



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO - UFRJ**

**MARIA DE LOURDES ROCHA DE ASSIS JEANRENAUD**

**DAVID HILBERT E OS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA:  
O SUCESSO DE UM FRACASSO**

**RIO DE JANEIRO**

**2018**

**MARIA DE LOURDES ROCHA DE ASSIS JEANRENAUD**

**DAVID HILBERT E OS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA:  
O SUCESSO DE UM FRACASSO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

**Orientador:** Professor Dr. Ricardo Silva Kubrusly

Rio de Janeiro

2018

## CIP - Catalogação na Publicação

J43d      Jeanrenaud, Maria de Lourdes Rocha de Assis  
David Hilbert e os Fundamentos da Matemática: O  
Sucesso de um Fracasso / Maria de Lourdes Rocha de  
Assis Jeanrenaud. -- Rio de Janeiro, 2018.  
261 f.

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly.  
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio  
de Janeiro, Decania do Centro de Ciências  
Matemáticas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação  
em História das Ciências e das Técnicas e  
Epistemologia, 2018.

1. Fundamentos da matemática. 2. David Hilbert.  
3. Programa de Hilbert. 4. Consistência da  
aritmética. I. Kubrusly, Ricardo Silva, orient. II.  
Título.

MARIA DE LOURDES ROCHA DE ASSIS JEANRENAUD

**DAVID HILBERT E OS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA: O SUCESSO  
DE UM FRACASSO**

Tese submetida ao corpo docente do Programa de História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE), da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia.

Aprovada em: 22 de maio de 2018



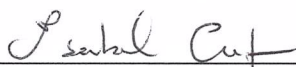
---

Prof. Dr. Ricardo Silva Kubrusly  
Universidade Federal do Rio de Janeiro



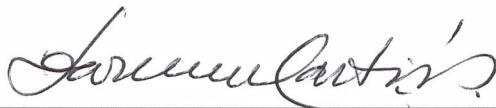
---

Prof. Dr. Carlos Antonio de Moura  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro



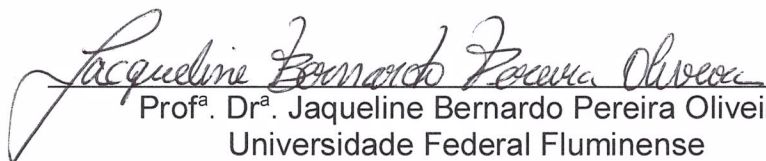
---

Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Isabel Leite Cafezeiro  
Universidade Federal Fluminense



---

Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins  
Colégio Pedro II



---

Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Jaqueline Bernardo Pereira Oliveira  
Universidade Federal Fluminense

## **DEDICATÓRIA**

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ricardo Kubrusly, pelo incentivo, compreensão, generosidade e paciência.

Ao meu único filho, Eric Alain, pelo incentivo, parceria e tatuagem!

## AGRADECIMENTOS

Ao SENHOR de todos os tempos, de todas as crenças e de todos os caminhos. Obrigada por me ouvir em desespero quando as dificuldades se tornavam imensas e prosseguir parecia uma utopia. Obrigada.

Ao HCTE, por me ter recebido tão bem, seus professores, seus alunos, pelo universo descortinado a cada dia, pelo privilégio de lá ter estudado. Obrigada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ricardo Silva Kubrusly por me ter lembrado da matemática dos meus 25 anos, dos sonhos, das divagações sobre a certeza e a verdade, enfim, dessa brisa que me toca a alma quando leio um texto da área e me vejo com um sorriso de adolescente repensando em tudo; por suas doces e loucas aulas nos levando para caminhos nunca dantes trilhados. Obrigada pela paciência, incentivo e fé. Sem ele e sua gentileza nada teria sido possível. Que possa me perdoar pelas ausências e whatsapps não respondidos. Obrigada.

*Nunca será um verdadeiro matemático aquele que não for um pouco de poeta.*

Karl Weierstrass

Ao Prof. Dr. Daniel Felipe Neves Martins pelo germe inicial que deu origem à escolha do tema; pelas sugestões e incentivo e pelas conversas noturnas que me levaram além, até a cidade de Hilbert, Göttingen, em sua companhia. Obrigada.

Ao Colégio Pedro II, personificado por seus dirigentes, Prof. Oscar Halac e Prof<sup>a</sup>. Eliana Myra de Moraes Soares, pelas dispensas necessárias para concluir o trabalho, coisa de quem não tem tempo, e o suporte financeiro obtido para minha ida a Göttingen. Obrigada.

Aos meus professores, mestres de todas as áreas, de todas as escolas; em particular, Eric Jeanrenaud, Myriam Sertã (pra sempre meu maior exemplo) e Maria Luíza Correa. Obrigada.

Aos meus amigos, os presentes e os ausentes, todos unânimamente importantes, parte de minha história. Obrigada

Aos meus familiares pelo incentivo e compreensão, por conta de minhas ausências durante a elaboração da tese. Obrigada.

O que somos?  
Senão  
A sobra do passado  
E a sombra do futuro  
No palco do presente  
Na ópera do absurdo...

Davi Roballo



La mémoire, c'est qu'du vent qui secoue les feuilles de nos palmiers du temps.

Francis Lai & Michel legrand – “Toute une vie”

## RESUMO

JEANRENAUD, Maria de Lourdes Rocha de Assis. **David Hilbert e os fundamentos da matemática: o sucesso de um fracasso**. Rio de Janeiro, 2018. 261 fls. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) - Programa de Pós-Graduação História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

O presente texto conta a história significativa do desenvolvimento das questões voltadas para os fundamentos da matemática na perspectiva de David Hilbert durante os primeiros quarenta anos do séc. XX, investigando suas motivações, o método que emprega e o alcance de suas teorias. Tem como objetivos principais, além dos históricos, a defesa do plano hilbertiano como propulsor de novas teorias, com destaque para a visão positiva de muitas realizações, na intenção de desmistificar parcialmente o desalento pós-Gödel. A narrativa é conduzida em sete capítulos que apresentam uma descrição da vida acadêmica, pesquisas desenvolvidas, cursos ministrados e conferências proferidas por Hilbert até a apresentação oficial em 1927 do programa formalista. No contexto do tema, são abordadas as principais mudanças e questionamentos acerca dos fundamentos da matemática, e que culminaram no que é denominado pela literatura associada, a “crise dos fundamentos”. Constam ainda condensados sobre as contribuições e reformulações do programa, como os resultados de Gödel e Gentzen, a abordagem instrumentalista e os programas relativizados. O último texto oficial de Hilbert sobre os fundamentos da matemática, elaborado em parceria com Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, é comentado em seus aspectos fundacionais e sob o ponto de vista da versão francesa da obra. Ao término do texto é destacada a herança do projeto de Hilbert, que embora não tenha sido plenamente realizado, propiciou uma extensa lista de subprodutos como a teoria da prova, a teoria da computabilidade e os sistemas de axiomas.

**Palavras-Chave:** Fundamentos da matemática; David Hilbert; Programa de Hilbert;

Consistência da aritmética.



## ABSTRACT

JEANRENAUD, Maria de Lourdes Rocha de Assis. **David Hilbert e os fundamentos da matemática: o sucesso de um fracasso**. Rio de Janeiro, 2018. 261 fls. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) -Programa de Pós-Graduação História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

The present text tells about the significant history of the development of the questions concerning to the foundations of mathematics in the perspective of David Hilbert during the first forty years of the century. XX, investigating their motivations, the method they employ and the scope of their theories. It has as the main objectives, besides the historical ones, the defense of the Hilbert plan as propeller of new theories, with emphasis on the positive vision of many accomplishments, in order to partially demystify the post-Gödel discouragement. The narrative is conducted in seven chapters that present a description of the academic life, developed researches, courses and lectures given by Hilbert until the official presentation in 1927 of the formalist program. In the context of the theme, the main changes and questions about the foundations of mathematics are discussed ending in what is called in the associated literature the "crisis of foundations". The contributions and reformulations of the program, such as the results of Gödel and Gentzen, the instrumentalist approach and the relativized programs, are also summarized. Hilbert's last official text on the foundations of mathematics, developed with Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, is commented in its foundational aspects and from the point of view of the French version of the work. At the end of the text, Hilbert's project inheritance is highlighted, although it has not been fully applied, it provided an extensive list of associated products such as proof theory, computability theory and axiom systems.

**Keywords:** Foundations of mathematics; David Hilbert; Hilbert's Program;  
Consistency of arithmetic.

## LEITMOTIV

**Leitmotiv** (do alemão, *motivo condutor*), em música, é uma técnica de composição introduzida por Richard Wagner em suas óperas, que consiste no uso de um ou mais temas que se repetem sempre que se encena uma passagem da ópera relacionada a uma personagem ou a um assunto. No nosso caso, os temas são visuais e representados por máscaras venezianas, cuja presença é comum em óperas de origem italiana.

As fantasias e as famosas máscaras venezianas inspiram-se na elegância e bom gosto dos trajes dos séculos XVII e XVIII, quando a nobreza disfarçada se misturava ao povo, no meio de saltimbancos, animais amestrados, músicos, marionetes e atores ou as personagens da *Commedia Dell'Arte*. [...] Conhecida também como Comédia de Máscaras, a *Commedia Dell'Arte*, era composta por espetáculos teatrais em prosa, muito populares na Itália e em toda a Europa na segunda metade do século XVI até meados do século XVIII. O espetáculo era baseado no improviso dos atores, que seguiam apenas um esquema elaborado pelo autor para cada cena cômica, trágica ou tragicômica. [...] Grandes atores criavam as ações e os diálogos diante do público. Entre nós tornaram-se famosas as figuras do Arlequim, do Pierrot e da Colombina, mas outras também ganharam fama como a do doutor, do capitão Spaventa, de Pulcinella, Pantalone, entre outros, com seus tipos físicos regionais, com seus dialetos e temperamentos especiais, vestimentas e máscaras características.

Fonte: <http://bragaspelomundo.blogspot.com.br/2012/01/carnaval-de-veneza.html>. Acesso em 12/2/18

## COMPOSIÇÕES

**Abertura**



**Atos**



**Recitativos**



**Árias**



**Coros e Seções Instrumentais**



**Interlúdios e Intervalos**



**Gran Finale**



**Tenor Principal**



**2º Tenor**



**OUTROS ELEMENTOS**

**Sumário  
(Programa)**



**Figuras  
(Figurinos)**



**Bibliografia  
(Patrocinadores)**



**Apêndices  
(Cenários; Elenco )**



**Anexos  
(Bastidores)**



## LISTA DE FIGURAS (FIGURINOS)



<b>FIGURA 1</b> – DAVID HILBERT STRASSE NA CIDADE DE GÖTTINGEN - ALEMANHA.	26
<b>FIGURA 2</b> – CAPA ORIGINAL E 1ª FOLHA DO CAPÍTULO I <i>Grundlagen der Geometrie - 1899</i>	48
<b>FIGURA 3</b> – CAPA ORIGINAL – <i>Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen - 1912</i>	55
<b>FIGURA 4</b> – CAPA ORIGINAL – <i>Die Grundlagen der Physik - 1915</i>	59
<b>FIGURA 5</b> – CAPA ORIGINAL – <i>Methoden der mathematischen Physik - 1924</i>	60
<b>FIGURA 6</b> – O FINITO E O INFINITO. <i>Was sind und was sollen die Zahlen</i> 1888 – p. 13	81
<b>FIGURA 7</b> – CARTAZ DO VIII <i>Ordentliche Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft – 1917 - ZURIQUE</i>	124
<b>FIGURA 8</b> – CAPA FRONTAL - <i>Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Offprint de Monatshefte für Mathematik und Physik, XXXVIII, Band I, no. 38</i>	158
<b>FIGURA B1</b> – CAPAS EXTERNAS - <i>Les Fondéments des Mathématiques – I</i>	209
<b>FIGURA B2</b> – CAPAS EXTERNAS - <i>Les Fondéments des Mathématiques – II</i>	211

## LISTA DE APÊNDICES



**APÊNDICE A – CRONOLOGIA**

204



**APÊNDICE B – FONDÉMENTS DES MATHÉMATIQUES I E II –  
SUMÁRIOS PARCIAIS**




209



**APÊNDICE C – PESQUISADORES REFERENCIADOS**

213

## LISTA DE ANEXOS

	<b>ANEXO A</b> - PENSAMENTO AXIOMÁTICO – 1917 - ZURIQUE <i>(Axiomatisches Denken)</i>	214
	<b>ANEXO B</b> – SOBRE O INFINITO – 1925 - MÜNSTER <i>(Über das Unendliche)</i>	228
	<b>ANEXO C</b> – OS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA – 1928 - BOLONHA <i>(Die Grundlagen der Mathematik)</i>	247

## SUMÁRIO (PROGRAMA)



<b>1 INTRODUÇÃO (ABERTURA)</b> .....	17
<b>2 OS CAMINHOS DE HILBERT (ATO Nº 1)</b> .....	26
<b>2.1 IDAS E VINDAS</b> .....	26
Teoria dos Invariantes .....	30
Teoria dos Números .....	35
Geometria .....	40
Problemas Matemáticos – 1900 .....	48
Análise – Equações Integrais .....	52
Física .....	56
Lógica e Fundamentos .....	61
<b>2.2 MARCOS IMPORTANTES</b> .....	64
<b>3 A SAGA DOS FUNDAMENTOS – ACHADOS &amp; PERDIDOS (ATO Nº 2)</b> .....	68
<b>3.1 O GRANDE E INTRINCADO PALCO FUNDACIONAL</b> .....	70
Geometrias não euclidianas .....	71
Fundamentação da análise .....	73
Teoria dos conjuntos .....	82
<b>3.2 OS NÚMEROS DE HILBERT</b> .....	92
<b>3.3 A SUPOSTA CRISE DOS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA</b> .....	95
<b>3.4 PARADOXOS – A SEGURANÇA EM JOGO</b> .....	98
<b>4 O PROGRAMA DE HILBERT (ATO Nº 3)</b> .....	109
<b>4.1 BASTIDORES</b> .....	110
1905 – <i>Logische Prinzipien des mathematisches Denken</i> .....	111
(Princípios Lógicos do Pensamento Matemático)	
1910 – <i>Elemente und Prinzipinfragen der Mathematik</i> .....	121
(Elementos e Questionamentos sobre os Princípios da Matemática)	

1917 – <i>Mengenlehre</i> (Conjuntos) .....	122
1917 – <i>Axiomatisches Denken</i> (Pensamento Axiomático) .....	124
1917/1917 – <i>Prinzipien der Mathematik</i> (Princípios da Matemática) .....	128
<b>4.2 PROGRAMA EM MARCHA</b> .....	132
1921/1922 – <i>Grundlagen der Mathematik</i> .....	133
1925 – <i>Über das Unendliche</i> – (Sobre o Infinito) .....	136
1927 – <i>Die Grundlagen der Mathematik</i> (Os Fundamentos da Matemática) .....	147
<b>4.3 PLANOS INFALÍVEIS NUNCA SÃO INFALIVEIS OU</b> .....	154
<b>ENTRA EM CENA UM NOVO TENOR</b>	
Os Teoremas de Incompletude .....	155
<b>5 CONTRIBUIÇÕES E TENTATIVAS DE SUPERAÇÃO (ATO Nº 4)</b> .....	164
Instrumentalismo .....	167
Programas de Hilbert relativizados .....	170
Matemática Reversa .....	172
<b>6 UM OLHAR SOBRE O <i>Grundlagen der Mathematik</i> (ATO Nº 5)</b> .....	174
Volume I .....	175
Volume II .....	178
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS (GRAN FINALE)</b> .....	183
<b>A HISTÓRIA DOS FUNDAMENTOS E SEU COMPONENTE TRÁGICO</b> .....	189
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS (PATROCINADORES)</b> .....	191
<b>APÊNDICES (CENÁRIOS; ELENCO)</b> .....	204
<b>ANEXOS (BASTIDORES)</b> .....	214



## 1 INTRODUÇÃO



ABERTURA

Não existe provavelmente alguém que tenha exercido uma influência tão grande no desenvolvimento da matemática do século XX como David Hilbert. Sua criatividade e amplo interesse nas ciências lhe concederam status permanente na galeria de grandes nomes como Euler, Gauss e Poincaré.

Seus caminhos, personalidade científica e atuação nas Universidades de Königsberg e Göttingen foram responsáveis por muito da matemática estudada e desvendada na primeira metade do século passado.

Prova disso é que Hilbert foi o criador de uma verdadeira “escola” de seguidores, o que deu origem a uma grande diversidade de áreas de estudo, temas e trabalhos publicados por seus orientandos de doutorado como Otto Blumenthal (1898), Edward Kasner (1899), Georg Hamel (1901), Oliver Kellog (1902), Erhart Schmidt (1905), Hermann Weyl (1908), Alfred Haar (1909), Richard Courant (1910), Wilhelm Ackerman (1925) e Otto Neugebauer (1926), para mencionar apenas alguns dos 69 computados em Reid (1996, p. 205). De acordo com um deles, um de seus grandes colaboradores:

[...] I seem to hear in them from afar the sweet flute of the Pied Piper that Hilbert was, seducing so many rats to follow him into the deep river of mathematics. [...] In the fullness of my innocence and ignorance, I made bold to take the course Hilbert had announced [...] Most of it went straight over my head. But the doors of a new world swung open for me, and I had not sat long at Hilbert's feet before the resolution formed itself in my young heart that I must by all means read and study whatever this man had written.<sup>1</sup>

Certamente tal fascinação teria a ver com a enorme amplitude de interesses científicos de Hilbert, um dos últimos a percorrer praticamente todo o edifício matemático de seu tempo e, para o qual a investigação científica se fundamentava na resolução de problemas. Sua confiabilidade nos processos mentais de dedução do raciocínio matemático permitia ter como

---

<sup>1</sup> WEYL, 1944, p.614.

[...]. Eu parecia ouvir nisto de longe a flauta doce de Hamelin que era Hilbert, seduzindo tantos ratos para segui-lo no profundo rio da matemática. [...] Na plenitude da minha inocência e ignorância, atrevi-me a querer seguir o curso que Hilbert havia anunciado [...] A maior parte disso bateu direto na minha cabeça. Mas as portas de um novo mundo abriram-se para mim, e eu não havia ficado muito tempo aos pés de Hilbert antes que a resolução se formasse no meu jovem coração, que eu deveria, de qualquer maneira, ler e estudar o que este homem escreveu. (tradução nossa)

princípio fundamental a certeza de que todo problema admite uma resposta, seja por uma prova rigorosa de sua solução, seja pela demonstração da impossibilidade de sua existência.

This conviction of the solvability<sup>2</sup> of every mathematical problem is a powerful incentive to the worker. We hear within us the perpetual call: There is the problem. Seek its solution. You can find it by pure reason, for in mathematics there is no *ignorabimus*.<sup>3</sup>

Esta diversidade de sua obra pode até ser percebida de forma difusa e inconstante. Mas um olhar mais apurado permite identificar a unidade subjacente no método empregado: a elaboração de um caminho teórico de dedução, tendo por condutor o método axiomático, revivido e levado ao extremo. Esta construção não apenas lhe permitiu criar ferramentas para o estudo de muitas áreas da matemática; a estratégia lhe permitiu ser, por exemplo, um dos primeiros a utilizar sistematicamente em sua obra a noção de estrutura, ainda então uma novidade, considerando e agrupando os objetos matemáticos de estudo segundo suas relações e não por sua natureza.

Por outro lado, nem tudo são flores sempre. O tema que lhe foi mais caro também o foi para seu suposto insucesso: a questão dos fundamentos para a matemática.



No início de 1900, Hilbert estava no auge de sua carreira profissional, consagrado como matemático e reconhecido internacionalmente por suas muitas contribuições. De forma natural vem percorrendo o seu caminho do formal: método axiomático e provas existenciais em teoria

---

<sup>2</sup> HILBERT, 1900 *apud* GRAY, 2000, p. 248.

Esta convicção da resolubilidade de cada problema matemático nos dá um forte estímulo para o trabalho. Ouvimos dentro de nós o perpétuo chamado: Eis o problema, procure sua solução. Você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois na matemática não há *ignorabimus*. (tradução nossa)

<sup>3</sup> *Ignoramus et ignorabimus* é uma expressão em latim que significa *ignoramos e ignoraremos*, e expressa o pessimismo acerca dos limites do conhecimento científico, por volta do século XIX. O fisiologista alemão Emil du Bois-Reymond é o autor dessa frase na sua obra *Über die Grenzen des Naturerkennens* de 1872. Em resposta a esta famosa expressão frisando limitações no campo do saber e em defesa de um maior otimismo na área das pesquisas científicas, Hilbert dirigiu as seguintes notórias linhas aos membros da *Sociedade de Cientistas e Físicos da Alemanha* no seu discurso de aposentadoria no outono europeu de 1930: *Wir müssen wissen. Wir werden wissen.* (*Nós precisamos saber. Nós iremos saber*). O epitáfio em sua lápide em Göttingen contém seu nome e, logo abaixo, essas mesmas palavras.

dos invariantes, teoria dos números e seu *Zahlbericht* (teoria dos corpos de números algébricos), obra de referência que direcionou muitas das pesquisas relacionadas no séc. XX, análise e equações integrais, axiomatização da física, e sua obra maior, a unificação das geometrias euclidiana e não euclidianas com a publicação da obra *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria). Neste mesmo ano ainda, as pistas ficam mais claras e Hilbert deixa antever o que se pode considerar a primeira etapa de fato, na direção de um programa de fundamentação, quando publica o artigo intitulado *Über den Zahlbegriff* (Sobre o conceito de número), expõe explicitamente o problema que envolve a demonstração da consistência da aritmética e apresenta uma construção axiomática dos reais, além de uma defesa clara em favor do método axiomático contrapondo-o ao método genético.

Sua participação no 2º Congresso Internacional de Matemáticos realizado em 1900 na cidade de Paris, no qual apresentou sua lista de 23 problemas em aberto, evidencia sua forma de conduzir e interpretar o trabalho matemático. Logo de início, Hilbert esclarece a que veio e dá mais uma pista de suas intenções: a possibilidade de continuação natural de suas investigações a respeito dos fundamentos da geometria, confrontando os problemas e dúvidas advindos da associação entre os conceitos de consistência e existência, desta vez com relação à aritmética; a busca de uma prova de consistência!

Durante algum tempo a ideia parece adormecida no meio de tantos professados interesses. Mas, o aparecimento dos paradoxos da lógica e da teoria dos conjuntos, assim como de uma grande gama de questões envolvendo a legitimidade do uso de coleções infinitas em matemática, deu origem a profundas divisões na comunidade científica, gerando um crescente e rico debate sobre os fundamentos da matemática.

A discordância entre os diversos pontos de vista dá origem a três escolas distintas que se complementam e se opõem: o logicismo que surgiu com Frege e foi revitalizado por Russell, que argumentou que todos os princípios matemáticos poderiam ser reduzidos a leis lógicas; o intuicionismo, criação de Poincaré e Brouwer, que rejeitava os métodos da matemática clássica que levaram aos paradoxos e o formalismo de Hilbert, que procurava axiomatizar toda a matemática, demonstrando rigorosamente que os axiomas nunca levariam a contradições. Estas concepções do que seriam os propósitos da matemática e de como atingi-los viria a nortear todos os trabalhos em fundamentação na década seguinte.

A partir de 1920, nosso personagem assumiu um ambicioso programa de fundamentação, explorando mesmo as bases de nossa disciplina e revisionando a estrutura da

lógica a serviço da matemática, encorajado por uma confiança cega de que era possível provar que a matemática, adequadamente axiomatizada, não permitiria a existência de contradições. Por meio desta ideia primordial, qualquer referência ao infinito esquivo e paradoxal poderia ser ignorada.

O programa de Hilbert foi oficialmente apresentado pela primeira vez fora de Göttingen apenas em 1922, em uma palestra na Sociedade Alemã de Cientistas em Leipzig.

A partir daí, uma nova fase do pensamento hilbertiano passa a ser amplamente divulgada e o projeto aprimorado.

Em 1925 e 1927 se encontram os textos mais importantes oriundos de conferências apresentadas em Münster<sup>4</sup> e Hamburgo, ambas com caráter de divulgação e esclarecimento do projeto.

Mas, o preço da consistência é feito de indecidíveis!

Os teoremas de incompletude de Gödel mostraram não ser realizável o projeto de Hilbert. Não foi possível provar a certeza incontestável da matemática que tem uma condição incerta, mas mesmo aos trancos e barrancos, progride.

Hilbert personificou o ideal do matemático para a geração entre as duas grandes guerras. Definitivamente patrocinou a matemática moderna, que foi configurada como uma ciência axiomática de estruturas abstratas, o que marcou uma ruptura com a matemática do passado, focada em números, fórmulas e figuras construtíveis em primeiro lugar. No espelhar de sua eloquência, devemos reconhecer que a matemática que conhecemos hoje é mais existencial do que construtiva.



Nosso texto não irá tratar de um fracasso simplesmente, idolatrado e dispersado pelos quatro cantos do mundo, mas sim, do sucesso de um fracasso, ofuscado pela visão de que se não se chegou ao topo, o caminho não foi importante.

Não pensamos assim. A história da lógica matemática que o diga; os inúmeros trabalhos posteriormente desenvolvidos e a teoria da prova que o confirmem.

Um dos nossos objetivos é o de contar esta história do desenvolvimento das questões voltadas para os fundamentos da matemática na perspectiva de Hilbert e nos primeiros quarenta

---

<sup>4</sup> Em português, Monastério, distrito urbano do estado federal da Renânia, norte da Westfália, Alemanha. Sua universidade é a 4ª maior do país e das mais antigas (1780).

anos do séc. XX, investigando suas motivações, o método que emprega e o alcance de suas teorias.

Para tanto, não existe uma definida preocupação com a técnica ou com a filosofia por trás de todo o debate fundacionalista. Estes aspectos se inserem naturalmente, de acordo com as necessidades da narrativa.

O que temos então é a descrição histórica do caminho percorrido por nosso personagem na construção de seu projeto maior para a matemática, o que inclui cursos ministrados e palestras proferidas.

No decorrer deste percurso, defendemos que o projeto hilbertiano foi um propulsor de novas teorias, com destaque para a visão positiva de muitas realizações, na intenção de desmistificar parcialmente o desalento pós-Gödel. Não existe acaso nas escolhas feitas por Hilbert, no sentido de que se atribui muito de seus planos ao surgimento dos paradoxos. Acreditamos sim, que a ideia já fazia parte do seu modo unitário de ver a matemática desde os tempos do *Zahlbericht* e do *Grundlagen der Geometrie*. Ao eleger o método de Euclides como parceiro em todos os seus estudos, Hilbert reinventa suas características e o coloca a serviço de seus planos, uma busca quase obsessiva de ordem e garantia da verdade segura e absoluta, a defesa incontestável da matemática como um todo; haveria de se arrumar a casa. O caminho mostra certa repetição de intenções no meio de um entrelaçar de interesses, como se fosse possível exercer controle sobre ciência e vida.



Nossa história é contada e cantada em sete capítulos, guiada por uma linha temporal que se volta sobre si mesma em diversas ocasiões, retornando ao ponto referencial mais próximo, como Hilbert, em suas idas e vindas. O primeiro deles consideramos como sendo esta nossa apresentação geral do que será desenvolvido.

No segundo, apresentamos uma extensa descrição dos caminhos tomados por Hilbert em sua vida acadêmica. Com suas idas e vindas entre interesses, pesquisas e trabalhos apresentados em áreas como teoria dos invariantes, teoria dos números, geometria, análise, física e por fim, lógica e fundamentos da matemática, procuramos evidenciar sua inequívoca consideração da unidade da matemática como ciência primordial, o que nos permite perceber o caráter universalista de sua obra. Destacamos ainda e sempre sua predileção pela axiomatização, método que iria aprimorar e considerar como fundamental, definindo sua forma de trabalho.

O terceiro capítulo é dedicado ao contexto no qual ocorreram as principais mudanças e

questionamentos acerca dos fundamentos da matemática e que culminaram no que é denominado pela literatura associada, como a “crise dos fundamentos”. Encontra-se neste período intensa preocupação com o esclarecimento de conceitos e a introdução de maior rigor em métodos e técnicas associados à matemática. Descrevemos assim brevemente o surgimento das geometrias não euclidianas e as contribuições de Cauchy, Cantor, Bolzano, Weierstrass, Dedekind e Hilbert, na consolidação do uso de conjuntos infinitos em suas abordagens na análise, em processos de redução à aritmética e construção dos reais, além de suas relações com os diferentes tipos de infinito: o atual e o potencial.

Apresentamos também as diferentes vias adotadas para estabelecer uma fundamentação teórica para os números naturais, como a da lógica (em Frege); a da teoria dos conjuntos (Cantor e Dedekind); e, a concepção axiomática (em Peano). Neste caminho, nos preocupamos também em estabelecer a comparação contextual entre os métodos axiomático e genético, à luz de vantagens e desvantagens. Por outro lado, localizamos e explicamos o surgimento dos paradoxos e as propostas de superação, com o crescimento das ideias ligadas às três correntes vigentes, o logicismo de Frege e Russell, o intuicionismo de Brouwer, além do formalismo associado à figura de Hilbert.

Nossa exposição segue rumo à proposta inicial de Hilbert de axiomatização da aritmética, como feito em geometria e incluídos os transfinitos de Cantor, em solidariedade com a lógica em procedimentos, conceitos e leis, devendo para isso, ambas serem formalizadas num mesmo sistema para o qual se provaria a consistência. Descrevemos a proposta por ele apresentada em Heidelberg, em 1904, no 3º Congresso Internacional de Matemáticos e as subsequentes objeções de Brouwer e Poincaré em relação ao princípio da indução e o uso do princípio do 3º excluído.

No nosso quarto e mais extenso capítulo, apresentamos todo o roteiro feito por Hilbert em direção ao estabelecimento definitivo do seu programa formalista. Iniciamos com a apresentação dos cursos ministrados em Göttingen no período de 1905 a 1917, envolvendo diretamente as questões voltadas para a lógica e a consistência da aritmética.

O curso ministrado em 1905, *Logische Prinzipien des mathematischen Denken*, continuação da proposta de 1904, é detalhado com o esquema de prova proposto para a consistência da aritmética, além do desenvolvimento algébrico da lógica proposicional. São tecidas ainda considerações sobre o curso ministrado em 1910, *Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik*, no qual Hilbert reapresenta sua lógica proposicional e o planejamento de

reformular o cálculo lógico, e o do inverno de 1916/1917, retorno oficial de Hilbert às questões fundacionais, inteiramente dedicado à teoria dos conjuntos, *Mengenlehre*.

São também vistos alguns detalhes significativos sobre a conferência de 1917, proferida em Zurique, *Axomatisches Denken*, uma defesa veemente do método axiomático e seu aspecto fundacionalista para todos os ramos do conhecimento.

Ainda nos caminhos de Hilbert, listamos os cursos ministrados de 1917 a 1923, todos em parceria com Bernays, seu assistente a partir de 1917. Em particular, chamamos a atenção para o curso de inverno 1917/1918, *Prinzipien der Mathematik*, um marco importante no trabalho de Hilbert, no qual são estabelecidas em definitivo a completude, a consistência e a decidibilidade da lógica proposicional. Grande parte das notas deste curso deu origem ao livro publicado em 1928 juntamente com Ackermann, *Grundzüge der Theoretischen Logik*. A partir daqui, estabelecemos alguns parâmetros para o conflito que se estabelece nos anos 20 com Brower e a participação de Weyl.

Mais de perto, descrevemos e comentamos as conferências de Hilbert de 1925, *Über das Unendliche* em Münster e de 1927, *Die Grundlagen der Mathematik*, as mais importantes apresentações de Hilbert em defesa de seu programa de fundamentação, nas quais mais uma vez explica seus objetivos e a metodologia que havia utilizado para o desenvolvimento de sua teoria. Concluimos com os teoremas de incompletude de Gödel e as reações de Hilbert e Bernays na tentativa de superar as dificuldades causadas por tais resultados.

O quinto capítulo é dedicado a contribuições e reformulações do programa, como a prova de consistência da aritmética de Peano feita por Gentzen, ajustes feitos por Gödel, uma proposta de reformulação feita por Bernays para dar conta da insuficiência da restrição finitista, além de significativas contribuições de Herbrand ao utilizar o  $\varepsilon$  – cálculo.

Procuramos tecer ainda alguns comentários sobre a abordagem instrumentalista do programa mais fortemente considerada por Detlefsen (1986), programas relativizados como o proposto por Kreisel (1954) e elaborado por Feferman (1960), além do programa de matemática reversa lançado por Friedman nos anos setenta e desenvolvido por Simpson. Nestes casos, a abordagem é mais resumida.

Nosso sexto e último capítulo trata do último texto oficial de Hilbert em parceria com Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, tendo por base a versão francesa da obra.

Nas Considerações Finais procuramos justificar toda a nossa postura à luz dos objetivos definidos, como a importância e originalidade de nosso relato histórico sobre trabalhos desenvolvidos por Hilbert na questão fundacionalista, além da visão positiva das realizações

decorrentes de seu projeto formalista. Como complemento, nossa justificativa de apresentação em ópera.

Para finalizar, apresentamos ampla lista de referências bibliográficas, além de três apêndices: uma cronologia de todo nosso percurso, em que se destaca a atuação de Hilbert no processo histórico que envolve os fundamentos da matemática, a nomeação de todos os pesquisadores citados neste trabalho e a tradução para o português dos sumários da obra *Fondéments des Mathématiques* que acreditamos será de utilidade para futuros interesses de pesquisa, tendo em vista a dificuldade de acesso ao texto original em língua alemã. Inserimos ainda três anexos em que constam os textos das principais conferências apresentadas por Hilbert, sobre o método axiomático e detalhes de suas ideias acerca da fundamentação da matemática.



Antes de encerrarmos esta introdução, uma palavra a mais sobre a metodologia empregada em nossas investigações.

A pesquisa se iniciou tendo por base a revisão da literatura existente sobre o tema, afim de identificar aspectos históricos do seu desenvolvimento, sob um ponto de vista do positivo, o que é menos comum.

Nesta busca, nos deparamos com textos quase que exclusivamente em língua alemã ou inglesa. Uns poucos textos e artigos referenciados podem ser encontrados em língua francesa, como a tradução da 2ª edição dos *Grundlagen der Mathematik*, ou em língua portuguesa, como o texto de Manuel S. Lourenço (2004) e as teses de Abel Lassale Casanave (1995) e Jacintho Del Vecchio Jr (2010), que abordam aspectos técnicos da construção lógico matemática ou filosóficos do programa. Nos demais casos, os textos se dedicam a uma consideração específica do trabalho de Hilbert como, por exemplo, o método axiomático ou a exigência finitista ou ainda, a redução da matemática à lógica.

Assim, nosso texto se apresenta como uma possível referência histórica global para a comunidade em língua portuguesa, no qual procuramos abordar a maioria dos aspectos fundacionais do caminho percorrido por Hilbert, entre cursos, palestras e parcerias com colaboradores.



Além dos textos e artigos de referência principais como os de Paul Bernays, Wilfried Sieg e Richard Zach, as principais fontes primárias de consulta sobre Hilbert e suas pesquisas sobre



os fundamentos da matemática encontram-se em Göttingen na Biblioteca Geral da Universidade, cujo catálogo<sup>5</sup> relacionado a Hilbert conta com 741 itens (cerca de 500 correspondências, mais de 50 manuscritos de apontamentos de aulas e notas de palestras e cursos ministrados em diversos períodos e universidades). Algumas outras, como notas de aulas do período de 1908 a 1915, encontram-se no Instituto de Matemática. Além disso, muitas contribuições poderiam ser destacadas por meio da correspondência entre Hilbert com diversos matemáticos da época como Minkowski (em sua grande maioria), Hurwitz, Lindemann, Klein, Cantor e Frege, mas não foram objeto de considerações neste trabalho.



Em julho de 2015, participamos da escola de verão oferecida pelo Instituto de Matemática da Universidade George-August em Göttingen em cooperação com o Departamento de Matemática da Universidade de Lisboa, *The Hilbert-Bernays Summer School on Logic and Computation*, quando foi possível então ter acesso a alguns documentos.

Porém, parte do material coletado, até mesmo em fotos, se perderam por conta da queima da mídia de armazenamento. Com o que restou, foi possível referenciar parte deste trabalho.

---

<sup>5</sup> Hilbert's Nachlass está disponível em:

<<http://hans.sub.uni-goettingen.de/nachlaesse/Hilbert.pdf>>. Acesso em 03/2018.

## 2 OS CAMINHOS DE HILBERT



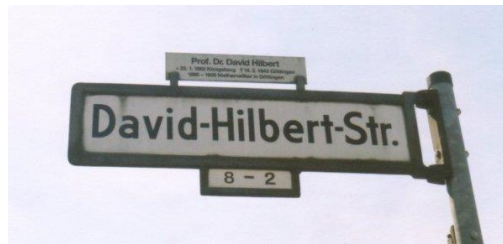
ATO Nº 1

Neste primeiro capítulo daremos uma “piscadela” no que foi a vida e a obra de David Hilbert. Consideramos isto necessário para atingir maior grau de compreensão de seus propósitos como um todo, antes de nos determos de forma mais apurada em seu projeto maior associado à questão dos fundamentos da matemática: o Programa de Hilbert.

### 2.1 IDAS E VINDAS



Figura 1: David Hilbert *Strasse* na cidade de Göttingen - Alemanha.



Fonte: <<http://mathsab.blogspot.com.br/2016/05/david-hilbert.html>> Acesso em: 03/2017

David Hilbert nasceu em 23 de janeiro de 1862, em Wehlau, localidade próxima a Königsberg<sup>6</sup>, capital da Prússia Oriental, conhecida pelo histórico problema das *Sete Pontes de Königsberg*, resolvido por Euler (1736), que deu origem à teoria dos grafos.

Seu pai, Otto Hilbert, era juiz de condado na época de seu nascimento e sua mãe, Maria Therese, filha de um negociante, tinha interesse nas ciências. Sua educação se baseou no aprimoramento das virtudes prussianas de seu pai, como pontualidade, fidelidade ao dever, diligência, disciplina e respeito pelas leis, além da leveza e curiosidade científica de sua mãe.

Parte de sua infância se passou em meio aos conflitos que fizeram parte do processo de unificação da Alemanha com a Prússia, oficialmente realizado em 1871. No ínterim, seu pai assumiu novo cargo de juiz em Königsberg e se mudou com toda a família.

Até a idade de oito anos, Hilbert estudou em casa orientado, supõe-se por sua mãe, e, “cresce banhado pelas tradições em torno da figura do filósofo Immanuel Kant, filho da terra,

<sup>6</sup> Atual **Kaliningrado**, exclave russo entre a Polônia e a Lituânia.

e cujas palavras lhe permeariam a infância.”<sup>7</sup> Para Kant<sup>8</sup>, a matemática era uma forma de conhecimento que só poderia ser adquirida a partir da razão pura e certamente suas ideias exerceram grande influência sobre Hilbert.

Em 1870, entrou oficialmente para a *Vorschule* da *Royal Friedrichskolleg*, onde recebeu a educação básica necessária para ingresso no *Gymnasium*. Até então, a instrução recebida se limitava aos aspectos mais simples de sua língua materna e rudimentos da aritmética básica.

O *Friedrichskolleg Gymnasium*, onde foi admitido em 1872, era uma conceituada instituição de ensino, tradicional e rígida em seu currículo, centrada no estudo do latim e do grego. Para Hilbert, porém, não existiam ali oportunidades para pensamentos independentes e criativos. O estudo das ciências não era oferecido e a matemática era relegada a segundo plano. Mesmo assim, era a única área pela qual tinha algum destacado interesse.

No seu último ano nesta instituição, 1879, Hilbert foi transferido para o *Wilhelm Gymnasium*, cujo currículo encorajava a criatividade e era mais voltado para a matemática. Nesse momento então, incentivado por seus professores, demonstrou vivo interesse e compreensão acirrada dos conceitos matemáticos, primeiros sinais de suas extremas habilidades na área.

No inverno de 1880, Hilbert foi admitido na Universidade de Königsberg, uma das mais conceituadas de seu tempo, por onde passaram professores como Jacobi, Richelot e Neumann, este último fundador do primeiro instituto de física teórica de uma universidade alemã. Contrariando a tradição familiar em advocacia, Hilbert se matriculou no curso de matemática, parte integrante da faculdade de filosofia.

Durante os quatro anos seguintes, assistiu a diversos cursos, como os de Weber, colaborador de Dedekind, e de Lindemann, que acabara de provar a transcendência de  $\pi$  (1882). No mesmo período, cursou também um semestre na Universidade de Heidelberg, assistindo aos

---

<sup>7</sup> REID, 1996, p.3.

<sup>8</sup> Immanuel **Kant** (1724 - 1804) foi um filósofo prussiano. Amplamente considerado como o principal filósofo da era moderna, Kant operou, na epistemologia, uma síntese entre o racionalismo continental (de Descartes e Leibniz, onde impera a forma de raciocínio dedutivo), e a tradição empírica inglesa (de Hume, Locke, ou Berkeley, que valoriza a indução). Nascido de uma modesta família de artesãos, depois de um longo período como professor secundário de geografia, Kant veio a estudar filosofia, física e matemática em 1755, na cidade de Königsberg, de onde nunca saiu. Em 1770 foi nomeado professor *Ordinarius* da Universidade de Königsberg. Sua vida foi dedicada aos estudos filosóficos, realizando inúmeros trabalhos sobre ciências naturais e exatas. É famoso sobretudo pela elaboração do denominado idealismo transcendental: todos nós trazemos formas e conceitos *a priori* (aqueles que não vêm da experiência) para a experiência concreta do mundo, os quais seriam de outra forma impossíveis de determinar. A filosofia da natureza e da natureza humana de Kant é historicamente uma das mais determinantes fontes do relativismo conceptual que dominou a vida intelectual do século XX.

curso de equações diferenciais de Fuchs.

Nesse tempo de estudante universitário, Hilbert veio a conhecer seu melhor amigo Minkowski, além de Hurwitz, dois dentre todos aqueles que exerceram grande influência sobre seus trabalhos, e cuja amizade lhe proporcionou intermináveis caminhadas e conversas sobre matemática nos arredores de Königsberg.

Minkowski tinha sido admitido na universidade um semestre antes de Hilbert e seu talento em matemática era reconhecido por todos. Tinha passado um ano em Berlim e em 1883 recebeu, aos 18 anos, o *Grand Prix des Sciences Mathématiques* da Academia de Ciências de Paris ao resolver um problema proposto em 1881 – o cálculo do número de decomposições distintas de um número inteiro como soma de cinco quadrados - que serviu de base para sua tese de doutorado, defendida em 1885.

Na primavera de 1884, foi a vez de Hurwitz, aos 25 anos, se estabelecer em Königsberg como professor *Extraordinarius*<sup>9</sup>.

A convivência com esses amigos proporcionou a Hilbert ampla visão da matemática contemporânea e das diversas escolas existentes na Alemanha naquele momento, como os estudos em geometria de Klein e a algébrico-analítica em Berlim, com professores do porte de Weierstrass, Kummer e Kronecker.



Completados os quatro anos necessários para a finalização do doutorado, Hilbert acata a sugestão de Lindemann, seu orientador, e se dedica a resolver um problema em aberto da teoria dos invariantes algébricos<sup>10</sup>, tema de muito interesse nos círculos matemáticos da época, tendo pleno sucesso. Em 11 de dezembro de 1884, Hilbert é aprovado no exame oral e se torna apto para o processo de defesa pública<sup>11</sup> com questões de caráter científico, realizado em 7 de

---

<sup>9</sup> Denominação do sistema universitário alemão, comparável ao cargo de professor associado em outros sistemas. O posto seguinte é o de professor *Ordinarius*, mais alto na escala docente universitária.

<sup>10</sup> A **teoria dos invariantes algébricos** estuda *os grupos que caracterizam as trocas de sistemas de referenciais que conservam as propriedades geométricas*. Esta teoria traz um ganho de generalidade nesta forma de analisar formas geométricas através de equações e vice-versa, uma vez que os tamanhos, as formas e certas propriedades das figuras geométricas *não se alteram ao mudarem suas posições em relação aos novos eixos estabelecidos*. (MARTINS, 2011, p. 29).

<sup>11</sup> Conhecida como *Aula*, era um requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor. O candidato ao título escolhia dois temas para discursar e defender durante o debate, cujos oponentes eram, em geral, ilustres matemáticos conhecidos. Os temas escolhidos por Hilbert tratavam da determinação de um método para calcular a resistência eletromagnética absoluta, através da experimentação e o outro tratava da teoria da natureza *a priori* associada à geometria.

fevereiro de 1885.

O título de Doutor foi apenas o começo de uma bem-sucedida carreira acadêmica. Para exercer a docência na universidade seria necessário ainda ser aprovado no *Habilitation*<sup>12</sup>, apresentando um segundo trabalho original, de maior alcance que sua tese de doutorado. Desta forma, obteria o título denominado *venia legendi*<sup>13</sup> e poderia aceder ao *Privatdozent*. Nesse meio tempo, Hilbert foi aprovado em maio de 1885 no exame estatal para professor de escola secundária, o *Staatlich Prüfung*.

Sua preparação para o *Habilitation* incluía ampliar seu campo de interesses e se aprofundar em teoria dos invariantes. Sendo assim, Hilbert aceita uma sugestão de Hurwitz e resolve passar um semestre em Leipzig, onde se encontravam outros pesquisadores desta área, além de Klein, figura já lendária no meio matemático.

Aos 23 anos, este tinha obtido uma cadeira na Universidade de Erlangen e em sua aula inaugural apresentou um programa de unificação de todas as geometrias existentes (*Programa de Erlangen*), por meio de grupos de transformações. Hilbert assistiu a seus cursos e teve participação brilhante em seus seminários, o que chamou a atenção de Klein, a ponto de lhe sugerir que fosse passar um semestre em Paris, então um centro de excelência em matemática, antes de seu retorno a Königsberg. Além do contato com vários matemáticos franceses de renome como Jordan, Hadamard, Picard e Poincaré, dentre outros, o maior proveito de Hilbert nesta viagem, foram os encontros com Hermite, cujas conversas giravam em torno da teoria dos invariantes.

Hermite o aconselhou a tratar de duas questões específicas: a generalização das leis de reciprocidade para formas ternárias e a solução do problema mais importante dessa teoria: a busca de uma base de invariantes para polinômios de três ou mais variáveis, o *Problema de Gordan*. Encorajado por tais conselhos, Hilbert deixou Paris com novo ânimo, passando por Göttingen para visitar Klein, recém-admitido, e Berlin, onde manteve contato com Kronecker.

De volta a Königsberg, Hilbert termina de escrever seu trabalho para o *Habilitation*, ainda envolvendo a teoria dos invariantes, e o apresenta em julho de 1886; aprovado, consegue se estabelecer como *Privatdozent*. Observe-se que Klein teria desejado que o trabalho fosse

---

<sup>12</sup> Exame que permite aceder ao *Privatdozent*, título universitário próprio das universidades de língua alemã na Europa. Serve para designar professores que receberam o *Habilitation*, mas não a cátedra de ensino ou de pesquisa. Por essa razão, não recebe nenhuma remuneração oficial, sendo pago pelos estudantes que escolhem assistir a seus cursos.

<sup>13</sup> Autorizado a lecionar, em latim.

apresentado numa universidade de maior destaque, onde Hilbert pudesse interagir mais fortemente com outros especialistas e tivesse acesso a melhores oportunidades de docência e pesquisa. Ele, porém, preferiu se manter em sua zona de conforto com a proximidade de Lindemann e o estímulo de amigos como Hurwitz. O isolamento de Königsberg seria superado com visitas frequentes a outras universidades alemãs que lhe proporcionaram ampla familiaridade com as diversas correntes e controvérsias em discussões com influentes matemáticos da época. Vista como um todo, sua obra foi construída a partir desse conhecimento, adquirido com base teórica formada por métodos investigativos inovadores e muitas vezes surpreendentes.

Em seu primeiro ano como *Privatdozent*, Hilbert lecionaria sobre diferentes assuntos, o que o auxiliaria a completar também sua própria formação docente, se dedicando assim a seguir os conselhos de Hermite.



## Teoria dos Invariantes

No início de 1888, Hilbert reassume seu projeto de viagens e tem como primeira escala a Universidade de Erlangen - Nuremberg, onde se encontraria com Gordan, que vinte anos antes havia conseguido provar a existência de uma base finita de invariantes para o caso de formas binárias de qualquer grau. O resultado foi então estendido para a existência de uma base finita de invariantes algébricos simultâneos para qualquer sistema finito de formas binárias. A demonstração utilizava métodos construtivos complexos, o que envolvia muitos cálculos, necessários para a exibição da base procurada.

Porém, para o caso de formas ternárias, o problema se encontrava em aberto e era seu principal objeto de estudo: obter um resultado semelhante para polinômios de três ou mais variáveis, conhecido como o *Problema de Gordan*. As conversas e reuniões entre eles marcaram a direção tomada por Hilbert que, a partir de então, passou a se dedicar de forma intensa na resolução do problema.

Pouco tempo depois, Hilbert escreveu a Klein “[...] com a ajuda estimulante do professor Gordan, uma sequência infinita de inspirações nasceu em mim e me veio uma demonstração maravilhosamente curta e precisa da finitude dos sistemas de formas binárias.”<sup>14</sup> Sua demonstração, não construtiva, era mais simples e original que a de Gordan que, ao tomar

---

<sup>14</sup> GRAY, op. cit., p. 24. (tradução nossa)

conhecimento e averiguar o método de demonstração empregado, a classificou como teologia<sup>15</sup>.

A partir deste momento se definiria sua predileção pelo método axiomático, o que permearia toda a sua obra. Em 1890, ele apresentou a resolução final do *Problema de Gordan*, o resultado tão esperado para polinômios de três ou mais variáveis, demonstrando o Teorema Fundamental da Teoria dos Invariantes:

A álgebra  $\mathbf{A}$  dos invariantes associados a qualquer família finita de formas n-árias é sempre finitamente gerada, ou seja, para qualquer  $g \in \mathbf{A}$ , existe uma família finita de invariantes  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_r$  e um polinômio  $P$  com  $r$  variáveis, tal que  $g$  pode ser escrito na forma  $g = P(f_1, f_2, f_3, \dots, f_r)$ .

Na resolução do problema, Hilbert o reduz a uma série de resultados gerais que impulsionariam muitos outros em áreas como a geometria algébrica, a teoria dos números e a álgebra comutativa. Em particular, foi preciso provar dois importantes resultados:

- I. uma generalização do Teorema Fundamental da Álgebra, importante resultado em geometria algébrica, que relaciona variedades e ideais<sup>16</sup> em anéis de polinômios sobre corpos algebricamente fechados, o chamado *Nullstellensatz*<sup>17</sup> (teorema dos zeros de Hilbert).
- II. o Teorema da Base de Hilbert<sup>18</sup>, de vital importância para o posterior desenvolvimento da álgebra comutativa em geral e da geometria algébrica em particular.

É importante assinalar que a demonstração de Hilbert ultrapassa os limites do que se queria de fato acrescentar à teoria dos invariantes algébricos, ao apresentar técnicas inovadoras

---

<sup>15</sup> KLEIN, 1979, p. 310 *apud* CASSOUS – NOGUÈS, 2004, p. 40.

<sup>16</sup> **Ideal**: subconjunto  $I$  de um anel  $(A, +, \times)$  tal que  $(I, +)$  é fechado e  $\forall a \in I, \forall b \in A$  tem-se,  $a \times b \in I$  e  $b \times a \in I$ .

