Engineering Technologies – World Congress on Engineering and Computer Science 2014, Springer. No prelo.

GROSSE-ERDMANN, K.-G; PERIS, A. Linear Chaos. London: Springer, 2011.

HALMOS P. R. Teoria Ingênua dos Conjuntos. São Paulo: USP, 1973.

IEEE Computer Society. IEEE Standard 754 for Binary Floating-Point Arithmetic, 1985.

JANSEN, T. M. V. Frege, contextuality e composionality. *Journal of Logic, language, e Information*, v. 10, 2001.

KRIPKE, S. Semantical considerations on modal logic. *Acta Philosophica Fennica*, v. 16, p. 83–94, 1963.

LEIBNIZ, G. Monadology. In: R. Franks and R. S. Woolhouse. Leibniz Philosophical Texts. Oxford Philosophical Texts, 1998.

MACLANE, G. R. Sequences of derivatives e normal families. *Journal d'Analyse Mathéma tique*, v.2, p. 72–87, 1952/53.

MEDIDA e integração/A reta real estendida. In: Wikilivros, Livros abertos por um mundo aberto. Disponível em:<http://pt.wikibooks.org/w/index.php?title=Medida_e_in tegra%C3%A7%C3%A3o&oldid=248110> Acesso em: 09/12/2014.

MUNKRES, J. R. Topology. Prentice Hall, 2000.

NG, T. B. Mathematical analysis - an introduction. National University of Singapore, Department of Mathematics, 2012. Disponível em:<http://tinyurl.com/prunxnc> Acesso em: 01/01/2013.

PENNA, M; PATTERSON, R. Projective Geometry e Its Applications To Computer Graphics. Prentice Hall, 1986.

PETERSEN, P. Linear Algebra. Springer, 2012.

PRIEST, G. Logic of paradox. *Jounal of Philosophical Logic*, v. 8, n. 1, p. 219–241, 1979.

PRIEST, G. In Contradiction. A Study of the Transconsistent. Clarendon Press, 2006.

REIS, T. S. dos. Números transreais: matemática ou devaneio? In: 14º SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA, 2014. Belo Horizonte. Anais... Sociedade Brasileira de História da Ciência, 2014.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transdifferential e transintegral calculus. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014a. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014. p. 92–96.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Construction of the transcomplex numbers from the complex numbers. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND APPLICATIONS, 2014b. San Francisco. Anais... International Association of Engineers, 2014 p. 97–102.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Calculus. IAENG International Journal of Applied Mathematics, v. 45, n. 1, p. 51–63, 2015.

REIS, T. S. dos; ANDERSON, J. A. D. W. Transreal Limits and Elementary Functions. Transactions on Engineering Technologies – World Congress on Engineering and Computer Science 2014, Springer. No prelo.

REIS, T. S. dos; GOMIDE, W. Construction of the transreal numbers. Disponível em: <http://figshare.com/articles/Construction_of_the_transreal_number/1025732> Acesso em: 28 de jul. 2014.

REIS, T. S. dos; GOMIDE, W; KUBRUSLY, R. Números transreais: mais uma etapa na história dos números. In: SCIENTIARUM HISTORIA: VI CONGRESSO DE HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS DA TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA, 2013. Rio de Janeiro. Anais... Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.

ROLEWICZ, S. On orbits of elementos. *Studia Mathematica*, v. 32, p. 17–22, 1969.

ROQUE, T. História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUDIN, W. Principles of Mathematical Analysis. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1976.

RUDIN, W. Real e Complex Analysis. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1987.

RUDIN, W. Functional Analysis. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1991.

STEIN, E. M; SHAKARCHI, R. Real Analysis. Princeton University Press, 2005.

TAO, T. An Introduction to Measure Theory. Graduate Studies in Mathematics. v. 126. Providence: American Mathematical Society, 2011.

ZADEH, L. A. Fuzzy logic e approximate reasoning. *Synthese*, v. 30, p. 407–428, 1975.