<sup>17</sup> Seja  $K$  um corpo algebricamente fechado, o anel de polinômios  $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  e um ideal  $I$  neste anel. A variedade afim  $V(I)$  definida por este ideal consiste de todas as  $n$ -uplas  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  em  $K^n$  tal que  $f(\mathbf{x}) = 0$  para todo  $x$  em  $I$ . O **teorema dos zeros de Hilbert** nos diz que se  $p$  é um polinômio em  $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$  que se anula na variedade  $V(I)$ , i.e.  $p(\mathbf{x}) = 0$  para todo  $\mathbf{x}$  em  $V(I)$ , então existe um número natural  $r$  tal que  $p^r$  está em  $I$ .

<sup>18</sup> Todo ideal no anel de polinômios em várias variáveis sobre um anel noetheriano é finitamente gerado. Isto pode ser traduzido para o contexto da geometria algébrica da seguinte maneira: todo conjunto algébrico sobre um corpo pode ser descrito como o conjunto das raízes comuns a uma quantidade finita de equações polinomiais

importantes e considerar o conjunto dos invariantes como uma estrutura algébrica<sup>19</sup>, um ideal, objeto de estudo de Kronecker e Dedekind, que utilizavam o conceito para descrever sistemas de números ou funções. O problema é assim recolocado numa perspectiva abstrata absoluta e, como consequência, estabelece novos caminhos para o estudo das estruturas algébricas tendo em vista a sua aplicação em níveis subjacentes dos objetos estudados. Esta visão será retomada na década de vinte por Emily Noether e sua escola.

Àquela altura, a novidade da técnica impressionou, fruto da necessidade de introduzir novos conceitos e métodos para avançar no estudo de alguns problemas clássicos. Porém, a demonstração não era construtiva. Tratava-se de um teorema geral de existência, um método indireto de demonstração, adotado por Hilbert em caráter mais geral.

The value of pure existence proof consists precisely in that the individual construction is eliminated by them, and many different constructions are subsumed under one fundamental idea so that only what is essential to the proof stands out clearly; brevity and economy of thought are the *raison d'être* of existence proofs. [...] To prohibit existence statements [...] is tantamount to relinquishing the science of mathematics altogether.<sup>20</sup>

Os métodos diretos de demonstração tem uma vantagem evidente por nos dar uma resposta explícita do que procuramos e que pode servir em outros contextos. Trata-se de, com recursos algébricos, fazer uma manipulação rotineira de símbolos. Porém, quando o problema é desconhecido e não sabemos com certeza se tem solução, essa forma de fazer matemática

---

<sup>19</sup> Consiste num conjunto munido de uma ou mais operações, indicadas na notação aditiva por (+) e ou na multiplicativa por ( $\times$ ), cujos elementos satisfazem certos axiomas. Em algumas estruturas algébricas além do conjunto principal existe mais um conjunto, denominado conjunto de escalares. Neste caso a estrutura terá dois tipos de operações: internas, que operam os objetos principais entre si e, externas, que representam ações dos escalares sobre os elementos do conjunto principal. Podemos destacar as estruturas mais comuns, como os grupos, os anéis e os corpos. Um grupo  $(G,+)$  é associativo, tem elemento neutro e todos os seus elementos tem inverso; um anel  $(A, +, \times)$  é munido de duas operações em que  $(A,+)$  é grupo comutativo e  $(A, \times)$  é associativo, além da distributividade de ( $\times$ ) em relação a (+); um corpo  $C$  é um anel comutativo com unidade (tem elemento neutro para ( $\times$ )) em que todos os elementos não nulos tem inverso em relação a ( $\times$ ).

<sup>20</sup> Cf. < <https://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ge/hilbert.htm> >

O valor das provas existenciais puras consiste precisamente em que a construção individual é eliminada por elas, e muitas construções diferentes são incluídas num contexto mais amplo sob uma ideia fundamental, de modo que apenas o que é essencial para a prova se destaca claramente; brevidade e economia do pensamento são as razões de ser das provas existenciais. [...] Proibir declarações de existência [...] equivale a renunciar completamente à ciência da matemática. (HILBERT, 1927 -tradução nossa)



pode ser frustrante e demorada, sendo preciso uma inspiração única para encontrar o caminho que leva à solução desejada.

Já os indiretos, como as provas de existência ou as demonstrações por recorrência ou indução, tem por objetivo fundamental provar que algo existe ou não. Em geral, no caminho que se percorre, surgem conceitos novos e resultados auxiliares. As demonstrações assim direcionadas deixam muitas vezes pistas para determinar um procedimento de cálculo do que se acaba de mostrar a existência.

Porém, muitos especialistas não aceitavam esse tipo de demonstração e os argumentos envolvidos. Ao enviar seu trabalho para publicação no prestigiado *Mathematische Annalen*<sup>21</sup>, Klein, então editor-chefe, pediu que Gordan fizesse a revisão. Em resposta, Gordan não contestou a importância e validade do resultado, mas sim, a validade e clareza da etapa indutiva da demonstração. Hilbert, no entanto, se recusou a fazer quaisquer alterações no seu trabalho, que já havia sido revisto e aprovado por outros especialistas na área. Klein passou então uma semana com Gordan para acalmar os ânimos e, a seguir, decidiu aprovar a publicação.

Restava ainda silenciar opositores, como Kronecker, de grande influência no pensamento matemático e política científica alemã da época, e que tinha concepções diferentes sobre métodos indiretos como o utilizado por Hilbert. A seu ver, demonstrações de existência deveriam passar forçosamente pela construção e exibição do objeto cuja existência se desejava provar. Ver para crer! Sua forma de trabalho priorizava os procedimentos algoritmos explícitos, identificado como um finitista ferrenho que não aceitava a existência de números transcendentais e quiçá dos números algébricos mesmo sob certas condições.

Kronecker defendia um formato comum para tratar de todos os problemas da matemática, por meio das propriedades de polinômios com um número finito de variáveis sobre o corpo dos racionais ou corpos cujos elementos fossem definidos como quocientes de tais polinômios<sup>22</sup>. Sua visão da matemática a colocava como um domínio que incluía toda a teoria dos números algébricos e a geometria algébrica que deveriam ser concebidas como duas metades do mesmo sujeito. Os elementos básicos seriam, de um lado, os inteiros e racionais; de outro, as variáveis. Estes elementos poderiam se combinar de acordo com as quatro operações da aritmética básica

---

<sup>21</sup> Periódico alemão originário de Göttingen, criado em 1869 por Rudolf Clebsch (1833, 1872) e Carl Neumann (1832 – 1925) para rivalizar com o *Crelle's Journal* de Berlin. Com a morte de Clebsch, passa às mãos de Klein. Atualmente é publicado pela Springer Science.

<sup>22</sup> GRAY, op. cit., p. 32.

e a extração de raízes era substituída pela equação correspondente. Por exemplo, a consideração de  $\sqrt{5}$  seria substituída pela da variável  $x$  na equação  $x^2 - 5 = 0$ . Seu programa de trabalho era aceito por alguns matemáticos e ele o justificava de forma pragmática ao considerar que seria mais fácil estudar problemas teóricos da álgebra considerando uma equação e todas as suas raízes do que apenas uma solução particular. Sobre os números algébricos, Kronecker dizia ser contraproducente considerá-los separadamente, isolados e sem ligação com as equações que os definiam.

Hilbert assumia posição contrária. Para ele, os procedimentos construtivos necessários para desenvolver um algoritmo se constituíam muitas vezes em obstáculos para a resolução de problemas. No entanto, para responder às críticas, decidiu abordar o assunto de forma construtiva, reduzindo os cálculos a certas questões envolvendo anéis e que tinham sido previamente estudadas por Kronecker e seus seguidores, conhecedores de métodos construtivos de resolução; uma estratégia talvez, para evitar o enfrentamento. Ao longo do trabalho, utilizou uma série de ideias e técnicas que iriam revolucionar a geometria algébrica. O trabalho foi publicado por Klein em 1893. Mas a partir daí, Hilbert passou a ser conhecedor e adversário dos pontos de vista de Kronecker, aos quais se referia apenas para refutá-los.

Para os matemáticos no entorno, a partir de então ficaram evidentes e, até certo ponto assustadores, esses aspectos do conceito de demonstração em matemática para Hilbert, e que viriam a ser adotados por ele na maioria de seus trabalhos posteriores.

A characteristic feature of Hilbert's method is a peculiarly direct attack on problems, unfettered by algorithms; He always goes back to the questions in their original simplicity. [...] His strength, equally disdainful of the convulsion of the Herculean efforts and of surprising tricks and ruses, is combined with an uncompromising purity.<sup>23</sup>



Os anos seguintes foram de muitas mudanças. Hilbert se casa com uma prima em 1892, Käthe Jerosh. Em 1893, nasce seu único filho, Franz Hilbert e, no mesmo ano, Hurwitz aceita

---

<sup>23</sup> WEYL, op. cit., p. 615.

Uma característica da forma de agir de Hilbert é um ataque peculiarmente direto aos problemas, sem restrições impostas por algoritmos; Ele sempre volta às questões em sua simplicidade original. [...] Sua força, que desdenha a convulsão de esforços hercúleos e os truques e maneiras surpreendentes, é combinada com uma pureza intransigente. (tradução nossa)

uma posição no Instituto de Tecnologia de Zurique e indica Hilbert para ser professor *Extraordinarius* em Königsberg. Pouco depois, Lindemann assume o cargo de *Ordinarius* na Universidade de Munique, sendo substituído por Hilbert que, por sua vez, em 1894, indica Minkowski para seu cargo anterior vago.

Em dezembro, Hilbert foi convidado por Klein a assumir o cargo de *Ordinarius* em Göttingen. Aceito o convite, lá chegou na primavera de 1895. Esta pequena cidade, consagrada ao estudo da matemática, seria o seu porto seguro até o fim de sua carreira. A influência de Hilbert na ciência do séc. XX se deveria não apenas ao sucesso de suas pesquisas e resultados, mas também aos seus estudantes e à vida matemática de Göttingen.



## Teoria dos Números

Nesse meio tempo, Minkowski explorava a aritmética das formas quadráticas em  $n$  variáveis, e suas pesquisas sobre esse tópico o levavam a considerar certas propriedades geométricas em um espaço com  $n$  dimensões. Suas pesquisas nesse campo culminaram na apresentação de um método geométrico que viria a resolver inúmeros problemas de teoria dos números, a geometria algébrica<sup>24</sup>. Por conta disso, o tema mais recorrente das conversas com o amigo Hilbert era a teoria dos números.

Tratava-se de uma área cuja tradição alemã havia começado com Gauss, o grande nome da matemática durante a primeira metade do séc. XIX, para o qual, a aritmética tinha um profundo significado e a colocava no patamar de “rainha da matemática”. Porém, não havia unanimidade quanto a isso. Para muitos, mesmo com problemas importantes, o tema não passava da manipulação de resultados menores sem levar a lugar algum.

Hilbert, por sua vez, considerava que muitos matemáticos brilhantes ainda tinham pesquisas na área e ainda o faziam por conta de sua importância em outros domínios da

---

<sup>24</sup> A **geometria algébrica** é uma área da matemática que combina técnicas de álgebra abstrata, especialmente de álgebra comutativa, com a linguagem e os problemas da geometria. Ela ocupa um papel central na matemática moderna e possui várias conexões conceituais com áreas tão diversas quanto análise complexa, topologia e teoria dos números. Seus objetos fundamentais de estudo são as **variedades algébricas**, manifestações geométricas das soluções de sistemas de equações polinomiais.

matemática de relevância inquestionável. Antes mesmo de abandonar a teoria dos invariantes, no início de 1891, ele já apresentava novas provas da transcendência do número  $\pi$  e do neperiano  $e$ , mais simples e diretas do que as de Hermite e Lindemann. Hilbert volta-se então para a teoria dos números algébricos<sup>25</sup>, ramo em ascensão na segunda metade do séc. XIX, por conta da evidência dos trabalhos de Kummer, Dedekind e Kronecker.

O ramo teve sua origem quando Gauss levou a teoria dos números para além dos inteiros e racionais e considerou o anel dos inteiros algébricos<sup>26</sup>,  $Z[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbf{Z}\}$ . Em seus trabalhos sobre resíduos quadráticos, ele mostra que neste anel, a fatoração em elementos primos existe e é única, a menos da ordem dos fatores. Retomando a questão, Kummer, por conta de investigações acerca do último Teorema de Fermat, abordou o problema da fatoração de elementos irredutíveis<sup>27</sup> em um anel qualquer de inteiros algébricos. Como em tais anéis, em geral, não vale a propriedade da fatoração única em números primos, Kummer foi levado a criar o conceito de número ideal<sup>28</sup>, para os quais provou um teorema de fatoração única. Procedendo assim, abordou e resolveu muitos casos particulares relativos ao *Último Teorema de Fermat*. Mais tarde, Dedekind introduziu a noção atual de ideal de um anel e obteve resultados estruturais importantes. Em especial, ambos, de forma independente e por métodos diferenciados, provaram um resultado análogo do teorema de fatoração única de um inteiro, desta vez para ideais: *Todo ideal não vazio de um anel de números inteiros de um corpo pode ser*

---

<sup>25</sup> Qualquer número real ou complexo que é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros. Em um sentido mais amplo, diz-se que um número é **algébrico** sobre um corpo quando ele é raiz de um polinômio com coeficientes neste corpo.

<sup>26</sup> Raiz de uma equação polinomial de grau  $n$ , com coeficientes inteiros, onde o coeficiente do termo de grau  $n$  é igual a 1.

<sup>27</sup> Um elemento  $x \in A$ , anel comutativo, é **irredutível** se  $x \neq 0$ ,  $x$  não é unidade de  $A$  e se a ocorrência de  $x = ab$ , para  $a, b \in A$  acarreta que  $a$  ou  $b$  é unidade de  $A$ .

<sup>28</sup> O trabalho desenvolvido por Kummer em 1847, intitulado “On the Theory of Complex Numbers” busca completar e simplificar as propriedades dos números complexos obtidos a partir das raízes da unidade. Em 1843, Kummer afirmou que o conjunto dos números Inteiros Ciclotômicos, definidos na forma  $a_0 + a_1\omega_1 + a_2\omega_2^2 + \dots + a_{p-1}\omega_p^{p-1}$  onde  $a_i \in \mathbf{Z}$  e  $\omega_p \neq 1$  é uma raiz da unidade de ordem  $p$ , isto é,  $\omega_p^p = 1$ , é um domínio onde a fatoração dos elementos é única. No entanto, em 1847, como demonstrado por Cauchy e verificado pelo próprio Kummer, em sua resposta a “prova” dada por G. Lamé (1795 – 1871) ao último teorema de Fermat, não há fatoração única em  $Z[\omega_{23}]$ . A partir de então a meta de Kummer passou a ser a busca em restaurar a unicidade da fatoração em  $Z[\omega_p]$ . Para isso, em 1847, ele introduziu um tipo peculiar de divisor imaginário, que denominou **número complexo ideal**, além do conceito de fator primo ideal. Assim fazendo, Kummer demonstrou o Teorema de Fermat para todos os expoentes até 36 e para todos os expoentes primos inferiores a 100, com exceção dos expoentes primos não regulares 37, 59 e 67. Observa-se que apesar de  $p=23$  não possuir a propriedade da fatoração única, o resultado de Kummer sobre primos regulares mostra que o Teorema de Fermat é verdadeiro para esse expoente.

*decomposto de forma única como um produto de ideais primos*<sup>29</sup> *do mesmo anel.*

Pois bem, Hilbert apresenta uma nova demonstração deste resultado, na qual, pela primeira vez, utiliza sistematicamente conjuntos infinitos. O que não era de se estranhar já que a formulação de Dedekind para a teoria dos ideais dependia essencialmente de seu uso, porém apenas dos finitamente gerados.

A prova foi exibida na reunião anual da *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*<sup>30</sup> - *DMV*, realizada em Munique, em setembro de 1893.

Por conta de tal sucesso, é provável que o prestígio dos amigos tenha sido a motivação para que, a seguir, a *DMV* os convidasse a preparar um relatório sobre o estado das pesquisas desenvolvidas e resultados já consolidados em teoria dos números. Foi decidido que Hilbert pesquisaria sobre a teoria dos números algébricos e Minkowski trabalharia nos aspectos geométricos da teoria dos números. Este último se retirou do projeto que ficou inteiramente a cargo de Hilbert, responsável pelos resultados mais avançados.

Em 1897, a obra estava concluída com 350 páginas: *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*<sup>31</sup> (conhecida por *Zahlbericht*); rigorosa, sistematizada e colocando em ordem a enorme quantidade de resultados dispersos existentes à época, uma brilhante síntese dos trabalhos de Kummer, Kronecker e Dedekind. Mas não apenas isso. O texto também continha as próprias ideias de Hilbert que utilizava muitas das técnicas que havia desenvolvido em teoria dos invariantes, com extrema manipulação dos procedimentos da álgebra abstrata.

---

<sup>29</sup> Um ideal  $P$  de um anel comutativo  $R$  é **primo** se ele possui as seguintes propriedades: i) Se  $a$  e  $b$  são elementos de  $R$  tais que o seu produto  $ab$  é um elemento de  $P$ , então  $a$  está em  $P$  ou  $b$  está em  $P$ ; ii)  $P \neq R$ .

<sup>30</sup> **Associação dos Matemáticos Alemães**, fundada em 18 de setembro de 1890, como parte de uma reação quanto ao modo de atuar dos matemáticos de Berlim. Georg Cantor (1845 – 1918) foi um de seus fundadores e seu primeiro presidente. Em sua lembrança, é concedida a medalha Cantor, a cada dois anos. Os laureados são matemáticos de língua alemã. Em seus primeiros anos, teve como principal interesse a elaboração de relatórios sobre o estado de diversos ramos da matemática, em especial aqueles onde matemáticos alemães haviam contribuído de forma significativa.

<sup>31</sup> A Teoria dos Corpos de Números algébricos.

Thus we see how far arithmetic, the Queen of mathematics, has conquered broad areas of algebra and function theory to become their leader. [...] Nowadays the erratic progress characteristic of the earliest stages of development of a subject has been replaced by steady and continuous progress through the systematic construction of the theory of algebraic number fields. The conclusion, if I am not mistaken, is that above all the modern development of pure mathematics takes place under the banner of number: the definitions given by Dedekind and Kronecker of the concept of number lead to an arithmetization of function theory and serve to realize the principle that, even in function theory, a fact can be regarded as proven only when in the last instance it has been reduced to relations between rational integers.<sup>32</sup>

É preciso destacar a importância que Hilbert relega então às técnicas da teoria dos conjuntos, não apenas no que diz respeito aos desenvolvimentos de Cantor, mas, e principalmente até então, aos trabalhos de Dedekind que revolucionaram a álgebra.

Sobre este último, pouco se estranha já que Hilbert, quando universitário, fora aluno de um de seus colaboradores, Weber, primeiro a utilizar a teoria dos conjuntos num livro de álgebra. Quanto a Cantor, tratava-se de uma esplêndida novidade, trazida por Minkowski que, ao ministrar um curso sobre o infinito em 1895, lhe escreveu:

The “actual infinite” is an expression that I took from a paper by Cantor, and for the most part I included in my lectures theorems of Cantor which have a general interest. Only a few did not want to believe in them. The actual infinite in nature, about which I mainly spoke ... was the positions of points in space ... On this occasion I perceived anew that Cantor is one of the most ingenious living mathematicians. His purely abstract definitions of the power [cardinal number] of points on a line segment with the help of the so-called transfinite numbers is really wonderful.<sup>33</sup>

---

<sup>32</sup> HILBERT, 2013, p. V – Prefácio de *Zahlbericht*.

Assim, vemos até que ponto a aritmética, a rainha da matemática, conquistou amplas áreas da álgebra e da teoria das funções para se tornar sua líder. [...] Hoje em dia, o progresso errático característico dos primeiros estágios de desenvolvimento de uma teoria foi substituído por um progresso constante e contínuo através da construção sistemática da teoria dos números algébricos. A conclusão, se não me engano, é que, acima de tudo, o desenvolvimento moderno da matemática pura ocorre sob a bandeira do número: as definições dadas por Dedekind e Kronecker do conceito de número levam a uma aritmetização da teoria das funções e servem para consolidar o princípio de que, mesmo na teoria das funções, um fato pode ser considerado comprovado apenas quando, em última instância, foi reduzido às relações entre inteiros racionais. (tradução nossa)

<sup>33</sup> MINKOWSKI, 1973, p.68 *apud* MOORE, 2002, p. 43.

O "infinito real" é uma expressão que tirei de um artigo de Cantor e, na maioria das vezes, incluí em minhas palestras teoremas de Cantor que têm interesse geral. Apenas alguns não querem acreditar neles. O verdadeiro infinito na natureza, sobre o qual falava principalmente ... eram as posições dos pontos no espaço ... Nesta ocasião percebi de novo que Cantor é um dos matemáticos vivos mais engenhosos. Sua definição puramente abstrata de potência [número cardinal] de pontos em um segmento de reta com a ajuda dos chamados números transfinitos é realmente maravilhosa. (tradução nossa)

Porém, vieram a se conhecer apenas em 1897, quando de uma visita de Cantor a Göttingen. A partir de então, ambos mantiveram extensa correspondência e Hilbert, em princípio, claramente assumiu a defesa dos transfinitos de Cantor. No *Nachlass* de Hilbert podem ser encontradas algumas notas de dois cursos de férias, ministrados em 1898 para professores do secundário. Num deles, identificado por *Feriencursus: über den Begriff des Unendlichen – Ostern 1898*<sup>34</sup>, Hilbert quis mostrar a conexão entre a matemática dita escolar e as recentes pesquisas, utilizando o que ele considerava o mais importante conceito da área: o infinito.<sup>35</sup> Ele destaca ainda o tratamento equivocado até então ao se tentar transferir as propriedades de conjuntos finitos para os infinitos, em contraste com o moderno tratamento dado pelos cardinais transfinitos de Cantor. Na Alemanha, Hilbert foi o primeiro a oferecer cursos sobre a teoria dos conjuntos. Amor à primeira, segunda e terceira vistas. A partir de então, Hilbert defenderia Cantor e seu paraíso como se de si mesmo fosse.

O *Zahlbericht* se constituiu em obra de referência e direcionou muitas das pesquisas relacionadas no séc. XX.

[...] not really a Bericht in the conventional sense of the word, but rather a piece of original research revealing that Hilbert was no mere specialist, however gifted. ... he not only synthesized the results of prior investigations ... but also fashioned new concepts that shaped the course of research on algebraic number theory for many years to come.<sup>36</sup>

Nos anos seguintes, Hilbert se dedicou ainda a investigar muitos aspectos da teoria dos números, publicando em 1898 um trabalho sobre as leis de reciprocidade de ordem superior. Em 1899 e 1902, apresentou uma análise exaustiva da aritmética das extensões quadráticas em corpos de números algébricos, que havia começado a desenvolver anos antes.

Um pouco mais tarde, recuperando-se de uma crise de estafa em 1908, Hilbert ainda resolveu abordar um dos problemas em aberto na teoria, o chamado *Problema de Waring*,

---

<sup>34</sup> Curso de férias: sobre o conceito de infinito - Páscoa 1898.

<sup>35</sup> TOPELL, 1986, p. 115-142. apud SIEG, 2013, p. 77.

<sup>36</sup> ROWE, 1989, p.5.

[...] não é realmente um relatório no sentido convencional da palavra, mas sim uma peça de pesquisa original revelando que Hilbert não era um mero especialista, por mais talentoso que fosse. ... ele não só sintetizou os resultados das investigações anteriores ... mas também criou novos conceitos que moldaram o curso da pesquisa em teoria dos números algébricos por muitos anos ainda. (tradução nossa)

enunciado por Waring em 1770 em sua obra *Meditationes Algebraicae*<sup>37</sup>, sem demonstração: Para cada inteiro  $n$  existe outro inteiro associado  $k(n)$ , de tal forma que qualquer inteiro  $m$  pode ser representado pela soma de, no máximo,  $k(n)$  potências de ordem  $n$ .

A seguir, no mesmo ano, Lagrange provou que todo inteiro é soma de quatro quadrados, ou seja,  $k(2) = 4$ . Por exemplo,  $14 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$ . Muito se passou até que, em 1859, Liouville provou que  $k(4) \leq 53$  e vários outros autores obtiveram cotas para  $k(n)$ , quando  $2 \leq n \leq 10$ . Daí para frente, pouco se avançou na direção de uma prova geral.

Então, em dezembro de 1908, Hilbert resolve a questão e prova a conjectura, confirmando mais uma vez sua força intelectual na abordagem de problemas da área. O método, como seria de se esperar, levou a marca de Hilbert: a prova apresentada foi de natureza existencial, sem exibição explícita de  $k(n)$ .



## Geometria

Ainda no decorrer da elaboração do *Zahlbericht*, durante o inverno de 1898/1899, Hilbert surpreendeu a todos ao oferecer um curso sobre os fundamentos da geometria euclidiana, *Grundlagen der Euklidischen Geometrie*<sup>38</sup>, além de anunciar uma série de outros cursos similares. Aparentemente Hilbert fazia uma de suas habituais mudanças de rumo no decurso de suas investigações em matemática. Mas, o que desconheciam é que ele já se encaminhava para tal desde os tempos em Königsberg. Tratava-se portanto, de mais um aprofundamento da visão abstrata e estrutural da matemática que Hilbert possuía.

Mas qual foi o caminho trilhado até chegar nesse interesse nada casual, os fundamentos da geometria?

Começemos então por tratar sucintamente da geometria naquele tempo, nos estendendo um pouco mais, por conta da importância do método axiomático que irá permear toda a obra de nosso principal personagem.

---

<sup>37</sup> Meditações Algébricas.

<sup>38</sup> Fundamentos da geometria euclidiana.





O séc. XIX se caracterizou por um grande desenvolvimento da geometria. Foram criados novos ramos como a geometria projetiva, a geometria diferencial e as geometrias não euclidianas, hiperbólica de Gauss e Bolyai; e elíptica de Riemann.

Nesta perspectiva, surgiram diversas propostas de fundamentação e unificação, com destaque para a de Klein.

Pietropaolo & Silva (2014, p. 305 - 307) enfatizam que, no ano de 1870, Felix Klein, com seu professor Sophus Lie, se reuniu em Paris com o matemático Jordan, um pesquisador dedicado a difundir os estudos de Galois para estudar os recentes avanços obtidos no estudo das simetrias. Jordan explicita que as isometrias estavam organizadas em dois grupos: discretos e contínuos: no primeiro caso, eram grupos formados por isometrias de cristais; no segundo, constituídos por isometrias que notoriamente se modificavam, passando de um conjunto de transformações geométricas aplicado a pontos ou figuras no plano para outro conjunto de transformações quando se modificavam os coeficientes das equações que caracterizavam a isometria. Dessa maneira, uma rotação aplicada a um ponto do plano poderia facilmente ser transformada em reflexão ou translação aplicada no mesmo ponto, modificando os coeficientes da equação de rotação.

Em seu trabalho, Klein conclui que as propriedades dos entes geométricos permanecem invariantes, independentemente do conjunto de transformações aplicado sobre ele. Jordan acreditava que esse grupo contínuo de transformações constituía a geometria euclidiana e a geometria afim, e que a teoria dos grupos seria utilizada no futuro para reestruturar as diferentes geometrias.

Depois de estudar com Jordan as pesquisas de Galois referentes a esse tema, Klein e Lie decidem se dedicar integralmente a formalizar uma teoria para o estudo dos grupos contínuos. Em 1870, Sophus Lie fundamenta sua teoria para os conjuntos de transformações relacionando-os aos sistemas algébricos. Depois de estudar as diversas propriedades de curvas tangentes no plano, Lie define as estruturas dos conjuntos de transformações. A teoria de Lie permitiu caracterizar as propriedades dos grupos e subgrupos de transformações geométricas.

Em 1872, Klein torna-se professor da Universidade de Erlangen e, no mesmo ano, apresenta um programa expondo uma nova estruturação para a geometria fundamentada nas teorias de Lie para os grupos contínuos de transformações, que passou a ser conhecido como *Programa de Erlangen*.

Nesse programa, Klein utiliza as transformações geométricas para relacionar as geometrias. Para ele, a geometria é o campo da matemática que estuda as propriedades das figuras que permanecem invariantes diante da aplicação de um determinado conjunto de transformações. Ou seja, seria definida em uma determinada dimensão por um certo grupo de transformações que interagem nessa dimensão. Modificando as estruturas desses grupos, criam-se outros grupos, e dessa maneira outras geometrias. Os grupos de transformações afins são criados por alterações estruturais do grupo das isometrias, os quais constituem a geometria euclidiana. O mesmo ocorre com as transformações projetivas concebidas a partir de alterações do grupo afim. Partindo-se do grupo projetivo de transformações, são criadas as geometrias não euclidianas.

Mas existiam ainda as propostas envolvendo a utilização do método axiomático, como a de Lie que, seguindo as teorias de Klein, também tinham por base a utilização de grupos de transformações, e a de Pasch.

Este último, o que melhor representa o enfoque axiomático em geometria até então, foi quem teve provavelmente o maior impacto no pensamento de Hilbert, ao propor uma axiomatização da geometria considerando apenas a intuição empírica e o uso da lógica. Em seu livro *Vorlesungen über neuere Geometrie*<sup>39</sup>(1882), Pasch demonstra teoremas fundamentais da geometria projetiva a partir de um conjunto finito de axiomas, deduções puramente lógicas e sem utilizar coordenadas nem diagramas de qualquer espécie. Além disso, considerou axiomas de medida, na tentativa de definir uma ordem no plano euclidiano. O mais importante deles, o *Axioma de Pasch*<sup>40</sup>, complementa a geometria euclidiana e, uma de suas variações mais modernas é conhecida como *Postulado da Separação do Plano*<sup>41</sup>. Pasch teve muita influência na escola de matemáticos italianos preocupados com os aspectos formais e lógicos das axiomatizações da geometria e da aritmética, cujo representante mais expressivo foi Peano.

Mas ... voltemos a Hilbert e seu caminho em direção à geometria.

O suposto estranho interesse em 1899 pela geometria, não era tão estranho assim. De fato, ele já tinha certa experiência no tema, de seu tempo de aluno e ao ministrar cursos ainda em

---

<sup>39</sup> Fundamentos da Nova Geometria.

<sup>40</sup> Considere três pontos A, B e C não colineares, e uma reta r que não contem nenhum deles, no plano determinado por estes três pontos. Se r passa por um ponto de  $\overline{AC}$  então também passa por um ponto de  $\overline{BC}$  ou de  $\overline{AB}$ .

<sup>41</sup> Dada uma reta, os pontos do plano que a contém e que não pertencem a ela formam dois conjuntos disjuntos tais que (1) cada um dos conjuntos é convexo; (2) se o ponto P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento  $\overline{PQ}$  corta a reta dada.

Königsberg. Ao todo foram 14 cursos, dos quais, geometria linear no início de 1889, teoria das curvas algébricas planas em 1890 e geometria projetiva em 1891<sup>42</sup>.

Neste último, Hilbert, logo de início, apresentou os três diferentes enfoques com que se poderia, a seu ver, abordar o estudo da geometria: o intuitivo, presente na geometria escolar e projetiva, além da topologia, de caráter estético e pedagógico; o axiomático, no qual Hilbert tinha um interesse epistemológico; e o analítico, com uso de coordenadas, sem dúvida o mais importante para a matemática, já que permite se chegar a resultados mais gerais e profundos. Além disso, renunciando ao uso de coordenadas, Hilbert baseava suas demonstrações em propriedades elementares sobre incidência de retas, pontos e planos; e o uso da lógica. Não descrevia os princípios fundamentais nem estudava os axiomas por si só e suas possíveis correlações e dependência. Estava interessado nas questões fundacionais associadas à geometria projetiva, independente de axiomas.

Em 1893, Hilbert participou de uma reunião da DMV em Halle onde assistiu a uma conferência de Wiener sobre os fundamentos da geometria. Os argumentos apresentados lhe impressionaram, ao defenderem ser desnecessário ater-se a ideias preconcebidas de elementos ideais como ponto, reta e plano, bastando apenas a coesão entre os conceitos e a dedução lógica adequada entre os mesmos. Wiener afirmava também que era possível provar os teoremas fundamentais da geometria projetiva e, em particular, os teoremas de Desargues, de Pascal e de Pappus<sup>43</sup>, sem recorrer a argumentos de continuidade.

No mesmo ano, Hilbert anunciou outro curso de geometria, dessa vez sobre as não euclidianas, adotando o enfoque axiomático de Pasch e partilhando ideias de Wiener. Ele toma para si o fato de que os axiomas podem revelar um caráter especial da geometria como ciência natural, já que os mesmos são elencados a partir da experiência, do uso direto de nossos sentidos. O curso teve apenas um inscrito e Hilbert se propôs a ofertá-lo novamente no ano seguinte, 1894, dessa vez com o nome de “fundamentos da geometria”.

---

<sup>42</sup> Cf. SIEG, 2013

<sup>43</sup> **Teorema de Desargues:** Dois triângulos estão em perspectiva axial se, e somente se, estiverem em perspectiva central.

**Teorema de Pascal:** Num hexágono inscrito em uma cônica, as retas que contiverem os lados opostos interceptam-se em pontos colineares.

**Teorema de Pappus:** Dado dois conjuntos distintos de pontos colineares, A, B, C e D, E, F, então os pontos de intersecção X, Y e Z dos pares de retas AD, BE e CF são colineares.

No período que se seguiu, Hilbert se dedicou a ampliar seus conhecimentos sobre a aplicação do método axiomático em geometria, como o trabalho de Peano, uma versão dos resultados de Pasch, um tipo de tradução para uma linguagem da lógica simbólica que ele mesmo tinha inventado, e ainda, a proposta de Hertz para a fundamentação da mecânica.

Em seu enfoque para tratar as diferentes teorias, Hertz afirma que uma teoria da física nada mais é do que uma imagem que formamos de certo conjunto de fenômenos da natureza.

Então, já que podemos formar imagens distintas do mesmo fenômeno, que critérios poderíamos utilizar para afirmar que uma imagem é melhor que outra? Para tentar responder a este questionamento, Hertz introduziu os conceitos de *permissibilidade*, *correção* e *adequação* de uma imagem: é permissível se não contradiz as leis da lógica; sendo permissível, é correta se suas relações internas não contradizem as relações entre os objetos que a descrevem na natureza; finalmente, entre as imagens permissíveis corretas da mesma imagem, a mais adequada será a mais simples.

Há um paralelismo importante entre os conceitos de *permissibilidade* e *correção* de Hertz e os conceitos de *consistência* e *completude* de Hilbert para uma teoria da matemática. Para Hilbert, consistência tem a ver com a impossibilidade de obter contradições internas na própria teoria e a completude garante que todas as afirmações verdadeiras no contexto da teoria são dedutíveis do seu conjunto de axiomas.

No inverno de 1898, já em Göttingen, Hilbert oferece a seus alunos um curso sobre os fundamentos da geometria euclidiana, uma prévia do que viria a ser sua obra de maior relevância.

Já na conferência de abertura, Hilbert declarou mais uma vez o principal resultado que esperava obter a partir de uma axiomática envolvendo a fundamentação da geometria: uma descrição completa, por meio de axiomas, dos seus fatos básicos, a partir dos quais todos os teoremas conhecidos poderiam ser derivados. E mencionou a fonte base para sua formulação: a introdução da obra *Princípios de Mecânica* de Hertz.<sup>44</sup>

Hilbert afirma que esta metodologia não deveria se limitar à geometria, enfatizando explicitamente a afinidade essencial entre a geometria e as ciências naturais. Esse talvez seja o primeiro indício explícito das idéias de Hilbert na direção de um programa de fundamentação,

---

<sup>44</sup> TOEPELL, 1986, p.204 *apud* CORRY, 2004, p. 145.

via axiomatização, não somente para a matemática, mas também para outras ciências, como a física, em particular, a mecânica.

Juntamente ao curso oferecido sobre os fundamentos da geometria, Hilbert aprimorou suas notas de aulas e escreveu uma monografia sobre o tema que se transformou num clássico. Seu texto apresentava uma proposta de axiomatização da geometria que superava de longe todas as outras anteriores, um sistema simples e completo de axiomas para provar todos os teoremas da geometria euclidiana, incluindo demonstrações de consistência e independência dos axiomas e uma análise do papel desempenhado pelas propriedades arquimediana<sup>45</sup> e de completude<sup>46</sup> na geometria.

Porém, enquanto a axiomatização proposta por Euclides se baseava em evidências e intuição física, Hilbert assumiu uma posição diferente, assegurando que os conceitos de ponto, reta e plano, na verdade, não tinham relevância matemática. O que importava era o estabelecimento dos axiomas por meio da conexão entre tais objetos. A linguagem utilizada é a tradicional de Euclides, mas sem definições de noções primitivas, considerando os axiomas uma determinação implícita de tais noções. As proposições iniciais e teoremas seguem por dedução lógica, abstraindo a natureza dos objetos geométricos considerados. Os axiomas servem para caracterizar uma estrutura como em álgebra, dependente apenas das relações entre os objetos, e das leis que determinam as operações. O método axiomático assim empregado por Hilbert na geometria é tão abstrato quanto o método da álgebra.

No sistema de Hilbert, cada conjunto particular de objetos matemáticos que verifique os axiomas é um modelo de geometria.

Os vinte axiomas propostos por Hilbert estão divididos em cinco grupos, de acordo com as propriedades que se quer destacar: oito de incidência, quatro de ordem, cinco de congruência, dois de continuidade e o axioma das paralelas.

Após a análise dos resultados oriundos de cada grupo, Hilbert apresentou um estudo

---

<sup>45</sup> Em termos geométricos, dados dois segmentos distintos, existe sempre um múltiplo inteiro do menor que supera o maior, ou em termos numéricos, dados dois números reais positivos, existe um múltiplo inteiro do menor deles que supera o maior. Em Hilbert, ele aparece como o axioma V.1, dentre os axiomas de continuidade: (Axioma da medida ou de Arquimedes) Se  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são dois segmentos quaisquer, então há na reta  $AB$  um número finito de pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tais que os segmentos  $\overline{AA_1}, \overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$  são congruentes com o segmento  $\overline{CD}$ .

<sup>46</sup> Um sistema axiomático é dito **completo**, somente se for possível provar ou refutar qualquer proposição envolvendo seus termos definidos e/ou indefinidos.

sobre a independência dos axiomas e sua consistência, utilizando sistematicamente a construção de modelos: provar a independência de um axioma A em relação ao sistema de axiomas S, significa que o sistema de axiomas T, obtido ao se acrescentar em S a negação de A, deve ser consistente. Para isso, se constrói um modelo, em uma teoria mais simples e segura, que satisfaça ao sistema S e à negação do axioma A. Desta forma, a existência de contradição em T acarretaria uma contradição nas proposições obtidas dentro do modelo construído e portanto, na teoria em que se construiu o modelo. Foi dessa forma que Hilbert mostrou a independência<sup>47</sup> do seu sistema de axiomas e a sua consistência relativa<sup>48</sup>, construindo diversos modelos formados por números algébricos ou números reais, usando seu amplo conhecimento nestas áreas.

Essa redução pode ser caracterizada como uma *solidariedade lógica* entre teorias diversas:

Hilbert baseia o estudo da compatibilidade dos axiomas num método que chamaremos de *solidariedade lógica*. Em Ciência, o método utilizado para demonstrar a compatibilidade é o método de equivalência lógica desta ciência com outra ciência bem fundamentada e estruturada, ciência esta que não cabe motivos para se duvidar de seu corpo teórico. A equivalência lógica (para nós, *solidariedade lógica* daqui por diante) estabelecida por Hilbert foi feita entre a geometria e a aritmética. E seu principal objeto foi demonstrar a consistência da geometria via *solidariedade lógica* com a aritmética para poder demonstrar todos os teoremas da geometria de acordo com o corpo teórico por ele estabelecido.<sup>49</sup>

Além disso, como iremos perceber mais adiante, essa forma de “investigar” mostra claramente o modo como Hilbert manipula os procedimentos que necessita para chegar aos resultados que pressupõe serem válidos. Desta mesma forma iria agir em sua proposta de fundamentação da matemática.

Seu texto final, *Grundlagen der Geometrie*<sup>50</sup>, foi publicado pela DMV inicialmente em 1899, numa edição comemorativa (*Festschrift*) em homenagem a Gauss e Weber, eméritos de

---

<sup>47</sup> Dada uma teoria axiomática ou um conjunto de axiomas, um axioma é dito **independente** se ele não pode ser derivado dos demais.

<sup>48</sup> Uma teoria axiomática S é **consistente relativa** a uma teoria axiomática T se a consistência de T acarreta a consistência de S.

<sup>49</sup> MARTINS, 2011, p. 180

<sup>50</sup> Fundamentos da geometria.

Göttingen, e continuou a ser reeditado, se transformando numa das maiores referências do uso do método axiomático em matemática, após Euclides e Legendre. As ideias subjacentes nele contidas iriam influenciar toda a matemática “moderna” do próximo século, sendo base para a corrente formalista em matemática.

Segundo Plato (2006, p.492 - 494), revisor da edição transladada para o inglês e publicada em 2004 sobre o título *David's Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry – 1891-1902*:

Hilbert's book *Grundlagen der Geometrie* of 1899 has played a peculiar role in the development of the foundations of mathematics. It has been hailed as the dawn of a new era, as in Weyl's 1944 paper 'David Hilbert's mathematical work'. However, Hilbert's topic, the study of axiomatic geometry in the synthetic tradition of Euclid, has been an absolutely marginal field in 20th century mathematics. ... The importance of Hilbert's geometry is to be searched elsewhere than in its influence on research in geometry, so out-dated after a century that journals dedicated to geometry would not even publish such material anymore. Hilbert's role was rather, as Weyl emphasizes, to show the possibility of formalization of mathematical arguments to the extent that one can check their correctness without the need to think of their intuitive content. Thus, geometry gave a model for how to formalize mathematics and how to pose the central foundational questions, such as those of consistency, completeness, and decidability.<sup>51</sup>

Por conta da publicação do *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert recebeu a Medalha Lobachevsky<sup>52</sup> em 1904.

---

<sup>51</sup> O livro de Hilbert *Grundlagen der Geometrie* de 1899 desempenhou um papel peculiar no desenvolvimento dos fundamentos da matemática. Foi saudado como o início de uma nova era, como no artigo de Weyl em 1944, "Trabalho matemático de David Hilbert". No entanto, o tema de Hilbert, o estudo da geometria axiomática na tradição sintética de Euclides, tem sido um campo absolutamente marginal na matemática do século XX. ... A importância da geometria de Hilbert deve ser pesquisada em outras áreas tanto quanto em sua influência na pesquisa em geometria, tão desatualizada após um século que as revistas dedicadas à geometria nem sequer publicariam tal material. O papel de Hilbert foi, como Weyl enfatiza, o de demonstrar a possibilidade de formalização de argumentos matemáticos na medida em que se pode verificar sua correção sem a necessidade de pensar em seu conteúdo intuitivo. Assim, a geometria deu um modelo de como formalizar a matemática e de como considerar questões fundamentais centrais, como as de consistência, integridade e decidibilidade. (tradução nossa)

<sup>52</sup> A Medalha Lobachevsky é concedida pela Kazan State University em homenagem a seu ex-professor Nikolai Ivanovich Lobachevsky. A primeira premiação ocorreu em 1897. Depois, tornou-se um prêmio da Academia Russa de Ciências, em 1951, até retornar à Kazan State University em 1991, para ser concedida a cada 5 anos.

Figura 2: Capa original e 1ª folha do capítulo I - *Grundlagen der Geometrie* - 1899.



Fonte: <<https://archive.org/details/grundlagendergeo00hilb>> Acesso em: 08/2016



No início de 1900, Hilbert estava no auge de sua carreira profissional, consagrado como matemático e reconhecido internacionalmente por suas muitas contribuições. Havia respeito a suas colocações e teorias, podendo oferecer opções e sugerir caminhos. Ele não se nega a fazê-lo.

Identifica-se neste ano o que se pode considerar a primeira etapa de fato, na direção de um programa de fundamentação para a matemática, quando ele publica um artigo intitulado *Über den Zahlbegriff*<sup>53</sup>, no oitavo volume do *Jahresbericht DMV*. Hilbert expõe explicitamente o problema que envolve a demonstração da consistência da aritmética e apresenta uma construção axiomática dos reais, além de uma defesa clara em favor do método axiomático contrapondo-o ao genético.

### Problemas Matemáticos – Paris, 1900



Ainda no início deste ano, Hilbert recebeu um convite dos mais importantes e cujo aceite iria influenciar o desenvolvimento das pesquisas em matemática durante todo o século que se iniciava: proferir uma palestra plenária no 2º Congresso Internacional de Matemáticos que seria realizado em Paris, no verão. Havia a dúvida sobre qual tema abordar e, como em muitas outras

<sup>53</sup> Sobre o Conceito de Número.

Este artigo foi publicado um ano após o lançamento de *Grundlagen der Geometrie*, que a partir do ano de 1900, passou a tê-lo como referência em seus apêndices.



ocasiões, Hilbert procurou os conselhos de Minkowski, de opinião que deveria escolher um tema mais técnico, tendo em vista a plateia de especialistas que estaria presente.

No 1º Congresso, do qual havia participado em 1897, duas conferências o tinham impressionado: a primeira, de Hurwitz, bastante técnica, tratava da história da teoria das funções; a segunda, de Poincaré, o único matemático da época cuja amplitude de interesses e conhecimentos se comparava à de Hilbert, abordava um tema clássico na tradição científica de Göttingen, as relações entre a análise e a física matemática. Hilbert estava tentado a fazer uma conferência com caráter de réplica ao discurso de Poincaré, apresentando uma visão alternativa, em defesa do valor intrínseco da matemática. Porém, Minkowski o alertou sobre as afirmativas de Poincaré, expressas de modo vago e difíceis de serem contraditas e lhe sugeriu que aproveitasse a ocasião para uma discussão acerca da direção que deveria seguir o desenvolvimento da matemática no século que se iniciava<sup>54</sup>.

A dúvida persistiu ainda por um bom tempo e apenas em meados de julho, o tema da conferência tinha sido escolhido e o texto estava pronto: *Mathematische Probleme*<sup>55</sup>, que continha uma lista de problemas cuja investigação acreditava ser crucial para o desenvolvimento da matemática do séc. XX.

A apresentação oral da conferência foi realizada na manhã de 8 de agosto, com a participação de cerca de 250 matemáticos e começava com uma série de questionamentos:

Who of us would not be glad to lift the veil behind which the future lies hidden; to cast a glance at the next advances of our science and at the secrets of its development during future centuries? What particular goals will there be toward which the leading mathematical spirits of coming generations will strive? What new methods and new facts in the wide and rich field of mathematical thought will the new centuries disclose?<sup>56</sup>

---

<sup>54</sup> REID, op. cit., p. 69.

<sup>55</sup> Problemas Matemáticos.

<sup>56</sup> HILBERT, 1900 *apud* GRAY, op. cit, p. 240.

Quem de nós não se alegraria de levantar o véu por detrás do qual o futuro está escondido, para lançar um olhar sobre os próximos avanços de nossa ciência e sobre os segredos do seu desenvolvimento nos séculos futuros? A que objetivos específicos os principais espíritos matemáticos das gerações vindouras irão se dedicar? Que novos métodos e novos fatos no vasto e rico campo do pensamento matemático os novos séculos revelarão? (tradução nossa)

Os problemas apresentados por Hilbert podem ser classificados em quatro grandes áreas: fundamentos da análise, geometria e física, teoria dos números, álgebra (invariantes, geometria algébrica) e análise (cálculo variacional e análise complexa). Alguns dos problemas tinham formulação mais geral, outros, mais específica; em outros ainda, uma vaga indicação de como se poderia estabelecer um plano de trabalho na busca da solução. Por conta do tempo disponível para a apresentação, Hilbert enumerou apenas os dez primeiros e posteriormente publicou um artigo estendendo a lista para 23 problemas.

Cabe aqui, por conta do envolvimento com a questão dos fundamentos da matemática, destacarmos os seguintes problemas sugeridos:

i) Provar a *hipótese do contínuo*<sup>57</sup> de Cantor (1º) - Hilbert apresenta o seu primeiro problema da seguinte forma:

Depois de explanar o conceito de número cardinal de um conjunto, como introduzido por Cantor, afiança que “as investigações de Cantor de tais agregados de pontos sugere um teorema muito plausível, que, no entanto, apesar dos ingentes esforços, ninguém foi bem sucedido em prová-lo. Eis o teorema: Todo sistema de infinitos números reais, i.e., todo agregado de números (ou pontos) é ou equivalente ao agregado dos números naturais, 1, 2, 3, ... , ou ao agregado de todos os números reais e, portanto, ao continuum, isto é, aos pontos de uma reta; com respeito à equivalência, há, portanto, somente dois agregados de números, o agregado enumerável e o continuum. Desse teorema seguiria, imediatamente, que o continuum tem o número cardinal seguinte àquele do agregado enumerável; a demonstração desse teorema formaria, portanto, uma nova ponte entre o agregado enumerável e o continuum.<sup>58</sup>

Na continuação, Hilbert define, ainda na linha de Cantor, o conceito de boa ordem<sup>59</sup> e propõe a questão, também devida a Cantor, de bem ordenar o conjunto dos números reais. Portanto, de fato, Hilbert sugere a resolução de dois problemas. Em anos seguintes, Hilbert se dedicaria a tentar resolver a questão, porém, sem sucesso.

---

<sup>57</sup> Trata-se de uma conjectura atribuída a Cantor: O cardinal dos números reais,  $c = 2^{\aleph_0}$ , chamado de contínuo, é estritamente maior que o cardinal dos números naturais,  $\aleph_0$ . A hipótese do contínuo, diz que entre estes dois tamanhos de conjuntos infinitos não há nenhum outro, ou seja, não existe cardinal  $u$  tal que  $\aleph_0 < u < c$ . Como Cantor designou  $\aleph_1$  o menor cardinal depois de  $\aleph_0$ , a hipótese do contínuo é que  $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ .

<sup>58</sup> BICUDO, 2003, p. 15-26.

<sup>59</sup> *O Princípio da boa ordenação ou princípio da boa ordem* diz que todo subconjunto não vazio formado por números naturais possui um menor elemento. Isso é o mesmo que dizer que todo subconjunto não vazio formado por números inteiros positivos possui um menor elemento. Este princípio é equivalente ao Princípio da indução. Na Teoria axiomática dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), a generalização deste princípio é equivalente ao *Axioma da Escolha*, criado em 1904 por Zermelo.

ii) Provar a consistência dos axiomas da aritmética (2<sup>o</sup>) – Hilbert estabeleceu a possibilidade de continuação natural de suas investigações a respeito dos fundamentos da geometria, confrontando os problemas e dúvidas advindos da associação entre os conceitos de consistência e existência, desta vez com relação à aritmética.

iii) Axiomatizar teorias da física (6<sup>o</sup>) – Hilbert estava muito interessado na axiomatização de distintos ramos da física para lhe dar um formato semelhante ao que fez na geometria. Sua atenção se concentrava na mecânica e no cálculo de probabilidades (que estava associado a certas questões da física como a teoria cinético molecular).

iv) Determinar, em um número finito de operações, se uma equação diofantina tem solução (10<sup>o</sup>) (conhecido como problema de decisão<sup>60</sup> de Hilbert)<sup>61</sup> – O problema foi recolocado por Hilbert em 1928 no âmbito da lógica: Um *Entscheidungsproblem*<sup>62</sup> é resolvido quando conhecemos um procedimento que permite, para qualquer expressão lógica dada, decidir sua validade. Ele ainda impôs que tal procedimento deveria ser mecânico<sup>63</sup> e seria usado para decidir se uma prova está correta ou não. Até meados de 1930 ele ainda acreditava que não existiria um problema insolúvel.

Ao final da conferência, Hilbert concluiu com uma breve discussão: a lista de problemas que acabara de expor não apenas comprovava a variedade, riqueza e extensão da matemática, mas também sua unidade orgânica:

---

<sup>60</sup> Na teoria da computabilidade, um *problema de decisão* é uma questão com uma resposta do tipo sim ou não. Métodos usados para resolver problemas de decisão são chamados de procedimentos ou *algoritmos*.

<sup>61</sup> Em 1970, Yuri Matiyasevich, estabelecendo uma equivalência entre os conjuntos recursivamente enumeráveis e os conjuntos diofantinos, estabeleceu que isto não era possível.

<sup>62</sup> *Entscheidungsproblem* (termo alemão para "problema de decisão") é um problema da lógica simbólica que consiste em achar um algoritmo genérico para determinar se um dado enunciado da lógica de primeira ordem pode ser provado.

<sup>63</sup> Hilbert nunca deixou claro o que deveria ser este procedimento mecânico. Antes que a questão pudesse ser respondida, a noção de "algoritmo" foi formalmente definida por Alonzo Church em 1936 com o conceito de "calculabilidade efetiva", e por Alan Turing, no mesmo ano, com o seu conceito de Máquinas de Turing. As duas abordagens são equivalentes, uma instância da Tese de Church-Turing.

But, we ask, with the extension of mathematical knowledge will it not finally become impossible for the single investigator to embrace all departments of this knowledge? In answer let me point out how thoroughly it is ingrained in mathematical science that every real advance goes hand in hand with the invention of sharper tools and simpler methods which at the same time assist in understanding earlier theories and cast aside older more complicated developments. It is therefore possible for the individual investigator, when he makes these sharper tools and simpler methods his own, to find his way more easily in the various branches of mathematics than is possible in any other science. The organic unity of mathematics is inherent in the nature of this science, for mathematics is the foundation of all exact knowledge of natural phenomena. That it may completely fulfil this high mission, may the new century bring it gifted masters and many zealous and enthusiastic disciples. <sup>64</sup>

Da lista de Hilbert ainda existem problemas sem solução e alguns foram resolvidos por métodos que nem sequer Hilbert poderia prever, principalmente no que se refere a temas da lógica e dos fundamentos. O que de fato se pode afirmar com certeza é que a história dos problemas propostos por Hilbert e das pesquisas que suscitaram se confunde com a própria história da matemática do séc. XX.

### Análise - Equações Integrais



A axiomatização praticada por Hilbert na geometria se traduzia por meio de uma definição axiomática dos números reais, insuficiente para o que se praticava em análise. Na resolução de problemas que envolviam convergência, por exemplo, era necessário passar pela teoria dos conjuntos ou por funções reais. Seria preciso, portanto, estabelecer novos axiomas e para tal, confrontar-se com os princípios essenciais presentes na resolução de problemas da análise.

Com esta motivação, Hilbert passou a se interessar fortemente pelos principais problemas em análise, herdados do século anterior. Um deles já chamava sua atenção desde 1899, não apenas por seu envolvimento com a física, mas também pela questão das provas

<sup>64</sup> HILBERT, 1900 *apud* GRAY, 2000, p.282.

Mas, perguntamos, com a extensão do conhecimento matemático, não será finalmente impossível para o investigador individual abraçar todos os departamentos desse conhecimento? Em resposta, permitam-me salientar quão minuciosamente está arraigada na ciência matemática que todo avanço real vai de mãos dadas com a invenção de ferramentas mais nítidas e métodos mais simples que, ao mesmo tempo, ajudam a compreender teorias anteriores e descartam desenvolvimentos mais antigos e mais complicados. Portanto, é tão possível para o investigador individual, quando ele faz essas ferramentas mais nítidas e métodos mais simples, para encontrar seu caminho mais facilmente nos vários ramos da matemática quanto é possível em qualquer outra ciência.

A unidade orgânica da matemática é inerente à natureza dessa ciência, pois a matemática é o fundamento de todo conhecimento exato dos fenômenos naturais. Para que ela possa cumprir essa mais alta, que o novo século possa ser dotado de mestres e muitos discípulos zelosos e entusiasmados. (tradução nossa)

existenciais: o *Princípio de Dirichlet*<sup>65</sup>.

Tratava-se da resolução de um problema bastante comum quando se pretende modelar fenômenos da física e envolve a busca de soluções para determinadas equações diferenciais parciais. Em muitos casos, os processos físicos que sustentavam tais equações eram considerados uma justificativa para garantir a existência de soluções, sem, no entanto, encontrá-las.

Considerando a questão restrita ao plano, seja  $\Omega$  um conjunto aberto com fronteira  $\partial\Omega$  e uma função contínua  $h: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . O problema consistia em encontrar uma função  $u: \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C^2(\Omega)$  que verificasse a equação de Laplace  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  e que assumisse um valor pré-fixado  $h$  na fronteira  $\partial\Omega$ , ou seja,  $u = h$  em  $\partial\Omega$ .

A solução proposta por Green e posteriormente por Thompson e Dirichlet foi um dos primeiros exemplos de transformação de um problema de equações diferenciais parciais em uma questão do cálculo das variações: encontrar, equivalentemente, uma função  $v$  que minimize a equação integral  $\iint_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$ , sendo  $v$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  contínuas em  $\Omega + \partial\Omega$ .

A solução assim desenvolvida condicionava a resolução do problema à existência da função  $v$ , assumida tacitamente por Dirichlet que considerou, por questões físicas, sua evidência imediata.

Em 1854, Riemann, então aluno de Dirichlet, encontra uma integral similar em sua tese de doutorado sobre funções complexas e, de mesmo, assume a existência da função que a minimiza. Porém, muitas críticas surgiram, como as de Weierstrass, sobre a falta de rigor que envolvia o princípio, ao observar que a existência de solução para o problema na natureza não se caracterizava como uma demonstração matemática. De imediato, muitos contraexemplos surgiram para mostrar que nem sempre se alcançava o mínimo ou que o conjunto das funções dentre as quais se encontraria o mínimo era vazio. Assim, até 1870, o Princípio de Dirichlet foi colocado de lado, considerado apenas como objeto de interesse histórico.

Em setembro de 1899, Hilbert apresenta um curto trabalho de apenas cinco páginas, no qual prova que, sob certas restrições acerca da fronteira  $\partial\Omega$ , o Princípio de Dirichlet seria válido. O método utilizado baseava-se na utilização de sequências minimizantes para encontrar a solução do problema variacional e Hilbert ressaltaria que, além de sua

---

<sup>65</sup> Assim denominado por Riemann: transformação de um problema de equações diferenciais parciais em uma questão do cálculo das variações.

simplicidade e transparência, teria a vantagem de envolver apenas a propriedade de minimização, sem recorrer à natureza do problema em física. Ele retoma a questão em 1901 com uma demonstração mais simples. Nascia assim a teoria variacional moderna!



No período de 1900 - 1912, Hilbert continuou com seu interesse pelo *Princípio de Dirichlet* e se dedicou ainda a estudos sobre a resolução de equações integrais, tema ainda árduo e especificamente relacionado com o Princípio de Dirichlet.

Em 1900, o matemático sueco Fredholm, até então um desconhecido, surpreende a todos ao apresentar um método completo de resolução para as equações integrais de 2ª espécie,  $\int_a^b K(x,y)f(y)d(y) = g(x)$ . A divulgação desse resultado foi realizada em 1903 com a publicação de um artigo<sup>66</sup>, contendo os detalhes essenciais do que hoje é conhecido como a *Alternativa de Fredholm*<sup>67</sup>.

Hilbert tomou conhecimento de tais resultados em 1901, quando outro matemático sueco, Holmgren, visitou Göttingen e os expôs num de seus seminários. Percebeu então que existia uma analogia entre a teoria das equações integrais e alguns resultados da álgebra. Imediatamente o assunto assumiu sua atenção prioritária, na certeza de que poderia nesta área agir da mesma forma de quando dos trabalhos sobre o *Princípio de Dirichlet*. Entre 1904 e 1912, Hilbert publicou seis artigos sobre equações integrais que foram posteriormente coletados e publicados em 1912<sup>68</sup>.

Por outro lado, as contribuições de Hilbert e de seus alunos nesta área são contemporâneas dos trabalhos de Lebesgue, sobre a integral que lhe leva o nome (1902), e de Fréchet, sobre a teoria dos espaços métricos (1906). É importante, portanto comentar que esta junção de resultados e estudos assentaram as bases da análise funcional, cujo objetivo é o estudo de espaços com um número infinito de dimensões.

---

<sup>66</sup> Cf. FREDHOLM, 1903.

<sup>67</sup> É um dos resultados da teoria de Fredholm. Pode ser expressa de diversas formas: como um teorema da álgebra linear, um teorema das equações integrais, ou ainda um teorema dos operadores de Fredholm. Uma parte dos resultados da alternativa estabelece que um número complexo não nulo no espectro de um operador compacto é um autovalor.

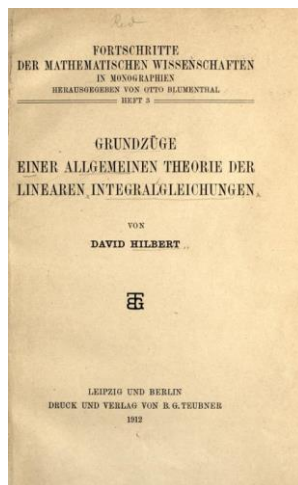
<sup>68</sup> Cf. HILBERT, 1912.

Neste mesmo período, Hilbert conseguiu importantes resultados como a decomposição de funções em séries que generalizam as séries de Fourier e desenvolve a teoria espectral (ou teoria dos espaços de Hilbert), que trata de espaços vetoriais de dimensão infinita munidos de um produto escalar, de importância ímpar para a então emergente mecânica quântica.

O espaço de Hilbert é bem acolhido por este ramo da Física por poder ser interpretado como uma generalização do espaço Euclidiano sem precisar estar restrito a um número finito de dimensões. Além disso, as noções de medições de distâncias, assim como as medições de ângulos, estão presentes devido ao fato de um espaço de Hilbert conter produto interno.<sup>69</sup>

Sem dúvida, a passagem de Hilbert pelas equações integrais se constituiu num dos seus períodos mais profícuos, não apenas em contribuições para o tema, mas também em benefício de outras áreas como a física matemática, além das que vieram a surgir na esteira dos resultados de suas pesquisas.

Figura 3: Capa original - *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* – 1912.



Fonte: <<https://archive.org/stream/grundzugeallg00hilbrich#page/n7/mode/2up>> Acesso em: 08/2016.



Mas voltemos a 1901!

A presença de Hilbert em Göttingen atrai estudantes e matemáticos do mundo todo; o

<sup>69</sup> MARTINS, 2011, op. cit., p. 138

governo alemão lhe concede o título de *Geheimrat*<sup>70</sup>; Hilbert recebe o convite para ocupar uma cátedra vaga em Berlin após a morte de Fuchs e aproveita a ocasião para condicionar sua estadia em Göttingen à criação de uma cátedra para seu amigo Minkowski. Após dura negociação, conseguiu o que queria e em 1902 os amigos se reuniram definitivamente. Seguiu-se uma época de intensas atividades voltadas para o reconhecimento de Göttingen como centro do mundo científico:

The older man now devoted more and more of his time and energy to the realization of his dream of Göttingen as the center of the scientific world. Before the turn of the century he had brought together economic leaders and scientific specialists in an organization called the Göttingen Association for Advancement of Applied Mathematics and Mechanics. As a result of the activities of this group (familiarily known as the Association) the University was gradually being ringed by a series of scientific and technical institutes – the model for scientific-technological complexes which were later to grow up around various universities in America.<sup>71</sup>

Em decorrência disso, em 1904, a presença de Hilbert já era esperada no 3º Congresso Internacional de Matemáticos que seria realizado em Heidelberg. Ele apresenta então um trabalho sobre os fundamentos da aritmética e da lógica, não exatamente uma prova de consistência, mas a indicação de um caminho a tomar. E propõe: um método para reduzir a aritmética ao estudo de certas coleções de fórmulas e símbolos extralógicos. Pela primeira vez, uma demonstração de consistência absoluta que teria por base a sintaxe e não a semântica. Hilbert se dedica intensamente a estas questões de fundamentação e, em paralelo, reassume seu interesse pela física e sua axiomatização.

## Física



Hilbert não era exatamente um novato no tocante à física! Em 1897 já tinha participado

<sup>70</sup> *Geheimrat* era um título concedido aos mais altos conselheiros das cortes imperiais, reais ou principescas do Sacro Império Romano. O termo permaneceu em uso durante os reinos monárquicos subseqüentes nos países de língua alemã da Europa até o final da Primeira Guerra Mundial. Na sua origem, o significado literal da palavra em alemão era "conselheiro confiável".

<sup>71</sup> REID, op. cit., p. 95.

O velho homem agora dedica cada vez mais do seu tempo e energia à realização de seu sonho de fazer de Göttingen o centro do mundo científico. Antes da virada do século, ele reuniu líderes econômicos e especialistas científicos em uma organização chamada Associação para o Avanço da Matemática Aplicada e da Mecânica de Göttingen. Como resultado das atividades deste grupo (familiarmente conhecida como a Associação), a Universidade foi gradualmente cercada por uma série de institutos científicos e técnicos - o modelo de complexos científico-tecnológicos que mais tarde cresceriam em torno de várias universidades na América. (tradução nossa)



de vários seminários sobre mecânica quântica juntamente com Klein e no inverno de 1898-1899, ministrou seu primeiro curso sobre o assunto em Göttingen. Ainda na sua passagem mais que frutífera pelas equações integrais, denotava-se o interesse de Hilbert pelo tema.

Podemos, num primeiro momento, classificá-lo ainda sutil, com foco na matemática que esta ciência precisava para melhor se desenvolver, um interesse que se destacava pelo 6º problema enunciado, mais um tema entre muitos que a grande sede intelectual de Hilbert queria abraçar. Porém, um olhar mais apurado perceberá que era absolutamente coerente com sua trajetória científica até então.

O trabalho de axiomatização da Geometria, finalizado imediatamente antes do Congresso de Paris, representou não apenas um sucesso matemático mas também um feito de grande significado simbólico uma vez que tratava exatamente da disciplina que foi a origem histórica do método axiomático. Além disso, observemos que o fundamento da Física clássica da época era a mecânica Newtoniana que por escolha do próprio Newton foi matematicamente estruturada a partir da Geometria Euclideana; no “*Principia*”, não há sequer uma demonstração com o uso do Cálculo Diferencial. Portanto, o método axiomático euclideano tinha suas raízes firmemente fundamentadas na Física histórica. Por outro lado, a Física de “*fin de siècle*” estava amplamente identificada com a linguagem e o próprio desenvolvimento do Cálculo Diferencial nos seus termos mais primitivos, onde abundavam as manipulações com infinitesimais e técnicas fisicamente plausíveis, (como o princípio de Dirichlet, um dos pontos a serem esclarecidos por Hilbert), que eram utilizados sem qualquer rigor matemático. A proposta de axiomatização da Física, (leia-se, mecânica Newtoniana), não seria portanto uma guinada científica aleatória, ainda que tenha sido uma transição radical na carreira de Hilbert que de agora em diante dirigia o seu foco de atenção primordialmente para questões relacionadas com a Física. A conexão entre a axiomática euclideana e o “*Principia*” de Newton é a primeira ponte nesta transição<sup>72</sup>.

A teoria da relatividade começou a tornar-se conhecida por outros cientistas que não físicos quando Minkowski proferiu a sua famosa palestra, *Raum und Zeit*<sup>73</sup>, numa conferência de cientistas alemães de diversas áreas no ano de 1908. Nesta ocasião, ele apresentou sua configuração das três dimensões usuais do espaço combinadas com uma única dimensão do tempo, formando uma variedade quadridimensional que representa o espaço-tempo, conhecida desde então como *espaço de Minkowski*. Trata-se da configuração matemática na qual a teoria da relatividade especial é mais comumente formulada, com mérito reconhecido pelo próprio Einstein. Há de se observar que, as contribuições de Minkowski enquadravam-se perfeitamente no que desejava Hilbert ao enunciar o 6º problema: é considerado um conjunto

---

<sup>72</sup> FERREIRA JR, 2003, p.66.

<sup>73</sup> Cf. MINKOWSKI, H. Setembro de 1908: «*Raum und Zeit*». *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*: p. 75–88.

de três axiomas, a partir dos quais são deduzidas as equações para a matéria em movimento num contexto relativístico, tendo o cuidado de fazer notar que cada passo do argumento seja permitido por algum dos axiomas.

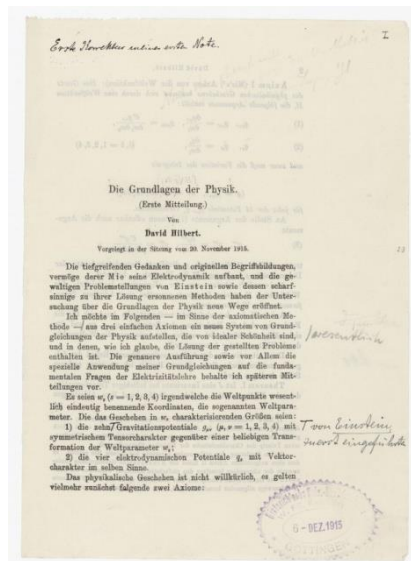
Esta forma de agir leva Hilbert, a partir de 1911, a defrontar-se com a proposta do sexto problema e deseja aplicar na física o método axiomático utilizado em geometria: isolar as proposições iniciais da teoria física, e chegar a conclusões puramente lógicas a partir de uma quantidade finita de passos. Além disso, os experimentos deveriam comprovar os resultados da teoria; a axiomatização deveria explicitar a estrutura matemática e os postulados empíricos.

Os trabalhos desenvolvidos por Hilbert nesta área se concentram em três períodos:

- 1912 – 1914: Utiliza os resultados obtidos em equações integrais para obter novas soluções da equação de Boltzmann e dar uma apresentação axiomática à teoria cinética dos gases. De modo similar, aborda o problema da teoria da radiação. Concomitantemente, cria um seminário interdisciplinar com a ajuda de assistentes de física, jovens recém - doutores que tinham a obrigação de mantê-lo atualizado sobre o conteúdo de artigos mais recentes e de ajudá-lo na preparação de seus cursos sobre temas da física. Entre 1912 e 1918, nomes como Ewald, Bernays e Nordheim assumiram este papel;
- 1915 – 1917: Segue de perto a elaboração da teoria da relatividade e tenta uma reformulação. Em julho de 1915, Einstein, convidado por Hilbert, visitou Göttingen e permaneceu por três meses participando de encontros e seminários, nos mais diversos temas. Ao final de 1915, Hilbert envia para a Academia de Ciências de Göttingen dois trabalhos para publicação, *Die Grundlagen der Physik I und II*;
- 1925 – 1926: Está relacionado aos trabalhos de Bohr, Born, Heisenberg, Jordan e Pauli, fundadores da mecânica quântica. Heisenberg chega a exaltar a importância da participação de Hilbert no desenvolvimento deste ramo da ciência.

This influence can be fully recognized only by one who studied in Göttingen during the twenties. Hilbert and his colleagues had created there an atmosphere of mathematics, and all the younger mathematicians were so trained in the thought process of the Hilbert theory of integral equations and linear algebra that each project which belonged in this field could develop better in Göttingen than in any other place. It was an especially fortunate coincidence that the mathematical methods of quantum mechanics turned out to be a direct application of Hilbert's theory of integral equations [...]<sup>74</sup>

Figura 4: Capa original - *Die Grundlagen der Physik I* – 1915  
(inclui anotações à mão feitas por Einstein)



Fonte: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de>> Acesso em: 08/2016.

Em 1924, Courant, ex-aluno e assistente de Hilbert, publica *Methoden der mathematischen Physik*<sup>75</sup>, e inclui seu nome como coautor, já que o texto recorre a grande parte de seus artigos e conferências. O livro, em dois volumes e aproximadamente mil páginas, apresenta tópicos sobre a física matemática, a teoria das equações diferenciais parciais, além de uma introdução ao método dos elementos finitos, tema a que se dedicou em posteriores trabalhos. Reeditado inúmeras vezes, o livro constitui-se em texto de referência para a área.

<sup>74</sup> REID, op. cit., p. 183.

Essa influência só pode ser reconhecida por alguém que estudou em Göttingen durante os anos vinte. Hilbert e seus colegas criaram ali uma atmosfera de matemática e todos os matemáticos mais jovens foram tão treinados no processo de pensamento da teoria de Hilbert de equações integrais e álgebra linear, que cada projeto que pertencia a este campo poderia se desenvolver melhor em Göttingen do que em qualquer outro lugar. Foi uma coincidência especialmente afortunada que os métodos matemáticos da mecânica quântica se tornassem uma aplicação direta da teoria das equações integrais de Hilbert [...] (tradução nossa)

<sup>75</sup> Métodos da física matemática.

Figura 5: Capa original - *Methoden der mathematischen Physik* – 1924.



Fonte: <<http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?PID=PPN380672502>> Acesso em: 08/2016

É certo que o projeto de Hilbert para a física prosperou e o sexto problema foi parcialmente resolvido: a mecânica quântica foi axiomatizada por Hamel em 1903; a termodinâmica, por Carathéodory em 1909; a relatividade restrita por Robb em 1914, e por Carathéodory, no mesmo ano, de maneira independente; a teoria das probabilidades por Kolmogorov em 1930 e, vinte anos depois, Wightman axiomatiza a teoria quântica dos campos.



Quando Hilbert retomou seu interesse pela física, o mundo estava prestes a sofrer grandes mudanças. A Europa viria a passar pela 1ª Guerra Mundial no período de 1914-1918 e o ambiente que se instalou favoreceria o nacionalismo radical. Muitos jovens pesquisadores se juntaram às fileiras do exército e a perda de colaboradores e alunos foi indescritível. Hilbert assumiu uma posição pacifista por não acreditar nas razões primeiras para a disputa bélica. Isso lhe custou o afastamento de alguns. No início da década de 20 tudo parece voltar ao normal em termos acadêmicos e Göttingen volta ao cenário matemático mundial.

Com algumas pequenas exceções como o *Princípio de Dirichlet* e a *Conjectura de Waring*, não se percebe uma expressiva ruptura no caminho teórico de Hilbert. Os temas aos quais se dedicou formam um entrelaçamento de interesses com um evidente fio condutor: o rigor nos procedimentos matemáticos, a busca pelos princípios gerais do raciocínio, a determinação dos axiomas necessários para a dedução dos resultados em uma teoria e, o uso sistemático do método axiomático. Mas as idas e vindas entre interesses dos mais diversos

mascaram um pouco seus propósitos finais.

## Lógica e Fundamentos



Neste momento então temos o que seria a grande década de definição quando Hilbert passa a deixar claro que a questão dos fundamentos se trata de uma proposta concreta de trabalho. Em 1917, ele apresenta uma conferência em Zurique com o título *Axiomatisches Denken*<sup>76</sup>, onde reafirma a importância da axiomática em matemática e volta às questões relativas aos fundamentos.

A partir daqui, são muitas palestras, cursos oferecidos, artigos e livros, além de conferências proferidas sobre o tema da fundamentação, dos quais iremos destacar apenas alguns de maior interesse nesta altura do texto.

No início de 1922, Hilbert profere nova conferência na Sociedade Matemática de Copenhague e participa do Seminário de Matemática da Universidade de Hamburgo. Os textos das apresentações são publicados sob o título *Neubegründung der Mathematik*<sup>77</sup>. No ano seguinte, outra conferência é apresentada em Leipzig, na Sociedade Alemã de Investigadores das Ciências Naturais e dá origem ao texto *Die Logischen Grundlagen der Mathematik*<sup>78</sup>. Nestas duas publicações, Hilbert apresenta pela primeira vez a *metamatemática*, uma nova área de estudo da matemática com problemática específica.

Mais adiante, em 1925 e com pleno amadurecimento de suas ideias, Hilbert proferiu a palestra *Über das Unendlich*<sup>79</sup> no Congresso da Sociedade Matemática da Westfália, onde lançou as bases do que hoje conhecemos por “Programa de Hilbert”: identificar todo o conhecimento matemático por um conjunto de fórmulas demonstráveis por meio de procedimentos finitistas, valendo-se não apenas do método axiomático, mas também do genético e garantindo a consistência da teoria estabelecida neste processo. A metamatemática ou teoria da prova, derivada das concepções de Hilbert, tomará por objeto os sistemas formais e fará uso apenas de procedimentos finitistas.

---

<sup>76</sup> Cf. Anexo A - Pensamento Axiomático.

<sup>77</sup> A Nova Fundamentação da Matemática.

<sup>78</sup> Os Fundamentos Lógicos da Matemática.

<sup>79</sup> Cf. Anexo B - Sobre o Infinito.

Como isso pode ser feito? [...] Os símbolos do cálculo lógico foram originalmente introduzidos para comunicar. Contudo, é consistente com nossa perspectiva finitária negar qualquer significado aos símbolos lógicos, como negamos significado aos símbolos matemáticos e declarar que as fórmulas do cálculo lógico são proposições ideais sem qualquer significado próprio. Possuímos, no cálculo lógico, uma linguagem simbólica capaz de transformar asserções matemáticas em fórmulas e capaz de expressar a dedução lógica por meio de procedimentos formais. Em exata analogia com a transição da teoria material dos números à álgebra formal, tratamos agora os sinais e símbolos de operação do cálculo lógico abstraído do seu significado. [...] A dedução material é então substituída por um procedimento formal governado por regras. A passagem rigorosa do tratamento ingênuo para o formal, portanto, é levada a efeito tanto pelos axiomas (...) como pelo cálculo lógico.<sup>80</sup>

Porém, o vigor em matemática não se mostrava o mesmo para o corpo. Hilbert estava doente, diagnosticado portador de anemia perniciosa. Os tempos já não eram como antes. Amigos como Minkowski e Hurwitz já não estavam mais nesse mundo. O mesmo ocorreu com Klein ainda no mesmo ano. Ainda assim, Hilbert se dedicava intensamente ao problema dos fundamentos com incursões na lógica e cultivava seu interesse pelas novas descobertas na mecânica quântica. Após dois anos, em 1927, Hilbert mais uma vez profere uma conferência no Seminário de Matemática da Universidade de Hamburgo, *Die Grundlagen der Mathematik*<sup>81</sup>, cujo texto mais uma vez reafirma seus propósitos numa exposição clara e didática.

No Congresso Internacional de Matemáticos realizado em 1928, na cidade de Bolonha, Hilbert lidera uma delegação de 67 matemáticos alemães convidados e nele expõe uma série de questões acerca da fundamentação da lógica e da aritmética. Sua ida teve um caráter polêmico já que muitos matemáticos alemães, liderados por Bieberbach e apoiados por Brouwer, se recusaram a participar. Hilbert defende a universalidade da matemática acima das diferenças políticas, afirmando que a matemática não conhece raças e que para os matemáticos, o mundo todo é um único país.<sup>82</sup>

Neste mesmo ano (1928), Hilbert publicou, em parceria com Ackermann, um pequeno livro sobre os avanços obtidos na construção da lógica matemática e o estudo de suas propriedades básicas – *Grundzüge der theoretischen Logik*<sup>83</sup>.

---

<sup>80</sup> HILBERT, 1925 *apud* CARNIELLI, W.; EPSTEIN, R. L., 2009, p.76.

<sup>81</sup> Cf. Anexo C - Os Fundamentos da Matemática.

<sup>82</sup> REID, op. cit., p. 188.

<sup>83</sup> Os Fundamentos da Lógica teórica.



Hilbert se aposentou em 1930, aos 68 anos, idade da aposentadoria obrigatória, recebendo homenagens de todas as partes, mas continuou ainda por algum tempo trabalhando em suas pesquisas e proferindo conferências. Neste ano ainda, recebe o título de cidadão de honra de Königsberg durante um Congresso da Sociedade Alemã de Cientistas e Físicos, no qual proferiu a palestra *Naturerkennen und Logik*<sup>84</sup>, expondo sua visão sobre o ofício do matemático e o estado das pesquisas em fundamentos. Hilbert repetiria a parte final desta conferência na rádio local<sup>85</sup> e a gravação de sua última frase se conserva até hoje: *Wir müssen wissen. Wir werden wissen.*

Seu último artigo publicado sobre a questão dos fundamentos seria *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre*<sup>86</sup>, oriundo de uma palestra proferida na Sociedade Filosófica de Hamburgo. Neste texto, Hilbert pretende apresentar uma justificativa filosófica para o finitismo e a axiomática dos elementos ideais.

Em 1932, Hilbert publica ainda em parceria com Cohn-Vossen, o livro *Anschauliche Geometrie*, mundialmente conhecido após a sua tradução para o inglês sob o título *Geometry and Imagination*. A obra apresenta a geometria de forma visual e intuitiva.



O partido Nacional Socialista de Hitler ascende ao poder em 1933. Quase que imediatamente foram promulgadas leis antissemitas e a Universidade de Göttingen foi particularmente atingida. Dali em diante, a maioria dos professores se despediu da Alemanha, partindo para outros países: Courant, Landau e Weyl, da matemática; Noether, Blumenthal, assistentes de Hilbert; Born, da física.

Em 1934 é publicado o primeiro volume da obra *Grundlagen der Mathematik*, elaborada

---

<sup>84</sup> Conhecimento natural e Lógica.

<sup>85</sup>Cf. <<https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/david-hilberts-radio-address-german-transcription> > Acesso em: 14/03/2018.

<sup>86</sup> Os Fundamentos da Teoria Elementar dos Números.

em parceria com Bernays que foi seu assistente de 1917 até 1930. Em 1939, é publicado o segundo volume. Trata-se no primeiro, de uma apresentação de sua teoria da prova; no segundo, considerações acerca das mudanças após os trabalhos de Gödel e Gentzen. No cap. 4, apresentaremos um resumo dos temas abordados.



A velhice e a solidão acadêmica tiveram grande impacto em Hilbert que foi gradualmente perdendo a memória, a criatividade e até mesmo o interesse pela matemática. A 2ª Guerra Mundial iniciou-se em 1939, o que significou novas partidas de alunos e professores que restavam ainda em Göttingen.

Em 1942, por ocasião do seu 80º aniversário, a Academia de Berlim decidiu atribuir um prêmio especial a Hilbert. No dia da votação do prêmio, Hilbert levou um tombo em plena rua, o que lhe provocou sérios problemas de saúde.

Em 14 de fevereiro de 1943, Hilbert deixou nosso mundo

## 2.2 MARCOS IMPORTANTES

Após nossa breve exposição dos caminhos tomados por Hilbert, nos cabe aqui observar um pouco mais especificamente os temas por ele abordados e classificados por período<sup>87</sup>:

- 1885 – 1893: teoria dos invariantes;
- 1894 – 1899: teoria dos números algébricos;
- 1899 – 1903: fundamentos da geometria;
- 1904 – 1909: análise;
- 1912 – 1914: física teórica;
- 1918 em diante: fundamentação da matemática.

No entanto, pela forma como desenvolve as pesquisas que são de seu interesse, consideramos que a questão fundacionalista já constava de seus planos desde o tempo da teoria

---

<sup>87</sup> FREUDENTHAL, 1973 *apud* ZACH, 2001, p.1.



dos invariantes, de 1890 em diante, até por uma questão de amplo uso do método axiomático.

Observe-se que este método, cujo uso se inicia em seus trabalhos na teoria dos invariantes, é aprimorado e levado a extremos de abstração quando do *Grundlagen der Geometrie* (1899), caracterizando o começo de um programa de pesquisa que Hilbert perseguiu até o fim de seus dias. O rigor proporcionado pela busca da consistência das teorias matemáticas permeia toda sua obra voltada para os fundamentos.

Não há acaso na escolha de Hilbert. Sempre parecia haver uma seta luminosa apontando para a mesma direção: rigor e sistematização; método axiomático; verdade e fundamentação.



As questões voltadas para a fundamentação da matemática se destacam na obra de Hilbert em três grandes momentos:

- i. Até 1917 – Fase inicial de aproximação ao tema em vários ramos da matemática e da física;
- ii. 1917 – 1924 - Inclusão de uma investigação completa da lógica;
- iii. 1924 - 1930 – A proposição de um programa formalista, na tentativa de obter uma prova de consistência absoluta para a aritmética.

Esta subdivisão nos permite destacar e rerepresentar os principais trabalhos fundacionais de Hilbert, como se segue. Alguns deles serão mais profundamente abordados em posterior capítulo:

1889 – 1900<sup>88</sup>: Cursos sobre geometria e o conceito de número que culminaram com a publicação do *Grundlagen der Geometrie* em 1899 e *Über den Zahlbegriff* em 1900. A consistência da aritmética está diferencialmente sempre presente nos trabalhos deste período até o enunciado do seu 2º problema em 1900.

1900<sup>89</sup>: *Mathematisches Probleme* – 2º Congresso Internacional de Matemáticos; Paris.

---

<sup>88</sup> HILBERT, 1894a, 1894b, 1897b, 1898/99, 1899a, 1900a, 900 b.

<sup>89</sup> Ibidem, 1900a.

1904<sup>90</sup>: *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* – 3º Congresso Internacional de Matemáticos; Heidelberg.

1904 – 1917<sup>91</sup>: Hilbert continua se dedicando à questão dos fundamentos e em 1905 ministra um curso denominado *Logische Prinzipien des mathematisches Denken*. Além deste, outros cursos são oferecidos com as mesmas características.

1917<sup>92</sup>: *Axiomatisches Denken* – Conferência apresentada na Sociedade Matemática Suíça; Zurique.

1917 - 1922<sup>93</sup>: No final de 1917, Hilbert oferece o curso *Prinzipien der Mathematik* sobre lógica matemática. É o início de sua parceria com Bernays. Este seria o primeiro de uma série de cursos em que apresentaria o desenvolvimento de sua teoria da prova e seu programa finitista de consistência. Em 1921, Hilbert repetiria o feito em palestras ministradas em Copenhague e Hamburgo.

1922<sup>94</sup>: *Die logischen Grundlagen der Mathematik* – Palestra apresentada na Sociedade Alemã de Cientistas Naturais em Leipzig. Pela primeira vez, os projetos de Hilbert para a fundamentação da matemática foram inteiramente divulgados fora de Göttingen.

1925<sup>95</sup>: *Über das Unendliche* – Conferência apresentada para a Sociedade Matemática da Westfália onde lança formalmente seu programa de fundamentação.

1927<sup>96</sup>: *Die Grundlagen der Mathematik* – Palestra apresentada Seminário de

---

<sup>90</sup> Ibidem, 1905a.

<sup>91</sup> Ibidem, 1905b, 1908, 1910, 1913.

<sup>92</sup> HILBERT, 1918.

<sup>93</sup> Ibidem, 1917, 1920a, 1920b, 1921/1922, 1922, 1922/1923.

<sup>94</sup> Ibidem, 1923.

<sup>95</sup> Ibidem, 1926.

<sup>96</sup> Ibidem, 1927.

Matemática da universidade de Hamburgo.

1928<sup>97</sup>: *Probleme der Grundlegung der Mathematik* – 3º Congresso Internacional de Matemáticos; Bolonha. Neste mesmo ano é publicado o texto *Grundzüge der theoretischen Logik*.

1930<sup>98</sup>: *Naturerkennen und Logik* – Sociedade Alemã de Cientistas e Físicos, Königsberg; *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre* – Sociedade Filosófica de Hamburgo.

1931<sup>99</sup>: *Beweis des tertium non datur* – Sociedade Científica de Göttingen. Esta palestra teve um efeito decisivo para as pesquisas de Gentzen em teoria da prova que culminaram com sua prova de consistência da aritmética em 1936.

1934 e 1939: Publicação do *Grundlagen der Mathematik* em colaboração com Bernays.



Mas então, por que fundamentar a matemática?

É o que veremos a seguir.

---

<sup>97</sup> Ibidem, 1928.

<sup>98</sup> Ibidem, 1930, 1931a.

<sup>99</sup> Ibidem, 1931b.

### 3 A SAGA DOS FUNDAMENTOS - ACHADOS & PERDIDOS<sup>100</sup>



ATO Nº 2

[...] a matemática não se desenvolve por acumulação contínua de descobrimentos e inventos individuais em qualquer momento, mas ao contrário, como o resultado de um trabalho coletivo, socializado e realizado por comunidades de matemáticos, com base em conceitos, métodos e valores partilhados que, de conjunto, Kuhn os chamou de paradigmas.<sup>101</sup>

No capítulo anterior, percorremos juntos os caminhos tomados por Hilbert em direção a uma proposta de fundamentação para a matemática. É de se esperar agora que possamos identificar claramente o que se espera da palavra “fundamentos” e o seu significado em relação à matemática ou ao que os matemáticos pensam. As diferenças ficam por conta do aspecto que se deseja abordar.

De acordo com Alcaraz (2003, p. 168), temos as seguintes possibilidades de conceituação: em primeiro lugar, trata-se dos princípios que servem de base para as teorias matemáticas; em segundo, se refere às condições de possibilidade da matemática como ciência; e, por último, um significado mais geral como a explicação das origens do conhecimento matemático. Estas conotações não são excludentes e podem conviver parcialmente em alguns períodos, como pode ser identificado observando-se as motivações mais significativas que impulsionaram o desenvolvimento da matemática.

No período que vai da 2ª metade do séc. XIX até a primeira metade do séc. XX, a questão da fundamentação da matemática passa por uma primeira etapa que corresponde a elucidar os conceitos e identificar princípios, além da introdução do rigor em métodos e técnicas: a preocupação com a caracterização dos reais, a introdução de métodos não construtivos em demonstrações e o surgimento da teoria dos conjuntos. Uma segunda etapa se iniciou com as tentativas de redução da matemática à lógica com Frege e Russel, o aparecimento dos paradoxos<sup>102</sup> na teoria dos conjuntos e as tentativas de superação, o que inclui a polêmica que

<sup>100</sup> Denominação em parte “emprestada” de DAVIS & HERSH (1985).

<sup>101</sup> MARTINS, 2005, p.170.

<sup>102</sup> **Paradoxo.** Do grego *para* e *doxa*, opinião. Estado de coisas (ou declaração que se faça sobre elas), que aparentemente implica alguma contradição, pois uma análise mais profunda faz desvanecê-la; **Paradoxo.** Um pensamento que vai contra a opinião ou contra o pensamento. Temos, assim, dois sentidos diferentes. Ir contra a opinião (*dóxa*) não tem nada de condenável. Isso é claro, não prova que tenhamos razão (um paradoxo pode ser

se estabeleceu entre Hilbert e Brouwer e a proposta do programa formalista.

Queremos destacar que a marcação temporal é significativamente coerente com as mudanças conceituais que ocorreram no séc. XIX acerca do método científico, considerado o verdadeiro para se conhecer e explicar a realidade. Antes disto, a confiança em relação à ciência era tanta que a educação, antes baseada apenas na cultura humanística, teve seus currículos reformulados visando a inclusão de estudos científicos. Esta supervalorização até proporcionou a elaboração de um sistema filosófico que a justificava, o positivismo de Augusto Comte<sup>103</sup>.

O termo “positivo” a ele se deve e surgiu pela primeira vez na sua obra de 1855, *Apelo aos Conservadores* (1855), na qual descreve o significado do que considera as três etapas pelas quais o ser humano passa em relação às suas concepções e valorização da vida: teológica,

---

verdadeiro ou falso), mas pelo menos sugere que não nos contentemos com repetir o que se diz. Por exemplo, quando Oscar Wilde escreve que “A natureza imita a arte”: é um paradoxo já que a maioria das pessoas acredita que a arte imita a natureza, mas pode ser esclarecedor (ele nos dá a entender que nossa visão da natureza é influenciada pela dos artistas: “Vocês notaram como a natureza, de uns tempos para cá, se parece com uma pintura impressionista?”, perguntava Oscar Wilde). Ou quando Talleyrand aconselhava: “Cuidado com o primeiro movimento: é o correto.” É um paradoxo (por que tomar cuidado com o que é correto?), mas que nos faz refletir: se o primeiro movimento é o correto, no sentido moral do termo, ele pode se revelar incorretíssimo num outro registro (por exemplo, político ou diplomático). Note-se que a maioria dos paradoxos provém de um duplo sentido atribuído a pelo menos uma das palavras utilizadas: a fórmula, que parece absurda de acordo com um dos sentidos, pode se revelar profunda de acordo com outro. No entanto, há paradoxos verdadeiros, que vão verdadeiramente contra a opinião dominante e não jogam com nenhum duplo sentido. Por exemplo, quando Spinoza escreve que não é porque uma coisa é boa que nós a desejamos; ao contrário, é porque a desejamos que a consideramos boa (*Ética*, III, 9, escólio). Todos nós temos a sensação do contrário. Isso não prova que Spinoza esteja errado, nem que tenha razão. Mas a palavra paradoxo também tem um sentido puramente lógico: é um pensamento que vai contra o pensamento, dizia eu. Em outras palavras, é uma contradição ou uma antinomia. (1)

**Paradoxo.** Contradição ou assunção contra intuitiva ou achado. Os paradoxos de primeira espécie são de duas classes: lógicos e semânticos. Os primeiros foram encontrados na lógica e na teoria dos conjuntos no começo do século XX, e seu estudo estimulou importantes avanços, como a teoria dos tipos e a teoria axiomática dos conjuntos, que se situam para além do escopo da presente obra. Alguns dos paradoxos semânticos eram conhecidos e têm sido investigados há séculos. O mais famoso é o *paradoxo do mentiroso*, que pode ser tratado por meio da distinção linguagem-metalinguagem. Quanto aos paradoxos do segundo tipo – resultados contra intuitivos – a física quântica está carregada delas. Basta lembrar o EPR\* e os experimentos mentais de *Schrödinger, gato de*. O primeiro foi resolvido, mas os outros continuam sendo água para o moinho da indústria acadêmica. A “*lógica*” *indutiva* também se apresenta marcada pelos paradoxos: o *paradoxo do corvo* e o *paradoxo do verzul*. (2)

\* Iniciais de Einstein, Podolsky e Rosen, autores de um artigo publicado em 1935, que aceita ser a mecânica quântica correta, mas não completa (N. do T.)

(1) COMTE-SPONVILLE, André. *Dicionário Filosófico*. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

(2) BUNGE, M. *Dicionário de Filosofia*. Tradução de Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectivas, 2002. (Coleção Big Bang)

**Dicionário de Filosofia.** Organizado por Sérgio Biagi Gregório.

<<http://www.sergiobiagigregorio.com.br/filosofia/dicionario-de-filosofia.htm>> Acesso em: 15/11/2017

<sup>103</sup> Auguste **Comte** (1798-1857) foi um filósofo francês. Considerado o fundador do positivismo, corrente que propõe uma nova organização social e da Sociologia.

metafísica ou abstrata e por fim, a positiva. Esta última etapa seria a fase científica final, em que os fenômenos do mundo são justificados por meio de explicações científicas, fundamentadas em observações, experimentos e comparações. Comte acreditava ainda que a teologia e a metafísica deveriam ser substituídas por uma hierarquia de ciências: a matemática seria a base e a sociologia, o ápice.

Mas a transição dos séculos apresentou muitas novidades assustadoras, o início de teorias não clássicas como as geometrias não euclidianas, a mecânica quântica e os transfinitos de Cantor, além do surgimento dos paradoxos “pedra no sapato” relativos à teoria dos conjuntos, o que muito contribuiu para colocar em questão a certeza e o determinismo científico. É neste momento, portanto, que se encontra o terreno fértil para uma intensa discussão acerca dos fundamentos da matemática.

Nos ocuparemos, a seguir, de ressaltar as características mais importantes do desenvolvimento da matemática que levaram ao que se denomina usualmente na literatura correlata como “a crise dos fundamentos”, acrescentando ao caminho percorrido por Hilbert, um pouco da paisagem, justificando de certa forma sua escolha de trilhas alternativas.

Crises e incompletudes são, aqui para nós, a mesma coisa: situações em que a linguagem aceita por um coletivo evidencia a sua impossibilidade de abraçar ideias novas, e entra em conflito com a expectativa da completude, totalidade.<sup>104</sup>

### 3.1 O GRANDE E INTRINCADO PALCO FUNDACIONALISTA



Estamos na primeira metade do séc. XIX, carregado de heranças, em intensa atividade científica, com uma nova forma de fazer já estabelecida. A ciência já se caracteriza pela exatidão e previsão fundadas no cálculo matemático e modelos geométricos. As formulações teóricas já se encontram em maior grau de complexidade no que concerne a abstração. Como testemunho disto, podemos citar o desenvolvimento da teoria dos números com Gauss, Kummer e Dedekind, ou a teoria das equações com Abel e Galois.

O terreno está pronto e as sementes espalhadas por todos os cantos. As novidades (nem

---

<sup>104</sup> CAFEZEIRO et al, 2017, p. 167.

tão novas assim, mas com abordagens mais contundentes!) se iniciam na geometria e, por consequência, na análise. Começemos pela primeira.

## Geometrias não euclidianas



Ao final do séc. XVIII, os *Elementos*, de Euclides, e os *Principia*, de Newton, davam ao conhecimento científico uma base imponente.

No primeiro caso, uma organização ampla e sistemática de descobertas diversas de vários pensadores gregos do período clássico, apresentada numa forma axiomático-dedutiva, a primeira axiomatização da história da matemática, considerada, até então, o modelo da verdade, rigor e certeza, tendo-se transformado, durante vários séculos, no próprio paradigma da ciência. Nomeadamente, Newton não hesita em considerá-la como modelo para a construção de toda teoria científica que se queira rigorosa e os seus *Principia* inspiram-se neles.

Mas no século seguinte, estamos em plena busca pelo rigor como característica definitiva das ciências formais e esta perspectiva iria proporcionar um olhar mais apurado sobre o sistema euclidiano, trazendo à luz que o método utilizado apela para o uso de termos não convenientemente definidos e resultados considerados válidos com o suporte da intuição.

A teoria, que tem por base cinco postulados considerados como verdades evidentes e aceites sem críticas por sua relação com a experiência sensível do espaço físico, é desenvolvida por meio de procedimentos dedutivos não explicitamente definidos, já que são empregadas certas formas de raciocínio consideradas usualmente como corretas. E assim, a axiomática empregada é testemunha da parceria entre uma teoria dedutiva e a crença na evidência de fatos sobre as quais repousa.

Mas o surgimento das geometrias não euclidianas no séc. XIX mostrou que se poderia negar um dos postulados da teoria euclidiana sem, no entanto, obter contradições: o 5º postulado, ou postulado das paralelas, cujo enunciado não parece evidente e que foi perseguido pelos matemáticos e cientistas por séculos, que até então se esforçavam por deduzi-lo a partir de outros postulados ou axiomas do sistema euclidiano:

E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.<sup>105</sup>

---

<sup>105</sup> EUCLIDES, 2009, p.98.

Na versão equivalente de Playfair (1795) e de enunciado mais conhecido temos: “Por um ponto não pertencente a uma reta, se pode traçar uma, e somente uma, reta paralela a esta”.

Os primeiros a suspeitar da independência de tal postulado em relação aos demais foram Gauss, Bolyai e Lobachevsky. Todos os três chegaram às suas conclusões analisando o quinto postulado através da forma de Playfair e considerando as possibilidades da não existência da reta paralela ou da existência de infinitas retas paralelas à reta dada.

Gauss foi o primeiro a descobrir uma nova geometria e estudar as superfícies de curvatura negativa constante, provando que se considerarmos como reta uma curva de menor comprimento que liga dois pontos, então a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície é menor que dois ângulos retos ( $180^\circ$ ) e a diferença entre essa soma e dois retos é proporcional à sua área.<sup>106</sup> A constante de proporcionalidade é precisamente o valor absoluto da curvatura e tais curvas são chamadas geodésicas<sup>107</sup>. Como Gauss não publicou nada, o tema ficou encoberto ainda por alguns anos.

Na Hungria, Bolyai, que se dedicava ao problema já há alguns anos, desenvolveu um modelo de geometria obtido a partir de uma possível negação do 5º postulado e o publicou em 1823, como apêndice em um dos livros de seu pai, também matemático. Simultânea e independentemente de Bolyai, o russo Lobachevsky desenvolveu o mesmo tipo de modelo, publicando suas conclusões em 1829 na revista *Kazan Bulletin*, da Universidade de Kazan<sup>108</sup>, onde lecionava. Neste modelo, o 5º postulado é substituído pela existência de infinitas retas distintas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto fora desta. Fechando o ciclo, Riemann apresentou, em 1853, outro modelo de geometria em que se considera a não existência de reta paralela nas condições requeridas. Em 1871, Klein deu forma e nome a estes três tipos de modelos de geometria: a hiperbólica (de Bolyai-Lobachevsky), a parabólica (de Euclides) e

---

<sup>106</sup> DO CARMO, 1987.

<sup>107</sup> No plano, a **geodésica** é a menor distância que une dois pontos e, para pequenas variações da forma da curva, o seu comprimento é estacionário. A representação da geodésica em um plano representa a projeção de um círculo máximo sobre uma esfera. Assim, tanto na superfície de uma esfera ou deformada num plano, a reta é uma curva, já que a menor distância possível entre dois pontos somente poderá ser curvada, pois uma reta necessariamente precisaria, permanecer sempre num plano, para ser a menor distância entre pontos. Do ponto de vista prático, na maioria dos casos, a geodésica é a curva de menor comprimento que une dois pontos. Em uma "geometria plana" (espaço euclidiano), essa curva é um segmento de reta, mas em "geometrias curvas" (geometria riemanniana), muito utilizadas por exemplo na teoria da relatividade geral, a curva de menor distância entre dois pontos pode não ser uma reta.

<sup>108</sup> A **Universidade Estatal de Kazan (região do Volga)** está localizada em Kazan, na República do Tartaristão, Rússia. É a principal universidade pública da cidade. Foi fundada em 1804 com a denominação Universidade Imperial de Kazan.



a elíptica (de Riemann).

Mas a importância então vai além dos novos modelos de geometria em si. O que se destaca é a quebra do paradigma da infalibilidade da geometria euclidiana e a fragilidade da intuição enquanto fundamento da verdade em ciências. Não devemos esquecer que a Europa do séc. XIX ainda era dominada pela filosofia kantiana que tratava o espaço como uma realidade intuitiva e não como empírica, sendo então a geometria euclidiana considerada como a geometria do espaço. A existência de outras geometrias indicava a possibilidade de que a geometria do espaço não fosse uma verdade *a priori* e que a geometria que deveria ser utilizada no estudo dos fenômenos físicos fosse aquela que melhor se adequasse aos dados obtidos a partir da experimentação. Que problema! No mínimo seria preciso então uma revisão daquela filosofia, o que seria contrário aos interesses estabelecidos.

Nem Bolyai nem Lobachevsky foram reconhecidos em vida pelo trabalho que produziram e por muitas décadas ainda, as geometrias não euclidianas permaneceram como uma área obscura da matemática. Prevalecia a filosofia de Kant.

Mas, a porta da incerteza e da dúvida fora aberta em qualquer campo das ciências em geral, incluindo-se aí a matemática. Como consequência, opera-se uma mudança na visão do que é necessário para “demonstrar”: os axiomas não precisam mais estar obrigatoriamente atrelados à representação da realidade e a dedução não está mais refém da intuição do espaço. O objeto de estudo da matemática se livra de sua relação com o real e adquire o status de objeto de puro pensamento, em plena liberdade. A única condição de existência de objeto e validade de métodos a ser respeitada passa a ser a garantia de não contradição. Ponto para o rigor e a verdade fundamentada em provas formais e justificativas!

Em paralelo e com motivação extra pelo ocorrido em geometria, temos a questão da análise.

### **Fundamentação da Análise**



O que precedeu o que hoje denominamos de análise foi o desenvolvimento do cálculo infinitesimal por Newton e Leibnitz ao final do séc. XVII – início do séc. XVIII, “basicamente constituído de um conjunto de regras especiais e técnicas para diferenciar e integrar, juntamente com a geometria de coordenadas desenvolvida desde Descartes.”<sup>109</sup> Seus métodos inovadores

---

<sup>109</sup> BARONI; GARCIA, 2014, p. 13.

porém, geraram muitas controvérsias sobre a natureza dos infinitesimais, por conta da formulação apresentada e que continha muitas inconsistências em suas teorias fundamentadas na geometria. Isto fez com que seu desenvolvimento estivesse na vanguarda da pesquisa matemática do século XVIII.

A família Bernoulli, que se destacou por ter tido oito membros em pesquisa nas áreas de matemática e física, foi responsável por grande parte do progresso inicial no cálculo. Graças à sua influência, Euler, amigo e aluno, teve esta área como foco principal de seu trabalho, desenvolvendo o moderno cálculo diferencial. Suas contribuições incluem o esclarecimento de questões metafísicas dos infinitamente pequenos e do *infinito atual*<sup>110</sup>, formalizando o conceito de limite. No primeiro volume de sua obra clássica *Introductio in Analysin Infinitorum*<sup>111</sup>, publicada em 1748, Euler aborda essencialmente processos infinitos e introduz as bases da análise matemática, uma revolução em seu tempo.

No mesmo período, D'Alembert e Lagrange também se dedicavam ao cálculo infinitesimal. O primeiro acreditava que deveria ser fundamentado na ideia de limite, porém aborda a questão por meio de grandezas geométricas, rejeitando a ideia de *infinito atual*. Já o segundo, pensava que poderia eliminar a necessidade do uso de limites ou infinitésimos, rejeitando completamente a teoria dos limites de Newton e D'Alembert e dedicando-se à tentativa de fundamentar o cálculo por meio da álgebra. Muitos outros ainda deram importantes contribuições ao tema com trabalhos em que aplicavam os métodos da análise em disciplinas das ciências naturais como a mecânica dos fluidos e dos corpos celestes, e a dinâmica.

O fato é que esta intensa procura por fundamentação em análise provocou um destacado interesse no desenvolvimento de novas teorias que pudessem abolir de vez a intuição geométrica como fator determinante e considerassem demonstrações essencialmente analíticas, formais e rigorosas, tendo desta vez por base outra entidade - **o número**. Para tanto, seria preciso encontrar uma linguagem adequada para lidar com os conceitos dependentes da caracterização do infinito.

Esse processo de busca e pesquisa viria a se consolidar no séc. XIX com trabalhos de muitos, em especial, Cauchy, Bolzano, Weierstrass, Cantor e Dedekind.

---

<sup>110</sup> Trata-se do infinito que pode ser concebido como uma entidade "completa", "acabada". O *infinito atual* não é um processo, é ele próprio um número.

<sup>111</sup> Introdução à Análise do Infinito.



No início do séc. XIX, o francês Cauchy é um dos primeiros, e talvez o mais importante, a retomar a questão da análise de forma sistemática ao defender e divulgar veementemente a nova forma rigorosa de se fazer matemática. Embora tenha desenvolvido trabalhos em diversas áreas, como a teoria de funções complexas, álgebra (permutações), teoria dos erros, mecânica celeste e física matemática, seu nome está associado definitivamente à análise, pela contribuição que deu aos seus fundamentos. Na verdade, foi sua obra nesta área como um todo, e não seus elementos separadamente, que a fizeram tão diferente da de seus predecessores.

Em 1816, Cauchy foi contratado para lecionar análise na *École Polytechnique de Paris*, onde nos próximos quinze anos, produziu grande parte de seus trabalhos ligados à análise. Em sua obra *Cours d'analyse de L'École Polytechnique* (1821), ele fundamenta os métodos do cálculo infinitesimal, obtendo desta forma uma formalização rigorosa tendo por base a noção de limite e permitindo um novo tratamento matemático do infinito. Quanto a este último, Cauchy investigou ainda possíveis respostas para uma série de paradoxos existentes desde o tempo de Zenão<sup>112</sup> e tornou fundamental o conceito de integral como limite de uma soma.

Mas a questão da análise ainda não teria um desfecho definitivo.

Para Cauchy, “uma quantidade variável torna-se infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce indefinidamente de maneira a convergir para o limite zero,”<sup>113</sup> E este seria ainda um ponto de incompreensão.

Euler também defendia que uma quantidade infinitamente pequena (ou evanescente) era simplesmente algo que viria a ser zero, mas também recebeu críticas. E assim foi com outros que abordaram a questão. No caso de Cauchy, muitos defendem que a centralidade da sua obra

---

<sup>112</sup> **Zenão de Eleia** nasceu em 488 a.C. na cidade de Eleia, localizada na Magna Grécia, atual Itália. Pertenceu a Escola Eleática, local em que desenvolveu seu pensamento. Foi discípulo de Parmênides (510-470 a.C.), defendendo a filosofia de seu mestre sobre os estudos do ser, da razão e da lógica. Para o filósofo grego Aristóteles, ele foi o criador do método dialético. O filósofo elaborou diversos paradoxos, sendo que o mais importante é aquele que ficou conhecido como “Paradoxo de Zenão”, sem dúvida seu principal pensamento. Esse conceito estava relacionado com a corrida de Aquiles e de uma tartaruga. Na mitologia grega, Aquiles foi um herói grego muito veloz. No entanto, no Paradoxo de Zenão, ele perderia a corrida para a tartaruga. Com isso, ele quis demonstrar a inexistência do movimento, bem como do espaço, do tempo e da velocidade. A partir da lógica, ele comprovou o equívoco das coisas, o que nos leva a uma conclusão errônea, que por sua vez, parece ser verdadeira. Ou seja, a ilusão geraria esse pensamento errôneo sobre o mundo. Assim, procurou demonstrar o absurdo e a falsidade gerada pelas impressões humanas. A partir da dialética, ele criou diversos argumentos demonstrando a inexistência do movimento e foi contra o pensamento desenvolvido pelos pitagóricos, em que a multiplicidade do ser e do mundo seria explicada através dos números.

<sup>113</sup> Ibidem, p.32.

está no conceito de limite e os infinitésimos seriam apenas abreviações úteis para as variáveis que têm limite nulo. E ainda que, mesmo atribuindo certa simplicidade aos infinitésimos, Cauchy redefiniu esse conceito, sobretudo em relação às concepções de Euler e Leibniz, para quem os infinitésimos eram constantes. Para Cauchy, essas quantidades eram variáveis.

Mas mesmo assim, apesar dos avanços que conseguiu na direção do rigor pretendido, os seus infinitésimos também não foram aceitos, pois ainda se apoiavam em ideias e conceitos em vigor desde o século XVIII. Além disso, o atrelamento dos infinitésimos à geometria (considerada pouco rigorosa) não havia sido totalmente superado.

Essa questão só viria a ser resolvida mais a seguir quando a base dos conceitos foi dos infinitésimos para os limites e, conseqüentemente, da geometria para os números.

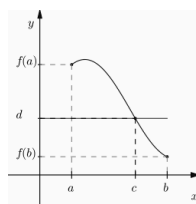


Enquanto isso, outros envolvidos como Bolzano, trilhavam caminhos paralelos com contribuições importantes e decisivas. Seu resultado principal foi a demonstração do teorema do valor intermediário<sup>114</sup> (1817), de forma mais rigorosa que Gauss. Sua prova puramente analítica, conhecida hoje como teorema de Bolzano<sup>115</sup>, é considerada por alguns autores como a origem da aritmetização da análise, que veio a culminar com a caracterização abstrata do conceito de número. O fato é que tal prova mostrou a necessidade de uma definição adequada de número real.

Além disso, é importante dizer, mais adiante, em 1851, Bolzano foi o primeiro matemático a efetuar um tratamento eminente matemático do infinito e a fundamentar a noção de *infinito atual* em sua obra *Paradoxien des Unendlichen*, uma crítica direta à concepção dominante do infinito potencial. Para tanto, introduziu o conceito de conjunto com um todo, sem ser necessário pensar isoladamente em cada um dos seus elementos, definindo também critérios de comparação entre cardinais infinitos.

---

<sup>114</sup> Se uma função real  $f$  definida no intervalo  $[a;b]$  é contínua e  $d \in [f(a);f(b)]$  então existe  $c \in [a;b]$  tal que  $f(c) = d$ .



<sup>115</sup> Se uma função real  $f$  definida no intervalo  $[a,b]$  é contínua e  $f(a) \cdot f(b) < 0$  então existe  $c \in [a,b]$  tal que  $f(c) = 0$ . (caso particular o teorema do valor intermediário para  $d = 0$ .)

Mas, voltemos aos números.



O que uma derivada realmente é? Resposta: um limite. – O que uma integral realmente é? Resposta: um limite. – O que uma série infinita realmente é? – Resposta: um limite. Isso nos leva a: - O que é um limite? Resposta: um número. E, finalmente, a última questão: - O que é um número?<sup>116</sup>

No ponto em que estamos de nosso percurso, as abordagens do conceito de número real eram bastante distintas e podem ser classificadas em três vias: a de que a análise foi definitivamente estabelecida na noção de quantidade contínua; a de que a noção de quantidade poderia ser trocada por uma construção estritamente aritmética dos números reais, ou seja, uma construção tendo por base a noção de número natural ou racional; e, por fim, a de que os conceitos fundamentais da análise deveriam ser estruturados de forma puramente formal.

Como podemos constatar, a primeira de tais abordagens pode ser identificada no trabalho desenvolvido por Cauchy. A segunda dentre elas, caracteriza o que se considera como o movimento de aritmetização da análise, em que todo o peso da verdade das afirmações passa a ser colocado sobre os ombros da aritmética dos números naturais – a chamada redução da análise à aritmética. Já a terceira, nos leva para a aplicação diferenciada que Hilbert faz do método axiomático na construção do contínuo numérico.

Os principais representantes de nossa segunda abordagem foram Weierstrass, Cantor e Dedekind, que propuseram a utilização de conjuntos infinitos em suas abordagens.



Weierstrass, juntamente com Kummer e Kronecker, era então um dos responsáveis pela reputação da Universidade de Berlim como uma das mais prestigiadas para o estudo da matemática, onde dedicou a maior parte de sua vida ao estudo da teoria das funções.

Partindo da definição de função de Dirichlet, Weierstrass produziu inúmeros resultados acerca de vários tópicos como a continuidade de funções numéricas, testes de convergência de séries, propriedades das funções periódicas e das elípticas, cálculo das variações, além do desenvolvimento da teoria das formas bilineares quadráticas.

---

<sup>116</sup> HAIRER; WANNER, 2008, p. 170-171.

No caso da continuidade de funções num determinado intervalo, os teoremas demonstrados repousavam sobre as propriedades do contínuo numérico real. Seria portanto imprescindível estabelecer uma teoria de construção para os reais, fundamentando seus próprios resultados. Weierstrass admite a existência dos naturais como totalidade e se propõe então a construir os reais a partir dos naturais por meio de aproximações sucessivas e com a ajuda das operações da aritmética.

Para ele, o número era um *ajuntamento* de certos elementos. Por exemplo, inteiros positivos seriam o ajuntamento de *coisas idênticas em pensamento*, ou seja, unidades de mesma espécie; racionais positivos seriam o ajuntamento de unidades básicas (denotada por 1) e *partes exatas* de tais unidades ( $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbf{IN}$ ), e as *quantidades numéricas (irracionais) arbitrárias*, entendidas semelhantemente, como ajuntamento infinito de elementos de mesma espécie. Ou seja, uma “quantidade numérica” era representada por qualquer membro de uma classe de ajuntamento a partir de uma relação de equivalência de igualdade. Procedendo desta forma, Weierstrass obtinha os números reais positivos. A etapa seguinte consistia em estender as quatro operações da aritmética para estes números e utilizar a subtração para construir os reais negativos. A coleção de números reais assim obtida possuía as propriedades necessárias para as demonstrações dos teoremas da análise, sem requerer o uso de limites.

Porém sua construção, por mais hábil que possa parecer, não foi bem aceita já que seus argumentos incidem sobre certos conjuntos infinitos de números racionais admitidos *a priori*. A utilização de métodos de aproximação por infinitésimos trouxe de volta o problema da obtenção de tais infinitésimos por meio de um processo interativo infinito, estabelecendo de imediato o infinito considerado – *infinito potencial*<sup>117</sup>. Porém, este infinito é de fato concebido e trabalhado como uma totalidade completa – *infinito atual*.

Mas, tudo tem seu lado bom e este tipo de fundamentação, embora visto com certo receio no que diz respeito às questões do infinito, permitiu que fossem apresentadas provas rigorosas de teoremas sobre limites de sequências de números e de funções. Exemplo disso é o teorema de Bolzano-Weierstrass<sup>118</sup> e a propriedade de que todo subconjunto não vazio dos reais tem supremo<sup>119</sup>, o que caracterizaria a completude dos reais.

---

<sup>117</sup> O *infinito potencial* consiste num processo através do qual um número cresce para além dos limites finitos.

<sup>118</sup> Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

<sup>119</sup> Menor das cotas superiores de um subconjunto dos reais limitado superiormente.

O mais significativo na construção de Weierstrass foi a redução do conceito de quantidade ao conceito de número.

Consta que sua abordagem foi apresentada pela primeira vez em 1863 em aula, num curso de funções analíticas. Vários matemáticos que passaram por Berlim tiveram contato com suas ideias, como Cantor, um de seus ex-alunos e grande admirador. Mas foi por meio de um livro publicado por Kossak em 1872, que elas foram amplamente divulgadas.



Os procedimentos de redução da análise à aritmética de maior destaque, no tocante ao desenvolvimento da matemática, foram os de Dedekind e Cantor, que durante muitos anos mantiveram intensa correspondência sobre as questões da análise. Os interesses em matemática e as orientações filosóficas eram distintas e não se pode falar de uma obra comum, já que o procedimento construtivo ao final tem características diferentes em cada um separadamente.

Na década de 1870, ambos foram os responsáveis por fundamentar muitos aspectos iniciais da teoria dos conjuntos com objetivos diferentes. Dedekind apresentou de forma metódica as primeiras noções com o intuito de estabelecer uma linguagem diferenciada para a matemática. Já Cantor, utilizou os conjuntos como uma ferramenta para solucionar problemas na teoria das funções trigonométricas e foi mais além nas questões subjacentes que envolviam o infinito, sendo considerado o primeiro a sistematizar a teoria dos conjuntos como parte independente da matemática. Ambos seriam herdeiros de muitos, como Bolzano e Riemann, que já apresentavam uma crescente abordagem conjuntivista em suas pesquisas.

[...] durante a segunda metade do século XIX, a noção de conjuntos foi crucial para o surgimento de novas concepções na álgebra, nos fundamentos da aritmética e mesmo na geometria. Sobretudo, todo esse desenvolvimento antecedeu as mais antigas investigações de Cantor sobre a teoria dos conjuntos e, provavelmente, tal desenvolvimento motivou o seu trabalho. A concepção conjuntivista [*set-theoretical conception*] dos diferentes ramos da matemática está, portanto, inscrita nas origens da teoria dos conjuntos.<sup>120</sup> (tradução nossa).



Dedekind, formado em Göttingen onde ingressou em 1850, foi aluno de Gauss e Riemann, começando a lecionar na Politécnica de Zurique em 1858. No mesmo ano começou

---

<sup>120</sup> FERREIRÓS, 2007, p. xvii.

a desenvolver sua teoria dos números reais, porém só a publicou em 1872, quando também Cantor divulgou um artigo sobre séries trigonométricas, abordando a questão da construção dos reais (FERREIRÓS, 2007). As conclusões a que chegara Dedekind faziam parte de um pequeno livro, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*<sup>121</sup>, no qual expõe sua construção dos números reais, motivado pela ideia de provar teoremas básicos da análise sem o recurso da geometria.

Para ele, o conceito de limite deveria ser desenvolvido por meio de recursos da aritmética e se propôs então a relacionar de alguma forma, grandezas geométricas contínuas e números racionais. Sua construção teve por base a definição de Eudoxo<sup>122</sup> para a proporcionalidade de quatro grandezas, interpretada da seguinte forma: qualquer razão entre as medidas  $r$  e  $s$  de dois segmentos de retas distintos produz um *corte* no conjunto dos números racionais (ou seja, o conjunto das razões  $\frac{n}{m}$  entre inteiros) que o decompõe em dois conjuntos disjuntos, conforme vale  $mr < ns$  ou sua negação. Duas razões são iguais (isto é, as quatro grandezas envolvidas são proporcionais) se, e somente se, os cortes correspondentes são os mesmos.<sup>123</sup>

Portanto, o argumento contido no raciocínio inicial de Dedekind mostrava claramente que toda razão entre segmentos de reta definiria, de modo único, um corte nos racionais. Mas e quanto à recíproca? Seria possível que todo corte definisse uma possível razão entre segmentos? A questão é definitivamente resolvida quando ele estabelece uma ponte entre aritmética e geometria por meio do hoje conhecido por *Axioma de Cantor – Dedekind*: todo corte da reta é produzido por um (e só um) ponto da reta.

A partir de então, Dedekind estabelece que para toda divisão dos números racionais em duas classes  $A$  e  $B$  tais que todo número da primeira classe  $A$ , é menor que todo número da segunda classe  $B$ , existe um, e somente um, número real que produz o chamado corte. Se  $A$  tem um máximo, ou se  $B$  tem mínimo, o corte define um número racional; mas se  $A$  não tem máximo e  $B$  não tem mínimo, então o corte define um número irracional. A extensão dos racionais para os reais pôde ser assim realizada de modo a formar o contínuo numérico dos reais. O passo seguinte foi o de lhe atribuir uma estrutura, definindo operações usuais de adição e

---

<sup>121</sup> Continuidade e Números irracionais.

<sup>122</sup> **Eudoxo** (Cnido, entre 408 e 355 a.C.) foi um astrônomo, matemático e filósofo grego. É considerado por alguns como o maior dos matemáticos gregos clássicos, perdendo apenas para Arquimedes. Ele rigorosamente desenvolveu o *Método da exaustão* de Antífona, um precursor do cálculo integral.

<sup>123</sup> BARONI; GARCIA, op. cit., p. 135.



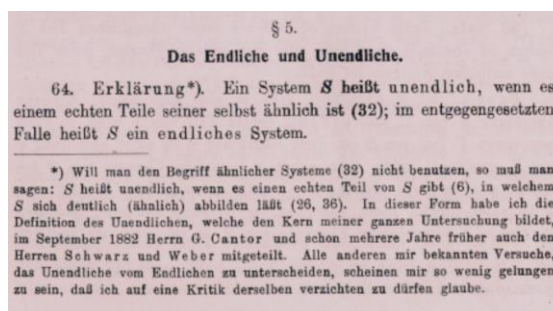
multiplicação, além de uma ordem, entre outros.

O conjunto dos reais passa então a ser visto como o modelo aritmético de uma reta enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico dos reais. O conceito de *corte de Dedekind*, no sistema de números racionais, ou uma construção equivalente dos números reais, tinha agora substituído a grandeza geométrica como espinha dorsal da análise.

A construção feita por Dedekind fazia parte de seu programa para fundamentar a matemática clássica via teoria dos conjuntos e, durante os anos seguintes, ele se dedicou aos conjuntos e funções como base para o desenvolvimento rigoroso da teoria dos números naturais e de toda a aritmética<sup>124</sup>. Tanta predileção culminou com a publicação de sua obra *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888), onde apresenta uma definição extensiva de conjunto, a noção geral de função e a definição de conjunto infinito por meio de equipotência<sup>125</sup>.

Ainda em 1872, Cantor e Dedekind se conheceram quando estavam de férias na Suíça. A amizade entre eles perdurou por muitos anos e deu origem a uma extensa correspondência entre 1873 e 1899, publicada em 1937 por Emmy Noether e Jean Cavaillès (Cantor e Dedekind, 1937). Por meio de tais cartas é possível avaliar a influência que o pensamento lógico dedutivo de Dedekind exercia sobre Cantor<sup>126</sup>.

Figura 6: O Finito e o Infinito. *Was sind und was sollen die Zahlen* - 1888 – p. 13.<sup>127</sup>



Fonte: <<http://www.opera-platonis.de>> Acesso em: 08/2017

<sup>124</sup> FERREIRÓS, 1993, p.323.

<sup>125</sup> Dois conjuntos são **equipotentes** quando existe uma bijeção entre eles. Um conjunto  $A$  é **infinito** quando é equipotente a uma parte (subconjunto) própria. Ou seja, quando existe uma função bijetiva entre  $A$  e sua parte própria. Por exemplo,  $\mathbf{IN}$ , conjunto dos naturais é infinito pois de acordo com esta definição, existe uma função bijetiva entre  $\mathbf{IN}$  e  $B = [0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots]$  dada por  $f: \mathbf{IN} \rightarrow B$  dada por  $f(n) = 2n$ .

<sup>126</sup> Idem, p. 345.

<sup>127</sup> \*): “Desta forma, submeti a definição do infinito, o que constitui o núcleo de toda a minha investigação, para G. Cantor em setembro de 1882 e alguns anos antes para Schwarz e Weber. Todas as outras tentativas para distinguir o infinito do finito que tomei conhecimento, me parecem ter tido tão pouco sucesso que eu acho que posso renunciar a qualquer crítica sobre elas.” (tradução nossa)



Cantor, matemático alemão da Universidade de Halle, é o grande nome a destacar quando se trata de conjuntos e infinito. No trajeto percorrido para desenvolver a sua teoria dos conjuntos, um pedaço importante é o programa de aritmetização da análise iniciado em 1871. O incentivo inicial se encontrou nas objeções que tinha contra as definições de números irracionais por meio de séries, que pressupunham a existência dos números que se quer definir e cuja abordagem se fazia necessária em seus trabalhos sobre séries trigonométricas. Para tanto, reconhecendo as propriedades algébricas dos racionais, ele definiu os conceitos básicos de valor absoluto, convergência de sequências, sequências de fundamentais<sup>128</sup> e a relação de equivalência ( $\sim$ ) entre elas, dada por  $\{x_n\} \sim \{y_n\}$  se, e só se,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ . A partir daí, o conjunto dos reais é definido como o conjunto quociente  $\mathbb{Q}/\sim$ , onde são a seguir consideradas operações aritméticas e uma relação de ordem.

Seu resultado construtivo foi publicado em 1872, no artigo *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*<sup>129</sup>.

Mas este não seria o mais significativo da obra de Cantor. Trata-se do início de suas investigações acerca de números. Antes disso, porém, vamos aos conjuntos.

## Teoria dos Conjuntos



A teoria dos conjuntos se constitui numa das maiores conquistas da matemática do séc. XIX. O conceito de conjunto, como pode ser percebido nas menções feitas anteriormente, já fazia parte da matemática, mas seu papel se tornou explícito apenas a partir da obra de Cantor na década de 1870.

Cantor se dedicava a várias questões da análise e se deparou com a necessidade de tratar

---

<sup>128</sup> Tal sucessão, agora denominada de *sucessão de Cauchy*, satisfaz o Critério de Cauchy, estabelecido em 1821:  $\{x_n\}$  com a propriedade de que para qualquer racional positivo  $\varepsilon$ , existe um inteiro  $n_1$  tal que  $|x_{m+n} - x_n| < \varepsilon$ , para qualquer  $n \geq n_1$  e qualquer inteiro positivo  $m$ . Para Cauchy, era óbvio que uma sucessão destas convergia para um número real  $a$ . Cantor, por outro lado, defendia que afirmar isto seria cometer um erro lógico, pois esta afirmação pressupõe a existência desse número real. Consequentemente, Cantor utilizou a sucessão fundamental para definir o número real  $a$ . Em outras palavras, Cantor associou um número real a toda sucessão fundamental de números racionais.

<sup>129</sup> Sobre a extensão de um teorema da teoria das séries trigonométricas.

de coleções infinitas de números como, por exemplo, a coleção de pontos de descontinuidade de certas funções. Foi então progressivamente levado a considerar conjuntos infinitos como totalidade acabadas (infinito atual), percebendo que seria então necessário melhor caracterizar e classificar tais conjuntos. Para Cantor, não havia nenhuma razão para aceitar as velhas ideias contra o infinito atual. Se os conjuntos infinitos se comportam de maneira diferente dos finitos não significa que sejam inconsistentes, apenas obedecem a uma proposta de aritmética diferente. Este entendimento foi essencial para o desenvolvimento de sua teoria dos conjuntos como parte independente da matemática.

Uma ressalva apenas é necessária: a teoria dos conjuntos como apresentada por Cantor é considerada uma teoria intuitiva, por ter sido desenvolvida no escopo da linguagem natural, obviamente suplementada por símbolos matemáticos convenientes. Porém, não são explicitados os princípios e conceitos básicos sobre os quais se assenta a teoria, como por exemplo, os mecanismos de inferência necessários para a realização das demonstrações, e nem sequer os conceitos primitivos. As definições são introduzidas informalmente, sem que haja preocupação com alguma prova de existência das entidades consideradas.<sup>130</sup> Como principal exemplo de tal postura, a pressuposição da existência de conjuntos – dados certos objetos pode-se considerar uma entidade de ordem mais alta, a sua coleção - é assumida sem discussões na teoria, o que viria mais tarde a ser um dos problemas que deram origem a paradoxos, já que o que é ou deixa de ser um conjunto dependerá dos axiomas adotados. A primeira axiomatização da teoria foi feita por Zermelo<sup>131</sup> em 1908 que, porém, não mostrou sua consistência. Seguiram-se então várias outras tentativas de axiomatização feitas por Fraenkel (ZF) (1922), Von Neumann, Gödel e Bernays (NGB)<sup>132</sup>, cada uma com suas peculiaridades como a utilização de representações diferentes para os conjuntos ou a introdução de conjuntos de objetos diferentes na teoria, por exemplo, classes próprias para evitar contradições com respeito ao conjunto de

---

<sup>130</sup> Cf. KRAUSE, 2002.

<sup>131</sup> A **Teoria de conjuntos de Zermelo**, abreviada **Z**, é a apresentação axiomática da teoria de conjuntos publicada pela primeira vez em 1908 e que formou a base da **Teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel**, **ZF**, a mais utilizada hoje, que resulta de acrescentar à teoria de Zermelo os axiomas de substituição (essencial para a construção de determinados conjuntos infinitos) e de regularidade (o que garante, essencialmente, que um conjunto não pode ser membro de si mesmo). Caso se inclua o axioma da escolha, passa a ser identificada por **ZFC**.

<sup>132</sup> A primeira variante da **NGB**, feita por Von Neumann na década de 1920, assumia funções como noção primitiva, e não os conjuntos. Em uma série de artigos publicados entre 1937-54, Bernays modificou sua teoria de modo a assumir conjuntos e relações de conjuntos como noções primitivas. Descobriu também que a teoria podia ser finitamente axiomatizada. Gödel (1940), a simplificou e usou, enquanto investigava a independência da hipótese do contínuo.

todos os conjuntos.

Mas voltemos mais uma vez aos números, desta vez, os de Cantor, para quem a ideia de número estava associada a conjuntos.

Em sua concepção, o número zero estaria relacionado ao conjunto vazio; o número 1 corresponderia a todos os conjuntos equipotentes a  $\{1\}$ , o número 2 a todos os conjuntos equipotentes a  $\{1,2\}$  e assim sucessivamente, o número  $n$  corresponderia a todos os conjuntos equipotentes a  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{IN}$ . Seria como algo que resta em comum a dois ou mais conjuntos quando abstraímos a natureza de seus elementos e a sua ordem.

Seguindo esta linha, podemos então abordar a questão do conjunto em si de duas formas simples, como Cantor: a quantidade de seus elementos ou a ordem em que estes elementos se apresentam. A quantidade de elementos, sua *cardinalidade*, está associada ao conceito de potência: conjuntos equipotentes tem a mesma potência e por consequência, a mesma cardinalidade. No caso da ordem em que se apresentam os elementos, a questão é outra. Na teoria dos conjuntos de Cantor, *ordinal* é o tipo de ordem de um conjunto bem ordenado.

Para conjuntos finitos, os conceitos de número ordinal e número cardinal se equivalem<sup>133</sup>. Nos conjuntos infinitos, porém, esses conceitos podem ser caracterizados de forma diferente e a ordem dos elementos surge como mais um diferencial. Pode então ocorrer que dois conjuntos possuam a mesma cardinalidade, mas números ordinais diferentes. O menor ordinal finito corresponde ao dos naturais, identificado por  $\omega$ , que é associado ao cardinal  $\aleph_0$ .

Além de  $\omega$ , os ordinais elaboram uma distinção mais refinada do que os cardinais na contagem de suas informações de ordem. Enquanto há somente um cardinal infinito contável,  $\aleph_0$ , existem incontáveis ordinais infinitos contáveis, que são  $\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \varepsilon_0, \dots$ . Aqui, a adição e multiplicação definidas por Cantor não são comutativas:  $1 + \omega$  é  $\omega$ , ao contrário de  $\omega + 1$ , assim como  $2 \cdot \omega$  é  $\omega$ , enquanto  $\omega \cdot 2$  não o é, por exemplo<sup>134</sup>.

Quanto aos cardinais,  $\aleph_0$  é um número infinito e não há como compará-lo com um número

<sup>133</sup> Por exemplo, os conjuntos  $\{a, b, c, d\}$ ,  $\{b, a, c, d\}$  e  $\{a, d, c, b\}$  representam o mesmo número cardinal e ordinal igual a 4.

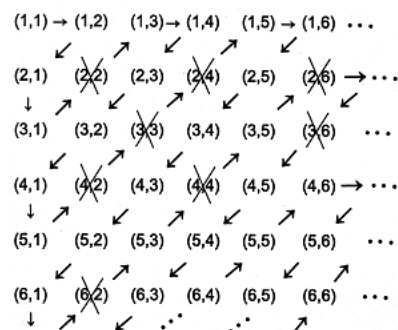
<sup>134</sup> A diferença essencial entre conjuntos finitos e infinitos é que num sistema finito sempre temos o mesmo número ordinal em qualquer sequência dada; ao contrário, em um sistema composto de um número infinito de elementos, em geral, temos números ordinais diferentes dependendo da sequência de seus elementos. Por outro lado, a potência ou número cardinal de um sistema, seja ele finito ou não, independe da ordem em que seus elementos aparecem. Por exemplo,  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ,  $\{a, 1, 2, 3, 4, \dots\}$  e  $\{1, 2, 3, 4, \dots, a\}$  tem ordinais  $\omega$ ,  $1 + \omega$  e  $\omega + 1$ , respectivamente. Porém, todos tem cardinal  $\aleph_0$ .

natural. Embora existam outros conjuntos com esta mesma potência (cardinalidade), como o conjunto dos números naturais pares  $\{0, 2, 4, 6, 8 \dots\}$  e até mesmo o dos racionais<sup>135</sup>, Cantor percebeu que dois conjuntos infinitos poderiam ter cardinalidades diferentes, isto é, que existiam infinitos diferentes. Para tanto, considerou o conjunto potência (conjunto das partes) de  $\mathbb{N}$ :  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Se fossemos tentar ordenar esse conjunto segundo a soma dos elementos de cada subconjunto, não haveria forma de expressar os subconjuntos infinitos. Cantor conseguiu uma prova rigorosa de que este conjunto não pode ser enumerado, o que o levou a considerar o cardinal  $\aleph_1$  para  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . E assim por diante, poderíamos considerar o cardinal  $\aleph_2$  para  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ,  $\aleph_3$  para  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$  etc. O conjunto de tais cardinais  $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots$  é um conjunto infinito, discreto e equivalente ao dos naturais.

Devemos observar que o procedimento de Cantor em relação aos reais seria similar ao faria a seguir na construção de seus ordinais transfinitos. Os reais foram assim construídos acrescentando à  $\mathbb{Q}$  (racionais), os números irracionais  $e$ , os ordinais foram construídos acrescentando à  $\mathbb{N}$  (naturais), os ordinais transfinitos. Estratégias que se repetem.

Em 1874, na esteira do que já estava desenvolvendo para os ordinais transfinitos, Cantor demonstrou a não enumerabilidade dos reais. A prova mais conhecida data de 1891, quando ele

<sup>135</sup> Um conjunto é dito **enumerável** se for possível listar todos os seus elementos. Em outras palavras, um conjunto é enumerável se admitir uma bijeção com o conjunto dos números naturais. Em 1873, Cantor provou que o conjunto dos números racionais é enumerável. Isto significa, grosso modo, que existe “a mesma quantidade” de números naturais e de números racionais. Podemos interpretar este fato como significando que a quantidade de números racionais, embora sendo infinita, é de uma “ordem de infinitude” equivalente a dos números naturais  $1, 2, 3, \dots$ . Para isso, podemos dispor os números racionais numa sucessão da forma  $a_1, a_2, a_3, \dots$  com uma infinidade de elementos. Como todo racional tem uma representação única como fração  $\frac{p}{q}$  com  $p$  e  $q$  inteiros positivos primos entre si, basta enumerar os pares ordenados  $(p, q)$  de naturais primos entre si. A forma de obter essa enumeração está descrita pela figura abaixo:



A enumeração é obtida seguindo-se o caminho indicado pelas flechas, iniciando a partir de  $(1,1)$ , tendo o cuidado de descartar os pares de naturais que não são primos entre si, como, por exemplo,  $(2,2)$ ,  $(4,2)$ ,  $(3,3)$  etc.. Com isso, teríamos  $a_1 = \frac{1}{1} = 1$ ;  $a_2 = \frac{1}{2}$ ;  $a_3 = \frac{2}{1} = 2$ ;  $a_4 = \frac{3}{1} = 3$ ;  $a_5 = \frac{1}{3}$ ; etc.

a reapresentou utilizando o engenhoso *método diagonal*<sup>136</sup>. Mas a maioria dos resultados de suas pesquisas com transfinitos foi apresentada entre 1878 e 1884, numa série de seis artigos publicados no periódico alemão *Mathematische Annalen*. No seu livro de 1883, *Grundlagen einer allgeimen Mannigfaltigkeitslehre*<sup>137</sup>, Cantor detalha completamente sua teoria dos conjuntos e também discute as implicações filosóficas e teológicas de suas “inovações” matemáticas, motivado pela consciência de que suas novas ideias iam contra as visões prevalentes de número e infinito: a partir de então, seria possível não apenas contar infinitos mas também, operar com números transfinitos! Os cardinais transfinitos vieram um pouco mais tarde, em 1895, em seu artigo *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*<sup>138</sup>. Lá se encontra um estudo detalhado sobre as propriedades dos números cardinais transfinitos, culminando na *hipótese do contínuo*.

Mas nem tudo foi um mar de rosas! Tratar assim de infinitos era tarefa de coragem que dava margem a virulentas críticas como as de Poincaré, Schwarz e Kronecker, este último seu pior algoz. Kronecker, o grande defensor da matemática tendo como base apenas os números naturais, rejeitava qualquer possibilidade de tratamento do infinito atual e, por conseguinte, todas as definições de números racionais e irracionais. Pelo mesmo motivo, nem pensar em transfinitos!

---

<sup>136</sup>Em seu artigo de 1891, Cantor considerou o seguinte argumento: para mostrar que  $\mathbb{R}$  não é enumerável basta mostrar que existe um subconjunto de  $\mathbb{R}$  que não é enumerável. No caso, Cantor considerou o intervalo aberto  $(0,1)$  e nele todos os números da forma  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$ , ou seja os números da forma  $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots$ , sendo  $0 \leq a_k \leq 9$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e que podem ser escritos como uma dízima periódica  $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots 9999 \dots = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots a_p$ , sendo  $a_p$  o primeiro algarismo diferente de 9 da dízima da última sequência de nove deste número. Suponha agora que  $(0,1)$  seja enumerável, ou seja, que exista uma bijeção  $f$  entre  $\mathbb{N}$  e  $(0,1)$ . Sendo assim, seria possível ordenar todos os números contidos em  $(0,1)$  da seguinte forma ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$f(n) = \begin{cases} f(1) = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1k} \dots \\ f(2) = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2k} \dots \\ f(3) = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3k} \dots \\ f(4) = 0, a_{41} a_{42} a_{43} \dots a_{4k} \dots \\ \dots \\ f(k) = 0, a_{k1} a_{k2} a_{k3} \dots a_{kk} \dots \\ \dots \end{cases}$$

Consideremos agora o número  $d = 0, a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{kk}$  formado pelos algarismos dos números listados tomados em diagonal a partir de  $a_{11}$ . Este número também pertence a  $(0,1)$ , porém, não faz parte do conjunto de números definidos anteriormente. Suponhamos que exista algum  $f(t) = d$ , com  $t \in \mathbb{N}$ . Dessa maneira, teríamos que  $f(t) = d = 0, a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{kk} \dots = 0, a_{t1} a_{t2} a_{t3} \dots a_{tk} \dots$ . Podemos concluir então que o algarismo  $a_{tt}$  faz parte desta dízima e considerar, sem perda de generalidade, que para  $t < k$ ,  $d = 0, a_{t1} a_{t2} a_{t3} \dots a_{tt} \dots a_{kk} \dots$ . Ou seja, teríamos dois elementos da forma  $a_{tt}$  com linha e coluna iguais, o que seria uma contradição. Assim, o intervalo  $(0,1)$ , subconjunto de  $\mathbb{R}$ , não é enumerável e, como consequência,  $\mathbb{R}$  também não o será.

<sup>137</sup> Fundamentos de uma Teoria Geral das Multiplicidades.

<sup>138</sup> Contribuições para os Fundamentos da Teoria dos Números Transfinitos

Mas também existiam defensores como Hilbert, por exemplo, o principal deles:

Mas a análise por si só não nos conduz à compreensão mais profunda da natureza do infinito. Esta nos é dada por uma disciplina que mais se aproxima de um método filosófico geral e que foi engendrada para lançar nova luz sobre o grande complexo das questões sobre o infinito. Esta teoria, criada por Georg Cantor, é a teoria dos conjuntos e estamos aqui interessados somente naquela parte única e original da teoria que forma o núcleo central da doutrina de Cantor, a saber, a teoria dos números *transfinitos*. Esta teoria me parece o mais refinado produto do gênio matemático e uma das façanhas supremas da pura atividade intelectual humana. O que é, então, esta teoria?<sup>139</sup>

Sobre a teoria dos conjuntos de Cantor... a tempestade dos paradoxos estava se aproximando cada vez mais.



Os desenvolvimentos sucintamente apresentados mostram que cada um de nossos representantes principais, Weierstrass, Dedekind e Cantor, utilizou a seu modo, conjuntos infinitos de números racionais para efetuar a redução desejada. Esta forma de fazer caracteriza o *método genético* para a construção do contínuo numérico real: a partir dos naturais **IN**, se efetua a expansão para os inteiros **Z**, com a construção dos inteiros negativos. A partir deste, se constrói o conjunto quociente **Q**, racionais. E, finalmente, nova expansão com a introdução dos irracionais e a caracterização dos reais **IR**, seja por sequências, seja por cortes. De um modo geral, se efetua a extensão de um domínio inicial por meio da consideração de novos elementos, ditos *elementos* ideais, para formar outro domínio maior. É um tema relevante na obra de Hilbert, que o contrapõe ao método axiomático.

Tudo bem agora. Os reais foram construídos. Com muitas restrições, mas construídos. Porém, resta a questão: se tudo em análise tem por base a estrutura dos números naturais, o que são eles? Podemos apenas supor simplesmente que existem e a partir deles construir toda a matemática? Para Kronecker sim. Para os demais, um tema de estudo, essencial para as questões voltadas para os fundamentos.



Neste momento, nossa narrativa deixa de ser tão essencialmente cronológica tendo em

---

<sup>139</sup> HILBERT, 1925.

vista que tudo se processa em idas, vindas e repetições de procedimentos. E precisamos falar dos naturais afinal!

Para estabelecer uma fundamentação teórica para os números naturais, foram adotadas três vias: o uso exclusivo da lógica (em Frege); a teoria dos conjuntos, considerados objetos essencialmente mais básicos que os números (em Cantor e Dedekind); e, a concepção axiomática que parte da existência de  $\mathbb{N}$  como único objeto que satisfaz a uma série de axiomas formulados com exatidão (em Peano).



Começemos por Frege, matemático alemão da Universidade de Jena<sup>140</sup>, que dedicou toda sua vida científica às questões da lógica matemática e da fundamentação da aritmética e que teve, por meta principal, mostrar que todos os raciocínios da matemática seriam redutíveis à forma da lógica, na crença que suas leis poderiam fornecer instrumentos suficientes para a total compreensão dos conceitos e operações matemáticas. Para tanto, Frege se propôs a organizar de forma clara todo o conteúdo tradicional da lógica e a listar tudo que fosse requerido para a dedução matemática, reduzindo as regras necessárias para uma pequena quantidade de procedimentos padrões. Além disso, diante da inadequação da linguagem natural, repleta de ambiguidades e imperfeições, construiu uma nova linguagem formal do pensamento, que tem a matemática como objeto.

Em 1879, Frege publica sua primeira obra importante, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*<sup>141</sup>, onde apresenta uma construção da lógica dos enunciados e das lógicas de 1ª e 2ª ordens e em que se destaca a primeira formulação precisa do cálculo de 1ª ordem com a consideração dos quantificadores. Nela é apresentado um simbolismo lógico que objetiva, antes de tudo, “a construção de uma linguagem perfeita para a expressão do pensamento puro; formal e precisa que garantiria que as deduções e inferências poderiam ser realizadas sem erro; com a função de expressar relações aritméticas e geométricas, ou seja, com esse aparato poder-se-iam veicular, em especial, conceitos e enunciados da aritmética.”<sup>142</sup>

<sup>140</sup> Cidade localizada na **Turingia**, um dos 16 estados federais da Alemanha.

<sup>141</sup> **Ideografia** (ou Conceitografia de *Begriff*, do alemão “conceito” e *Schrift*, de “escrita”), uma linguagem de fórmulas, similar à da aritmética, para o pensamento puro; uma língua característica e um cálculo lógico.

<sup>142</sup> GIAROLO, 2012, p.25.



Além disso, o formalismo apresentado permite esclarecer as três características que uma teoria matemática deveria ter: a consistência, a completude e ainda, a decidibilidade, ou seja, a existência de um processo decisório que permite testar todo e qualquer enunciado da teoria.

Um pouco mais tarde, Frege apresenta o texto *Die Grundlagen der Arithmetik*<sup>143</sup> (1884), onde a ideia principal é a de definir número natural (na acepção cantoriana de cardinal e ordinal) por meio da linguagem lógica criada. Para ele, número não é uma propriedade das coisas (dos objetos), mas sim, uma “propriedade de propriedades das coisas”, ou ainda, os números são, em sua linguagem, “propriedades de segunda ordem”, em contraste com as propriedades de objetos, de primeira ordem. Também é discutida a ideia de “conjunto” em oposição à ideia de um mero “agregado”, distinguindo as duas noções: a primeira, de conjunto, como uma entidade abstrata, um objeto abstrato, não sendo algo passível de apreensão sensível (algo material), podendo apenas ser pensado; a segunda, de agregado, como mera reunião de objetos sensíveis em um único todo também material. A partir disto, Frege apresenta toda uma discussão em torno do problema de atribuições numéricas a agregados.

Em 1893, Frege amplia ainda mais suas ideias e publica o primeiro volume de *Grundgesetze der Arithmetik*<sup>144</sup>, em cuja introdução, explicita claramente que o propósito filosófico da obra é determinar a natureza das verdades matemáticas.<sup>145</sup> As ideias do *Begriffsschrift* são retomadas e reformuladas diante da necessidade de caracterizar as extensões de conceitos por meio de novos símbolos e codificar as práticas algébricas descritas nos Fundamentos. Por conta disto, Frege constrói um sistema axiomático constituído por alguns poucos axiomas e regras de inferência lógica, capazes de transcrever e demonstrar todas as leis aritméticas. A obra representa o documento que funda a corrente logicista, cuja pretensão é construir toda a matemática com bases na lógica.



Já nosso conhecido Cantor, ainda em 1884, definiu os naturais a partir de sua teoria dos conjuntos, considerando que seriam os cardinais finitos. Porém, nesse caso, não havia uma formulação adequada para a finitude de um conjunto, já que as definições empregadas consideravam apenas os bem ordenados e nem tão pouco havia um processo construtivo

---

<sup>143</sup> Os Fundamentos da Aritmética.

<sup>144</sup> Leis Básicas da Aritmética. O segundo volume seria publicado em 1903.

<sup>145</sup> FREGE, 1950, p. 26.

aritmético. A questão tomou mais impulso apenas a partir de Dedekind e Peano mas, devemos observar, esta história tem muitos outros personagens não tão reconhecidos, como Grassmann<sup>146</sup> e Pierce<sup>147</sup>, cujos procedimentos para os naturais serviram de inspiração tanto para Dedekind como Peano.



Dedekind é o primeiro a apresentar uma definição coerente em termos de conjuntos (1888) e considera os naturais como um deles ( $\mathbb{N}$ ) que tem por base uma função  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e um número inicial 0 (zero), satisfazendo às seguintes propriedades:

- $s$  é injetiva, ou seja se  $s(n) = s(m)$  então  $m = n$ .
- se  $M \subseteq \mathbb{N}$  é tal que  $0 \in M$  e  $s(M) \subseteq M$  então  $M = \mathbb{N}$ .

Neste caso, o destaque é para a função sucessor  $s$ , uma poderosa ferramenta da teoria dos conjuntos que nos descreve o processo de contagem dos naturais.



Mais adiante e na mesma linha de Dedekind, temos Peano, lógico e matemático da Universidade de Turim, que propôs, em 1889, a axiomatização dos números naturais ainda reconhecida e ensinada até hoje, originalmente publicada em panfletos escritos em latim, *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*<sup>148</sup>. Naquele momento, no entanto, a linguagem da lógica matemática ainda era novidade e o sistema de notação por ele criado para a apresentação de seus axiomas não se mostrou popular, apesar de ser a gênese da notação moderna de pertinência ( $\in$ , derivado do  $\varepsilon$  utilizado por Peano) e inclusão ( $\supseteq$ , derivado do 'C' invertido de Peano).

---

<sup>146</sup> **Grassmann** mostrou na década de 1860 que muitos fatos da aritmética poderiam ser derivados de fatos mais básicos sobre operação de sucessor e indução.

<sup>147</sup> **Pierce** publicou em 1881 o artigo *On the Logic of Number* na revista *The American Journal of Mathematics*, contendo uma axiomatização para os números naturais e inteiros. Para os naturais: Considere um conjunto  $\mathbb{N}$  e uma relação binária  $\mathcal{R}$  em  $\mathbb{N}$ . Axiomas: I)  $\mathcal{R}$  é uma ordem em  $\mathbb{N}$ . II) Em relação a  $\mathcal{R}$ ,  $\mathbb{N}$  tem elemento mínimo mas não tem elemento máximo. III) Todo elemento de  $\mathbb{N}$  diferente de seu mínimo tem um sucessor imediato. IV) Se um subconjunto de  $\mathbb{N}$ ,  $S \subseteq \mathbb{N}$  satisfaz: para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \in \mathbb{N}$  então  $s(n) \in \mathbb{N}$ , então  $S$  satisfaz a: se  $k \in S$  então todos os sucessores de  $k$  pertencem a  $S$ . (Oostra, 2002, p.6)

<sup>148</sup> Princípios Aritméticos: novo método de exposição.

Embora Peano não conhecesse Frege, suas técnicas em muito lhe foram similares. No texto, por exemplo, é mantida a distinção entre a simbologia da lógica e a da matemática, como no *Begriffsschrift*, de Frege.<sup>149</sup>

Os axiomas de Peano são diversificados da seguinte forma: o primeiro afirma a existência de pelo menos um membro no conjunto "números"; os quatro seguintes são afirmações gerais a respeito da igualdade; os próximos três são declarações sobre números naturais expressando as propriedades fundamentais da função sucessor; o nono e último é o princípio da indução matemática sobre os números naturais. Os conceitos primitivos identificados por Peano são: 0 (zero), número (no caso, número natural) e a função sucessor em  $\mathbb{IN}$ :

1. 0 é um número natural.

Os quatro próximos axiomas descrevem a relação de igualdade.

2.  $\forall x \in \mathbb{IN}, x = x$ . (reflexividade)
3.  $\forall x, y \in \mathbb{IN}$ , se  $x = y$  então  $y = x$ . (simetria)
4.  $\forall x, y, z \in \mathbb{IN}$ , se  $x = y$  e  $y = z$  então  $x = z$ . (transitiva)
5.  $\forall x, y$ , se  $x \in \mathbb{IN}$  e  $x = y$  então  $y \in \mathbb{IN}$ . (fechamento)

Os axiomas restantes definem as propriedades aritméticas dos números naturais.

Os naturais são fechados sob a função sucessor  $s$ :

6.  $\forall x \in \mathbb{IN}, s(x) \in \mathbb{IN}$ .

As formulações originais dos axiomas de Peano utilizavam o 1 como "primeiro" número natural, ao invés do 0. A escolha é arbitrária. No entanto, como 0 será o elemento neutro da adição em  $\mathbb{IN}$ , a maioria das interpretações modernas dos axiomas de Peano se inicia com ele. Os axiomas 1 e 6 definem uma representação recursiva dos números naturais:  $s(0) = 1$ ,  $s(s(0)) = 2 = s(1)$  e assim sucessivamente,  $s^n(0) = n$ . Os dois próximos axiomas definem as propriedades desta representação:

7. Não existe  $n \in \mathbb{IN}$  tal que  $s(n) = 0$  é falso. (Isto é, não há nenhum número natural cujo sucessor seja 0)
8.  $\forall m, n \in \mathbb{IN}$ , se  $s(m) = s(n)$  então  $m = n$ . (Ou seja,  $s$  é uma função injetiva).

---

<sup>149</sup> Cf. CONSUEGRA, 2000.

Os axiomas 1, 6 e 7 implicam que o conjunto de números naturais contém os elementos distintos  $0, s(0), s(s(0))$ , e assim por diante, ou seja,  $\{0, s(0), s(s(0)), \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ . Para mostrar que  $\mathbb{N} \subseteq \{0, s(0), s(s(0)), \dots\}$ , é necessário mais um axioma, também chamado de axioma da indução.

9. Se  $K$  é um conjunto tal que  $0 \in K$  e se  $n \in K$  então  $s(n) \in K$ , podemos concluir que  $K = \mathbb{N}$ .

A partir deste último axioma, as operações básicas da aritmética são definidas recursivamente.

Quando os axiomas de Peano foram propostos pela primeira vez, muitos matemáticos concordaram que os axiomas apresentados definiam implicitamente o que significa um "número natural". Porém, Poincaré foi mais cauteloso, dizendo que os números naturais só poderiam ser definidos de tal forma caso o sistema de axiomas apresentado fosse consistente. Como já vimos, esta foi uma questão abordada fortemente por Hilbert em todo o seu trajeto de fundamentação e apresentada em 1900 como o 2º de seus problemas propostos. Como é de se esperar, por sua importância, voltaremos ainda ao tema.

Num certo sentido, os axiomas de Peano podem ser entendidos como um modelo do que intuitivamente entendemos que sejam os números naturais. A verificação das propriedades que atribuímos aos números naturais e o fato de podermos definir intrinsecamente as operações básicas e uma relação de ordem por meio da axiomática de Peano constitui-se numa modelagem que podemos inferir ser satisfatória para os números naturais. Tanto é que o sistema de Peano é ainda utilizado praticamente sem modificações em diversos ramos de investigação, incluindo pesquisas em questões de consistência e completude em teoria dos números.

### 3.2 OS NÚMEROS DE HILBERT



Como já mencionado sucintamente no Cap. 1, em 1900<sup>150</sup>, antes da exposição de seus famosos problemas em Paris, Hilbert publica um pequeno artigo, *Über den Zahlbegriff* no qual

---

<sup>150</sup> Este artigo foi publicado um ano após o lançamento de *Grundlagen der Geometrie*. A partir do ano de 1900, as edições deste livro passaram ter em seus apêndices, referências ao *Über den Zahlbegriff*. O texto original tem data de 12 de outubro de 1899 e foram estabelecidas relações entre este artigo e diferentes tópicos do capítulo III do *Grundlagen*: a teoria das proporções. Hilbert afirma que o método axiomático expõe melhor a noção de número, pois já pensava nos resultados que versam sobre a completude dos números reais. (JEANRENAUD; MARTINS, 2012, p. 2)

onde apresenta a sua construção dos reais. Seria o seu primeiro ensaio sobre os fundamentos da aritmética e nele expõe suas ideias sobre a aplicação do método axiomático da geometria nas suas investigações sobre os reais.

Hilbert inicia o texto descrevendo e comparando os dois tradicionais métodos de investigação utilizados nas pesquisas em matemática: o genético, intimamente ligado à aritmética, e o axiomático, regularmente utilizado como ele mesmo o fez em geometria.

O genético vem acompanhado do conceito matemático de insuficiência, de faltar algo que dê conta de um questionamento ou de uma situação, e sua centralidade resiste na execução de extensões sucessivas a partir do conceito mais simples de número natural. O exemplo clássico de aplicação surge com a consideração dos números reais. Inicia-se pela definição de número natural, que advém da intuição básica de contagem. A necessidade de possibilidade de subtração entre naturais provoca a extensão do sistema de naturais para incluir os inteiros negativos. De modo similar, a necessidade de garantir a possibilidade de divisão entre inteiros leva a uma nova extensão para os racionais. E finalmente, os reais são definidos por uma nova extensão para abrigar os irracionais.

O que faz este método ser interessante e eficaz é que a sua rápida possibilidade de assimilação facilita o entendimento de conceitos e resultados mais complexos da matemática como o fato de que toda função polinomial de grau 1 possui uma raiz ou que toda função inteira e racional que muda de sinal possui uma raiz. Assim, se não for exigida a prova de um resultado, a intuição leva a compreensão de um conteúdo como se a aplicação desse procedimento retirasse do indivíduo conceitos *a priori*, como é o caso da ideia de número real e a noção de continuidade. O método genético assim interpretado pode despertar o interesse por conjecturar.

Esta ideia de construção de números abriga, de certa forma, o conceito de infinito potencial já que o fato de “poder ir mais adiante” está ligado ao conceito de sucessor de um número natural e que não há um último número natural, posto que este último também tem um sucessor. E mais, a menos de vocábulos específicos da matemática, como *sucessor*, contar de um em um é mais do que natural, é uma forma explícita de representar a passagem do tempo, associando cada novo passo a um quadro novo que se apresenta à visão.

Já o axiomático segue um procedimento diferente. Supõe-se a existência de um domínio qualquer de objetos da natureza e se considera a seguir, um conjunto de axiomas que estabelecem relações entre tais objetos. É preciso, no entanto, cumprir certos requisitos lógicos, garantindo o que Hilbert denomina de *existência axiomática*. Em geometria, isto se resolveu exibindo modelos do sistema de axiomas e garantindo sua completude e consistência. Hilbert considera que esta prova de consistência relativa se aplica igualmente aos números reais.

Mas o método utilizado em geometria seria o mais adequado para o estudo do conceito de número? Qual seria o mais vantajoso para uma investigação lógica dos fundamentos? Hilbert responde a tais questionamentos afirmando que apesar do alto valor heurístico e pedagógico do método genético, o axiomático merece a sua preferência, pois representa definitivamente o conhecimento matemático e mostra sua plena fundamentação lógica.

Para Hilbert, isto abriga dois conceitos importantes: a abstração do conteúdo usual e da suposta natureza dos objetos matemáticos de estudo. Procedendo assim, ele consegue demonstrar teoremas usando somente as “ferramentas básicas” da teoria, deduzindo verdades e fazendo pontuações acerca da própria teoria sobre a qual as verdades do corpo teórico repousam. Os axiomas, por terem as mesmas funções de premissas nas demonstrações matemáticas podem, segundo Hilbert, ser vistos como uma espécie de conjunto de definições disfarçadas de conceitos, pois fixam as propriedades existentes entre os objetos. A escolha das proposições que serão assim consideradas deve estar atenta à necessidade de finitude do elo dedutivo (deve ser provada em um número finito de passos, com base nas premissas) e evitar a circularidade (sem usar afirmações já empregadas em passos anteriores). Comparando um corpo de axiomas com a álgebra, os axiomas determinam uma estrutura análoga às estruturas algébricas, porém com outra conotação filosófica.

A diferença básica, segundo esta conotação, é que uma estrutura algébrica se caracteriza por explicitar a estrutura de campo de objetos supostamente conhecidos. Já o método axiomático procura definir um campo de atuação do objeto, dado a estrutura sobre a qual ele reside. O objetivo da abstração aqui seria o de recriar um campo de objetos dados e não somente explicitá-lo. Por isso, o método axiomático proposto por Hilbert para conceituar número radicaliza o método abstrato da lógica e mesmo da álgebra, completando-os.

A construção dos reais por Hilbert leva em conta quatro grupos de axiomas:

- I. Axiomas de combinação – Caracterização da estrutura dos reais e suas operações de adição e multiplicação;
- II. Axiomas de cálculo – Propriedades associativa, distributiva e comutativa das operações definidas;
- III. Axiomas de ordem - Caracterização da ordem ( $<$ ) e suas propriedades;
- IV. Axiomas de continuidade – Propriedade arquimediana e axioma de completude.

Tais resultados permitem a Hilbert concluir que o sistema de seus números coincide com o usual de números reais e que na demonstração da *consistência* do sistema é possível ver a

prova da existência da totalidade dos números reais. Na realidade, a busca de tal prova de não contradição foi o principal objetivo de suas pesquisas em lógica e fundamentos da matemática até o fim de sua vida. Todas as teorias levantadas sobre a completude dos reais perdem espaço depois da proposta de Hilbert, uma vez que para o conjunto dos números reais não temos de imaginar a totalidade de todas as leis a que os elementos deste conjunto estão sujeitas. Basta um sistema de entes cujas relações recíprocas são dadas pelos axiomas de ligação, cálculo, ordem e continuidade, e para o qual são válidos novos enunciados somente quando estes podem deduzir-se dos quatro primeiros conjuntos de axiomas, um número finito de vezes e segundo as leis da lógica.

Segundo Baroni; Garcia (op. cit., p.148), “[...] num primeiro momento, Hilbert não incluiu um axioma que garantiria tanto a unicidade do sistema dos números reais quanto a continuidade da reta, já que isso não era essencial para seus propósitos no campo da geometria. Mas, logo depois, ele o acrescentou sob o nome de axioma de completude<sup>151</sup> (IV).”

Quando se compara o procedimento de Hilbert com as construções anteriores, este axioma pode ser substituído por outras versões, tais como o postulado do corte de Dedekind, ou a existência de limites para todas as sequências de Cauchy.

A axiomatização apresentada por Hilbert é praticamente a mesma encontrada em grande parte dos livros de análise.

### 3.3 A SUPOSTA CRISE DOS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA



Regularmente, a natureza exhibe "anomalias", fenômenos que se mostram resistentes à classificação habitual. Geralmente, tais fenômenos são deixados para as gerações vindouras, munidas de melhores ferramentas. Algumas vezes, o fracasso persistente no trato de uma anomalia conduz a pequenos desvios na matriz disciplinar, o que conseqüentemente permite integrar a anomalia à teoria, de uma forma razoavelmente normal. Se isso não ocorrer, a comunidade científica é conturbada. Seus membros gradualmente reconhecem que existe algum erro em suas crenças básicas. Esse é o estado de "crise" na comunidade científica. Os laços até então rígidos da matriz disciplinar tendem a afrouxar-se e, basicamente, novas teorias e soluções, novos "paradigmas" podem surgir.<sup>152</sup>

<sup>151</sup> É impossível juntar ao sistema de números qualquer outro sistema de coisas de modo que no sistema resultante dessa combinação, os axiomas I, II, III, IV 1 estejam satisfeitos; ou resumidamente: os números formam um sistema de coisas que é incapaz de qualquer outra extensão se todos os axiomas continuarem a ser satisfeitos (HILBERT, 1900, p. 181-183 *apud* BARONI; GARCIA, op. cit., p. 149).

<sup>152</sup> MEHRTENS, 1976, p. 297-320 – Tradução de Marcelo Papini. Disponível em: <<http://www.mat036.ufba.br/mehrtens.pdf>>. Acesso em: 12/2016

Justifiquemos primeiro o subtítulo. Por que “suposta crise”? Eis a questão. Para a grande maioria dos autores a que tivemos acesso, a crise está associada ao evento dos paradoxos da teoria dos conjuntos. Pelo menos é assim que é definida e referenciada; assim a maioria de nós aprende.

Nesta linha podemos nos referir, por exemplo, a Fraenkel & Bar- Hillel (1958, p.14)<sup>153</sup>, que concordam com a identificação de três grandes crises históricas associadas aos fundamentos da matemática: a primeira delas diria respeito à descoberta de que existem entidades geométricas não comensuráveis e aos paradoxos formulados por Zenão, visando questionar os conceitos de espaço e tempo, abalando duas das grandes conquistas da antiguidade grega, a saber, a teoria das proporções e o método de exaustão de Arquimedes; a segunda, nos séculos XVII e XVIII, estaria intimamente ligada ao conceito de infinitésimo, outra fonte de diversos paradoxos; e finalmente, a terceira, a qual nos referimos inicialmente, se teria desencadeado com o surgimento dos paradoxos nos fundamentos da teoria dos conjuntos de Cantor, e portanto, nos fundamentos de toda a matemática.

Por outro lado, Ferreirós (2008, p.1) afirma que a crise fundacionalista é entendida como um evento localizado já no séc. XX, um acalorado debate entre os partidários da matemática clássica do final do séc.XIX, liderados por Hilbert, e seus críticos, capitaneados por Brouwer, defensores de uma séria e profunda revisão das doutrinas matemáticas. Porém, defende ainda um significado diferente ao considerá-la como um processo longo e global, indissociado do desenvolvimento da matemática moderna, da filosofia e das questões metodológicas decorrentes. Assim, na década de 1920, se localizaram os debates sobre a teoria dos conjuntos, o conceito de *continuum* e o papel da lógica e do método axiomático em oposição ao da intuição. Por volta de 1925, teria ocorrido a crise em *stricto sensu*, quando as opiniões desenvolvidas em tais debates se transformaram em detalhados projetos de pesquisa.

Uma terceira vertente em Gauthier (2011, p.85) defende a ideia de crise localizada apenas para a lógica formal (Frege) e para a teoria dos conjuntos (Cantor) já que Kronecker e seu finitismo teriam escapado das mazelas dos paradoxos por definição, permitindo com sua ideia de funcional polinomial, a construção do universo aritmético sem o recurso da teoria dos conjuntos ou da lógica.

Ainda, na concepção de Cafezeiro et al (2017, p. 162), que questiona a abordagem da matemática como uma história única e linear, se opta pela abordagem de multi-histórias (como

---

<sup>153</sup> *apud* KRAUSE, 2002, p.87.



numa ópera!) que ampliam as possibilidades de compreensão de conceitos porque deixam à vista uma rede de relacionamentos, participantes das formulações e conceitos matemáticos. Desta forma, a visão que se destaca é de que:

Não há “crise nos fundamentos da matemática”, nem “crise da matemática pitagórica”, nem “crise da geometria” e nem “crise na compreensão do infinito”. A crise está no encontro da matemática com as demandas da vida de cada momento, portanto não se compreende como uma questão localizada em uma disciplina particular. Precisa ser entendida como um dispositivo, uma rede heterogênea e instável de relações onde se articulam poder, saber e efeitos de verdade, e que permite compreender a matemática como um campo de saber que se reconhece como articulador da verdade.<sup>154</sup>

Esta última abordagem nos permite atribuir a devida importância aos personagens que compõem a história dos fundamentos como vimos em parte até aqui. Em cada momento dessa saga, se recolhe algo do passado e se deixa algo para o futuro, uma rede de fatos, com idas e vindas. E nesse ínterim, o que é a verdade senão o que é conveniente aceitar em determinado momento? É curioso observar também a necessidade histórica na matemática de se instrumentalizar a verdade, atribuindo a ela o status de consequência da técnica. E quando há problemas com a técnica...

Então, crise pra quem? Que ponto de vista adotar?

Poderíamos optar por todas as conceituações, reconhecendo a importância de cada uma em seu contexto. Ou por nenhuma, já que não é relevante aqui localizar ou não uma crise. É necessário apenas percorrer o caminho e seguir o tenor principal para compreender a extensão e o significado da rede deixada por tantos personagens na abordagem da questão dos fundamentos.

Os paradoxos da teoria dos conjuntos tiveram papel decisivo na definição de Hilbert sobre como abordar a questão dos fundamentos? Optamos pelo sim<sup>155</sup>, mas não apenas pelas razões acreditadas historicamente ao fato. Os paradoxos, o infinito e ... se tratava também de uma excelente oportunidade para defender o método axiomático que elegeu como a “alma do negócio”; nada seria mais convincente do que reafirmá-lo como salvador da verdade ameaçada.

---

<sup>154</sup> CAFEZEIRO et al, op. cit., p. 365.

<sup>155</sup> “[...] No que diz respeito especificamente ao pensamento de Hilbert, tanto ao tratar do problema dos paradoxos, quanto o travar, já nos anos vinte, a polêmica com Brouwer, um de seus objetivos centrais era a preservação da obra de Cantor, e, em especial, de seu trabalho relativo às grandezas transfinitas. Para Hilbert, salvaguardar a obra de Cantor significava estabelecer uma via segura através da qual o matemático pudesse caminhar sem incorrer em contradições. “(DEL VECCHIO JR, 2010, p. 38)

Que um pouco de oportunismo matemático não faz mal a ninguém!

### 3.4 PARADOXOS – A SEGURANÇA EM JOGO



Normalmente os paradoxos são conhecidos por envolverem algum tipo de circularidade nos termos empregados, uma forma disfarçada de autorreferência, entendida como um sistema se referindo a ele próprio. Um paradoxo lógico (sintático) consiste na derivação no sistema lógico de uma afirmação com a estrutura  $(P \wedge \neg P)$ . Já os semânticos, por uma questão de linguagem não adequada, confundem conceitos essenciais e suas referências. Em qualquer caso, a existência de paradoxos em uma teoria põe em questão a sua consistência.

Entre 1895 e 1905, três paradoxos fazem da teoria dos conjuntos um palco de discussões entre matemáticos, lógicos, filósofos e quem mais quisesse se engajar nas disputas. No mínimo preocupante, já que a certeza em matemática, considerada a fonte da senhora absoluta verdade, se vê abalada.

Burali-Forti apresentou o primeiro deles em 1897, relacionado aos ordinais, num estágio mais avançado da teoria de Cantor. De acordo com Almira (2007, p. 284), este já o tinha descoberto em 1896 e embora tenha dado certa importância ao fato em correspondência com Hilbert, Dedekind e outros, preferiu não publicar suas ideias sobre o assunto:

A todos os conjuntos bem ordenados é atribuído um número ordinal. Estes ordinais podem ser comparados: de quaisquer dois se pode dizer que são iguais, ou que um é mais pequeno e o outro maior. Eles formam, por sua vez, um conjunto bem ordenado. O ordinal deste conjunto tem de ser maior do que qualquer ordinal que pertença ao conjunto. Seja  $C$  o conjunto de todos os ordinais. Uma vez que é um conjunto bem ordenado, tem um número ordinal,  $w$ , que tem de ser maior do que qualquer elemento do conjunto. Mas  $C$  era o conjunto de todos os ordinais e tem de incluir  $w$ .<sup>156</sup>

O mais devastador de todos, por atingir frontalmente a lógica de Frege<sup>157</sup>, foi apresentado por Russel em 1902. Para este, um axioma de base garantia que dada qualquer propriedade, existiria o conjunto de todas as coisas que têm esta propriedade. O paradoxo ocorre quando

<sup>156</sup> BLACKBURN, S. Dicionário de Filosofia. Lisboa: Gradiva, 2007, p. 316.

<sup>157</sup> Em versão popular trata-se do **Paradoxo do barbeiro**: O barbeiro de uma cidade é um homem da cidade que faz a barba de todos os homens da cidade que não barbeiam a si mesmos. Quem faz a barba do barbeiro?

pensamos no conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmos. Seja  $M$  tal conjunto. Será que  $M$  é pertence a si mesmo? Se sim, não pertence a si mesmo, de acordo com a definição. Por outro lado, supondo que  $M$  não pertence a si mesmo, tem de ser elemento de  $M$ , de acordo com a definição de  $M$ . Assim, as afirmações " $M$  é elemento de  $M$ " e " $M$  não é elemento de  $M$ " conduzem ambas a contradições.

Ou ainda:  $M = \{X: X \notin X\}$

Questão:  $M \in M$ ?

1ª resposta possível: Sim. Neste caso, pela definição de  $M$ , conclui-se que  $M \notin M$ .

2ª resposta possível: Não. Ou seja,  $M \notin M$ . Então, pela definição de  $M$ , conclui-se que  $M \in M$ .

A lógica de Frege é portanto inconsistente e para Russel, a matemática não poderia ser fundamentada nesta lógica, pois dispor de uma lógica inconsistente significaria dispor de uma matemática também inconsistente.

Em 1905, Richard descobre um novo paradoxo, desta vez semântico: suponha que todas as propriedades dos números cardinais são enunciadas num idioma qualquer e ordene tais propriedades da menos extensa (com menos letras) para a mais extensa (com mais letras). Se duas ou mais propriedades tem a mesma extensão, adote a classificação alfabética. Assim, fica associado um número a cada propriedade. Se o número associado a uma determinada propriedade tiver ele mesmo esta propriedade, dizemos que o número é "Não Richardiano"; se o número associado a uma determinada propriedade não tiver ele mesmo esta propriedade, dizemos que o número "É Richardiano". Porém, a propriedade "Ser Richardiano" pode ser associada a qualquer número, ou seja, ou um número é Richardiano ou não é Richardiano. Assim, esta propriedade pertence a lista de propriedades construída. Seja  $n$  o número associado a esta propriedade:  $n$  é Richardiano? A conclusão que remete à contradição diz que  $n$  é Richardiano se, e somente se,  $n$  é não Richardiano. A contradição vem da hipótese implícita de que enumeraríamos propriedades aritméticas e "ser Richardiano" não é uma propriedade aritmética, mas metaritmética, por falar sobre propriedades da aritmética e não de números e suas relações. Daí o paradoxo.

Novamente a confiança se vê abalada. O raciocínio matemático, por suas ligações com a lógica, é posto em dúvida e a questão dos fundamentos retorna ao centro das atenções de forma mais crítica. Seria premente a necessidade de estabelecer teorias matemáticas seguras, livres de contradições e de se prevenir quanto ao risco de novas ocorrências.

Vem então nosso personagem com suas pretensões de axiomáticas! No entender de Hilbert bastaria axiomatizar as teorias matemáticas e demonstrar a consistência de cada sistema de axiomas para definitivamente acabar com a possibilidade de novas contradições.

O problema em si se situava particularmente em duas teorias: a teoria dos conjuntos e a aritmética.

A primeira, a teoria dos conjuntos, era terreno fértil para os paradoxos e seria preciso reavaliar os procedimentos utilizados para identificar os válidos e descartar os que levassem a contradições. Em seguida, bastaria definir um apropriado sistema de axiomas e seus conceitos primitivos. Zermelo, colega de Hilbert em Göttingen, se incumbiu da tarefa e, em 1908, apresentou uma primeira axiomatização para a teoria dos conjuntos, aprimorada posteriormente (1922) por Fraenkel e Skolem. O sistema resultante é ainda o mais comumente usado na teoria axiomática dos conjuntos e conhecido como sistema ZF (Zermelo - Fraenkel).

Já na segunda de tais teorias, a aritmética, é onde se encontravam as maiores dificuldades. Seria preciso garantir a consistência do sistema Peano-Dedekind e para isso, construir um modelo em outra teoria mais simples e segura. Mas como a aritmética é a mais simples das teorias, isto não pode ser realizado.

Outra dificuldade se apresenta na lógica refundada por Frege e que estabelece leis lógicas a que devem satisfazer as demonstrações matemáticas, com a devida distinção entre termos, conceitos, axiomas e regras de inferência. Esta perspectiva se diferencia da axiomatização utilizada por Hilbert na geometria, em que são considerados apenas os axiomas necessários para a dedução formal e se pressupõem conhecidas as regras de inferência.

Frege foi até certo ponto um dos maiores críticos do trabalho de Hilbert em geometria e não aceita o papel de definições atribuído aos axiomas. Em seu entendimento, a definição dos termos e conceitos mencionados nos axiomas deve ser estabelecida antes destes. E ainda, os axiomas expressam verdades irredutíveis e isto impede que entrem em contradição uns com os outros, não sendo necessárias provas de consistência.

Hilbert defende exatamente o contrário e considera que tais termos e conceitos não tem existência independente da teoria em que se inserem. Assim, o significado de cada um é adquirido pelas relações entre eles, e que são formuladas nos axiomas. Por outro lado, dá um valor transcendente à consistência de um sistema axiomático ao assumir como critério de verdade e existência o fato dos axiomas considerados não acarretarem contradições.

Os paradoxos acarretam contradições no sistema de Frege e Hilbert reconhece sua insuficiência. Sua reação é compatível com suas pretensões: as leis da lógica também devem ser explicitadas por meio de axiomatização e prova de consistência.

By 1904, after by its publication by Russell, the antinomy was having – in Hilbert’s opinion – a “drownright catastrophic effect” in mathematics. One after another, the great gifted workers in set theory – Frege himself as well as Dedekind – had all withdrawn from the field, conceding defeat. The simplest and most important deductive methods, the most ordinary and fruitful concepts seemed to be threatened; [...] Even Hilbert had now to admit that perhaps Kronecker had been right – the ideas and methods of classical logic were in fact not equal to the strong demand of the set theory.<sup>158</sup>

Nesse caso, como lógica e aritmética são solidárias em procedimentos, conceitos e leis, ambas devem ser formalizadas num mesmo sistema para o qual se provaria a consistência.

Esta seria a primeira tarefa explicitamente declarada que Hilbert se atribuiu para atingir seus propósitos de fundamentação. Mas não podemos esquecer que ele já tinha dado a partida em 1900, com na palestra *Über den Zahlbegriff* e a anunciação do 2º problema concernente à consistência da aritmética no Congresso de Paris.

A segunda vem a termo em 1904, como já mencionado, quando se apresenta no 3º Congresso Internacional de Matemáticos em Heidelberg e expõe suas ideias sobre esta fundamentação conjunta da aritmética, incluídos os transfinitos de Cantor, e da lógica.

It is my opinion that all the difficulties upon [i.e. paradoxes] can be overcome and that we can provide a rigorous and completely satisfying foundation for the notion of number, and in fact by a method that I would call axiomatic and whose fundamental idea I wish to develop briefly in what follows. Arithmetic is often considered to be part of logic, and the traditional fundamental logical notions are usually presupposed when it is a question of establishing a foundation for arithmetic. If we observe attentively, however, we realize that in traditional exposition of the laws of logic certain fundamental arithmetic notions are already used, for example, the notion of set and, to some extent, also that of number. Thus we found ourselves turning in a circle, and that is why a partly simultaneous development of the laws of logic and arithmetic is required if paradoxes are to be avoided.<sup>159</sup>

---

<sup>158</sup> REID, op. cit., p. 98.

Em 1904, após sua publicação por Russel, a antinomia estava causando – segundo Hilbert – um efeito catastrófico e prejudicial para a matemática. Um após o outro, grandes e talentosos estudiosos da teoria dos conjuntos – Frege ele mesmo, assim como Dedekind – abandonam o tema, aceitando o fracasso. Os mais simples e importantes métodos dedutivos, os mais ordinários e promissores conceitos pareciam estar ameaçados. [...] Mesmo Hilbert tinha que admitir que talvez Kronecker estivesse certo – as ideias e métodos da lógica clássica não eram adequados para a forte demanda da teoria dos conjuntos. (tradução nossa)

<sup>159</sup> HILBERT, 1904 *apud* ZACH, 2001, p.3.

É de minha opinião que todas estas dificuldades [i.e. paradoxos] podem ser superados e que podemos fornecer uma base rigorosa e completamente satisfatória para a noção de número, e de fato por um método que eu chamaria de axiomático e cuja idéia fundamental eu gostaria de desenvolver brevemente no que se segue. A aritmética é frequentemente considerada como parte da lógica, e as noções lógicas fundamentais tradicionais são usualmente pressupostas quando se trata de estabelecer uma base para a aritmética. No entanto, se observarmos atentamente, percebemos que, na exposição tradicional das leis da lógica, certas noções aritméticas fundamentais já são usadas, por exemplo, a noção de conjunto e, até certo ponto, também a de número. Assim, estamos andando em círculos e é por isso que um desenvolvimento parcialmente simultâneo das leis da lógica e da aritmética é necessário caso se deseje evitar os paradoxos. (tradução nossa)

Na sequência, Hilbert propõe então um método bastante rudimentar para reduzir a aritmética ao estudo de certas coleções de fórmulas com símbolos extralógicos. Pela primeira vez, uma demonstração de consistência que iria se basear na sintaxe e não na semântica.

Hilbert inicia por considerar um “objeto do pensamento”<sup>160</sup>, compreendendo tal entidade como um conceito primitivo, a quem não atribui significado ou conteúdo e o representa pelo símbolo “1”. Em seguida, admite a possibilidade de obtenção de outros objetos colocando-o lado a lado de si mesmo quantas vezes se queira, por ex., 111, 1111, e assim por diante.<sup>161</sup> A seguir, define as relações necessárias entre tais objetos, como a igualdade (=) e estabelece axiomas e propriedades. Será preciso também definir as operações lógicas entre tais objetos e explicitar as regras de dedução que podem ser utilizadas para se obter uma “proposição” a partir de outras. Pronto. Está feito! Tem-se um sistema com axiomas que servem de premissas para as deduções e regras de inferência que indicam como deduzir uma fórmula de outra.

Até este ponto, o procedimento construtivo de sua teoria permite a Hilbert dar conta de problemas abordados na questão das séries infinitas. O infinito surge de tudo isso como mais um objeto do pensamento, sem significado explícito, perdendo então toda sua problemática: basta lhe atribuir um símbolo, lhe dar um nome e definir axiomáticamente suas propriedades.

Para Del Vecchio Jr (2010, p. 41), “o fato de estipularmos axiomas para essas noções primitivas conforme entendemos necessário, significa tomar o tão problemático conceito de infinito como um dos instrumentos com os quais nosso intelecto opera.”

Faltaria apenas abordar a questão da consistência do sistema. Para isso, Hilbert diz que uma contradição teria a forma de uma igualdade e só poderia ocorrer caso houvesse uma quantidade diferente de 1's nos lados distintos da mesma, como por ex.,  $111 = 11111$ . Mas como os axiomas são igualdades homogêneas que tem a mesma quantidade de 1's em ambos os lados e as regras de inferência nos garantem sempre a obtenção de igualdades homogêneas

---

<sup>160</sup> Objetos do pensamento: *Gedankendinge*. A forma de agir de Hilbert segue a de Cantor quando este se refere aos constituintes de um agregado: um objeto matemático é definido a partir de um símbolo a ele associado. No julgamento de Cantor, o correto processo de formação de conceitos é sempre o mesmo: apresenta-se uma coisa sem propriedades, que a princípio nada mais é que um nome ou um sinal, e atribui-se a ele diferentes e, eventualmente, infinitos predicados, cujo significado das ideias já são conhecidos, e que não podem contradizer uns aos outros. (JOURDAIN, 1915, p. 69 *apud* DEL VECCHIO JR, 2010, p. 36)

<sup>161</sup> É a ideia de que a partir de uma unidade padrão, que chamaremos de “1”, se pode obter outros “entes” que chamaremos de 2, 3, 4... por meio de um processo aditivo, seguido de um processo comparativo. O símbolo de cada ente dependerá da quantidade de 1's que lhe for associada. Assim, ao símbolo 4 está associado ao ente 1111 ou a partir da unidade padrão 1, três unidades foram acrescentadas, uma a uma. É claro que há que se combinar a simbologia para tais entes, que em nossa civilização são os algarismos arábicos.

a partir de igualdades homogêneas, a dedução sempre iria terminar por uma igualdade homogênea. Assim fazendo, seria impossível obter uma contradição.

Hilbert, portanto, não se apoiava num modelo mais fraco para deduzir a consistência da aritmética, interpretando seus axiomas dentro deste modelo, da mesma forma como fez com os axiomas da geometria ou dos números reais. O que Hilbert deseja certamente é estabelecer um sistema formal<sup>162</sup> em que possa representar a aritmética para depois demonstrar a impossibilidade de se derivar sintaticamente contradições dentro do sistema construído. Ou seja, Hilbert buscava pela primeira vez, uma demonstração de consistência absoluta.

Mas, os procedimentos de definição do sistema e a proposta de demonstração de consistência foram apresentados de modo vago e, alguém, em particular, não deixou barato: Poincaré!

Suas críticas à proposta de Hilbert, com várias objeções, são publicadas em 1906, no artigo *Les mathématiques et la logique II*.<sup>163</sup> Vale destacar duas das mais significativas dentre elas:

- A construção encerra um círculo vicioso já que Hilbert não considera o princípio da indução como axioma do sistema, porém o utiliza para a prova de consistência. Assim, esta prova recorrerá a princípios acerca dos quais ela mesma pretende avaliar a consistência<sup>164</sup>;

---

<sup>162</sup> Hilbert introduz os conceitos básicos de sua teoria da seguinte forma: Um **sistema formal** tem os seguintes elementos: um conjunto enumerável de símbolos (signos) primitivos, que determina o conjunto de seqüências finitas de símbolos (com possíveis repetições); um conjunto finito de regras combinatórias que determinam sob que condições podemos afirmar que uma combinação de símbolos primitivos é ou não uma fórmula. O conjunto de fórmulas se denominará **linguagem formal** do sistema; um conjunto de regras combinatórias que serve para efetuar as deduções formais, ou seja, que determinam quais seqüências de fórmulas se constituem numa dedução dentro do sistema. Estas regras normalmente incluem a veracidade de um conjunto finito de proposições (fórmulas sem variáveis livres) que se denominam os **axiomas** do sistema; uma proposição é **dedutível** se é a última fórmula que aparece em uma seqüência de fórmulas que formam uma dedução. Dado um sistema formal S, cujos axiomas estão em A, se P é dedutível no sistema dizemos que P é uma **consequência sintática** do sistema; por outro lado, se P é verdadeira para qualquer interpretação dentro do sistema formal, dizemos que se trata de uma **consequência semântica** de A.

<sup>163</sup> Cf. POINCARÉ, 1908.

<sup>164</sup> Vient ensuite une phrase tout à fait énigmatique: “Nous pouvons maintenant poursuivre notre synthèse. Expriment toujours dans le même langage les axiomes bien connus relatives à l’induction complète, nous constatons que ces axiomes peuvent être sans contradictions adjoints aux précédents.” Comment le constate-t-on? Cela reste mystérieux; il y a bien un renvoi à une communication faite au Congrès de Paris, mais si l’on se reporte à cette communication, on n’y voit pas que le problème soit résolu, mais simplement qu’il serait fort désirable qu’il le fût. D’ailleurs, quand même M. Hilbert serait parvenu à justifier le principe d’induction complète, *cette justification serait bien tardive, puisque l’on a déjà appliqué ce principe deux fois.*

- A construção é incoerente pois Hilbert afirma que os axiomas definem os números naturais mas recorre ao conceito usual de número natural para contar as inferências<sup>165</sup>.



Do que vimos, a proposta de Hilbert em 1904 não é realizável. Seria preciso diferenciar os princípios que se quer fundamentar daqueles que se utiliza na fundamentação para escapar do círculo vicioso e, justificar a diferença entre as noções que se quer fundamentar das que se utiliza para fazê-lo, garantindo assim a coerência do sistema.

Hilbert ainda abordaria a questão com mais detalhes em 1905, como veremos no próximo capítulo.

Neste meio tempo, outros personagens da matemática e da lógica tentaram enfrentar de formas diferentes a questão dos paradoxos. As investigações e seus pressupostos facilitaram o crescimento das ideias associadas ao *logicismo* de Frege e deram origem a mais uma vertente, o *intuicionismo*, além do *formalismo*<sup>166</sup> associado à figura de Hilbert.

---

<sup>165</sup> “Prenons tout d’abord en considération l’objet 1.” Remarquons qu’en agissant ainsi nous n’impliquons nullement la notions de nombre, car Il est bien entendu que 1 n’est ici qu’un symbole et que nous ne nous préoccupons nullement d’em connaître la signification. “Les groupes formes avec cet objet, deux, trois ou plusieurs fois répété ...” Ah, cette fois-ci, il n’en est plus de même, si nous introduisons les mots deux, trois, plusieurs, nous introduisons la notion de nombre; et alors la définition du nombre entier fini que nous trouverons tout à l’heure, arrivera bien tard. L’auteur était beaucoup trop visé pour ne pas pas s’apercevoir de cette pétition de principe. Aussi, à la fin de son travail, cherche-t-il à proceder à un *replâtreage* dont nous aurons à examiner la valeur.

<sup>166</sup> “O formalismo matemático é uma corrente que antecede o logicismo. Se só podemos falar efetivamente em uma corrente formalista a partir de Berkeley, suas origens são bem anteriores. Desde a divisão da matemática entre aritmética e geometria conforme proposta por Aristóteles, o ideal de prova formal é um elemento forte no contexto da disciplina, por exemplo, devido à importância atribuída à definição conceitual no delineamento dos objetos. Essa tendência, todavia, intensifica-se no período em que a intuição passa a ser substituída cada vez mais pela prova analítica pura [...] Segundo Detlefsen (2005, p. 236-7) existem alguns elementos chave para o que ele denomina ‘estrutura comum’ do formalismo. São eles: a inversão da divisão clássica entre aritmética e geometria que dá primazia a esta última [...], o abandono do paradigma aristotélico no que diz respeito ao que o autor denomina modelo *genético*: afastando-se dessa concepção, conhecer não é necessariamente compreender as causas, ou sequer construir passo a passo suas provas. Assim, o formalismo liberta-se da intuição em nome do rigor e da abstração cada vez mais acentuados; [...] o formalista abre mão de linguagem como um instrumento que seja necessariamente representacional; [...] Finalmente, temos o que Detlefsen denomina *componente criativista*: o matemático tem total liberdade para criar instrumentos teóricos viáveis para atingir seus fins, sem perder todavia foco na aquisição de conhecimento legítimo. Vários autores adotam um viés formalista; a importância dessa corrente na Inglaterra do séc. XIX é evidente, e não está dissociada do desenvolvimento da lógica experimentado nos tempos de Boole e De Morgan. A influência do pensamento de Berkeley e do formalismo de Peacock são exemplares nesse sentido, e o trabalho de Hilbert, levado em conta o contexto de sua produção, soa como uma versão amadurecida dessa corrente, não obstante ser confundida frequentemente com outras versões mais ingênuas e imprecisas do formalism, sobretudo pelos seus detratores.” (DEL VECCHIO JR, op.cit., p. 16-17)





Neste momento de transição, Russell, matemático inglês, seria o principal representante das ideias logicistas.

Iniciando em 1910 com o 1º volume<sup>167</sup>, ele e seu professor Whitehead publicaram a monumental obra *Principia Mathematica*, considerada um dos mais importantes compêndios que associam lógica, matemática e filosofia.

Diferentemente do que havia sido feito antes por outros como Peano, Dedekind, Frege, Hilbert e até mesmo Zermelo na teoria dos conjuntos, Russell e Whitehead estabeleceram um único sistema formal para representar a matemática, da aritmética à teoria dos conjuntos, além da lógica, com axiomas e regras explicitamente colocadas que impedem a formulação de paradoxos: a *teoria dos tipos*, onde a noção geral de conjunto é substituída por uma noção hierárquica de conjuntos de diferentes *tipos*, formados em etapas ou estágios a partir de outros já definidos ou criados anteriormente. Desta forma, não é permissível dizer que um conjunto é membro de si mesmo ou o contrário, o que elimina casos que possam potencialmente acarretar contradições, pois não há qualquer modo significativo de defini-los quando são respeitadas as regras da teoria.

Neste sistema ainda, as noções primitivas são consideradas entidades lógicas reconhecidas por meio da intuição e que tem significado anterior aos axiomas. Além disso, incorpora o axioma do infinito que aparece na definição de número inteiro e garante a existência de uma infinidade de objetos. Russell reconheceu que se tratava de uma hipótese necessária para a matemática porém de veracidade empírica.

---

É importante notar que Hilbert não é considerado um formalista rigoroso como o adjetivo é definido hoje. Ele achava que havia algum significado e verdade na matemática e é precisamente por isso que tentava estabelecer a consistência da teoria dos números, por considerar que a partir daí teria de haver algum tipo de verdade. Formalistas rigorosos consideram a matemática para além de seu significado semântico e a veem como sintaxe pura: a manipulação de símbolos de acordo com certas regras. Eles, então, tentam mostrar que esse conjunto de regras é consistente, muito parecido com o que Hilbert tentou fazer. Atualmente, acreditam que os algoritmos computadorizados vão eventualmente assumir a tarefa de construir provas e verificar se estão corretas ou não. Hilbert foi inicialmente um dedutivista, mas, ele considerou certos métodos metamatemáticos para proporcionar resultados significativos e intrínsecos e foi realista com respeito à aritmética finitária. Mais tarde, ele realizou a opinião de que não há outros significados matemáticos, independente da interpretação.

<sup>167</sup>Os demais volumes foram publicados em 1912 (II) e 1913(III). Em 1927 foram acrescentados ainda à 2ª edição, uma introdução e dois anexos.

O objetivo inicial de obter um sistema que impeça a formulação de paradoxos é atingido por Russell. Porém, não se mostra adequado para uma fundamentação da matemática já que se apoia na intuição lógica e em hipóteses empíricas.



O mais expressivo representante e fundador do intuicionismo, considerado de certa forma uma variação do construtivismo<sup>168</sup>, foi o matemático holandês Brouwer.

Logo após sua formação inicial, na Universidade de Amsterdam, Brouwer fez importantes contribuições para a topologia moderna, o que lhe concedeu privilegiada reputação entre seus pares. Mas o que lhe trouxe reconhecimento internacional entre matemáticos e filósofos foram seus trabalhos acerca dos fundamentos da matemática, com centralidade numa proposta de reforma da matemática clássica cujas concepções garantiriam o desaparecimento natural dos paradoxos.

Em sua tese de doutorado defendida em 1907, com o significativo nome *Over de Grondslagen der Wiskunde*<sup>169</sup>, Brouwer já expressava certas opiniões bem radicais acerca da natureza do pensamento matemático e que contrastavam fortemente com o logicismo de Russell e o formalismo de Hilbert. Com este último, o confronto de ideias foi permanente durante as três primeiras décadas do século XX, gerando muitas controvérsias entre matemáticos que aderiram de alguma forma às teorias de um ou de outro.

Brouwer defendia que a matemática seria, antes de tudo, uma construção mental, além da lógica e da linguagem. A esta última atribuía a culpa por boa parte dos problemas decorrentes de tentativas de se explicar o pensamento matemático, pois que não seria suficientemente adequada para expressar o pensar do matemático. Sendo assim, seria considerada por ele como um subproduto sem valor para a atividade matemática em si mesma. Além disso, seus principais pontos de objeção em relação às demais teorias que propunham uma fundamentação para a

---

<sup>168</sup> Na filosofia da matemática, o *construtivismo* afirma que é preciso encontrar (ou "construir") um objeto matemático para provar que ela existe. Quando se assume que um objeto não existe e se deriva uma contradição dessa suposição, ainda não se encontrou o objeto e, portanto, não é provada a sua existência, de acordo com o construtivismo. Este ponto de vista envolve uma interpretação verificacional do quantificador de existência, o que está em desacordo com a sua interpretação clássica. É frequentemente identificado com o intuicionismo, embora este seja apenas um programa construtivista. O intuicionismo sustenta que os fundamentos da matemática residem na intuição do matemático, tornando a matemática em uma atividade intrinsecamente subjetiva. Outras formas de construtivismo não se baseiam nesse ponto de vista da intuição, e são compatíveis com um ponto de vista objetivo em matemática.

<sup>169</sup> Sobre os Fundamentos da Matemática.

matemática eram sua não aceitação da associação consistência / existência e a utilização do *princípio do terceiro excluído*<sup>170</sup>, como argumento em demonstrações em que se usa a *redução ao absurdo*<sup>171</sup>.

No primeiro caso, Brouwer considerava que as provas de consistência deveriam ser acompanhadas dos devidos processos que permitem construir efetivamente os objetos cuja existência se deseja provar, o que impunha restrições aos métodos clássicos de dedução da lógica, então vigentes. No segundo caso, argumentava que o uso do princípio do terceiro excluído seria uma aplicação mecânica de uma regra da lógica. Um dos motivos desta rejeição é o fato de que o princípio permite assegurar a existência de objetos impossíveis de serem construídos quando se trabalha com conjuntos infinitos<sup>172</sup>. Assim, segundo ele, para aplicá-lo e afirmar *a priori* a verdade ou negação de uma proposição, seria preciso ter certeza de poder demonstrá-la ou refutá-la. Ou seja, teríamos que ter certeza da possibilidade de resolução de qualquer problema matemático. A validade do princípio ficaria então reduzida à possibilidade de existirem problemas sem solução.

---

<sup>170</sup> Em Lógica, a **Lei do Terceiro Excluído** (em latim, *principium terti exclusi* ou *tertium non datur*) afirma que qualquer proposição ou é verdadeira ou sua negação é verdadeira.

<sup>171</sup> **Prova por contradição** (ou redução ao absurdo, do latim *reductio ad absurdum*) é um método de prova matemática indireta, não construtiva. Este tipo de prova é feito assumindo-se como verdade o contrário do que queremos provar para se chegar a uma contradição. A prova por contradição é muito usada em teoremas de existência. Neste caso, é usada para provar a existência de um elemento com determinada característica, sem, no entanto exibir tal elemento.

<sup>172</sup> Em artigos posteriores, Brouwer exemplifica seu ponto de vista, como em *Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der funktionentheorie* (Sobre o significado da lei do terceiro excluído em matemática, especialmente na teoria das funções) (1923): Considere o número  $\pi = 3,14159265358979323846 \dots$ . Defina-se  $k_1$  como o primeiro índice na sequência de decimais de  $\pi$ , a partir do qual aparece a sequência 0123456789. Considere ainda a sequência de racionais  $(c_v)_{v \leq 1}$  como  $c_v = \left(\frac{-1}{2}\right)^{k_1}$  se  $v \geq k_1$  e  $c_v = \left(\frac{-1}{2}\right)^v$  se  $v < k_1$ . Do ponto de vista clássico, isto é, considerando o princípio do terceiro excluído, a sequência  $c_v$  converge seja para 0 ou  $\left(\frac{-1}{2}\right)^{k_1}$ . Brouwer argumenta que esta sequência converge para um número real  $r$  mas que este não verifica as propriedades:  $r = 0$ ,  $r < 0$ ,  $r > 0$ . Em particular, a reta real não forma um conjunto totalmente ordenado. Sua justificativa intuicionista é: não conhecemos nenhum jeito de calcular  $k_1$  (ou de determinar que ele existe!) e daí o problema de seu cálculo é praticamente um indecível. Logo, não temos como determinar se  $r = 0$ ,  $r < 0$  ou  $r > 0$ , o que para os intuicionistas equivale a dizer que  $r$  não tem nenhuma de tais propriedades. É importante compreender que Brouwer não se opõe à ideia do infinito. Pode-se considerar uma sequência infinita de números racionais mas todo enunciado que estabeleça comparações entre tais sequências deve ser justificado por métodos finitos. De fato, Brouwer não se interessa inicialmente ao problema de determinar se é possível mostrar a priori que o enunciado  $(r < 0) \vee (r \geq 0)$  é demonstrável num determinado sistema formal. Pelo contrário, afirma que a matemática é independente de toda expressão linguística, é intuitiva a priori, e os princípios lógicos aparecem como um subproduto da prática matemática. (SABATÉ, 2011, p. 568)

Este seria um dos principais pontos de divergência entre Brouwer e Hilbert nos anos seguintes: “Taking the principle of the Middle from the mathematician,” Hilbert said, “is the same as [...] prohibiting the boxer the use of his fists.”<sup>173</sup>

Embora a tese apresentada por Brouwer contivesse poucas propostas de solução para suas próprias objeções, seria o primeiro trabalho em se que formula explicitamente a filosofia intuicionista, estabelecendo ainda, que existem diferenças claras entre a matemática e a metamatemática. Posteriormente, Hilbert iria se apropriar e aprimorar tais ideias para responder às críticas de Poincaré.

Em 1908, Brouwer expõe pela primeira vez suas objeções acerca do princípio do terceiro excluído no artigo *De onbetrouwbaarheid der logische principes*<sup>174</sup>, que contém inclusive seus argumentos sobre a possibilidade dos indecidíveis. O texto é considerado um clássico do intuicionismo.

Diferentemente de seus antecessores, Brouwer e seus seguidores desenvolveram nos anos seguintes, uma matemática autônoma e de acordo com as exigências do construtivismo.



Muitas novidades, sucessos e fracassos; um intenso período de novas teorias e propostas para a salvação da matemática frente aos paradoxos.

Não sabemos se, após Heidelberg, Hilbert teria condições de rebater as críticas de Poincaré. O fato é que nosso principal personagem aparentemente sai de cena. Seria preciso explorar novas abordagens para então retornar ao front.

---

<sup>173</sup> REID, op. cit., p.149. “Tomar do matemático o princípio do terceiro excluído”, Hilbert dizia, “é o mesmo que [...] proibir ao boxeador o uso de seus punhos.” (tradução nossa)

<sup>174</sup> Sobre a não confiabilidade dos princípios lógicos.

## 4 O PROGRAMA DE HILBERT



ATO Nº 3

A Ciência, pelo caminho da exatidão, só tem dois olhos: a Matemática e a lógica.

De Morgan

A denominação “Programa de Hilbert”<sup>175</sup>, comumente encontrada na literatura associada às questões voltadas para a fundamentação da matemática no início do séc. XX, é utilizada pela maioria dos autores para identificar as expectativas, ideias e projetos desenvolvidos por Hilbert e seus correligionários a partir da década de 20 e até a publicação em 1934, da obra *Grundlagen der Mathematik*.

Porém, do que já podemos vislumbrar até aqui, tais ideias e projetos já faziam parte da direção tomada por Hilbert desde os tempos do *Grundlagen der Geometrie*. Paradoxos, críticas de Poincaré ao exposto em Heidelberg (1904) e ideias de contraposição do intuicionismo foram, neste contexto, molas propulsoras que aceleraram o crescimento de seu interesse e a adesão de muitos alunos e colegas.

Até 1917, o método axiomático era por ele considerado como a grande saída para prover qualquer tema de uma organização sistemática, além de base para suas investigações metamatemáticas acerca de independência e completude oriundas de reflexões filosóficas mais apuradas.

No que se segue, as intenções de Hilbert se tornam mais claras e em conexão com o que desenvolveria em lógica. Segundo Sieg (1999, p.1), “as notas de cursos ministrados no período de 1917 a 1922 juntamente com Bernays revelam uma progressão dialética de um logicismo crítico para um radical construtivismo em direção ao finitismo”. A redução da matemática à lógica ...

No caso, o que seria essencial no raciocínio finitista é que as entidades mencionadas sejam produzidas e não meramente postuladas; nenhum modo de definição ou processo de cálculo seja admitido a não ser que possamos garantir que termine em um número finito de passos; e, que um limite superior para este número de passos possa ser estipulado antecipadamente.

---

<sup>175</sup> Programa Formalista de Hilbert; Programa de Consistência de Hilbert.

Mas, não tão rápido! Voltemos ao nosso roteiro, cuja observação nos permitirá um melhor entendimento do pensamento de Hilbert.



#### 4.1 BASTIDORES

De acordo com grande maioria de autores, no período de 1905 a 1917, Hilbert se voltou para temas que já eram de seu interesse como as equações integrais e a axiomatização de teorias da física (que já abordamos no Cap. 1), e deixou de se dedicar à questão dos fundamentos da matemática. Talvez esta visão seja erroneamente motivada pela falta de publicações oficiais:

It will be remembered that at the Heidelberg Congress, shortly after the discovery by Russel and Zermelo of a fundamental antinomy in set theory. Hilbert was sketched a mathematical-logic program which he believed would remove “once and forever” any doubts as to the soundness of the foundations of mathematics and the methods of mathematical reasoning. During the intervening years, absorbed first in integral equations and later in physics, he had apparently dropped this project. In fact, just before the war, Blumenthal, walking with the Hilberts and recalling the Heidelberg Congress, had remarked that it now seemed nothing would ever come of the idea for a “theory of proof”. Hilbert had made no comment, but just Mrs. Hilbert (Blumenthal was later to recall) had smiled<sup>176</sup>.

Mas nem tudo são as tais “publicações oficiais”! Uma análise mais apurada das atividades desenvolvidas por Hilbert no período considerado revela que muitos cursos e seminários voltados para o tema foram oferecidos e ministrados por ele e seus correligionários, como uma preparação para o que viria seguir <sup>177</sup>. Em Zach (2001, p. 3) estão especialmente destacados:

---

<sup>176</sup> Ibidem, p.150.

Deve ser lembrado que no Congresso de Heidelberg, logo após a descoberta de Russel e Zermelo de uma antinomia fundamental na teoria dos conjuntos, Hilbert esboçou um programa lógico-matemático que ele acreditava removeria “de vez e para sempre” qualquer dúvida acerca da solidez dos fundamentos da matemática e dos métodos do raciocínio matemático. Durante os anos intermediários, absorvido primeiro nas equações integrais e depois na física, ele aparentemente abandonou este projeto. O fato é que logo antes da guerra, Blumenthal, passeando com os Hilberts e lembrando o Congresso de Heidelberg, observou que parecia agora não se ter nada a tirar da ideia de “teoria da prova”. Hilbert não fez nenhum comentário, mas a Sra. Hilbert (Blumenthal se lembraria de mais tarde) sorriu. (tradução nossa)

<sup>177</sup> Existem muitas publicações que apresentam estudos sobre as atividades fundacionalistas de Hilbert. Em particular, ABRUSCI (1981) apresenta uma listagem de 25 cursos ministrados no período de 1899-1933 e enfatiza que “são testemunhas do extraordinário interesse de Hilbert pelos fundamentos da matemática durante os anos de 1905-1917” e que as notas de 1917-1918 representam o começo do período de ouro das investigações lógicas e fundacionais de Hilbert. (SIEG, 2013, p.93) A maioria de tais notas de aulas ainda se encontra preservada em Göttingen.

- 1905 (verão): *Logische Prinzipien des mathematischen Denken*<sup>178</sup>;
- 1908 (verão): *Zahlbegriff und Prinzipien der Mathematik*<sup>179</sup>;
- 1908/1909 (inverno): *Prinzipien der Mathematik*<sup>180</sup>;
- 1910 (verão): *Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik*<sup>181</sup>;
- 1911/1912 (inverno): *Logische Grundlagen der Mathematik*<sup>182</sup>;
- 1913 (verão): *Grundlagen der Mathematik und Physik*<sup>183</sup>;
- 1914/1915 (inverno): *Probleme und Prinzipien der Mathematik*<sup>184</sup>;
- 1916/1917 (inverno) e 1917 (verão): *Mengenlehre*<sup>185</sup>.

É importante nos determos um pouco mais em alguns de tais cursos, por conta de Hilbert apresentar esquemas explícitos de sua proposta, considerando a lógica como o suporte formal adequado para, não apenas sua própria disciplina, mas também para as ciências em geral.

### **1905 – *Logische Prinzipien des mathematischen Denken***




---

<sup>178</sup> Princípios Lógicos do Pensamento Matemático

<sup>179</sup> O conceito de Número e os Princípios da Matemática.

<sup>180</sup> Princípios da Matemática.

<sup>181</sup> Elementos e Questionamentos sobre os Princípios da Matemática.

<sup>182</sup> Fundamentos Lógicos da Matemática.

<sup>183</sup> Fundamentos da Matemática e da Física

<sup>184</sup> Problemas e Princípios da Matemática.

<sup>185</sup> Conjuntos.

O curso de 1905 envolveria, como de costume em se tratando de Hilbert, uma variada gama de interesses, com o sempre evidente fio condutor: o método axiomático. Assim, estão presentes temas como o desenvolvimento de sistemas axiomáticos não apenas para a aritmética ou a geometria, mas ainda para a teoria das probabilidades e a termodinâmica, preparando o caminho para discutir a axiomatização da lógica proposicional, além de considerações sobre a teoria dos conjuntos e os paradoxos.

Em nosso contexto, o que de mais significativo podemos comentar abrange suas ideias sobre uma prova direta de consistência para a aritmética, retomando o que propunha em 1904, e um exame crítico dos princípios da lógica.



No que tange à Aritmética, Hilbert retoma o feito em 1904 (Heidelberg), porém, a proposta apresenta as mesmas dificuldades. No coração de sua prova, se encontra ainda o objetivo de encontrar certa propriedade sintática que seria compartilhada por cada proposição derivável dos axiomas e não por sua negativa. A existência de tal propriedade é estabelecida mostrando que os axiomas definidos pelos elementos extralógicos (objetos do pensamento) a possuem e que as regras de inferência a transmitem para cada nova proposição construída. Como a construção de novas proposições é feita por recorrência, novamente está em questão o uso do princípio da indução. Sua abordagem para fundamentar a aritmética continua sendo circular! Assim, embora desta vez a proposta seja apresentada de forma mais explícita, não existem avanços de fato em suas considerações sobre a questão da consistência de 1904 para 1905. Vamos ver como foi feito.

É crucial obter uma melhor compreensão do desenvolvimento do pensamento de Hilbert sobre os fundamentos da aritmética, compreendida em um sentido amplo, o que inclui a teoria dos números elementares e alcança todo o caminho para o estabelecimento da teoria dos conjuntos. É certo que este é apenas um aspecto do trabalho de Hilbert sobre os fundamentos da matemática, pois ignora as interações complexas com seu trabalho sobre os fundamentos da geometria e das ciências naturais. É, no entanto, um aspecto muito significativo, pois revela uma progressão dialética interna surpreendente (na tentativa de abordar questões filosóficas amplas) e lança uma luz distintiva sobre o desenvolvimento da lógica matemática moderna.<sup>186</sup>

---

<sup>186</sup> SIEG, op.cit., p.92 – tradução nossa.





Retomemos brevemente o feito por Hilbert na questão da geometria em 1899, como forma de nos conduzir para o que virá a seguir.

Como vimos no Cap. 1, Hilbert utiliza sistematicamente o método da construção de modelos para provar a consistência relativa do seu sistema de axiomas para a geometria, estabelecendo uma solidariedade lógica entre teorias, a saber, a geometria e os números reais. Assim fazendo, ele atribui certos “objetos” da aritmética aos termos básicos do sistema, de modo que todos os axiomas sejam verdadeiros segundo a interpretação proposta.

Na sua forma de aplicar o método axiomático, estes termos básicos são desprovidos de significado, embora conservem seu caráter descritivo. Como esse significado é determinado apenas por meio das relações lógicas formuladas nos axiomas, tais termos podem ser considerados como variáveis que podem ser substituídas por conceitos arbitrários. Isso mostra a forma como Hilbert considera a formulação de uma teoria ao tratar questões voltadas para a independência ou consistência do sistema de axiomas: um esquema de conceitos munido das relações necessárias entre eles e onde os elementos básicos podem ser considerados da forma que se queira, ou seja, os axiomas podem ser construídos como funções proposicionais, das quais podemos obter outras proposições, substituindo conceitos por variáveis que ocorram em tais funções.

Com esta compreensão da forma como Hilbert considera os axiomas, a construção de um modelo para o estabelecimento da consistência de um sistema se resume a encontrar um conjunto de termos (ou conceitos) que transforme todas as funções proposicionais consideradas (axiomas) em proposições verdadeiras, quando substituem as variáveis que ocorrem nos axiomas.

No caso da geometria, cada axioma (função proposicional) foi convertido em outro verdadeiro entre números reais, garantindo assim sua veracidade. Mas de que modo então esta veracidade acarreta a consistência do sistema?

Na verdade, ao se construir um modelo para o sistema de axiomas  $S$ , estamos atribuindo a seus termos conceitos de outro sistema  $T$ , de modo que os axiomas em  $S$  sejam consequências lógicas dos axiomas em  $T$ . Desta forma, as relações lógicas válidas entre os termos que ocorrem em  $S$  são estruturalmente similares aquelas que são válidas entre os termos que ocorrem em certo subconjunto de  $T$ .

Como o processo dedutivo<sup>187</sup> depende, em todas as suas etapas, apenas de tais relações, independente do significado/conteúdo não lógico dos termos envolvidos, se uma proposição é dedutível em S então sua interpretação em T (de estrutura similar) é dedutível no subconjunto considerado. Ou seja, se uma contradição é dedutível em S então o mesmo ocorrerá em T. Por contraposição, se T é consistente então S também o será. Pronto! Num processo assaz engenhoso, se reduz a consistência de S à consistência de T.

Pode parecer então que qualquer prova de consistência por meio de modelos seja sempre relativa e que seria impossível estabelecer a consistência absoluta de um sistema por tal método. Mas não é bem assim. Existem casos em que a aplicação do método nos convence de ter obtido a consistência absoluta de um sistema, por exemplo, quando o domínio do modelo considerado é finito. Neste caso, poderíamos verificar a veracidade de uma proposição por meio de sua interpretação no modelo, caso a caso, sem considerar o método de prova utilizado e que envolve o uso de regras de inferência. Surge daí então a suposição de que se fosse possível construir um modelo finito para o sistema de axiomas, este poderia estabelecer a consistência absoluta do sistema. Grande engano! Nem a finitude do modelo nem a verificabilidade dos axiomas nele interpretados implicariam a possibilidade de uma prova absoluta de consistência.

Devemos levar em consideração para justificar esta afirmativa que, embora a verificabilidade dos axiomas do sistema (na interpretação do modelo) nos permita estabelecer sua veracidade sem recorrer ao método de dedução dos axiomas em outro sistema, isto não faz esta veracidade ser absoluta ou independente do sistema. O que de fato observamos é que a verdade de uma proposição (axioma) na interpretação realizada no modelo é relativa à teoria que o define, na medida em que são os axiomas e relações entre objetos dessa teoria os responsáveis pela formação de tal proposição. Logo, a impossibilidade de deduzir uma contradição para qualquer proposição em S e, portanto, a confirmação de sua consistência, apesar da possibilidade de verificar sua veracidade no modelo, dependerá da consistência da teoria que sustenta este modelo.

Assim, construir um modelo para um sistema de axiomas S equivale a encontrar um conjunto de proposições que são consequências lógicas de outro sistema de axiomas em T e estruturalmente semelhantes aos axiomas de S. Não importa então se o domínio da teoria caracterizada pelo sistema T consiste de um número finito de elementos: tudo que é implícito

---

<sup>187</sup> Lembremos ainda que a concepção hilbertiana acerca da consistência era desprovida de caráter semântico ou sintático, dependente apenas do dedutivo, ou seja, irremediavelmente associada à impossibilidade de se deduzir logicamente dos axiomas do sistema, um resultado que contradiga qualquer um deles.

pelos axiomas de S, será implícito pelos axiomas de T, e, portanto, S será consistente se T o for. Mas nem tudo está perdido! Se a consistência absoluta de T já está pré-estabelecida, então a construção de um modelo para S usando conceitos em T, estabeleceria a consistência absoluta de S.

Onde se encontra tal sistema de absoluta consistência?

[...] estamos em posse de tal sistema cuja consistência absoluta é "dada" para nós, por assim dizer. É o mundo real, ou mais precisamente, o conjunto das proposições que representam os estados das coisas que o constituem. Com certeza, não é um sistema dedutivo. Mas, não importa o que se entenda exatamente com o termo "o mundo real", acreditamos que nele não há contradições. Do mesmo modo, o sistema que consiste nas proposições que representam o mundo real, acreditamos, é livre de contradições e é consistente no sentido absoluto. Assim, se uma interpretação for concebida para os axiomas de S de tal maneira que as proposições resultantes sejam membros de tal conjunto, então, dada a sua consistência, S seria consistente. Isso talvez explique considerarmos ter estabelecido a consistência absoluta de um conjunto de proposições quando apresentamos um modelo "concreto". É reconhecido, no entanto, que, mesmo nesse caso, o que explica a consistência das proposições em consideração não é a sua "veracidade" em relação à interpretação proposta em si, mas sim a semelhança estrutural se mantém entre eles e alguns membros de conjunto considerado, além de sua consistência. ”<sup>188</sup>

Em 1899, Hilbert interpreta seu sistema de axiomas da geometria por meio de um modelo na teoria dos números reais. Mas ainda é uma prova de consistência relativa! E Hilbert leva a questão para mais além, ao expressar em 1900 a necessidade de uma prova de consistência absoluta para a aritmética:

In geometry, the proof of the compatibility of the axioms can be effected by constructing a suitable field of numbers, such that analogous relations between the numbers of this field correspond to the geometrical axioms. Any contradiction in the deductions from the geometrical axioms must therefore be recognizable in the arithmetic of this field of numbers. In this way the desired proof of the compability of the geometrical axioms is made to depend upon the theorem of the compability of the arithmetical axioms. On the other hand a direct method is needed for the proof of the compability of the arithmetical axioms. On the other hand a direct method is needed for the proof of the compability of the arithmetic axioms. (HILBERT, 1900)<sup>189</sup>

---

<sup>188</sup> OGAWA, 2001, p. 147-148. (tradução nossa) - Adaptado.

<sup>189</sup> GRAY, op. cit, p. 250-251

Em geometria, a prova da compatibilidade dos axiomas pôde ser realizada por meio da construção de um campo adequado de números, tal que as relações análogas entre os números deste campo correspondem aos axiomas geométricos. Qualquer contradição na dedução dos axiomas geométricos deve ser reconhecida na aritmética deste campo de números. Nesta direção, a desejada prova da compatibilidade dos axiomas geométricos foi feita na dependência do teorema de compatibilidade dos axiomas aritméticos. Por outro lado, é necessária uma prova direta da compatibilidade dos axiomas da aritmética. (tradução nossa)

A construção de um modelo concreto nos permitiria, em princípio, obter tal prova. Mas a consistência da aritmética requereria, no mínimo, o aceite da noção de totalidade dos números naturais como um conjunto completo. E para Hilbert, o infinito não poderia fazer parte da realidade, o que o leva a rejeitar uma solução que envolvesse a construção de modelos.

Hilbert desejava provar uma afirmação sobre provas construtivas no sistema axiomático da aritmética, de modo que, em cada uma de tais provas, a aplicação das regras de inferência em um número finito de passos, não conduzisse a contradições. A consistência assim provada seria então relativa à lógica interna do sistema de axiomas, na medida em que qualquer mudança nas regras de inferência poderia afetar o resultado de forma direta, sem no entanto depender da consistência de outro sistema.



A prova<sup>190</sup> esquematizada por Hilbert tem inspiração declarada nos axiomas de Peano e segue as seguintes etapas:

1. Consideração inicial de dois “objetos do pensamento” sem significado: “1” (um) e “=” (igual);
2. Construção de todas as combinações finitas geradas por tais objetos, colocados lado a lado, por exemplo, 1=, (11=), (= = 1), ((11)(1))(=) e 1=1, ainda por enquanto sem significado. Seriam consideradas como proposições aritméticas;
3. Introdução dos conectivos lógicos, considerados em seu sentido usual:
  - $\bar{*}$  : Negativa da proposição que substitui (\*).
  - u. : Conjunção (e).
  - o. : Disjunção (ou).
  - | : Implicação (condicional).
  - $A(x^{(o)})^{191}$  : Quantificação existencial.

---

<sup>190</sup> No que se segue, encontra-se parte do desenvolvimento da proposta de 1905 e que tem como referência OGAWA, op. cit., p. 150 -154, adaptado.

<sup>191</sup> A proposição A para o objeto arbitrário x.

$A(x^{(u)})$  : Quantificação universal;

4. Geração de formulas da teoria por recursão;

5. Caracterização da igualdade (=):

Axioma 1:  $x = x$

Axioma 2:<sup>192</sup>  $[x = y \text{ u. } \mathcal{V}(x) \mid \mathcal{V}(y)]$ , onde  $\mathcal{V}$  representa uma função proposicional qualquer;

6. Introdução de mais três objetos do pensamento e dos axiomas<sup>193</sup> que os definem:

$C$ <sup>194</sup> : Infinito, conjunto infinito.

s: Sucessor.

$s'$ : Operação em uso.

Axioma 3:  $s(Cx) = C(s'x)$

Axioma 4:  $s(Cx) = s(Cy) \mid Cx = Cy$

Axioma 5:  $\overline{s(Cx)} = C1$

Observe-se que o objeto arbitrário  $x$  é um dos objetos do pensamento considerados ou uma de suas combinações.

7. Para estabelecer provas no sistema, Hilbert precisou ainda mencionar as regras de inferência<sup>195</sup> necessárias para a dedução lógica a partir dos axiomas:

---

<sup>192</sup> Se  $x = y$  e a função proposicional  $\mathcal{V}$  assume valor em  $x$  então também o fará em  $y$ .

<sup>193</sup> Considerando  $C = \mathbb{IN}$ , por exemplo, os axiomas podem ser interpretados como:  
 Axioma 3: O sucessor de um número natural é um número natural;  
 Axioma 4: Se os sucessores são iguais então os números naturais correspondentes são iguais;  
 Axioma 5: 1 não é sucessor de ninguém.

<sup>194</sup>  $Cx$  indica que  $x$  é um objeto arbitrário em  $C$ .

<sup>195</sup> Hoje consideradas como regras de transformação.

Regra 1: Novas proposições podem ser obtidas quando se substitui  $x$  e  $y$  por combinações dos objetos do pensamento mais simples considerados de início;

Regra 2: De  $A \mid B$  e  $B \mid C$  podemos obter  $A \mid C$ .

Hilbert, a seguir, observa que o Axioma 5 é o único que apresenta proposição na forma de negação, isto é,  $\bar{P}$ . Todos os outros apresentam proposições afirmativas e não são definidas regras de inferência para obter negativas.

Assim, uma contradição ocorreria, se, e só se, fosse possível obter dos axiomas anteriores, uma combinação da forma  $s(Cx^{(o)}) = C1$ <sup>196</sup> (\*).

Para chegar a seu intento, Hilbert mostra então que cada combinação derivada dos axiomas anteriores pelas regras de transformação é uma equação homogênea<sup>197</sup>, enquanto que qualquer combinação da forma especificada em (\*) não é uma equação homogênea e, portanto, não pode ser obtida de tais axiomas.

Isto então provaria a impossibilidade de contradição no sistema e portanto, sua consistência (absoluta!)

Nesta tentativa inicial de prova de consistência direta já podemos perceber algumas características principais do programa posterior de consistência que seria implementado por Hilbert e seus colaboradores na década seguinte: os axiomas da aritmética (no sentido desta vez da teoria dos números naturais) são apresentados com as regras de inferência que serão utilizadas nas provas, abstração completa de significado/conteúdo das proposições, foco nas características sintáticas dos objetos envolvidos e investigação das próprias provas como objetos finitos (sintáticos). Desta forma, a determinação da consistência do sistema passa a ser um problema sintático da possibilidade de dedução dentro do sistema. Hilbert caracteriza mais tarde este tipo de procedimento como uma formalização.



Na questão da lógica, no entanto, Hilbert vai mais além e apresenta novidades importantes que iriam compor parte da abordagem moderna da lógica matemática.

---

<sup>196</sup> Existe  $x$  em  $C$  cujo sucessor é 1.

<sup>197</sup> A equação ou combinação da forma  $A = B$  é uma equação homogênea se  $A$  e  $B$  consistem da mesma quantidade de objetos do pensamento; Por ex,  $(s11) = (s1=)$  é uma equação homogênea.

Após extensa discussão sobre a lógica empregada no raciocínio matemático e o significado das contradições que envolvem os paradoxos, Hilbert apresenta um desenvolvimento intencionalmente “algébrico” da lógica proposicional, no qual se percebe a construção de uma estrutura<sup>198</sup>.

O sistema exibido tem os seguintes axiomas<sup>199</sup>:

- 1) Se  $P = Q$  então sempre se pode substituir P por Q e vice-versa;
- 2) De duas proposições P e Q, uma nova pode ser definida (aditivamente):  $R = P + Q$ ;
- 3) De duas proposições P e Q, outra pode ainda ser definida (multiplicativamente):  
 $R = P \cdot Q$ .

Da definição de tais operações, seguem as seguintes propriedades:

- 4)  $P + Q = P + Q$ ;
- 5)  $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ ;
- 6)  $P \cdot Q = Q \cdot P$ ;
- 7)  $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$ ;
- 8)  $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$ .

Hilbert define ainda as proposições 0, 1 e para cada proposição P, outra  $\bar{P}$ , em que valem as identidades:

- 9)  $P + \bar{Q} = 1$ ;
- 10)  $P \cdot \bar{P} = 0$ ;

---

<sup>198</sup>Todos os trabalhos de Hilbert são baseados no estruturalismo, com traços de extremo rigor e generalização. Desde seus resultados em teoria dos invariantes observamos a forte presença do abstracionismo algébrico regendo a sua forma de fazer Matemática e a aplicação constante do conceito de *estrutura* [...]. devemos nos lembrar de que Hilbert caracterizou um invariante por sua *estrutura* e procurou demonstrar os teoremas pertencentes a esta teoria, sem sair do contexto da própria *estrutura*. [...] Comparando um corpo de axiomas com a álgebra, os axiomas determinam uma estrutura análoga às estruturas algébricas, porém com uma outra conotação filosófica. (MARTINS, 2011, op. cit., p. 127; 146)

<sup>199</sup> Cf. ZACH, 1999 para discussão e desenvolvimento. Intuitivamente, se percebe P, Q e R como proposições, (+) como a conjunção, (.) a disjunção,  $\bar{P}$  como a negação de P, 0 como tautologia e 1 como contradição.

<sup>200</sup> De fato, a simbologia utilizada por Hilbert é a de identidade “ $\equiv$ ”, equivalente, no contexto, à igualdade “ $=$ ”. Para nós, usualmente a equivalência é representada por “ $\Leftrightarrow$ ”.

$$11) 1 + 1 = 1;$$

$$12) 1. P = P.$$

A seguir, defende então que tais axiomas podem ser aplicados à aritmética e propõe uma investigação acerca da independência e da não contradição entre eles. Outros aspectos são ainda discutidos como a condicional (que define por  $P \mid Q$  quando  $\bar{P} \cdot Q = 0$ ), as formas normais e as leis de Morgan, sempre por meio de provas no estilo algébrico.

Considerando seu sistema como base, Hilbert considera ainda que os axiomas de outras teorias poderiam ser interpretados como proposições corretas e seu cálculo lógico poderia ser utilizado para mostrar quais delas seguiriam dos axiomas de acordo sua definição de condicional. Com essa intenção, prova que “ $P \mid Q$  se, e só se,  $Q$  é da forma  $A.P$  para alguma proposição  $A$ . O processo dedutivo se realiza então da multiplicação de proposições corretas por outras arbitrárias.” Este resultado é importante e lhe permite abordar a questão da decidibilidade do seu cálculo proposicional:

I now want to point out what is probably the most important application of the normal form of a proposition and its uniqueness. We will—and this is a restriction we have to impose for the time being—take a finite number of propositions  $a, b, c, \dots$  (axioms about the things considered or proper names) as given. Then there can be only a finite number of propositions (that is, propositions built up from these basic propositions), for every one can be brought into the form of a sum of products [conjunction of disjunctions] in basically a unique way. Every basic proposition appears in any summand [conjunct] only in the first dimension and any product [disjunction] appears only once as a summand [conjunct]. Every correct proposition must follow from the sum of the axioms  $a + b + \dots$  by multiplication with a certain factor  $A$  (proof) and for this  $A$  there are only finitely many [possible] forms by what has just been said. So it turns out that for every theorem there are only *finitely many possibilities of proof*, and thus we have solved, in the most primitive case at hand, the old problem that it must be possible to achieve any correct result by a *finite proof*. This problem was the original starting point of all my investigations in our field, and the solution to this problem in the most general case [...] the proof that there can be no “*ignorabimus*” in mathematics, has to remain the ultimate goal.<sup>201</sup>

---

<sup>201</sup> HILBERT, 1905 *apud* ZACH, 1999, p. 335.

Agora quero salientar o que é provavelmente a mais importante aplicação da forma normal de uma proposição e sua unicidade. Nós vamos – e esta é uma restrição que sempre iremos impor – considerar um número finito de proposições  $a, b, c, \dots$  (axiomas sobre as coisas consideradas ou nomes próprios) conforme dado. Então haverá apenas um número finito de proposições (ou seja, proposições construídas a partir destas proposições básicas), pois cada uma pode ser construída basicamente na forma de uma soma ou produto (conjunções ou disjunções) único. Cada proposição aparece em qualquer somatório (conjunto) apenas em primeira dimensão e qualquer produto (disjunção) aparece apenas uma vez como somatório (conjunto). Toda proposição correta deve seguir da soma dos axiomas  $a + b + \dots$  por multiplicação com um certo fator  $A$  (prova) e para este  $A$  existem apenas finitas possibilidades de formas finitas pelo acaba de ser dito. Então, isto quer dizer que para cada teorema existem apenas finitas possibilidades de provas, e então nós resolvemos o mais primitivo caso, o antigo problema de que deve ser possível obter resultados corretos por meio de provas finitas. Este problema foi o ponto de partida de minhas investigações na área e a solução para isso no caso mais geral [...], a prova de que não pode haver “*ignorabimus*” em matemática, continua sendo o objetivo final. (tradução nossa)



As palavras de Hilbert evidenciam a preocupação com a existência de provas finitas para qualquer proposição correta, no sentido que poderíamos decidir, após uma quantidade finita de passos, se temos uma prova ou não, de acordo com sua definição. Isto seria parte do “coração” de seu projeto.

Assim, em 1905, os procedimentos já mostram a clara intenção universalista de Hilbert em relação aos fundamentos da matemática, em particular da aritmética, e, por outro lado, o trato com a lógica, não de forma absolutamente reducionista, mas como modelo base. A similaridade com o feito em geometria é patente, quase uma extensão.

### **1910 - *Elemente und Prinzipinfragen der Mathematik***



O curso de 1910 apresenta forte mudança em relação ao proposto em 1904 e, embora sem muito a acrescentar, as ideias de Hilbert apresentam novas perspectivas e clarificam algumas ideias advindas de 1905.

Dividido em três partes, nas duas primeiras são abordadas questões relativas à geometria, análise e mecânica. A 3ª e última parte é mais significativa e confirma ainda o real interesse de Hilbert naquele momento: discussões acerca dos paradoxos de Russel e Richard, além de considerações fundamentais sobre a lógica.

No que se segue, Hilbert reapresenta sua lógica proposicional e o planejamento de reformular o cálculo lógico, com o objetivo de apresentar as inferências lógicas por meio apenas de operações formais com “signos”<sup>202</sup>: “Podemos nomear coisas com signos que poderemos posteriormente identificar. Com eles poderemos considerar operações análogas às da aritmética e que obedecem a leis similares”<sup>203</sup>.

Desta forma, Hilbert pretendia resolver o problema do ambíguo e subjetivo caráter da linguagem que propiciava o surgimento dos paradoxos



De 1910 a 1913 pouco se tem a reportar sobre o interesse em Göttingen nas questões que envolvem a lógica e os fundamentos da matemática. Embora Hilbert ainda tenha ministrado em

---

<sup>202</sup> Nossos já mencionados objetos extra-lógicos (objetos do pensamento)

<sup>203</sup> HILBERT, 1910 *apud* SIEG op. cit, p. 98.

1911/1912 o curso *Logische Grundlagen der Mathematik*, sua atenção se voltava mais para as questões da física, o que se manifesta com o curso de 1913, *Grundlagen der Mathematik und Physik*.

A partir de 1914, a situação muda. Isto talvez por conta da chegada de Behmann<sup>204</sup>, aluno de doutorado de Hilbert, responsável pela divulgação inicial do sistema de Russel em Göttingen e que ofereceu em dezembro deste ano o curso *Über mathematische Logik*<sup>205</sup>, uma introdução ao *Principia Mathematica*. Segue então intensa atividade testemunhada por cursos e seminários oferecidos, como por exemplo *Probleme und Prinzipien der Mathematik*, e cuja lista pode ser encontrada nos relatórios anuais da DMV de 1914 a 1921.

E chegamos a 1917, o ano que marca o retorno de Hilbert às questões fundacionais quando, no inverno 1916/1917, ministra seu primeiro curso dedicado inteiramente à teoria dos conjuntos: *Mengenlehre*. O feito se repetiria ainda no verão do mesmo ano.

### 1917 – *Mengenlehre*



Inteiramente rendido ao tema<sup>206</sup>, Hilbert considera a teoria dos conjuntos como “ a disciplina matemática sobre a qual todas as demais são construídas”<sup>207</sup>, atribuindo a Cantor a posição de único “criador”, sem mencionar até mesmo as contribuições de Dedekind, o grande precursor.

São ainda tratadas questões como a conceituação de conjunto, ainda da mesma forma ingênua que Cantor; conjuntos infinitos e não-enumeráveis<sup>208</sup>; aritmética cardinal; e, ordenação de conjuntos. Hilbert retoma questões importantes e as trata com a devida importância, como é

---

<sup>204</sup> Cf. MANCOSU, 1999.

<sup>205</sup> Sobre a Lógica Matemática.

<sup>206</sup> Já na abertura do curso, Hilbert compara a teoria dos conjuntos à ajuda que Ariadne deu a Theseus contra o Minotauro como “o fio vermelho para orientação no labirinto matemático, cuja busca leva à fonte do conhecimento matemático e até mesmo filosófico em geral” (HILBERT, 1917 *apud* MOORE, 2002, p. 52)

<sup>207</sup> Na época, tratava-se de uma afirmação controversa, aceita por apenas um pequeno número de matemáticos como Hausdorff. Muitos não consideravam a teoria dos conjuntos adequada para fundamentar a matemática em si como os matemáticos franceses, incluindo Baire e Lebesgue (embora a tenham usado em suas teorias) e, mais fortemente, Poincaré; sem mencionair ainda as restrições de Brouwer e até mesmo Russel.

<sup>208</sup> Dados dois conjuntos A e B, determinar quando os seus cardinais são iguais ou não.

o caso da *hipótese do contínuo* de Cantor e a tricotomia dos cardinais<sup>209</sup>. Para este último caso, utiliza o axioma da escolha e apresenta uma prova do Princípio da Boa Ordem de Zermelo que leva à tal resultado.

Hilbert assegura que “[...] set theory is the foundations of mathematics, and so unclarities and contradictions in other branches of mathematics must be corrected within set theory. [...] because of the paradoxes, this was not yet the case.”<sup>210</sup>

Segue uma crítica ao método genético e a defesa do método axiomático para as questões que envolvem a construção de conjuntos numéricos, como a dos naturais feita por Dedekind via conjuntos e a de Kronecker, ambas efetuadas com o apoio de definições genéticas. Estas considerações o levam a seguir o feito por Peano, ao apresentar um sistema de axiomas para os naturais, assegurando surpreendentemente que:

Since a mathematical existence proof is always understood only to be a proof that the statement in question does not lead to a contradiction, then the existence of the natural numbers cannot be proved in this sense. If, however, one assumes the consistency without proof, then the Peano postulates determine them up to isomorphism.<sup>211</sup>

O trecho em questão mostra severa mudança em relação a 1905, quando Hilbert se dedicava à busca desta consistência.

Ainda neste curso, Hilbert confirma o seu propósito de abordar mais seriamente a questão de uma fundamentação para a lógica:

---

<sup>209</sup> Foi nesta ocasião que Hilbert apresentou como exemplo o seu conhecido paradoxo do hotel com infinitos quartos disponíveis: Considere um hotel hipotético com infinitos quartos, todos ocupados - isto é, todos os quartos contêm um hóspede. Suponha que um novo hóspede chega e gostaria de se acomodar no hotel. Se o hotel tivesse apenas um número finito de quartos, então é claro que o requerimento não poderia ser cumprido, mas como o hotel possui um número infinito de quartos então se movermos o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante (simultaneamente), movendo o hóspede do quarto  $n$  para o quarto  $n+1$ , podemos acomodar o novo hóspede no quarto 1, que agora está vago. Por um argumento análogo é possível alocar um número infinito de novos clientes: apenas mova o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto 4, e em geral do quarto  $N$  para o quarto  $2N$ , assim todos os quartos de número ímpar estarão livres para os novos hóspedes. O mesmo procedimento pode ser realizado infinitas vezes, sempre acomodando infinitamente novos hóspedes.

<sup>210</sup> HILBERT, 1917, p.132 apud MOORE, 2002, p. 52.

A teoria dos conjuntos é a base da matemática e, portanto, a falta de clareza e as contradições em outros ramos da matemática devem ser corrigidas por meio dela. [...] por causa dos paradoxos, esse ainda não era o caso.

<sup>211</sup> Idem, p. 148.

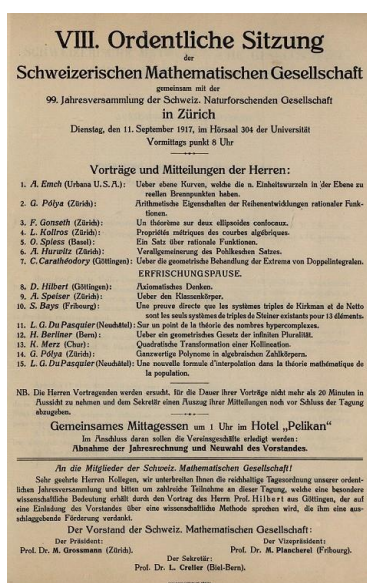
Uma vez que uma prova de existência matemática é sempre entendida apenas como uma prova de que as proposições consideradas não levam a uma contradição, então, nesse sentido, a existência dos números naturais não pode ser provada. Se, no entanto, se supõe a consistência sem prova, então os postulados de Peano os determinam a menos de isomorfismos. (tradução nossa)

[...] we are facing one of the most difficult problems of mathematics. Poincaré has even the view that this is not at all possible. But with that view one could rest content only if it had been proved that further reduction of the axioms for arithmetics is impossible; but is not the case. Next term, I hope to be able to examine more closely a foundation for logic.<sup>212</sup>

## 1917 - Axiomatisches Denken



Figura 7: Cartaz do VIII *Ordentliche Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft*<sup>213</sup> – 1917 - Zurique



Fonte: <[http://new.ulsu.ru/media/documents/booklet\\_Lisboa2017](http://new.ulsu.ru/media/documents/booklet_Lisboa2017)> Acesso em 05/2018.

Em setembro, após 13 anos de silêncio em reação à comunidade externa, Hilbert retorna oficialmente à questão dos fundamentos ao proferir, em Zurique, a conferência *Axiomatisches Denken*, uma defesa veemente do método axiomático e seu aspecto fundacionalista para todos os ramos do conhecimento:

<sup>212</sup> HILBERT, 1917 *apud* SIEG, op. cit., p. 100.

[...] estamos diante de um dos problemas mais difíceis da matemática. Poincaré tem a visão de que isso não é possível. Mas, com esta visão, só poderíamos nos contentar se tivesse sido provado que outra redução dos axiomas para a aritmética é impossível; mas não é o caso. Proximamente, espero poder examinar mais de perto uma fundamentação para a lógica. (tradução nossa.)

<sup>213</sup> VIII Reunião Ordinária da Companhia Matemática Suíça.

The procedure of the axiomatic method, as it is expressed here, amounts to a deepening of the foundations of the individual domains of knowledge—a deepening that is necessary for every edifice that one wishes to expand and to build higher while preserving its stability.<sup>214</sup>

E não apenas isso. Hilbert explica ainda em linhas gerais, como a aplicação do método poderia ser empreendida. Em Park (2011, p. 436), encontramos:

[...] Hilbert explained by exploiting ample examples how the axiomatic method is applied and how the deepening of the foundations results in a given field of knowledge. Let us follow Hilbert's lead to capture the major stages in a schematic fashion.

- (1) Collected facts in a given field (of knowledge) can be ordered by a certain conceptual framework.
- (2) In establishing the conceptual framework for the field (of knowledge), there are some underlying salient propositions. (The propositions are themselves good enough for building the entire framework according to logical principles.)
- (3) The fundamental propositions can be considered as axioms for the individual field (of knowledge). (The development of the field depends only on the additional logical establishment of the conceptual framework.)
- (4) The problem of establishing the foundations of the field (of knowledge) has been solved.
- (5) However, the solution is only temporary. A need arises to ground the propositions themselves that are fundamental and axiomatic in the field (of knowledge) (Based on Hilbert 1918, pp. 1107–1109) [...] <sup>215</sup>

Hilbert ainda se permite voltar ao trato com questões que, em sua opinião, requereriam mais atenção por parte de seus pares: mais uma vez a consistência da aritmética; a teoria dos conjuntos de Cantor; o estudo das provas e demonstrações em matemática; o problema da

---

<sup>214</sup> Hilbert, 1918, p. 1109.

O procedimento do método axiomático, como é expresso aqui, equivale a um aprofundamento dos fundamentos dos domínios individuais do conhecimento - um aprofundamento que é necessário para cada edifício que se deseja expandir e construir mais além, preservando sua estabilidade. (tradução nossa)

<sup>215</sup> Hilbert fez sua explanação explorando amplos exemplos de como o método axiomático é aplicado e como o aprofundamento dos fundamentos resulta em um determinado campo de conhecimento. Vamos seguir a liderança de Hilbert para capturar as principais etapas de forma esquemática.

- (1) Os fatos coletados em um determinado campo (de conhecimento) podem ser ordenados por uma certa estrutura conceitual.
- (2) Ao estabelecer o quadro conceitual para o campo (do conhecimento), existem algumas proposições subjacentes mais significativas (As proposições são por si mesmas suficientes para construir toda a estrutura de acordo com os princípios lógicos.)
- (3) As proposições fundamentais podem ser consideradas como axiomas para a área individual (do conhecimento). (O desenvolvimento da área depende apenas do estabelecimento lógico adicional da estrutura conceitual.)
- (4) O problema de estabelecer os fundamentos da área (de conhecimento) foi resolvido.
- (5) No entanto, a solução é apenas temporária. É necessário fundamentar as próprias proposições que são fundamentais e axiomáticas na área (do conhecimento). (tradução nossa)

decisão, ou seja, a resolução de todo problema matemático em um número finito de passos, e, a relação entre conteúdo e formalismo.

Sobre a questão da consistência, reconhece se tratar de um dos problemas mais difíceis da matemática e defende o uso da lógica:

The examination of the consistency is an unavoidable task; thus, it seems to be necessary to axiomatize logic itself and to show that number theory as well as set theory are just parts of logic. This avenue, prepared for a long time, not least by deep investigations of Frege, has finally been taken most successfully by the penetrating mathematician and logician Russell. The completion of this broad Russellian enterprise of axiomatizing logic might be viewed quite simply as the crowning achievement of the work of axiomatization.<sup>216</sup>

E ainda, sobre isto, faz a distinção entre a justificação de uma teoria matemática por meio de métodos semânticos e a justificação dos próprios métodos matemáticos:

The problem of the consistency of the axiom system for real numbers can likewise be reduced by the use of set-theoretic concepts to the same problem for the integers: this is the merit of the theories of the irrational numbers developed by Weierstrass and Dedekind. In only two cases in this method of reduction to another special domain of knowledge clearly not available, namely, when it is a matter of the axioms for the integers themselves, and when it is a matter of the foundations of the set theory; for here there is no other discipline besides logic which it would be possible to invoke.<sup>217</sup>



Nesta ocasião, Hilbert vem a conhecer aquele que viria a ser seu maior colaborador, o matemático suíço Bernays. Convidado para ser seu assistente em Göttingen, Bernays assume a tarefa a partir de novembro. Ambos seriam os responsáveis pela execução do programa formalista nas décadas seguintes.

---

<sup>216</sup> Ibidem, p. 1113.

O exame da consistência é uma tarefa inevitável; assim, parece ser necessário axiomatizar a própria lógica e mostrar que a teoria dos números, bem como a teoria dos conjuntos, são apenas partes da lógica. Este caminho, preparado por um longo período de tempo, não menos pelas profundas investigações, foi finalmente concluído com sucesso pelo penetrante matemático e lógico Russell. A conclusão desse amplo empreendimento russeliano de axiomatização da lógica pode ser vista simplesmente como o coroamento do trabalho da axiomatização. (tradução nossa)

<sup>217</sup> Idem.

O problema da consistência do sistema de axiomas para os *números reais* pode ser igualmente reduzido, mediante a utilização de conceitos da teoria dos conjuntos, ao mesmo problema para os inteiros: é este o mérito das teorias dos números irracionais desenvolvida por Weierstrass e Dedekind. Somente em dois casos é que este método de redução de um domínio do conhecimento a outro claramente não está disponível, nomeadamente, quando se trata dos axiomas para os próprios *inteiros*, e quando se trata dos fundamentos da *teoria dos conjuntos*; pois, nestes casos, não há nenhuma outra disciplina além da lógica que seria possível invocar. (tradução nossa)

Bernays publicou vários artigos sobre filosofia da matemática e seus trabalhos em lógica e teoria axiomática dos conjuntos são considerados suas maiores contribuições para a fundamentação da matemática.

Como assistente de Hilbert, sua maior tarefa consistiu na preparação e transcrição dos cursos que seriam ministrados por ambos, dando origem a uma sequência de notas que evidencia a criação da lógica matemática moderna, além da emergência da teoria da prova.

Citando alguns de tais cursos:<sup>218</sup>

- 1917/1918 (inverno): *Prinzipien der Mathematik*;<sup>219</sup>
- 1919 (inverno): *Natur und mathematisches Erkennen*;<sup>220</sup>
- 1920 (inverno): *Logik – Kalkül*;<sup>221</sup>
- 1920 (verão): *Probleme der mathematischen Logik*;<sup>222</sup>
- 1921/1922 (inverno): *Grudlagen der Mathematik*;<sup>223</sup>
- 1922/1923 (inverno): *Logische Grundlagen*.<sup>224</sup>

O curso ministrado no inverno 1917/1918 é um marco importante<sup>225</sup> no trabalho de Hilbert, já que grande parte de suas notas deu origem ao livro publicado em 1928 por Hilbert e Ackermann, *Grundzüge der Theoretischen Logik*.

---

<sup>218</sup> SIEG, op. cit. p. 91-127.

<sup>219</sup> Princípios da Matemática.

<sup>220</sup> Natureza e Conhecimento matemático.

<sup>221</sup> Lógica – Cálculo.

<sup>222</sup> Problemas da Lógica matemática.

<sup>223</sup> Fundamentos da Matemática.

<sup>224</sup> Noções básicas de Lógica.

<sup>225</sup> Considerado por Moore (op. cit, p. 54) o mais importante curso ministrado por Hilbert sobre os fundamentos da matemática.

1917/1918 - *Prinzipien der Mathematik*

As notas deste curso estão divididas em duas partes: a primeira, dedicada ao método axiomático, tendo por exemplo o feito em geometria; a segunda, tratando da lógica.

Esta segunda parte é especialmente importante por apresentar novos resultados e desenvolvimentos como completude, decidibilidade e consistência do sistema axiomático construído para a lógica proposicional. Neste último caso, o argumento é hoje comum e consiste basicamente na introdução dos conceitos de valor verdade e tautologia, além das seguintes considerações: os axiomas são tautologias; toda proposição derivada dos axiomas é uma tautologia. Assim, uma fórmula do tipo  $P + \bar{P}$  nunca será uma tautologia, o que significa não ser possível derivar uma contradição em tal sistema.

A seguir, tal sistema da lógica é estendido, com a inclusão de axiomas puramente matemáticos e se pode encontrar, nos quatro primeiros capítulos, uma formulação sistemática da lógica de 1ª ordem, em forma predominante até os dias atuais. Desta vez, seu desenvolvimento teve por base a teoria dos tipos de Russell, porém, indo mais além, ao considerar a lógica de 1ª ordem um de seus subsistemas.

A independência dos axiomas de 1ª ordem é estabelecida da mesma forma que em 1905, por meio de uma reinterpretação na aritmética. Já a consistência é provada com recursos da própria lógica, ao restringir o domínio das proposições:

Restrict the domain of propositions by allowing only the propositions 0 and 1 and interpret the equations in accordance with this as proper identities. Furthermore, define sum and product by the 8 equations

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 1 & 0 \times 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 & 0 \times 1 = 0 \\ 1 + 0 = 1 & 1 \times 0 = 0 \\ 1 + 1 = 1 & 1 \times 1 = 1 \end{array}$$

which are characterized by turning into correct arithmetical equations, if one replaces the symbolic sum by the maximum of the summands and the symbolic product by the minimum of the factors. Declare the proposition 1 to be the negation of the proposition 0 and the proposition 0 to be the negation of 1. These definitions in any case do not lead to a contradiction, for each one of them defines a new symbol. On the other hand, one can establish by finitely many tries that all the axioms I–XII are satisfied by these definitions. These axioms therefore cannot result in a contradiction either. Thus the question of consistency of our calculus can be completely resolved.<sup>226</sup>

<sup>226</sup> HILBERT, 1918 *apud* Zach, 2001, p. 22.

Restringir o domínio das proposições, considerando como proposições apenas 0 e 1 e interpretar as equações de acordo com isso como identidades próprias. Além disso, defina soma e produto pelas 8 equações



Complementando o feito em 1905, segue uma elaborada discussão sobre a condicional e o estabelecimento de novas propriedades que lhe permitem então, realizar uma investigação mais elaborada de como o raciocínio matemático pode se espelhar na lógica proposicional.

O 5º capítulo é dedicado à lógica de 2ª ordem<sup>227</sup>, com discussões acerca de definição de número, teoria dos conjuntos, paradoxos e teoria dos tipos.

No decorrer de suas exposições, Hilbert deixa em aberto as seguintes questões epistemológicas<sup>228</sup> que norteariam seu caminho:

- a resolubilidade, em princípio, de cada questão em aberto em matemática;
- a verificabilidade dos resultados de qualquer investigação em matemática;
- a busca de um critério de simplicidade para provas e refutações;
- a relação entre conteúdo e formalismo na matemática e na lógica; e,
- a decidibilidade de uma questão matemática por meio de um número finito de operações.

Neste meio tempo, voltemos a Brower e o que advém do intuicionismo.



Em geral, Brower era radicalmente contra a ligação entre matemática e axiomatização de sistemas formais, característica principal dos trabalhos de Hilbert, por considerar os procedimentos muito além do estrito domínio da matemática. E, como já mencionamos antes

---

$0 + 0 = 1$	$0 \times 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \times 1 = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \times 0 = 0$
$1 + 1 = 1$	$1 \times 1 = 1$

que são caracterizadas por se transformar em equações aritméticas corretas, quando se substitui a soma simbólica pela parcela máxima e o produto simbólico pelo fator mínimo. Declare que a proposição 1 é a negação da proposição 0 e a proposição 0 é a negação de 1. Estas definições, em qualquer caso, não levam a uma contradição, pois cada uma delas define um novo símbolo. Por outro lado, pode-se estabelecer por muitas tentativas finitas s que todos os axiomas I – XII são satisfeitos por meio dessas definições. Estes axiomas, portanto, não podem resultar em uma contradição. Assim, a questão de a consistência do nosso cálculo pode ser completamente resolvida.

<sup>227</sup> Uma lógica proposicional (ou cálculo sentencial) é um sistema formal no qual as fórmulas representam *proposições* que podem ser formadas pela combinação de proposições atômicas usando *conectivos lógicos* e um sistema de *regras de derivação*, que permite que certas fórmulas sejam estabelecidas como teoremas do sistema. A lógica de primeira ordem (LPO), conhecida também como cálculo de predicados de primeira ordem (CPPO), é um sistema lógico que estende a lógica proposicional e que é estendida pela lógica de segunda ordem. O ingrediente novo da lógica de primeira ordem não encontrado na lógica proposicional é a quantificação. Os valores das variáveis são tirados de um universo de discurso pré-determinado. Um refinamento da lógica de primeira ordem permite variáveis de diferentes tipos, para tratar de diferentes classes de objetos.

<sup>228</sup> SMORYNSKI, 1986, p. 98 *apud* OOSTERWIJK, 2013, p. 7.

no Cap. 2, um dos principais pontos de discordância era a identificação entre não contradição e existência. De fato, argumentava Brouwer, ninguém havia provado que da consistência de um sistema lógico seguiria a real existência dos objetos da respectiva construção do sistema.

A contradição seria uma consequência da imprecisão da linguagem matemática e, em particular, do raciocínio lógico conduzido ser independente das regras próprias da matemática. E desta forma, os paradoxos da lógica e da teoria dos conjuntos não poderiam ser resolvidos pelos métodos da lógica e desapareceriam por si mesmos quando o raciocínio lógico matemático empregado se referisse a sistemas matemáticos previamente construídos.

A lógica em si seria uma aplicação da matemática na linguagem matemática e o resultado matemático de observar a atividade linguística da atividade matemática em si seria a realização de certas regularidades na expressão simbólica desta última.<sup>229</sup> Os princípios lógicos seriam portanto, a simples expressão desta regularidade observada no desenvolvimento dos sistemas matemáticos já construídos. A construção lógico-linguística não resolveria o problema dos fundamentos mas, sim, seria a razão deste.

Mas então como Brouwer se propõe abordar a questão dos fundamentos, certo de que seu maior desafio se encontrava no desenvolvimento de “ferramentas” adequadas para a análise, de acordo com os preceitos intuicionistas, o que primordialmente incluiria a busca de uma definição intuitiva para o contínuo?

A solução encontrada, drástica e direta, se caracterizaria pela reconstrução da teoria dos conjuntos, de 1919 em diante.

Brouwer nega a existência dos transfinitos de Cantor e o significado matemático da hipótese do contínuo ao considerar que os únicos conjuntos infinitos que poderiam ser construídos pela intuição seriam os reais e os equipotentes aos naturais. E estes, para ele, são entidades envolvidas num processo contínuo de geração no tempo, não totalidades completas, acabadas. Como resultado de sua concepção do contínuo, Brouwer cria uma teoria dos conjuntos de natureza construtiva e que está de acordo com as suas necessidades de percepção de uma análise construtiva.

O resultado vem em 1918 com a publicação de dois importantes artigos, *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten*<sup>230</sup> e, logo a seguir,

---

<sup>229</sup> Cf. ROSELLÓ, 2011.

<sup>230</sup> Fundamentos da Teoria dos Conjuntos independente do Princípio Lógico do Terceiro Excluído.

*Intuitionistische Mengenlehre*<sup>231</sup>, o que vem a desencadear a histórica pendenga dos anos vinte entre formalistas e intuicionistas.

E qual teria sido o gatilho? Um aluno de Hilbert, chamado Weyl ...



Após as significativas publicações de Brouwer, um proeminente aluno de Hilbert em Göttingen, Hermann Weyl, publica ainda em 1917, *Das Kontinuum*<sup>232</sup>, onde é visível sua afinidade com o intuicionismo de Brouwer, pelo menos de início.

Sua conversão se concretizaria com a publicação, em 1921, do artigo filosófico *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*<sup>233</sup>, na qual defende o ponto de vista intuicionista, apontando ser esta a solução de todos males... a solução para dar sentido ao edifício da matemática, ou seja, a matemática como um todo, incluindo a matemática transfinita, impossível de ser entendida intuitivamente, denominada por ele de matemática teórica (sic), aquela que só pode ser representada por meio de símbolos. A intuição assim, no lugar das provas formais, proporcionaria o fundamento último do conhecimento matemático!

Mas, nem tanto assim.

Weyl sustenta ainda que tanto Hilbert quanto Brouwer compactuam com a ideia de construção já que, para um, ela é axiomática, ou seja, uma manipulação simbólica com base intersubjetiva dada pela intuição, enquanto para o outro, seria uma construção simbólica fundada na intuição primordial do tempo.

O entusiasmo de Weyl viria a diminuir nos anos seguintes, quando passou a adotar uma posição mais conciliatória entre formalismo e intuicionismo, por conta da perda de muitos resultados da matemática clássica, dificultando também sobremaneira a prática matemática:

La matemática alcanza con Brouwer su mayor claridad intuitiva. Logra desarrollar los comienzos del análisis en forma natural conservando siempre íntimo contacto con la intuición en forma mucho mejor de la conseguida hasta entonces. Sin embargo, no puede negarse que al llegar a teorías más avanzadas y generales la inaplicabilidad de las simples leyes de la lógica resulta una torpeza casi insoportable. Y el matemático observa con dolor que el edificio que creía construido de bloque de concreto se esfuma ante sus ojos. (Weyl, H. [1949] 1965: 60. Traducción Ímaz, C.).<sup>234</sup>

<sup>231</sup> Teoria dos Conjuntos Intuicionista

<sup>232</sup> O Contínuo.

<sup>233</sup> Sobre a nova Crise dos Fundamentos da Matemática.

<sup>234</sup> WEYL, 1949 *apud* CHERUBINI, 2013, p.9.

Com Brouwer, a matemática alcança sua maior clareza intuitiva. O início da análise deve ser desenvolvido de forma natural conservando sempre íntimo contato com a intuição, de forma muito melhor do que foi feito até então. No

Do ponto de vista de Weyl, seria portanto necessário algo mais para lidar com a matemática que não se fundamentasse na intuição.

Mas ... a polêmica estava instaurada e a partir de então, Hilbert iria se dedicar integralmente à questão dos fundamentos, como forma de preservar a maioria dos resultados da matemática clássica:

What Weyl and Brouwer do amounts in principle to following the erstwhile path of Kronecker; they seek to ground mathematics by throwing overboard all phenomena that make them uneasy and by establishing a dictatorship of prohibitions *à la Kronecker*. But this means to dismember and mutilate our Science, and if we follow such reformers, we run the danger of losing a large number of our most valuable treasures.<sup>235</sup>

Problemas como a consistência da aritmética e a hipótese do contínuo deveriam ser solucionados com o cumprimento dos pré-requisitos intuicionistas. Hilbert se dedicaria então cada vez mais ao estudo das provas por si mesmas, o que viria a propiciar a fundação de sua teoria da prova.

## 4.2 PROGRAMA EM MARCHA



Ao curso de 1917/1918 com Bernays se seguiram versões aprimoradas de 1919 a 1923, onde foram apresentados os desenvolvimentos iniciais da teoria da prova e do programa de consistência.

Mas apenas em 1921/1922 as etapas de tal desenvolvimento estariam definidas: a parte inicial foi indicada por Hilbert nas palestras proferidas em Copenhague e Hamburgo, na primavera e verão de 1921, respectivamente; as etapas e a metodologia necessárias foram apresentadas apenas no curso de inverno de 1921/1922.




---

entanto, não se pode negar que ao se chegar em teorias mais avançadas, a não aplicabilidade das leis da lógica resulta num torpor quase insuportável. E o matemático observa dolorosamente que o edifício de blocos de concreto que acreditava haver construído vira fumaça diante de seus olhos.

<sup>235</sup> HILBERT, 1921 apud ROSELLÓ, 2011, p.100

O que Weyl e Brouwer fazem em princípio para seguir o antigo caminho de Kronecker: eles procuram fundamentar a matemática jogando ao mar todos os fenômenos que a tornam então desconfortável e estabelecendo uma ditadura de proibições *à la Kronecker*. Mas isto significa desmembrar e mutilar nossa ciência, e se seguimos esses reformadores, corremos o perigo de perder um grande número dos nossos mais valiosos tesouros. (tradução nossa)

## 1921/1922 – *Grudlagen der Mathematik*

Neste momento, pela primeira vez, são mencionados os termos *finite mathematik*, *transfinite schlussweisen e hibertische beweistore*<sup>236</sup>. A teoria da prova de Hilbert emerge na terceira parte do curso sob o título *Die Begründung der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik durch die neue Hilbertsche Beweistheorie*<sup>237</sup>. Trata-se da grande virada, quando Hilbert apresenta seu programa em nova versão, diferente do exposto em 1904.

Hilbert estabelece então a clara separação entre considerações matemáticas e metamatemáticas, ao distinguir a matemática contextual da matemática formal, e o tipo de indução aplicável em cada caso: matemática seria tudo que conhecemos como matemática, análise, teoria dos conjuntos, teoria dos números, etc; abstrata, infinitista e sem significados empíricos; metamatemática, o estudo dos símbolos e suas combinações, intuitiva e contextual.

Isto lhe permite responder às objeções de Poincaré e Brouwer e estabelecer construções que seriam aceitas por ambos.

Seu planejamento subdivide o projeto em etapas<sup>238</sup> para abordagem e novos desenvolvimentos:

- I. Lógica proposicional;
- II. Aritmética elementar partindo inicialmente de um fragmento;
- III. Inferências transfinitas e partes da análise;
- IV. Variáveis de ordem superior; teoria dos conjuntos; axioma da escolha;
- V. Ordinais; indução transfinita; problema do contínuo;
- VI. Substituição de conceitos que envolvem o infinito por axiomas; análise e teoria dos conjuntos; teorema do supremo.
- VII. Formulação da boa ordem.

---

<sup>236</sup> matemática finita, raciocínio transfinito, teoria da prova de Hilbert.

<sup>237</sup> Os Fundamentos da Consistência da Aritmética de acordo com a nova Teoria da Prova de Hilbert.

<sup>238</sup> Cf. ALMIRA, 2007.

Para cada uma de tais etapas seria preciso uma prova de consistência: a primeira, necessariamente absoluta, já tinha se cumprido no curso de 1917/1918; para as demais seria suficiente uma prova relativa.

No que se segue, Hilbert apresenta um sistema formal em que se incluía, pela primeira vez, axiomas de números e para este, apresenta uma prova de consistência.

Para tanto, considera o sistema da lógica proposicional acrescido de axiomas de igualdade e de números especificamente. A única regra de inferência utilizada seria o *modus ponens* ( $P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ ), além das leis de substituição.

A seguir, os axiomas então considerados<sup>239</sup>:

$$1. A \rightarrow (B \rightarrow A).$$

$$2. (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

$$3. (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

$$4. (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

$$5. A \rightarrow (\neg A \rightarrow B).$$

$$6. (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B).$$

$$7. a = a.$$

Axiomas de igualdade: 7, 8.
-----------------------------

$$8. a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)).$$

$$9. \neg (s(a) = 0) \text{ (ou } s(a) \neq 0).$$

Axiomas de número: 9,10.
--------------------------

$$10. \delta(a+1) = a.$$

Mas na realidade, ainda temos aqui um fragmento da aritmética finitista. Seria portanto necessário, aumentar a capacidade expressiva deste sistema de tal forma que admitisse uma variedade mais ampla de operações como as básicas da aritmética, soma, multiplicação etc.

Com este objetivo, Hilbert e Bernays em continuação introduzem o conceito de função

---

<sup>239</sup> As variáveis do sistema foram utilizadas tanto como formulas como números e os elementos da linguagem seriam a constante 0, a função sucessor  $s$  e a função predecessor  $\delta$ .

que pode ser obtida por recursão primitiva<sup>240</sup>, assim como um princípio de indução completa<sup>241</sup>, considerada por eles necessária já que nesta etapa não foi introduzido um quantificador existencial.

Na fase seguinte, são incluídas duas funções<sup>242</sup> de 2ª ordem (funções de funções) que permitem, em princípio, o tratamento do princípio do terceiro excluído e do axioma da escolha. Hilbert justifica esta inserção pelo fato de ser necessário assumir definições de funções não finitistas para tratar das questões da análise. Entre elas, as que são necessárias para o desenvolvimento da matemática sem as restrições intuicionistas, e nas quais se incluem as que são definidas a partir de propriedades que, em princípio, são indecidíveis. Tais funções foram posteriormente substituídas pelo operador lógico  $\varepsilon$ <sup>243</sup> que permite definir os quantificadores.

Para Hilbert, a verdadeira diferença entre a matemática construtiva (vertente intuicionista) proposta por Brower e sua escola, e a matemática formalista estava precisamente no uso de quantificadores e do axioma da escolha.

A realização de uma prova de consistência para esse novo sistema seria realizada por Ackermann, não porém sem dificuldades, já que não conseguia justificar o princípio da indução completa mediante técnicas do  $\varepsilon$  – cálculo. Para fazê-lo, utiliza em 1925 um método completamente diferente tendo por base a reformulação da proposta de Hilbert em 1904 feita

---

<sup>240</sup> Recursividade é o mecanismo no qual uma definição de função ou de outro objeto refere-se ao próprio objeto, mecanismo básico para repetições nas linguagens funcionais. São sinônimos: recursividade, recursão, recorrência. Uma função  $f$  é definida por um processo de recursão primitiva se pode ser obtida a partir do número 0, da aplicação das funções sucessor e identidade por composição e da consideração de um par de funções recursivas previamente dadas  $g$  e  $h$ , da forma  $f(0, b_1, b_2, \dots, b_n) = g(b_1, b_2, \dots, b_n)$  e  $f(a+1, b_1, b_2, \dots, b_n) = h(a, f(a, b_1, b_2, \dots, b_n), b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Por exemplo, as funções soma  $f(a, b) = a+b$  e produto,  $f(a, b) = a \cdot b$  são recursivamente definidas por:

$$\text{Soma: } \begin{cases} g(0, b) = b \\ g(a+1, b) = g(a, b) + 1 \end{cases} \quad \text{Produto: } \begin{cases} f(0, b) = 0 \\ f(a+1, b) = g(f(a, b), b) \end{cases}$$

Existem muitas outras funções numéricas que podem ser assim definidas, ao que se dedicou Hilbert em 1922 e posteriormente tentaria utilizar para demonstrar a validade da hipótese do contínuo.

<sup>241</sup> Hilbert introduz o princípio na forma de um esquema de axiomas:

$$\frac{P(1) \wedge P(a) \rightarrow P(a+1)}{Z(a) \rightarrow P(a)} \text{ onde } Z(a) \text{ é uma forma abreviada da proposição "a é um número natural".}$$

<sup>242</sup> As funções  $\tau$  e  $\alpha$  são definidas a partir dos seguintes axiomas: 1.  $\tau(f) = 0 \rightarrow (Z(a) \rightarrow (f(a)=1))$ ; 2.  $\tau(f) \neq 0 \rightarrow Z(\alpha(f))$ ; 3.  $\tau(f) \neq 0 \rightarrow f(\alpha(f)) \neq 1$ ; 4.  $\tau(f) \neq 0 \rightarrow \tau(f) = 1$ . Ou seja,  $\tau(f) = 0$  se  $f$  vale sempre 1, e vale 1 se existe um natural  $\alpha(f)$  tal que  $f(\alpha(f)) = 1$ .

<sup>243</sup>  $\varepsilon$  se aplica não apenas a funções mas também a propriedades, e sua definição é dada pelo axioma  $A(a) = A(\varepsilon(A))$ . Assim,  $\varepsilon(A)$  denota um objeto para o qual a proposição  $A$  se verifica, quando esta é satisfeita para algum objeto. Logo, se  $A$  se verifica para um único objeto, este fica determinado pela expressão  $a = \varepsilon(A)$ , enquanto que se  $A$  se verifica para vários objetos, então  $\varepsilon(A)$  atua como uma função de escolha, selecionando os objetos a que verificam  $A(a)$ . Além disso,  $\varepsilon$  permite definir os quantificadores:  $\forall a, A(a) \equiv A(\varepsilon(\neg A))$  e  $\exists a, A(a) \equiv A(\varepsilon(A))$ .

pelo matemático húngaro König. A partir daí, retoma com sucesso o problema da consistência na perspectiva do  $\varepsilon$  – cálculo.

O desenvolvimento integral dos resultados então obtidos por Hilbert e Bernays pode ser encontrado em detalhes em Zach, 2001, Cap. 3.



O programa de Hilbert (e Bernays!) foi inteiramente e oficialmente apresentado pela 1ª vez fora de Göttingen apenas em 1922 em palestra apresentada na Sociedade Alemã de Cientistas em Leipzig.

A partir daí, esta nova fase do pensamento hilbertiano passa a ser amplamente divulgada e o projeto aprimorado.

Em 1925 e 1927 se encontram os textos mais importantes oriundos de conferências apresentadas em Münster e Hamburgo, ambas com caráter de divulgação e esclarecimento do projeto.

### 1925 – *Über das Unendliche* – (Sobre o Infinito)



Toda linguagem é um alfabeto de símbolos, cujo exercício pressupõe um passado que os interlocutores compartilhem; como transmitir aos outros o infinito Aleph, que minha temerosa memória mal e mal abarca?

J. L. Borges – Aleph

Talvez a mais importante e com certeza a mais conhecida e divulgada, das apresentações de Hilbert sobre seus planos tenha sido a palestra *Über das Unendliche*, na qual argumenta a favor de seu programa. Nos propomos aqui a descrever o foco principal desta apresentação, tendo por base a tradução de Carnielli & Epstein (2009) que se encontra no Anexo B.

A exposição, diferentemente de anteriores, tem caráter aparentemente mais pedagógico (talvez como forma de maior convencimento da plateia!) e Hilbert, logo de início, deixa transparecer suas intenções: elucidar a natureza do infinito e evitar os paradoxos subsequentes de seu uso. De fato, mais além, fica sempre muito claro no discurso de Hilbert, a coerência do título de sua conferência com seu desejo de esclarecer a natureza do infinito, que considerava necessário para a dignidade humana:



Através destas observações quero apenas mostrar que o esclarecimento definitivo da *natureza do infinito*, muito mais do que interessar ao conhecimento científico especializado, é necessário para a própria *dignidade do intelecto humano*. O infinito, como nenhuma outra questão, abala tão profundamente as *emoções* humanas; o infinito, como nenhuma outra *ideia*, tão frutiferamente tem estimulado a mente; o infinito, como nenhum outro *conceito*, necessita ser *esclarecido*. (p. 232- 233)

Para isso, se propõe a apresentar uma teoria capaz de substituir os métodos dedutivos baseados no infinito por procedimentos finitos que produzissem exatamente os mesmos resultados matemáticos, sem perda das generalidades já demonstradas:

Esta é a intenção da minha teoria. Ela tem por objetivo estabelecer de uma vez por todas a confiabilidade definitiva dos métodos matemáticos, o que o período crítico do cálculo infinitesimal ainda não conseguiu; essa teoria deveria portanto completar o que Weierstrass aspirou conseguir com sua fundamentação da análise e para a qual ele deu um passo essencial e necessário. (p.232)

No desenvolver de sua fala, Hilbert reconhece a importância do trabalho de Weierstrass na fundamentação da análise, porém critica a presença de procedimentos em que transparecem o conceito de número real definido por séries infinitas e o conceito de sistema de números reais concebido como uma totalidade, além de rejeitar as formas de argumentação que se referiam à uma propriedade pertencente a todos os números reais ou à existência de um número real com certa propriedade, pois entendia que essas argumentações pressupunham o conceito de infinito.

O infinito, assim manipulado, surgiria da necessidade dos matemáticos de dar sentido às suas explicações. Este infinito como totalidade, ainda cultivado nos métodos dedutivos, deveria ser compreendido como uma figura de linguagem, uma ilusão. Para isso, propunha que os métodos dedutivos baseados no infinito deveriam ser substituídos por procedimentos finitos que produzissem os mesmos resultados:

Portanto, o infinito pode reaparecer disfarçado na teoria de Weierstrass, escapando da sua aguda crítica e daí segue que o *problema do infinito*, no sentido indicado, é o que nós temos que resolver de uma vez por todas. Tal como nos processos limite do cálculo infinitesimal, onde o infinito no sentido do infinitamente grande e do infinitamente pequeno acabou se mostrando uma mera figura de linguagem, também o infinito na forma de totalidade, ainda utilizado nos métodos dedutivos, deve ser entendido como uma ilusão. Do mesmo modo em que operações com o infinitamente pequeno foram substituídas por operações com o finito que apresentam exatamente os mesmos resultados e as mesmas elegantes relações formais, os métodos dedutivos baseados no infinito devem ser substituídos por procedimentos finitos que produzam exatamente os mesmos resultados, isto é, que tornem possível as mesmas cadeias de provas e os mesmos métodos de obtenção de fórmulas e teoremas.(p. 231 - 232)

Hilbert distingue dois tipos de matemática: uma *contextual*, na qual todos os raciocínios

envolvidos dependem do sentido dos enunciados e tratam de objetos concretos e, outra *formal*, onde os raciocínios envolvidos não passam de encadeamentos de fórmulas e enunciados, a partir de premissas previamente fixadas e segundo regras determinadas. Sua proposta se caracterizava na expansão da matemática para além da contextual, garantindo a validade das leis da lógica nesse domínio ampliado. Para isso, aplica o método genético às proposições matemáticas. A matemática formal obtida por essa expansão conteria as proposições da matemática contextual que são demonstráveis nos sistemas formais - as *proposições reais* - e além destas, outras proposições exteriores - as *proposições ideais* que serviriam para a dedução das primeiras, não possuindo realidade além desta função instrumental.

A melhor aplicação do conceito de elemento ideal não se encontrava na aritmética, nem na geometria, nem mesmo no “produto mais fino e laborado” da ciência matemática (como ele definia): a análise. Onde melhor se aplicava tal conceito era na teoria dos conjuntos de Georg Cantor, mais especificamente na teoria dos números transfinitos. Esta teoria, segundo ele, não lida com os conceitos de infinitamente grande e infinitamente pequeno com a mesma ideia de infinito potencial da análise, mas sim com o conceito de totalidade existente: o infinito atual ou em ato ou completado, como queiramos.

Mas a análise por si só não nos conduz à compreensão mais profunda da natureza do infinito. Esta nos é dada por uma disciplina que mais se aproxima de um método filosófico geral e que foi engendrada para lançar nova luz sobre o grande complexo das questões sobre o infinito. Esta teoria, criada por Georg Cantor, é a teoria dos conjuntos e estamos aqui interessados somente naquela parte única e original da teoria que forma o núcleo central da doutrina de Cantor, a saber, a teoria dos números *transfinitos*. Esta teoria me parece o mais refinado produto do gênio matemático e uma das façanhas supremas da pura atividade intelectual humana. O que é, então, esta teoria? [...] Alguém que desejasse caracterizar brevemente a nova concepção do infinito que Cantor introduziu, poderia afirmar que em análise lidamos com o infinitamente grande e o infinitamente pequeno somente como conceitos-limite, como algo a acontecer ou vir a ser, isto é, como *infinito potencial*. Mas este não é o verdadeiro infinito. Encontramos o verdadeiro infinito somente quando consideramos a totalidade dos números 1, 2, 3, 4, ... como uma unidade completa, ou quando tomamos os pontos de um intervalo como uma totalidade que existe, de uma só vez. Este tipo de infinito é conhecido como *infinito atual* ou *completado*. (p. 236)

A ideia de Hilbert portanto, é desanuviar de uma vez por todas a descrença dos matemáticos e estabelecer de uma vez por todas a validade das demonstrações matemáticas através das formas de dedução lógicas. Em seu íntimo, desejava completar o trabalho de Weierstrass, por acreditar que mesmo tendo avançado bastante, suas demonstrações ainda atribuíam um caráter ilusório, sobrenatural, ao conceito de infinito. Os métodos dedutivos baseados no infinito deveriam ser substituídos por métodos finitistas:

[...]Tenhamos presente a natureza e os métodos da teoria elementar finitária dos números. Esta teoria pode certamente ser construída a partir de estruturas numéricas, através de considerações materiais intuitivas. Mas certamente a matemática não consiste somente de equações numéricas e certamente não pode a elas ser reduzida. Contudo pode-se argumentar que a matemática é um aparato que, quando aplicado aos inteiros, sempre produz equações numéricas corretas. Mesmo assim, ainda temos que investigar a estrutura deste aparato o suficiente para garantir que ele de fato sempre produzirá equações corretas. Para levar a efeito tal investigação dispomos somente dos mesmos métodos finitários, materiais concretos que servem para derivar equações numéricas na teoria dos números. Esta exigência científica pode ser de fato satisfeita, ou seja, é possível, de uma maneira puramente intuitiva e finitária - do mesmo modo como obtemos as proposições verdadeiras da teoria dos números – conseguir as intuições que garantam a confiabilidade do aparato matemático. [...] Consideremos a teoria dos números mais de perto. Na teoria dos números temos os símbolos numéricos: 1, 11, 111, 11111

onde cada símbolo é intuitivamente reconhecido pelo fato de que contém somente 1's. Estes símbolos numéricos que são nosso objeto de estudo não têm em si mesmo nenhum significado. Adicionalmente a estes símbolos, mesmo na teoria elementar dos números, temos outros que possuem significado e que servem para facilitar a comunicação: por exemplo, o símbolo 2 é usado como uma abreviação para o símbolo numérico 11 e 3 como uma abreviação para 111. Usamos ainda símbolos como +, = e > para comunicar proposições. Já  $2+3=3+2$  pretende comunicar o fato de que  $2+3$  e  $3+2$ , levando em conta as abreviações, são o mesmo e idêntico símbolo, a saber, o símbolo numérico 11111. Similarmente,  $3 > 2$  serve para comunicar o fato de que o símbolo 3, isto é, 111, é mais longo do que o símbolo 2, isto é, 11; ou, em outras palavras, que o último é parte própria do primeiro.[...] De nossa posição finitária, uma proposição existencial da forma “existe um número com uma certa propriedade” em geral só tem significado como uma proposição parcial, isto é, como parte de uma proposição melhor determinada. A formulação mais precisa, contudo, para muitos propósitos pode ser desnecessária. Encontramos o infinito analisando uma proposição existencial cujo conteúdo não pode ser expresso por uma disjunção finita. De modo similar, negando uma proposição geral, que se refere a símbolos numéricos arbitrários, obtemos uma proposição transfinita. Por exemplo, a proposição que se  $a$  é um símbolo numérico então  $a+1=1+a$  vale sempre, de nossa perspectiva finitária é *incapaz de negação*. Veremos melhor isso se considerarmos que este enunciado não pode ser interpretado como uma conjunção de infinitas equações numéricas conectadas através de “e” mas somente como um juízo hipotético que afirma algo no caso de ser dado um símbolo numérico. A partir de nossa posição finitária, portanto, não se pode sustentar que uma equação como aquela dada acima, onde ocorre um símbolo numérico arbitrário, ou é válida para todo símbolo ou é refutada por um contraexemplo. Um tal argumento, sendo uma aplicação da lei do terceiro excluído, fundamenta-se na pressuposição de que a asserção da validade universal desta equação é passível de negação. De todo modo, constatamos o seguinte: se nos colocamos no domínio das asserções finitárias, como de resto deveríamos, temos em geral que conviver com leis lógicas muito complicadas. A complexidade torna-se insuportável quando as expressões “para todo” e “existe” são combinadas e involucradas. Em suma, as leis lógicas que Aristóteles professava e que a humanidade tem usado desde os primórdios do pensamento não mais valeriam. Podemos, é claro, desenvolver novas leis que valham especificamente para o domínio das proposições finitárias. Mas não nos traria nenhum proveito desenvolver tal lógica, pois não queremos nos livrar das leis simples da lógica de Aristóteles e ninguém, ainda que falasse a língua dos anjos, poderia impedir as pessoas de negar proposições gerais, ou de formar juízos parciais, ou de fazer uso do *tertium non datur*. Como devemos, então, proceder? Vamos lembrar que *somos matemáticos* e que como matemáticos temos estado muitas vezes em situação precária, da qual fomos resgatados pelo método genial dos elementos ideais. (p.240 - 243)

No texto, consta uma saída para evitar os paradoxos: a cuidadosa investigação das definições frutíferas e dos métodos dedutivos e o estabelecimento do mesmo grau de certeza da

teoria elementar da aritmética. Assim, para que as deduções lógicas fossem seguras, seria necessário vislumbrar todos os aspectos dos objetos extralógicos:

Deve-se admitir que o presente estado de coisas em relação aos paradoxos é intolerável. Pense nisso: as definições e métodos dedutivos que todos aprendem, ensinam e usam em matemática, o paradigma da verdade e certeza, levam a absurdos! Se o raciocínio matemático é defeituoso, onde encontraremos verdade e certeza? Existe, contudo, um caminho satisfatório para evitar os paradoxos sem trair nossa ciência. As atitudes que nos ajudarão a achar este caminho e a direção a tomar são as seguintes:

1. Definições frutíferas e métodos dedutivos que tiverem uma esperança e salvamento serão cuidadosamente investigados, nutridos e fortalecidos. Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.

2. É necessário estabelecer para todas as deduções matemáticas o mesmo grau de certeza das deduções da teoria elementar dos números, onde ninguém duvida e onde contradições e paradoxos só ocorrem devido a nosso descuido.

O término desta tarefa só será possível quando tivermos elucidado completamente a *natureza do infinito*. (p.239)

A solução formalista que Hilbert encontra é independente da realidade ontológica que se atribua ao infinito, já que as teorias matemáticas que supõem um infinito atual são representadas por sistemas formais. A experiência não conteria totalidades infinitas, bastando representar as proposições que lhe fazem referência, por fórmulas vazias de sentido e encadeadas por regras explícitas. Porém, segundo Hilbert, estas proposições, introduzidas com o intuito de que as leis da lógica pudessem valer universalmente, não seriam finitárias e, conseqüentemente, as operações lógicas não poderiam lhes ser materialmente aplicadas. Para levar a cabo seu intuito, seria necessário formalizar as próprias operações lógicas e demonstrações matemáticas. Esta formalização vai transformar relações lógicas em fórmulas e é o esboço de sua teoria da prova:

[...] Os símbolos do cálculo lógico foram originalmente introduzidos para comunicar. Contudo, é consistente com nossa perspectiva finitária negar qualquer significado aos símbolos lógicos, como negamos significado aos símbolos matemáticos e declarar que as fórmulas do cálculo lógico são proposições ideais sem qualquer significado próprio. Possuímos, no cálculo lógico, uma linguagem simbólica capaz de transformar asserções matemáticas em fórmulas e capaz de expressar a dedução lógica por meio de procedimentos formais. Em exata analogia com a transição da teoria material dos números à álgebra formal, tratamos agora os sinais e símbolos de operação do cálculo lógico abstraindo do seu significado. Desta forma, finalmente, obtemos, ao invés do conhecimento matemático material que é comunicado através da linguagem comum, somente uma coleção de fórmulas envolvendo símbolos lógicos e matemáticos que são gerados sucessivamente, de acordo com regras determinadas. Algumas dessas fórmulas correspondem a axiomas matemáticos e as regras segundo as quais fórmulas são derivadas umas das outras correspondem à dedução material. A dedução material é então substituída por um procedimento formal governado por regras. A passagem rigorosa do tratamento ingênuo para o formal, portanto, é levada a efeito tanto pelos axiomas [...] como pelo cálculo lógico (originalmente considerado como não mais que uma linguagem diferente). (p.245 -246)

Suponha que se trata de uma teoria X. Para atingir seus objetivos, Hilbert identifica duas

etapas para justificar a introdução de proposições ideais. Na primeira etapa, se construiria um sistema formal completo da teoria X. O sentido de completo aqui significa que para cada prova intuitiva dentro de X, da qual pode ou não fazer parte o infinito, devemos ter uma prova correspondente no sistema formal construído. Esta prova seria uma coleção finita de símbolos que poderia ser estudada numa perspectiva finitista. Pode acontecer que a prova de uma fórmula finitista dentro do sistema formal tenha se servido de fórmulas ideais. Isso não invalidaria a prova. Numa segunda etapa, seria necessário mostrar que tais provas poderiam ser substituídas pelas provas originais da teoria X. Ou seja, o sistema formal seria uma extensão conservativa de seu fragmento finitista, a teoria X.

O infinito, assim considerado como um elemento ideal desta extensão, não passaria de algo fictício, um fenômeno bem fundamentado, que poderíamos utilizar na matemática sem lhe atribuir significado real. Hilbert afirma que não há um só modelo físico no universo que corresponda à existência de uma coleção infinita, por isso a dificuldade de materializar a questão. Este fato justificaria a descrença de muitos sobre a natureza do infinito na matemática:

[...] Uma outra concepção da noção de infinito completamente diferente e singular é encontrada no importante e frutífero método dos *elementos ideais*. Mesmo na geometria plana elementar este método encontra aplicação. Neste caso os pontos e retas do plano possuem existência real originária. Para eles vale, entre outros, o axioma da conectividade: por dois pontos passa sempre uma e somente uma reta. Segue daí que duas retas podem se interseccionar no máximo em um ponto. Não vale como teorema que duas retas se cortem sempre em um único ponto, pois duas retas podem ser paralelas. Contudo, sabe-se que através da introdução de elementos ideais, a saber, de retas infinitamente longas e pontos no infinito, podemos obter como teorema que duas retas sempre se interceptam em um e somente um ponto. Estes elementos “infinitamente distantes” têm a vantagem de tornar o sistema das leis de conexão tão simples e universal quanto possível. Ainda mais, por causa da simetria entre retas e pontos resulta o tão frutífero princípio da dualidade da geometria. Outro exemplo do uso dos elementos ideais ocorre nas conhecidas magnitudes *complexo-imaginárias* da álgebra, que simplificam os teoremas sobre a existência e quantidade de raízes de uma equação. Tal como em geometria infinitas retas paralelas entre si podem ser utilizadas na definição de um ponto ideal, também na aritmética certos sistemas infinitos de números podem ser considerados como *ideais*, e constituem o uso mais genial do princípio dos elementos ideais. Se isso é feito num corpo algébrico de números, recuperamos as propriedades simples e bem-conhecidas de divisibilidade, tais como valem para os números inteiros 1, 2, 3, 4, ... . Já chegamos aqui ao domínio da aritmética superior. (p. 233) [...] Da mesma forma que  $i = \sqrt{-1}$  foi introduzido para preservar da forma mais simples as leis da álgebra (por exemplo, as leis sobre existência e quantidade de raízes numa equação); da mesma forma que os fatores ideais foram introduzidos para preservar as leis simples de divisibilidade para números algébricos (por exemplo um divisor comum ideal para os números 2 e  $1 + \sqrt{-5}$  pode ser introduzido, embora tal divisor na realidade não exista); similarmente, para preservar as regras formais simples da lógica de Aristóteles devemos *suplementar as asserções finitárias com asserções ideais*. É irônico que os métodos dedutivos que Kronecker tão veementemente atacava constituam a exata contraparte do que o próprio Kronecker tão entusiasticamente admirava no trabalho de Kummer na teoria dos números, e que ele apreciava mesmo como o mais alto feito da matemática. [...] De que forma obtemos *asserções ideais*? É um fato notável e ao mesmo tempo favorável e promissor que, para obter elementos ideais, precisemos apenas continuar de maneira óbvia e natural o desenvolvimento que a teoria dos fundamentos da matemática já traçou. De fato, devemos ter claro que mesmo a matemática elementar vai além da teoria intuitiva dos números. Esta não inclui, por exemplo, os métodos de computação algébrica literal. As fórmulas da teoria intuitiva dos números têm sido sempre usadas exclusivamente com o propósito de comunicar. As letras representam símbolos numéricos e uma equação comunica o fato de que dois símbolos coincidem. Em álgebra, por outro lado, as expressões literais são estruturas que formalizam o conteúdo material da teoria dos números. Em lugar de asserções sobre símbolos numéricos temos fórmulas que são elas próprias o objeto concreto de estudo. No lugar de provas na teoria dos números temos derivações de fórmulas a partir de outras fórmulas, de acordo com certas regras determinadas. [...] (p.243 - 244)

Restaria ainda verificar a consistência desta extensão do domínio da matemática contextual, já que a extensão através da adição de elementos ideais só é legitimada se não causa o aparecimento de contradições no domínio inicial, ou seja, somente se as relações válidas nas novas estruturas continuarem a ser válidas no domínio anterior, quando os elementos ideais são cancelados.

As asserções ideais que Hilbert refere incluem aquelas habitualmente usadas pelos matemáticos quando falam de objetos não finitistas como espaços topológicos, ultrafiltros, medidas, etc. Para fundamentar a inclusão destas asserções no corpo da matemática, Hilbert estabelece propositalmente um paralelo com certas construções típicas da matemática, caracterizadas por alargar o domínio ontológico original de modo a obter informações sobre os “velhos” objetos.<sup>244</sup>

Hilbert estabelece ainda a importante distinção entre indução de conteúdo (a construção intuitiva de um numeral) e a indução formal, uma sentença baseada no axioma da indução e que permite o uso das variáveis matemáticas no contexto do sistema formal. Esta segunda forma de indução é compatível com a matemática cantoriana que pode, como advoga Hilbert, ser tratada segundo um ponto de vista finitista. Ele a utiliza na parte final de sua exposição para mostrar uma maneira possível de se resolver a hipótese do contínuo.

A conferência se conclui na defesa última de seu projeto:

A teoria da prova que esboçamos não somente é capaz de prover uma base sólida para os fundamentos da matemática, mas também, acredito, pode prover um método geral para tratar questões matemáticas fundamentais, as quais os matemáticos até agora não foram capazes de manejar. A matemática tornou-se uma corte de arbitragem, um supremo tribunal para decidir questões fundamentais – em bases concretas com as quais todos podem concordar e onde toda asserção pode ser controlada. As alegações do assim chamado “Intuicionismo” – modestas como possam ser – devem, em minha opinião, primeiro receber seu certificado de validade deste tribunal. Um exemplo do tipo de questões fundamentais que podem ser tratadas deste modo é a tese de que todo problema matemático é solúvel. Estamos todos convencidos de que seja realmente assim. De fato, uma das motivações principais para nos ocuparmos de um problema matemático é que ouvimos sempre este grito dentro de nós: aí está o problema, ache a resposta; você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois não há *ignorabimus* em matemática. Minha teoria da prova não é capaz de suprir um método geral para resolver qualquer problema matemático – simplesmente tal método não existe; contudo, a prova de que a hipótese da solubilidade de todo problema matemático não causa contradição cai no escopo da nossa teoria. Mas quero ainda jogar um último trunfo: para uma nova teoria, sua pedra-de-toque definitiva é a habilidade de resolver problemas que, mesmo conhecidos há longo tempo, a teoria mesma não tenha sido expressamente projetada para resolver. A máxima “por seus frutos deveis reconhecê-las” aplica-se também a teorias. (p.247 - 248)



Do que podemos desprender do enfoque adotado por Hilbert, dois aspectos nos parecem

---

<sup>244</sup> FERREIRA, 1995, p. 87-121.

de mais importância: a introdução de elementos ideais e a restrição finitista. Sem querer ser repetitiva e já o sendo, estes aspectos merecem alguns comentários a mais.

Hilbert, de fato, se apropria do já feito por Dedekind, ao utilizar o método genético para estender um domínio restrito de objetos e, a seguir, caracterizar a extensão obtida via método axiomático. Em Dedekind, as extensões do campo numérico levam à geração progressiva dos números inteiros, racionais, algébricos e reais. Por outro lado, isto acarreta forçosamente o escrutínio de leis e regras que verifiquem as operações e que permitam a caracterização de estruturas, estabelecendo a independência do processo em relação aos objetos considerados.

Ou seja, a partir daí, a estrutura é mais importante que os objetos pois caracteriza como aquele campo numérico “funciona” como um todo. Isto permite a identificação de diferentes campos com estruturas idênticas.

Desde 1917, Hilbert utiliza os elementos ideais para estabelecer a diferença entre matemática contextual e matemática formal. Isto porque, do seu ponto de vista, a matemática poderia ser reduzida a uma derivação mecânica de fórmulas, sem referência a nenhum conteúdo específico. A perspectiva então é de oposição entre o real e o ideal, ou seja, aquilo que tem conteúdo e o que é pensamento estrito.

A existência em matemática estaria associada ao conteúdo dos objetos considerados em sentido usual. Para Hilbert, no entanto, esta existência é relativa ao sistema dado, ou seja, estaria submetida a um referencial previamente definido.

A extensão do referencial inicial (sistema) seria feita pelo acréscimo dos elementos ideais. O novo sistema poderia ser novamente estendido, sendo que desta vez seus elementos seriam os reais e os novos, os ideais. E assim sucessivamente. Ou seja, real ou ideal é uma caracterização relativa ao sistema considerado.

Em resposta à crítica de Brouwer de que a aritmética finitista seria um jogo formal sem sentido, Hilbert afirma que os seus enunciados tem sentido e se referem a um conteúdo.

As fórmulas da aritmética finitista se referem a números naturais específicos e são decidíveis, como por exemplo,  $3+4 = 7$ ,  $18^2 \neq 121$  ou  $2^{5100} + 1$  é um número primo. O termo “finitista” expressaria assim que a reflexão matemática se desenvolve não só pela efetiva possibilidade de execução dos processos, mas também pelo exame concreto dos objetos que são construídos e não apenas hipoteticamente postulados. Além disso, os processos de cálculo ou definição só seriam legítimos se terminassem em um número finito previamente especificado de passos (dois processos finitistas fundamentais são a indução e a recursão.)<sup>245</sup>

---

<sup>245</sup> CASSOU-NOGUÈS, 2001, p. 92-98.



Para contornar de certa forma a situação, Hilbert identifica tais formulas com símbolos de significado intuitivo por meio de barras verticais. Porém, as limitações continuam existindo já que a aritmética finitista não inclui proposições que envolvam quantificadores existenciais sem limitações. Nestes casos, o raciocínio finitista é restringido por uma verificação de sentido. Por exemplo, a proposição “Existe  $x$  tal que  $P(x)$ ”, sendo  $P(x)$  uma equação, é um enunciado finitista incompleto pois seu sentido dependerá da definição de um domínio de objetos onde se verifique  $P(x)$ . Se tal domínio é finito e fixado, como por exemplo,  $3 < x < 8$ , significaria que 4 satisfaz  $P(x)$  ou 5 satisfaz  $P(x)$  ou 6 satisfaz  $P(x)$  ou 7 satisfaz  $P(x)$ . Caso não seja especificado tal domínio, teríamos que 1 satisfaz  $P(x)$  ou 2 satisfaz  $P(x)$  ou 3 satisfaz  $P(x)$  ou ... até o infinito! Ou seja, na sequência dos naturais existiria um deles que verificaria  $P(x)$ . Hilbert considera que este enunciado então passaria a ser uma proposição transfinita e fora de seus propósitos.

Para Hilbert então, no caso de enunciados com quantificadores existenciais, apenas os limitados fariam parte da aritmética finitista. Estes seriam os decidíveis, ou seja, de alguma forma existiria um algoritmo de cálculo que os verificasse.

Hilbert ressalva ainda que, no caso de as limitações serem finitamente grandes, seria preciso alguma identificação por um símbolo literal, como enunciados da forma  $a + 2 = 2 + a$ , mas ainda assim finitistas. As generalizações do tipo  $a + b = b + a$  também o seriam, ao considerar que representam o mesmo numeral. Mas Hilbert não é explícito em relação a isso e apenas expõe a diferença entre a negativa de um enunciado finitista particular e outro geral. Por exemplo,  $3 + 7 \neq 12$  seria um enunciado finitista que expressa o fato de o numeral que representa a soma do numeral 3 com o numeral 7 é diferente do numeral 12, mas outro do tipo  $a + b \neq 12$  não o seria. Hilbert considera tais enunciados para além da matemática finitista:

Encontramos o infinito analisando uma proposição existencial cujo conteúdo não pode ser expresso por uma disjunção finita. De modo similar, negando uma proposição geral, que se refere a símbolos numéricos arbitrários, obtemos uma proposição transfinita. Por exemplo, a proposição que se  $a$  é um símbolo numérico então  $a+1=1+a$  vale sempre, de nossa perspectiva finitária é *incapaz de negação*. Veremos melhor isso se considerarmos que este enunciado não pode ser interpretado como uma conjunção de infinitas equações numéricas conectadas através de “e” mas somente como um juízo hipotético que afirma algo no caso de ser dado um símbolo numérico. (p. 242)

Diferentemente dos numerais da aritmética finitista, os símbolos e fórmulas dos enunciados ideais não teriam em si nenhum significado. O se que infere é que as proposições ideais como concebidas por Hilbert seriam uma contrapartida das proposições reais, finitistas:

De maneira geral, podemos conceber a matemática como uma coleção de fórmulas de duas espécies: primeiramente, aquelas às quais correspondem as comunicações de asserções finitárias com sentido e, em segundo lugar, outras fórmulas sem significado e que são a *estrutura ideal da nossa teoria*. (p. 244)

Porém a garantia do método se estabeleceria mediante métodos finitistas. Daí a necessidade de uma prova de consistência relacionada com as concepções ideais.

Em resumo o emprego de elementos ideais no programa formalista de Hilbert consistiria em aplicar o método genético às proposições matemáticas, de forma a superar as restrições da matemática contextual. Este procedimento teria as seguintes características<sup>246</sup>:

- As proposições da matemática contextual formam um domínio restrito sobre o qual não são verdadeiras todas as leis da lógica clássica;
- A matemática formal contém as proposições da matemática contextual, demonstráveis nos sistemas formais e outras proposições que não são da matemática contextual. As primeiras são as reais e as segundas, as ideais
- A matemática formal é um domínio estendido, onde foram introduzidos elementos ideais com o propósito de simplificar as leis da lógica que regulam tais proposições.
- O passo seguinte consistiria em mostrar que a extensão do domínio matemático não conduz a contradições, ou seja, os sistemas definidos pela matemática formal seriam consistentes, tarefa da metamatemática, utilizando raciocínios relativos ao conteúdo.

A metamatemática retoma então a matemática contextual para assegurar a consistência dos sistemas formais que representam a matemática finitista. Nesse sentido, o programa formalista se constitui numa contribuição original para a questão dos fundamentos.



Em resumo, foi desta forma, descrito e explicado o projeto a que Hilbert se dedicaria a partir de então: identificar todo o conhecimento matemático por um conjunto de fórmulas demonstráveis por meio de métodos finitistas, valendo-se dos métodos genético e axiomático, e garantindo a consistência da teoria estabelecida neste processo. A metamatemática ou teoria da prova tomaria por objeto os sistemas formais e faria uso apenas de métodos finitistas. Esta teoria, segundo Hilbert poderia ser construída a partir de estruturas numéricas, por meio de considerações materiais intuitivas. Porém, a matemática não é formada somente de equações numéricas, assim como não pode ser reduzida tão e simplesmente a estas equações. De toda

---

<sup>246</sup> CASSOUS – NOGUÈS, *ibidem*, p. 97.

forma, pode-se dizer que há uma solidariedade lógica entre a matemática e o conjunto dos inteiros, produzindo equações numéricas corretas. É possível conseguir as intuições que garantem os resultados logicamente verdadeiros da matemática, como assegura de certa forma Hilbert:

[...] o significado de “prova” na *Beweistheorie* é peculiar: Hilbert diz que se trata de “uma raiz que deve ser dada na nossa intuição perceptiva”, e consiste de inferências como as do *modus ponens*, baseadas em axiomas ou de outra maneira, baseadas em proposições que fazem as vezes dos axiomas por substituição direta), relacionando diretamente o ato de pensar e a atividade matemática, na qual a intuição desempenha um papel importante.<sup>247</sup>



### 1927 – *Die Grundlagen der Mathematik* (Os Fundamentos da Matemática)

Hilbert continua na defesa de seu projeto e, nesta apresentação em Hamburgo, mais uma vez explica seus objetivos e a metodologia que havia utilizado para o desenvolvimento de sua teoria:

With this new way of providing a foundation for mathematics, which we may appropriately call a proof theory, I pursue a significant goal, for I should like to eliminate once and for all the questions regarding the foundations of mathematics, in the form in which they are now posed, by turning every mathematical proposition into a formula that can be concretely exhibited and strictly derived, thus recasting mathematical definitions and inferences in such a way that they are unshakeable and yet provide an adequate picture of the whole science.<sup>248</sup>

E descreve ainda como fazê-lo, ao considerar símbolos, proposições, fórmulas e dedução:

---

<sup>247</sup> DEL VECCHIO JR, op. cit., p. 45

<sup>248</sup> HILBERT, 1927 (ANEXO B, p. 249).

Com esta nova maneira de fornecer uma fundação para a matemática, que podemos chamar adequadamente de uma teoria da prova, busco um objetivo significativo, pois eu gostaria de eliminar de uma vez por todas as questões relativas aos fundamentos da matemática, na forma em que eles agora são colocados, transformando cada proposição matemática em uma fórmula que pode ser concretamente exibida e estritamente derivada, reestruturando as definições matemáticas e as inferências de forma que sejam inabaláveis e ainda forneam uma imagem adequada de toda a ciência. (tradução nossa)

I shall now present the fundamental idea of my proof theory. All the propositions that constitute in mathematics are converted into formulas, so that mathematics proper becomes all inventory of formulas. These differs from the ordinary formulas of mathematics only in that, besides the ordinary signs, the logical signs

$\Rightarrow$	$\&$	$\vee$	$\sim$	$\forall (x)$	$(\exists x)$
implies	and	or	not	for all	there exists

also occur in them. Certain formulas, which serve as building blocks for the formal edifice of mathematics, are called axioms. A proof is an array that must be given as such to our perceptual intuition of it of inferences according to the schema

$$\frac{\check{S} \quad \check{S} \Rightarrow \check{Y}}{\check{Y}}$$

where each of the premises, that is, the formulae,  $\check{S}$  and  $\check{S} \Rightarrow \check{Y}$  in the array either is an axiom or directly from an axiom by substitution, or else coincides with the end formula of an inference occurring earlier in the proof or results from it by substitution. A formula is said to be provable if it is either an axiom or the end formula of a proof. The axioms and provable propositions, that is, the formulas resulting from this procedure, are copies of the thoughts constituting customary mathematics as it has developed till now. [...] If we now begin to construct mathematics, we shall first set our sights upon elementary number theory; we recognize that we can obtain and prove its truths through contextual intuitive considerations. The formulas that we encounter when we take this approach are used only to impart information. Letters stand for numerals, and an equation informs us of the fact that two signs stand for the same thing. The situation is different in algebra; in algebra we consider the expressions formed with letters to be independent objects in themselves, and the propositions of number theory, which are included in algebra, are formalized by means of them. Where we had numerals, we now have formulas, which themselves are concrete objects that in their turn are considered by our perceptual intuition, and the derivation of one formula from another in accordance with certain rules takes the place of the number-theoretic proof based on content. [...] Hence even elementary mathematics contains, first, formulas to which correspond contextual communications of finitary propositions (mainly numerical equations or inequalities, or more complex communications composed of these) and which we may call the real propositions of the theory, and second, formulas that - just like the numerals of contextual number theory - in themselves mean nothing but are merely things that are governed by our rules and must be regarded as the ideal objects of the theory. These considerations show that, to arrive at the conception of formulas as ideal propositions, we need only pursue in a natural and consistent way the line of development that mathematical practice has already followed till now. And it is then natural and consistent for us to treat henceforth not only the mathematical variables but also the logical signs,  $\vee$ ,  $\&$ , etc., and the logical variables, namely, the propositional variables, A, B, C, just like the numerals and letters in algebra and to consider them, too, as signs that in themselves mean nothing but are merely building blocks for ideal propositions. [...] To be sure, one condition, a single but indispensable one, is always attached to the use of the method of ideal elements, and that is the proof of consistency; for, extension by the addition of ideal elements is legitimate only if no contradiction is thereby brought about in the old, narrower domain, that is, if the relations that result for the old objects whenever the ideal objects are eliminated are valid in the old domain.

[...] And, once we have this formula, we can derive the, formula  $0 \neq 0$  from Y and  $\sim Y$ . To prove consistency, we therefore need only show that  $0 \neq 0$  cannot be obtained from our axioms by the rules in force as the end formula of a proof, [...]<sup>249</sup>

---

<sup>249</sup> Idem, p. 250; 255 – 257.

Hilbert considera que se poderia evitar as dificuldades inerentes ao conceito de infinito, ao traduzir a matemática para uma linguagem formal e eliminar o significado original dos axiomas e conceitos matemáticos, convertendo assim o estudo da consistência em um problema meramente combinatório.

Algumas das vantagens<sup>250</sup> por ele sustentadas em defesa de uma visão puramente formal

---

[...] Todas as proposições que constituem a matemática são convertidas em fórmulas, de modo que a própria matemática torna-se toda em um inventário de fórmulas. Estas diferem das fórmulas comuns da matemática somente na medida em que, além dos sinais comuns, os sinais lógicos

$\Rightarrow$	$\&$	$\vee$	$\sim$	$\forall (x)$	$(\exists x)$
implica	e	ou	não	para todos	existe

também nelas ocorrem.. Certas fórmulas, que servem como blocos de construção para o edifício formal da matemática, são chamadas de axiomas. Uma prova é uma matriz que deve ser dada como tal à nossa intuição perceptiva de inferências de acordo com o esquema

$$\frac{\check{S}}{\check{S} \Rightarrow \check{Y}} \frac{\check{Y}}{\check{Y}}$$

onde cada uma das premissas, isto é, as fórmulas,  $\check{S}$  e  $\check{S} \Rightarrow \check{Y}$  é um axioma ou resulta diretamente de um axioma por substituição, ou então coincide com a fórmula final de uma inferência que aparece anteriormente na prova ou é resultado de si mesma por substituição. Uma fórmula é dita demonstrável se for um axioma ou a fórmula final de uma prova.[...] Se começarmos agora a construir a matemática, primeiro devemos focar na teoria elementar dos números; reconhecemos que podemos obter e provar suas verdades mediante considerações intuitivas de conteúdo. As fórmulas que encontramos quando consideramos essa abordagem são utilizadas apenas para transmitir informações. Os numerais são representados por letras e uma equação nos informa do fato de que dois sinais representam a mesma coisa. A situação é diferente na álgebra. Na álgebra consideramos que as expressões formadas com letras são objetos independentes em si mesmos, e as proposições da teoria dos números, incluídas na álgebra, são formalizadas por meio delas. Onde nós tínhamos números, agora temos fórmulas, eles próprios são objetos concretos que, por sua vez, são considerados pela nossa intuição perceptiva, e a derivação de uma fórmula de outra de acordo com certas regras substitui a prova da teoria numérica baseada em conteúdo.[...] Assim, até mesmo a matemática elementar contém, em primeiro lugar, fórmulas a que correspondem as comunicações de conteúdo de proposições finitárias (principalmente equações numéricas ou desigualdades, ou comunicações mais complexas compostas por essas) e que podemos chamar de proposições reais da teoria e, segundo, fórmulas que - assim como os números da teoria dos números contextual - em si mesmas, significam apenas outras coisas que são regidas pelas nossas regras e devem ser consideradas como os objetos ideais da teoria. Essas considerações mostram que, para chegar à concepção de fórmulas como proposições ideais, precisamos apenas prosseguir de forma natural e consistente a linha de desenvolvimento que a prática matemática já seguiu até agora. E é então natural e consistente que possamos tratar doravante não apenas as variáveis matemáticas, mas também os sinais lógicos,  $\vee$ ,  $\&$ , etc., e as variáveis lógicas, ou seja, as variáveis proposicionais, A, B, C, . . . , exatamente da mesma forma como os números e as letras em álgebra, e também considerá-los como sinais que, por si mesmos, não significam nada, apenas os blocos de construção com que são construídas as proposições ideais. [...] Para estar seguros, uma condição, única porém indispensável, está sempre associada ao uso do método dos elementos ideais, e esta condição é a prova da consistência. Pois a extensão pela adição de elementos ideais é legítima somente se nenhuma contradição surge no domínio anterior, mais restrito, ou seja, se as relações que resultam para os objetos antigos sempre que os objetos ideais são eliminados são também válidas no domínio anterior. [...] Para provar a consistência (do sistema formal que introduzimos), precisamos apenas mostrar que a fórmula  $0 \neq 0$  não pode ser obtida a partir de , utilizando as regras de inferência vigentes como a fórmula final de uma demonstração [...]. (tradução nossa)

<sup>250</sup> Segundo Heylighen (1999, p. 32-33) a abordagem formalista oferece vantagens de um modo mais geral como: armazenamento por um longo período de tempo (quanto mais tempo quisermos conservar a validade do conhecimento, mais formal terá que ser a forma de guardá-lo); a capacidade de comunicação universal (como a expressão formal é independente de contexto, ela é compreensível por todos em qualquer época); e, a facilidade de testar o conhecimento (quanto mais formal a expressão mas apurado será o teste de conhecimento, por conta de diferentes contextos). Para ele, a combinação destes três fatores torna mais fácil a acumulação e melhoria do conhecimento.

para a matemática foram:

- Quando se retira o significado concreto das proposições que se podem deduzir no cálculo lógico, é possível desconsiderar o conteúdo transfinito da teoria clássica dos conjuntos, de modo a evitar o aparecimento dos paradoxos;
- Uma vez formalizado nosso sistema, se pudermos demonstrar sua consistência dentro dele mesmo, obteríamos uma demonstração finitária (do tipo que satisfaz a todas as escolas de pensamento matemático, incluindo os intuicionistas) de que não há perigo em utilizar os conceitos que, em princípio, pareciam problemáticos na teoria dos conjuntos;
- Tudo que se demonstra em um sistema formal é verdade para qualquer interpretação que se faça.

Esta visão obteve muitos opositores e, em certos aspectos inclusive, a filosofia formalista foi levada ao absurdo por estes mesmos críticos, identificando o formalismo com uma linha de pensamento que consideraria a matemática como um mero jogo de símbolos, uma brincadeira sem significado e utilidade. Isto seria incompatível e injusto com a trajetória profissional de Hilbert tanto em física como em análise, para onde levou suas concepções axiomáticas até mesmo no que se refere às aplicações e seria incoerente considerar que tivesse o objetivo de transformar a matemática num jogo de símbolos sem sentido.

O maior dos críticos, Poincaré, já havia se manifestado com sarcasmo sobre o sucesso da escola formalista, ao se referir aos *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead:

[...] “Pero si hacen falta veintisiete ecuaciones para establecer que 1 es un número, ¿cuántas no harán falta para demostrar un teorema de verdad?” La carcajada de Poincaré resuena, todavía hoy, devastadora, contra la pretensión de escribir matemática en un lenguaje simbólico y se transmite en el invencible desagrado del matemático por todo lo que tiene que ver con lenguajes simbólicos y lógica. Poincaré protestaba contra la falta de sentido y la escasa confianza que merecen los textos formales entendidos como vectores del discurso matemático.<sup>251</sup>

Poincaré argumentava estranhamente contra, utilizando as mesmas ideias que a escola

---

<sup>251</sup> LOLLI, 2016, p. 128.

Mas se você precisa de vinte e sete equações para estabelecer que 1 é um número, quantos não serão necessários para demonstrar um teorema real? O riso de Poincaré ressoa, ainda hoje, devastador, contra a pretensão de escrever matemática em uma linguagem simbólica e é transmitido no desagrado do matemático por tudo o que tem a ver com linguagens simbólicas e lógica. Poincaré protestou contra a falta de significado e de confiança que os textos formais, entendidos como vetores do discurso matemático, merecem. (tradução nossa)

formalista pretendia defender, ou seja, precisão, segurança, obtenção de um cálculo lógico que deveria proporcionar o pensamento direto e assim obter a segurança da total certeza. Falta de compreensão...inveja científica... teimosia para não rever posições... não sabemos. O fato é que Hilbert aproveita a ocasião para responder às suas críticas ainda de 1904 acerca de uma demonstração da consistência da aritmética:

Poincaré already made various statements that conflict with my views; above all, he denied from the outset the possibility of a consistency proof for the arithmetic axioms, maintaining that the consistency of the method of mathematical induction could never be proved except through the inductive method itself. But, as my theory shows, two distinct methods that proceed recursively come into play when the foundations of arithmetic are established, namely, on the one hand, the intuitive construction of the integer as numeral (to which there also corresponds, in reverse, the decomposition of any given numeral, or the decomposition of any concretely given array constructed just as a numeral is), that, is, contextual induction, [...]Poincaré arrives at his mistaken conviction by not distinguishing between these two methods of induction, which are of entirely different kinds. Regrettably Poincaré, the mathematician who in his generation was the richest in ideas and the most fertile, had a decided prejudice against Cantor's theory, which prevented him from forming a just opinion of Cantor's magnificent conceptions. Under these circumstances Poincaré had to reject my theory, which, incidentally, existed at that time only in its completely inadequate early stages. Because of his authority, Poincaré often exerted a one-sided influence on the younger generation.<sup>252</sup>

Além desta contraposição, Hilbert responde às críticas de Brower:

---

<sup>252</sup> Ibidem, p. 259.

Poincaré já fez várias declarações que contrastam com minhas opiniões; acima de tudo, ele negou, desde o início, a possibilidade de uma prova de consistência para os axiomas da aritmética, mantendo que a consistência do método de indução matemática nunca poderia ser demonstrada sem utilizar o próprio método de indução. Mas, como mostra minha teoria, dois métodos distintos que se processam recursivamente entram em jogo quando os fundamentos da aritmética são estabelecidos, a saber, por um lado, a construção indutiva dos inteiros como numerais, isto é, indução contextual e, por outro lado, a indução formal propriamente dita, que se baseia no axioma da indução [...] Poincaré chega à sua convicção equivocada ao não distinguir entre estes dois métodos de indução, que são inteiramente diferentes. Lamentavelmente Poincaré, o matemático que, entre os de sua geração, foi o mais rico em idéias e o mais fértil, tinha decidido ser preconceituoso em relação à teoria de Cantor, o que lhe impedia de formar uma opinião justa das magníficas concepções cantorianas. Nestas circunstâncias, Poincaré tinha que rejeitar minha teoria que aliás, existia naquela época apenas em estágios iniciais completamente inadequados. Devido a sua autoridade, Poincaré freqüentemente exerceu uma influência unilateral sobre a geração mais nova. (tradução nossa)

The formula game that Brouwer so deprecates has, besides its mathematical value, an important general philosophical significance. For this formula game is carried out according to certain definite rules, in which the technique of our thinking is expressed. These rules form a closed system that can be discovered and definitively stated. The fundamental idea of my proof theory is none other than to describe the activity of our understanding, to make a protocol of the rules according to which our thinking proceeds. Thinking, it so happens, parallels speaking and writing: we form statements and place them one behind another. If any totality of observations and phenomena deserves to be made the object of a serious and thorough investigation, it is this one—since, after all, it is part of the task of science to liberate us from arbitrariness, sentiment, and habit and to protect us from the subjectivism that already made itself felt in Kronecker's views and, it seems to me, finds its culmination in intuitionism.<sup>253</sup>



Voltando um pouco em pouco em nossa linha temporal, Ackermann, retomando a questão da consistência, apresenta em 1924 uma demonstração completa e finta desta suposta consistência para a aritmética de Peano por meio do  $\varepsilon$  – cálculo. Mas o trabalho não estava terminado; posteriormente se verificou que havia um erro. Von Neumann, após críticas ao trabalho de Ackermann, também publicou uma prova de consistência em 1927. Em contrapartida, Hilbert e Bernays a reavaliam e publicam uma nova versão acompanhada de notas de Bernays que esclarecem o feito por Ackermann com mais detalhes.

O certo é que em 1928, Hilbert e sua escola formalista acreditavam que o problema da consistência da aritmética estava praticamente resolvido.

Na conferência *Probleme der Grundlegung der Mathematik* apresentada no 3º Congresso Internacional de Matemáticos em Bolonha, Hilbert afirmaria que “ [...] para a fundamentação da análise, a abordagem de Ackermann foi tão além que a única coisa que resta a fazer é obter uma demonstração puramente matemática da finitude de sua prova.”

As questões propostas nesta ocasião foram, explicitamente: uma extensão da demonstração de consistência para incluir itens da teoria dos conjuntos que eram necessários

---

<sup>253</sup> Idem, p. 262.

O jogo de fórmula que Brouwer deprecia tanto tem, além do seu valor matemático, um importante significado filosófico geral pois é realizado de acordo com determinadas regras bem definidas, nas quais a técnica do nosso pensamento é expressa. Essas regras formam um sistema fechado que pode ser descoberto e definido. A ideia fundamental da minha teoria de prova não é senão descrever a atividade de nossa compreensão, realizar um protocolo das regras de acordo com o qual nosso pensamento se processa em realidade. O pensamento acontece, em paralelo à fala e à escrita: formamos declarações e as colocamos uma atrás da outra. Se alguma totalidade de observações e fenômenos merece ser objeto de uma investigação séria e profunda, é esta, uma vez que, afinal, é parte dos objetivos da ciência nos libertar da arbitrariedade, do sentimento e do hábito, nos proteger do subjetivismo que já se fez sentir nos pontos de vista de Kronecker e, parece-me, encontra o seu ponto culminante no intuicionismo. (tradução nossa)



para a matemática desenvolvida até então; uma demonstração da completude da lógica de 1ª ordem e, por consequência, dos sistemas axiomáticos da análise e da teoria dos conjuntos; e, o problema da decidibilidade, desta vez não mais como uma aspiração, mas como um problema que também deveria ser submetido a prova.

Levando tais questões para o âmbito geral da matemática, podemos resumi-las por:

1. Assegurar que todas as afirmações verdadeiras matemáticas poderiam ser provadas, isto é, a **completude** da matemática;
2. Garantir que só as afirmações matemáticas verdadeiras poderiam ser provadas, isto é, a **consistência** da matemática; e,
3. Resolver o problema da decidibilidade da matemática, isto é, verificar a existência de um **processo decisório** para estabelecer a verdade ou a falsidade de qualquer proposição matemática.

Este último, é o conhecido problema da decisão: *Entscheidungsproblem*, considerado então por Hilbert como o problema principal da lógica matemática: de encontrar um método efetivo (também se diz mecânico ou algorítmico) de acordo com o qual, dada uma fórmula da linguagem do cálculo de predicados, se determina se essa fórmula é, ou não, um teorema da lógica (i. é., deduzível apenas a partir dos axiomas do cálculo de 1ª ordem).

No caso, um método ou procedimento seria efetivo se pudesse ser descrito por meio de um número finito de instruções exatas, produzisse o resultado desejável ao fim de um número finito de passos e fosse executado de forma mecânica.

Assim, o problema se reduzia a encontrar um método efetivo para separar os teoremas da lógica das outras fórmulas. Para teorias importantes da matemática, uma solução positiva para o *Entscheidungsproblem* permitiria decidir, de modo efetivo, se uma fórmula é um teorema dessa teoria.

Antes que a questão pudesse ser respondida, a noção de "algoritmo"<sup>254</sup> tinha que ser

---

<sup>254</sup> **Algoritmo** é uma sequência finita de instruções bem definidas e não ambíguas, cada uma das quais devendo ser executadas mecânica ou eletronicamente em um intervalo de tempo finito e com uma quantidade de esforço finita. O conceito é frequentemente ilustrado pelo exemplo de uma receita culinária, embora muitos algoritmos sejam mais complexos. Eles podem repetir passos (fazer iterações) ou necessitar de decisões (tais como comparações ou lógica) até que a tarefa seja completada. Um algoritmo corretamente executado não irá resolver um problema se estiver implementado incorretamente ou se não for apropriado ao problema. Um algoritmo não representa, necessariamente, um programa de computador e sim os passos necessários para realizar uma tarefa. Sua implementação pode ser feita por um computador, por outro tipo de autômato ou mesmo por um ser humano. Diferentes algoritmos podem realizar a mesma tarefa usando um conjunto diferenciado de instruções em mais ou

formalmente definida. Isso foi feito por Church em 1936 com o conceito de "calculabilidade efetiva", baseada no seu cálculo  $\lambda$ <sup>255</sup>, e por Alan Turing, no mesmo ano, com o seu conceito de Máquina de Turing<sup>256</sup>. A resposta negativa ao *Entscheidungsproblem* foi dada por Alonzo Church em 1936 e, logo em seguida, de forma independente, por Alan Turing, também em 1936. Como vimos no Cap. 1, o Entscheidungsproblem é relacionado ao 10º problema de Hilbert, enunciado em 1900.

### 4.3 PLANOS INFALÍVEIS NUNCA SÃO INFALIVEIS



OU

### ENTRA EM CENA UM NOVO TENOR

Em 1930, Hilbert estava às portas da aposentadoria. Sua teoria da prova parecia estar em boas mãos, alcançando a maturidade desejada e alguns dos seus discípulos faziam significativos progressos para dar o toque final a uma autêntica prova de consistência para a aritmética. Na primavera se aposenta e passa o cargo para Weyl. Em setembro, Hilbert recebe o título de *Cidadão de Honra* da cidade de Königsberg. A entrega foi realizada em uma cerimônia na Sociedade Alemã de Cientistas e Físicos, na qual profere a palestra *Naturerkennen und Logik*, expondo mais uma vez suas ideias sobre a prática do matemático e o estado em que se encontrava a questão dos fundamentos.

Mas ... enquanto isso...um dia antes, o desagradável já acontecia!

---

menos tempo, espaço ou esforço do que outros. Tal diferença pode ser reflexo da complexidade computacional aplicada, que depende de estruturas de dados adequadas ao algoritmo. Por exemplo, um algoritmo para se vestir pode especificar que você vista primeiro as meias e os sapatos antes de vestir a calça enquanto outro, que você deve primeiro vestir a calça e depois as meias e os sapatos. Fica claro que o primeiro algoritmo é mais difícil de executar que o segundo apesar de ambos levarem ao mesmo resultado.

<sup>255</sup> Na lógica matemática e na ciência da computação, **lambda cálculo**, também escrito como cálculo- $\lambda$  é um sistema formal que estuda funções recursivas computáveis, no que se refere a teoria da computabilidade, e fenômenos relacionados, como variáveis ligadas e substituição. Sua principal característica são as entidades que podem ser utilizadas como argumentos e retornadas como valores de outras funções. A parte relevante de lambda cálculo para a computação ficou conhecida como **lambda cálculo não-tipado**. O lambda cálculo tipado e o não-tipado tem suas ideias aplicadas nos campos da lógica, teoria da recursão (computabilidade) e linguística, e tem tido um grande papel no desenvolvimento da teoria de linguagens de programação.

<sup>256</sup> **Máquina de Turing** é um dispositivo teórico conhecido como *máquina universal*, que foi concebido pelo matemático britânico Alan Turing. Num sentido preciso, é um modelo abstrato de um computador, que se restringe apenas aos aspectos lógicos do seu funcionamento (memória, estados e transições), e não a sua implementação física. Numa máquina de Turing pode-se modelar qualquer computador digital

## Os Teoremas de Incompletude



Deus existe porque a matemática é consistente, mas o diabo também, porque não podemos provar este fato.

André Weil

Um aluno de doutorado presente no congresso de 1928 se interessa particularmente pelas questões propostas por Hilbert: Kurt Gödel, austríaco, membro do Círculo de Viena<sup>257</sup>, brilhante, curioso, obstinado e esquisito; o desconhecido mais surpreendente de toda esta saga!

Segundo Lannes (2009, p. 56):

---

<sup>257</sup> O **Círculo de Viena** (em alemão *Wiener Kreis*) foi como ficou conhecido um grupo de filósofos que se encontravam informalmente na Universidade de Viena de 1922 a 1936 sob a coordenação de Moritz Schlick. Em suas reuniões semanais, seus membros procuravam reconceitualizar o empirismo a partir das novas descobertas científicas e demonstrar as falsidades da metafísica. Suas atividades cessam quando Schlick é assassinado por um dos seus alunos. Seu sistema filosófico ficou conhecido como o **Positivismo Lógico** ou ainda Empirismo Lógico ou Neopositivismo. Os membros do Círculo de Viena tinham uma visão comum da filosofia, que consistia na aplicação das postulações de Wittgenstein, expostas em seu *Tractatus Logico-Philosophicus*, embora Wittgenstein insistisse que o positivismo lógico fosse uma visão errada sobre seus escritos (Wittgenstein & The Vienna Circle. Wiley-Blackwell, 1984). Sua influência na Filosofia do século XX foi imensa e o mesmo surgiu da necessidade de fundamentar a ciência a partir das concepções ou acepções que a Filosofia da Ciência ganhou no século XIX. Até então, a filosofia era vinculada à Teoria do Conhecimento, mas, a partir de Hegel, este vínculo se desfez. Era composto por cientistas que, apesar de atuarem em várias áreas como física, economia, etc., buscaram resolver problemas associados à fundamentação da ciência, estes levantados a partir do descontentamento com os neokantianos (seguidores de Kant) e os fenomenólogos (seguidores de Hegel).

Schlick, por exemplo, tentou mostrar o vazio dos enunciados sintéticos *a priori*, de Kant. E por duas vias:

- Se os enunciados têm uma verdade lógica, então eles são analíticos e não sintéticos;
- Se a verdade dos enunciados depende de um conteúdo factual, eles são, portanto, *a posteriori* e não *a priori*.

Dessa maneira, Schlick (juntamente com seus companheiros) tentou formular um critério de cientificidade que pudesse ou que tivesse uma correspondência com a natureza. Por isso, o *Círculo de Viena* adotou uma forma de empirismo indutivista que se utiliza de instrumentos analíticos como a lógica e a matemática para auxiliar na formação dos enunciados científicos. Tal critério seria, então, o de verificabilidade. Para os pesquisadores do Círculo, os enunciados científicos deveriam ter uma comprovação ou verificação baseada na observação ou experimentação. Isto era feito indutivamente, ou seja, estabeleciam-se enunciados universais (pois a ciência tem pretensão de universalidade) a partir da observação de casos particulares.

O resultado do estabelecimento deste critério surgiu também a partir da concepção de linguagem de Wittgenstein, em que o mundo era composto de “fatos” atômicos associados e, assim, expressariam sua realidade. Daí os enunciados gerais poderem ser decompostos em enunciados elementares referentes ou congruentes à natureza, o que exclui os enunciados metafísicos do processo de conhecimento. Portanto, a indução foi o método utilizado porque, além de proceder experimentalmente, proporcionava um caráter de regularidade que permitia que se emitsem juízos universais. Isto também atesta o caráter antimetafísico do grupo, bem como afirma o procedimento de observação.

Fonte: Stanford Encyclopedia of Philosophy.

Disponível em: < <https://plato.stanford.edu/entries/vienna-circle/>> Acesso em: 12/2017.

[...] para Gödel, há uma semelhança entre a intuição matemática e a percepção; as classes e os conceitos são realidades independentes de nossas criações e não simples produtos da linguagem. Logo os objetos matemáticos não são criados, e sim, descobertos. Esta concepção realista o acompanhou desde a década de 1920, passando pelo período em que participou das reuniões do Círculo de Viena, seguindo pelas décadas seguintes. Foi um importante elemento constitutivo do *estilo de pensamento* de Gödel, pois fomentou o seu interesse pelo projeto formalista de Hilbert. Os integrantes do Círculo de Viena também viam o projeto formalista com interesse; para eles, era o caso matemático da sua proposta de filosofia da ciência.

Incentivado e interessado, Gödel se propõe, inicialmente, a estudar a quarta das questões propostas por Hilbert em 1928: a completude da lógica de 1ª ordem. Ou seja, uma prova de que todas as proposições da lógica de 1ª ordem são sintaticamente dedutíveis. Este seria o tema de sua tese de doutorado, defendida em fevereiro de 1930 na Universidade de Viena. Entusiasmado, lhe parecia então que seria possível resolver positivamente às demais questões e Gödel se dedicaria à primeira delas: a consistência da análise.

Em setembro de 1930, exatamente um dia antes da conferência de Hilbert em Königsberg, Gödel, que também lá se encontrava num encontro organizado pela *Gesellschaft für empirische Philosophie*<sup>258</sup>, anuncia que existem proposições indecidíveis em qualquer sistema formal que seja consistente e contenha os axiomas da aritmética. Uma bomba de efeito retardado já que apenas Von Neumann<sup>259</sup> deu tratos à bola e lhe pediu mais detalhes.

O feito de Gödel foi o de ser capaz de exibir como exemplo, uma proposição universalmente válida mas, para a qual não é possível encontrar uma demonstração! O resultado impactante mostrava que existiam problemas sem solução e colocava em dúvida até mesmo o significado da consistência de um sistema formal.

Senão, vejamos: se ao sistema formal considerado acrescentarmos a negativa da dita proposição, teremos um novo sistema formal, desta vez consistente mas com uma proposição falsa!!? Verdade, verdade, verdade, onde estás??

---

<sup>258</sup> Sociedade da Filosofia empirista.

<sup>259</sup> A partir deste momento, Von Neumann passou a ser um grande admirador de Gödel, a quem elogiava em todos os cursos que ministrava, não apenas na Universidade de Berlin, como também nas conferências proferidas em Princeton, após ter emigrado para os Estados Unidos no mesmo ano. Reza a lenda que, quando elogiava Gödel, contava uma anedota relacionada ao tempo em que se dedicava à busca de uma demonstração da consistência da matemática clássica usando métodos finitários. Obcecado, Von Neumann se dedicava integralmente pois existiam muitas dificuldades a superar quando da formalização do conceito de verdade. Sonhava frequentemente com a tão desejada prova e despertava sempre com novas ideias que se mostravam infrutíferas na manhã seguinte. Numa dessas noites, sonhou que superava as dificuldades e avançara muito mais do que o usual. Porém, mais uma vez, na manhã seguinte, não conseguiu concluir a demonstração. Na noite seguinte, dessa vez, o sonho foi mais além e vislumbrou a solução definitiva para suas dificuldades. E mais uma vez, na manhã seguinte não conseguiu concluir a prova após descobrir um erro. Quando contava esta história, ele costumava brincar ao dizer: “Tudo teria sido diferente se tivesse sonhado uma terceira noite!” (FRESÁN, 2008, p. 101)

O fato é que até mesmo Von Neumann, avalia suas afirmativas e se assusta, ao lhe confirmar por carta mais adiante, em 20 de novembro, ter descoberto que em um sistema consistente é possível transformar em contradição qualquer prova de indecidibilidade da fórmula  $0=1!$  <sup>260</sup>

Mas, as bombas de efeito retardado não deixam de ser bombas: explodem e fazem estragos! No caso, a detonação<sup>261</sup> ocorreu na primavera de 1931, quando foi publicado o artigo mais famoso da história da lógica, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*<sup>262</sup> e, no qual, Gödel apresentou seus teoremas de incompletude.

É importante aqui destacar que, algumas interpretações do papel de Gödel ao demonstrar seus resultados que colocaram fim aos planos dos formalistas de fundamentar a matemática apoiando-se na aritmética, o entendem como um iconoclasta. Mas, de fato, esta não era sua intenção. Mas como as concepções de Gödel o conduziram aos seus teoremas?

Podemos encontrar em Fefermann (1988, p. 104 -105) a informação de que, em uma troca de correspondências com Hao Wang, Gödel afirmou que no verão de 1930 se ocupava do problema de provar a consistência absoluta da análise por métodos finitistas. Ou seja, Gödel, de fato, estava disposto a contribuir para o projeto hilbertiano:

Para isso, representou os números reais por fórmulas [...] da teoria dos números e descobriu que tinha que usar o conceito de verdade para formulas fechadas da teoria dos números para conseguir verificar os axiomas de compreensão para a análise. Rapidamente se deparou com paradoxos relacionados com a verdade e a demonstrabilidade (em particular com o paradoxo do mentiroso e o paradoxo de Richard). Apercebeu-se de que a noção de verdade em teoria dos números não pode ser definida em teoria dos números e, por conseguinte, que o seu plano para demonstrar a *consistência* relativa da análise não funcionava.

---

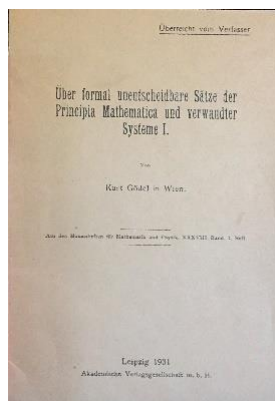
<sup>260</sup> CASSOUS-NOGUÈS, 2008, p.74.

<sup>261</sup> Para se ter uma ideia bem humorada da importância dos resultados de Gödel, reproduzimos aqui uma pequena passagem de Sautoy (2008, p. 193-194): “A compreensão de Gödel lembra a descrição do Universo feita por uma velhinha no início do livro de Stephen Hawking, *Uma breve história do tempo*, A senhora se levanta ao final de uma palestra popular sobre astronomia e declara: ‘ O que o senhor nos disse é uma bobagem. O mundo é na verdade um prato plano apoiado nas costas de uma tartaruga gigante.’ Gödel teria sorrido ao ouvir a resposta da senhora para a pergunta do palestrante, que indagou onde se apoiaria a tartaruga: ‘ Você é muito esparto, meu jovem, muito esparto. Mas há tartarugas até lá embaixo.’ Gödel fornecera à matemática uma prova de que o universo matemático estava construído sobre uma torre de tartarugas. Podemos ter uma teoria sem contradições, mas não podemos provar que dentro dessa teoria não haverá contradições. Tudo que Podemos fazer é provar a consistência dentro de outro sistema, cuja própria consistência não poderá ser provada.” Tartarugas com cascos deslizantes por sinal!

<sup>262</sup> Sobre proposições formalmente indecidíveis no *Principia Mathematica* e sistemas afins.

O que se percebe então é que se a noção de verdade fosse definível na aritmética então se poderia chegar a uma contradição. Mas a noção de demonstrabilidade é definível na aritmética. Logo, verdade e demonstrabilidade não são noções equivalentes e este é o ponto crucial da incompletude. Gödel concluiu, portanto, que sistemas formais suficientemente fortes como o *Principia Mathematica* contém proposições *indecidíveis*<sup>263</sup>.

Figura 8: Capa frontal - *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*. Offprint de *Monatshefte für Mathematik und Physik*, XXXVIII, Band I, no. 38



Fonte: <https://www.rootenbergbooks.com>. Acesso em: 12/2/2018

<sup>263</sup> Existem dois sentidos distintos da palavra *indecidível*: na matemática e na ciência da computação. O primeiro é o sentido da teoria da prova relacionada aos teoremas de Gödel, sobre uma sentença não ser demonstrável nem refutável em um sistema dedutivo específico. O segundo é em relação à teoria de computabilidade e se aplica não a afirmações, mas a problemas de decisão, os quais são conjuntos infinitos de questões que requerem uma resposta “sim” ou “não”. Tal problema é dito ser indecidível se não houver uma função computável que responde corretamente todas as questões do conjunto. Por causa desses dois sentidos da palavra, o termo independente é, às vezes, usado no lugar de indecidível para o sentido de “nem demonstrável nem refutável”. O uso de “independente” também é ambíguo, contudo. Este sentido pode ser usado como “não demonstrável”, deixando aberto se uma afirmação independente deve ser refutada. A indecidibilidade de uma afirmação em um sistema particular não remete a questão do valor verdade da afirmação ser bem definido ou se ele pode ser determinado de outras formas. Indecidibilidade apenas implica que um sistema dedutivo particular não prova a validade ou falsidade da afirmação. Se existem afirmações “absolutamente indecidíveis”, cujo valor verdade nunca pode ser sabido ou é pouco específico, é um ponto controverso na filosofia da matemática.

O trabalho conjunto de Gödel e Paul Cohen nos deu dois exemplos concretos de afirmações indecidíveis (no primeiro sentido do termo): a hipótese do continuum não pode ser provada nem refutada no conjunto de Zermelo-Fraenkel – ZFC (a axiomática padrão da teoria dos conjuntos), e o axioma da escolha não pode ser refutado nem provado na ZF (que são todos os axiomas do ZFC exceto o axioma da escolha). Esses resultados não requerem o teorema da incompletude. Gödel provou em 1940 que nenhuma dessas afirmações podem ser refutadas nas teorias dos conjuntos ZF ou ZFC. Na década de 1960, Cohen provou que nenhuma afirmação pode ser provada a partir do ZF, e a hipótese do continuum não pode ser provada a partir do ZFC.

Na introdução de seu artigo, Gödel explica suas intenções e esclarece que, embora no enunciado de seus teoremas se refira à consistência de um sistema formal com o pensamento focado no sistema de Russell e Whitehead e, por isso, os axiomas lógicos de seu artigo são herdados dos *Principia Mathematica* e dos axiomas de Peano, isto não significava que o mesmo não se aplicaria aos demais sistemas formais:

É sabido que o desenvolvimento da matemática, no sentido de uma exatidão, conduziu à formalização de vários domínios desta ciência de modo que as demonstrações possam ser efetuadas de acordo com algumas regras mecânicas. Os sistemas formais mais exaustivos até agora construídos são, por um lado, os *Principia Mathematica (PM)* e o sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel para a teoria de conjuntos (reelaborado por J. v. Newman). Ambos os sistemas são tão gerais que todos os métodos de demonstração atualmente usados em matemática podem formalizar-se neles, i.e., podem ser reduzidos a alguns axiomas e regras de inferência. É razoável por isso supor que estes axiomas e regras de inferência são também suficientes para decidir todas as questões matemáticas que podem ser formalmente expressas nesses sistemas. No que se vai seguir mostrar-se-á que não é assim, mas antes que, em ambos os sistemas citados, existem problemas relativamente simples da teoria dos números inteiros que não podem ser decididos com base nos axiomas. Essa situação não depende da natureza especial dos sistemas formais construídos, mas aplica-se a uma vasta classe de sistemas formais entre os quais estão incluídos, em particular, todos aqueles que se derivam dos sistemas dados juntando um número finito de axiomas, admitindo que proposições falsas do gênero descrito na nota 54 não sejam demonstráveis com os novos axiomas.<sup>264</sup>

Os teoremas de incompletude tem os seguintes enunciados:

### **1º Teorema**

Qualquer teoria axiomática recursivamente enumerável e capaz de expressar algumas verdades básicas de aritmética não pode ser, ao mesmo tempo, completa e consistente. Ou seja, sempre há em uma teoria consistente proposições verdadeiras que não podem ser demonstradas nem negadas.

### **2º Teorema**

Uma teoria, recursivamente enumerável e capaz de expressar verdades básicas da aritmética e alguns enunciados da teoria da prova, pode provar sua própria consistência se, e

---

<sup>264</sup> GÖDEL, 1930, p. 173.

somente se, for inconsistente.

O primeiro teorema da incompletude afirma que, qualquer sistema formal consistente, que inclui o suficiente da teoria dos números naturais, é incompleto: existem afirmações verdadeiras expressáveis em sua linguagem que são indemonstráveis dentro do sistema. Então, nenhum sistema formal (satisfazendo as hipóteses dos teoremas), que visa a caracterizar os números naturais, pode realmente fazer isso, pois existirão afirmações verdadeiras que o sistema não pode provar.

Se a possibilidade de existir sentenças indecidíveis em um sistema formal não é nada trivial<sup>265</sup>, por outro lado, a existência de um sistema formal incompleto pode não ser uma surpresa. O sistema pode estar incompleto simplesmente porque nem todos os axiomas necessários foram descobertos. Por exemplo, a geometria euclidiana sem o postulado das paralelas é incompleto; não é possível provar ou deixar de provar o postulado a partir dos axiomas restantes.

Pensando mais brandamente, os teoremas de Gödel mostram que, em teorias que incluem uma pequena parte da teoria dos números, uma completa e finita lista de axiomas nunca pode ser criada, ou sequer uma lista infinita que pode ser enumerada por um programa de computador. Cada vez que uma nova afirmação é adicionada como um axioma, há outras afirmações verdadeiras que ainda não podem ser provadas, mesmo com o novo axioma. Se axiomas forem sendo adicionados, isso tornará o sistema completo, com o custo de torná-lo inconsistente.

Já o segundo teorema, fortalece o primeiro, pois que a sentença nele construída não expressa diretamente a consistência da teoria. A prova do segundo teorema é obtida pela formalização da prova do primeiro teorema da incompletude dentro da própria teoria.




---

<sup>265</sup> Podemos observar um exemplo em Hofstadter (2001, p. 37- 46) que criou um pequeno sistema formal que contém uma fórmula não demonstrável. O sistema utiliza três letras do alfabeto M, I, U e as sequências com estas letras pertencem a este sistema. A formação de uma sequência do sistema deve obedecer cinco regras básicas: 1ª) MI é uma sequência do sistema; 2ª) Se uma sequência terminada com I pertence ao sistema, então podemos acrescentar U a esta, formando uma nova sequência do sistema; 3ª) Se Mx pertence ao sistema, sendo x uma variável que pode representar uma letra ou uma sequência, então Mxx também pertence ao sistema; 4ª) Se o sistema possui uma sequência contendo III, então a sequência formada pela troca de III por U também pertence ao sistema; 5ª) Se o sistema possui uma sequência contendo UU, então a sequência obtida pela omissão de UU da outra também pertence ao sistema. O que Hofstadter prova (p. 260-267, 439), usando a numeração de Gödel, é que a sequência MU que, por definição, pertence ao sistema, não pode ser produzida por este sistema.



Sobre a prova em si dos teoremas, é possível encontrar diversas exposições<sup>266</sup> não técnicas, das quais a mais conhecida é a de Nagel & Newman (2001). Nos preocuparemos apenas com o descritivo estratégico da demonstração de Gödel.

Em primeiro lugar, Gödel *arimetizou* a metamatemática. Isto significa dizer que Gödel estabeleceu uma correspondência unívoca entre as fórmulas (isto é, teoremas) e sequências de fórmulas (isto é, demonstrações de teoremas) do sistema formal e os números naturais. Ou seja, é feita inicialmente a descrição do sistema formal por meio da aritmética dos números naturais. Com esta metodologia, todos os teoremas produzidos pela aritmética são imediatamente “traduzidos” como fórmulas do sistema formal.

A seguir, tendo por inspiração o paradoxo do mentiroso<sup>267</sup>, Gödel construiu uma fórmula aritmética  $G$  que representa o enunciado “a fórmula  $G$  não é demonstrável”, um enunciado autorreferente. Gödel definiu a relação entre números naturais que indica quando uma proposição é demonstrável e provou que  $G$  é demonstrável se, e somente se, sua negação,  $\neg G$ , for demonstrável. Como isto implicaria na inconsistência da aritmética, deduz-se que se a aritmética for consistente, nem  $G$  e nem  $\neg G$  são demonstráveis, isto é,  $G$  é indecidível. No entanto, embora seja indecidível,  $G$  é uma fórmula do sistema formal, pois consiste em uma propriedade aritmética válida para todos os números naturais. Logo, a aritmética é incompleta. Como corolário (2º teorema), Gödel construiu uma fórmula que corresponde ao enunciado “a aritmética é consistente” e provou que esta fórmula não é demonstrável, de onde segue que o sistema formal aritmetizado não é capaz de provar a consistência da aritmética.<sup>268</sup>

Um balde d’água fria...!

---

<sup>266</sup> Uma descrição lúdica e interessante pode ser obtida em: < <http://im.ufrj.br/~risk/diversos/godel.html> >

<sup>267</sup> O cálculo é feito via a *arimetização* construída para o sistema formal, mas é possível compreender esta demonstração por via de argumentos que não utilizam linguagem técnica. Para tanto, deve-se compreender o paradoxo do mentiroso. Considere a frase: “eu sou um mentiroso”. Se a frase for verdadeira, então quando afirmei “eu sou um mentiroso”, eu menti. Logo, a frase “eu sou um mentiroso” é falsa. Reciprocamente, se a frase “eu sou um mentiroso” for falsa, então eu não sou mentiroso e, portanto, a minha frase “eu sou um mentiroso” é necessariamente verdadeira. Em síntese, a frase “eu sou um mentiroso” é verdadeira se, e somente se, ela for falsa. Considere agora o enunciado  $G$ : “eu não sou demonstrável”. Se  $G$  for demonstrável, então, é possível prová-lo e, portanto, o seu enunciado “eu não sou demonstrável” é verdadeiro. Mas, se este enunciado for verdadeiro, então provamos que  $G$  não é demonstrável. Suponha, por outro lado, que não seja possível provar  $G$ . Isto significa que a sua negação é verdadeira, a saber, “eu sou demonstrável”. Isto implica, portanto, que podemos provar  $G$ . Resumindo,  $G$  é demonstrável se, e somente se, sua negação for demonstrável. (LANNES, op. cit., p. 57)

<sup>268</sup> Idem, p. 56.

E como nosso personagem principal reage a tudo isso?



Hilbert tomou conhecimento de tais resultados apenas uma semana depois, ao receber de Bernays uma cópia do artigo de Gödel. Inicialmente zangado, considera um ataque frontal ao seu programa e sua filosofia da matemática. Mas, não podia negar que Gödel havia conseguido avançar mais que os outros em sua teoria da prova, por apresentar limites para o método axiomático sob o ponto de vista formalista, além da engenhosidade de seus procedimentos que viriam a ser úteis para novas investigações na questão dos fundamentos.

E assim, a escola formalista continuou em marcha, apesar de tudo. Alguns de seus integrantes continuaram atuantes na reformulação e consolidação do programa por considerar que a ideia de demonstração finitária subjacente ao programa original não coincidia plenamente com o tipo restritivo de demonstração exigido nos trabalhos de Gödel.

Nem mesmo Gödel considerava que seus resultados significavam o final do programa:

Devemos notar explicitamente que meu teorema não se opõe ao ponto de vista formalista de Hilbert. De fato, este ponto de vista supõe a existência de uma prova consistente por meios finitários e é concebível que existam provas finitárias que sejam representadas na aritmética de Peano.<sup>269</sup>

Após o susto inicial, de janeiro a março de 1931, Hilbert e Bernays se dedicaram ao estudo detalhado dos resultados de Gödel e (o que é a ironia da vida) fizeram a primeira demonstração completa do 2º teorema que estava apenas esboçada no seu artigo.<sup>270</sup>

Para tentar diminuir os danos causados a seu programa, Hilbert introduziu algumas inovações técnicas, como a  $\omega$  – regra, que, para qualquer fórmula F sem quantificadores, permite deduzir  $\forall xF(x)$  a partir de  $F(0)$ ,  $F(1)$ ,  $F(2)$ , etc. Assim, a proposição indecidível construída por Gödel seria automaticamente demonstrável e, ao estender a  $\omega$  –regra para todas as fórmulas com apenas uma variável, os teoremas do sistema formal passariam a corresponder biunívocamente às sentenças verdadeiras em modelos padrão. Foi, apesar de suas vantagens, um princípio oposto ao caráter finitário das provas de Hilbert<sup>271</sup>.

Ainda em 1931, ao proferir sua última palestra, *Beweis des tertium non datur*, Hilbert toma um rumo diferente de 1928 e considera que o problema da completude da aritmética já

<sup>269</sup> GÖDEL, 1931 apud DELESSERT, 2000, p. 146

<sup>270</sup> FRESÁN, op. cit., p.101 – 102

<sup>271</sup> Idem, p. 103.

havia sido resolvido por Ackermann e Von Neumann. O foco principal se encontrou na consistência e no princípio do terceiro excluído,  $(x) A(x) \vee (\exists x) \neg A(x)$ . Diferentemente do que se esperava, Hilbert, em vez de argumentar sobre uma prova finitária da consistência da aritmética pelo método de substituição do  $\varepsilon$  – cálculo, formula uma teoria construtiva da aritmética (que acredita ser finitária<sup>272</sup>) e defende simultaneamente a correção do significado dos princípios de inferência transfinita.



Mas a história não termina aqui. Muitas contribuições e tentativas de resgate do projeto original foram realizadas. Como já mencionado, coroando todo o trabalho conjunto desenvolvido, Hilbert e Bernays publicaram em 1934 o primeiro volume da obra *Grundlagen der Mathematik* (de fato escrita por Bernays tendo por base os escritos de Hilberts e novos resultados que se sucederam). Seria este o último suspiro de Hilbert na questão. O segundo volume seria publicado em 1939.



E la nave va.

Muito se teria ainda a reformular e adaptar.

Mas o projeto original não seria possível realizar!

---

<sup>272</sup> SIEG, op. cit., p. 137.

## 5 CONTRIBUIÇÕES E TENTATIVAS DE SUPERAÇÃO



ATO Nº 4

Mas que tipo de demonstração desejaríamos empregar? Novamente nos defrontamos com a questão recorrente da circularidade. Se utilizarmos em uma demonstração *a respeito* de nosso sistema todo o mesmo equipamento que inserimos *dentro dele*, que teremos conseguido? [...] Pense na maneira pela qual uma corda pesada é passada de um barco a outro (pelo menos assim eu li quando era garoto!); primeiro uma seta leve é lançada através do espaço intermediário, levando consigo uma corda leve. Uma vez estabelecida a ligação entre os barcos, a corda pesada pode ser puxada de um para o outro. Se pudermos usar um sistema “leve” para demonstrar que um sistema “pesado” é coerente, então teremos alcançado algum resultado. [...] essa era a esperança nutrida por uma importante escola de matemáticos deste século, chefiada por David Hilbert. O objetivo era de demonstrar a coerência da formalização da Teoria dos Números [...], empregando um conjunto bastante restrito de princípios de raciocínio denominado métodos “finitísticos” de raciocínio. Essa seria a corda leve. [...] Gödel mostrou que para puxar a corda pesada não se pode utilizar uma corda mais leve; simplesmente não existe uma que seja suficientemente forte.<sup>273</sup>

Recapitulando, o que pretendia Hilbert?

O estabelecimento de uma base segura para a matemática: identificar todo o conhecimento matemático a um conjunto de fórmulas demonstráveis, valendo-se dos métodos genético e axiomático, e garantindo a consistência da teoria estabelecida neste processo. Ufa! A metamatemática ou teoria da prova tomaria por objeto os sistemas formais e faria uso apenas de métodos finitistas. Seria, como diz Marshall, “A unifying ‘Theory of Everything’ that would finally nail down all the loose ends. Mathematics would be complete, bulletproof, airtight, triumphant.”<sup>274</sup>

O teorema de incompletude mostra que isso não é bem possível. Seu enunciado e prova garantem que: qualquer teoria efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar não pode ser simultaneamente consistente e completa. Ou seja, em qualquer teoria formal consistente e efetivamente gerada, que prove certas verdades aritméticas básicas, existe uma afirmação aritmética que é verdadeira, mas que não pode ser provada na teoria

Feito!

<sup>273</sup> HOFSTADTER, 2001, p. 251-252.

<sup>274</sup> Perry Marshall, disponível em <<http://cosmicfingerprints.com/incompleteness/>>. Acesso em 20/02/2018.

“Uma ‘Teoria de Tudo’ unificada, que finalmente amarraria todos os pontos soltos. A matemática seria completa, à prova de balas, hermética, triunfante.” (tradução nossa)

Apesar dos pesares, a vida continua. O plano de Hilbert não pode ser concretizado, pelo menos não da forma como havia sido realizado. Seria preciso utilizar algo diferente de uma corda, um fio de titânio ou algo parecido, quem sabe!

O fato é que após os teoremas de incompletude e na busca de tal fio, se estabeleceram novas perspectivas que retomam os objetivos do programa de Hilbert mas acrescentam novos argumentos técnicos e filosóficos.



Dois resultados, em especial, proporcionaram reformulações do programa hilbertiano.

O primeiro deles, obtido tanto por Gödel como por Gentzen, afirma que na aritmética de Peano é possível demonstrar as mesmas proposições reais que a sua análoga intuicionista<sup>275</sup>, o que causou certa estranheza visto que, até então, confundiam-se os métodos finitistas com os métodos construtivistas/intuicionistas (menos restritivos pois não exigem que os objetos sejam arranjos de símbolos sem conteúdo). Isto provocou uma reação imediata de Bernays que propôs uma reformulação do projeto original, substituindo a restrição finitista por outra mais débil: argumentos de caráter construtivo e permissão para a utilização de regras de inferência mais gerais.

O segundo é também devido a Gentzen, ao provar consistência dos axiomas de Peano em um artigo publicado em 1936. No seu *Habilitationsschrift*, finalizado em 1939, ele determinou a força teórica da prova da aritmética de Peano. Isso foi alcançado através de uma prova direta da improbabilidade do princípio da indução transfinita, usada na sua prova da consistência da aritmética de Peano. O princípio pode ser expresso em aritmética, de modo que, graças a essa possibilidade, a prova direta do teorema de incompletude de Gödel foi realizada em seguida. Gödel usou um procedimento de codificação artificial para construir uma fórmula aritmética não-provável. A prova de Gentzen foi publicada em 1943 e marcou o início da teoria da prova ordinal.

Este resultado foi aparentemente aceito por Hilbert e Bernays, além de mencionado explicitamente no Prefácio escrito por Bernays, onde também é indicado que Ackermann estaria trabalhando para estender sua anterior prova de consistência (publicada em 1927) nas

---

<sup>275</sup>**Aritmética de Heyting** (às vezes abreviada como HAo) é uma axiomatização de aritmética de acordo com a filosofia do intuicionismo. Nela se adotam os axioma da aritmética de Peano, mas são usadas regras de inferência da lógica intuicionista. Em particular, o princípio do 3º excluído não é considerado e o axioma da indução é “contornado” pela predicção.

linhas indicadas por Gentzen, ou seja, aplicando a indução transfinita. De fato, em 1940 é publicado o artigo *Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie*<sup>276</sup> de Ackermann, no qual a consistência da aritmética dos números naturais foi comprovada usando tais orientações. Desde então, outras provas foram publicadas seguindo a mesma estratégia. Deve-se mencionar aqui, entre outros, trabalhos de Lorenzen (1951), Schütte (1951, 1960) e Hlodovskii (1959).

O que destacamos porém, é que as provas e resultados mencionados utilizam versões do princípio da indução transfinita restrito à uma certa classe de ordinais e estão longe de serem consideradas provas finitárias. Mas é interessante ver que advogam de certa forma a favor do enfoque defendido por Hilbert. No caso, seria preciso apenas debilitar as restrições impostas aos métodos de demonstração para se chegar a uma prova aceitável de consistência.



Outro importante desenvolvimento é obtido por Herbrand que contribuiu para o programa fornecendo uma demonstração construtiva de consistência para um sistema fraco da aritmética, utilizando o  $\varepsilon$  – cálculo. Ainda antes, no início de 1931, ele submeteu para publicação seu principal estudo sobre a teoria da prova e funções recursivas gerais (*On the consistency of arithmetic*) e, enquanto seu ensaio estava sendo examinado, Gödel anunciou a impossibilidade de formalizar a prova de consistência de uma teoria suficientemente forte dentro de si mesma. Herbrand estudou o ensaio de Gödel e escreveu um apêndice para o seu próprio trabalho explicando porque o resultado de Gödel não contradizia o seu. Em julho daquele ano, Herbrand perdeu a vida em uma escalada e seu trabalho foi publicado postumamente.



Uma vez já conhecido que tanto a aritmética quanto qualquer axiomatização da teoria dos conjuntos em suas versões formais seriam teorias sem completude, o próximo passo seria esclarecer se proposições como o axioma da escolha e a hipótese do contínuo são ou não independentes dos demais axiomas da teoria dos conjuntos.

Em 1938, Gödel demonstrou que tanto o axioma da escolha quanto a hipótese do contínuo são consistentes com os demais axiomas de Zermelo – Fraenkel, e, em 1963, Cohen<sup>277</sup>

---

<sup>276</sup> A consistência da teoria dos números.

<sup>277</sup> Por seu trabalho correlato, Cohen ganhou a medalha Fields em 1966.

demonstrou um resultado similar para suas negativas. Ou seja, tanto um quanto o outro são proposições independentes dos demais axiomas da teoria dos conjuntos. Esses dois resultados afirmam que quem aceita a teoria usual dos conjuntos pode, sem risco de introduzir contradições, adotar tanto a hipótese do contínuo, como sua negação.



Sem a pretensão de nos aprofundarmos em demasia e apenas em linhas gerais, vamos ainda comentar sobre algumas interpretações, adaptações e tentativas de rescaldo dos planos de Hilbert.

### **Instrumentalismo<sup>278</sup>**



O programa de Hilbert foi e ainda é muitas vezes interpretado como parte instrumentalista da matemática. Isto por conta da distinção que Hilbert estabelece entre matemática contextual (finitista, com provas, refutações e proposições com conteúdo semântico) e a matemática formal (onde se incluem os aspectos associados ao infinito; sem significado do ponto de vista finitista) que precisa ser desenvolvida via metamatemática. Se estabelece assim, uma distinção entre as proposições dos sistemas axiomatizados da matemática que necessitam de prova de consistência. Como já vimos, algumas de tais fórmulas correspondem às proposições “reais” e as demais, “ideais”, que seriam adicionadas à parte finitista das teorias matemáticas para preservar inferências clássicas, como o princípio do 3º excluído para totalidades infinitas.

Quando de seus discursos em 1925 e 1928, Hilbert introduz explicitamente a noção de proposições ideais e deixa claro que a parte real da sua teoria seria formada apenas por fórmulas decidíveis e sem variáveis. Elas devem ser "diretamente capazes de verificação" - semelhante a proposições derivadas das leis da natureza, que podem ser verificadas por experiência.<sup>279</sup> No todo, é essa extensão da parte real da teoria pela parte ideal, infinita, que precisa de justificação por uma prova de consistência.

---

<sup>278</sup> O **instrumentalismo** defende que as nossas percepções, ideias e teorias científicas não necessariamente refletem o mundo real com precisão, mas são instrumentos úteis para explicar, prever e controlar nossas experiências. Para um instrumentalista elétrons e campos magnéticos podem ou não podem existir de fato e o método empírico é usado para fazer não mais do que mostrar que teorias são consistentes com observações.

<sup>279</sup> HILBERT, 1928, p. 475

Weyl descreveu o projeto de Hilbert como substituindo a matemática significativa por um jogo de fórmulas sem sentido. Ele observou que Hilbert "não queria garantir a verdade mas sim, a consistência da análise" e sugere que:

[I]f mathematics is to remain a serious cultural concern, then some sense must be attached to Hilbert's game of formulae, and I see only one possibility of attributing to it (including its transfinite components) an independent intellectual meaning. In theoretical physics we have before us the great example of a [kind of ] knowledge of completely different character than the common or phenomenal knowledge that expresses purely what is given in intuition. While in this case every judgment has its own sense that is completely realizable within intuition, this is by no means the case for the statements of theoretical physics. In that case it is rather the system as a whole that is in question if confronted with experience.<sup>280</sup>

Hilbert usou uma analogia semelhante em 1928, ao sugerir que a consistência não seria a única vantagem que a matemática ideal teria: a inferência transfinita simplifica e abrandava as provas, "a brevidade e a economia do pensamento são a razão de ser das provas de existência."<sup>281</sup> O jogo de fórmulas para Hilbert, realizado de acordo com certas regras definidas, expressaria a técnica de nosso pensamento, um protocolo de regras de acordo com o qual este realmente se desenvolveria.

Esta interpretação instrumentalista foi considerada por Giaquinto (1983), Sieg (1990) e, mais fortemente por Detlefsen (1986), este último o grande herdeiro das concepções de Hilbert, na medida em medida em que:

---

<sup>280</sup> WEYL, 1925, p. 140 *apud* ZACH, 2006, p. 429.

[...] Se a matemática continua sendo uma preocupação cultural séria, um certo sentido deve ser atribuído ao jogo de fórmulas de Hilbert (incluindo seus componentes transfinitos), um significado intelectual independente e só vejo uma possibilidade de fazê-lo. Em física teórica, temos diante de nós o grande exemplo de um [tipo de] conhecimento com caráter completamente diferente do que o conhecimento comum ou fenomenal que expressa puramente que é dado pela na intuição. Enquanto neste caso cada julgamento tem seu próprio sentido que é completamente realizável dentro da intuição, este não é, de modo algum, o caso das declarações da física teórica. Nesse caso, é mais do que o sistema como um todo em questão se confrontado com a experiência. (tradução nossa)

<sup>281</sup> HILBERT, 1928, p. 476.



[...] in that they interpret Hilbert's explanation that the ideal propositions "have no meaning in themselves" [Hilbert, 1926, 381] as claiming that classical mathematics is a mere instrument, and that statements of transfinite mathematics have no truth value. To the extent that this is accurate, however, it must be understood as a methodological instrumentalism: A successful execution of the proof-theoretic program would show that one could pretend as if mathematics was meaningless.<sup>16</sup> The analogy with physics is therefore not: transfinite propositions have no meaning just as propositions involving theoretical terms have no meaning, but: transfinite propositions require no direct intuitive meaning just as one does not have to directly see electrons in order to theorize about them.<sup>282</sup>

Nesta leitura, a matemática ideal é interpretada como um formalismo sem sentido, que simplifica o raciocínio matemático. Por conta disto, esta visão é uma interpretação reducionista. Uma prova de consistência da matemática ideal por si só não explica para que ela serve. Assim, seria necessário perceber que a consistência não apenas estabelece que as teorias que envolvem elementos ideais estão livres de contradições, mas também garante a conservatividade<sup>283</sup> da parte ideal sobre a parte real da teoria, no seguinte sentido: se a teoria ideal prova uma afirmação real, então a afirmação real também é provável por meios reais e finitistas. Como relata Giaquinto (1983), tais projetos reducionistas eram comuns na filosofia da ciência na época.



Em 1986, Detlefsen, filósofo e pesquisador americano da Universidade de Notre Dame, concebeu um projeto reducionista tendo por base o programa de Hilbert, com o intuito de

<sup>282</sup> Ibidem, p. 430.

[...] interpretam a explicação de Hilbert de que as proposições ideais "não têm significado em si mesmas" [...], alegando que a matemática clássica é um mero instrumento e que as afirmações de matemática transfinita não possuem valor de verdade. No entanto, na medida em que isso é preciso, deve ser entendido como um instrumentalismo metódico: uma execução bem-sucedida do programa de teoria da prova mostraria o que se poderia pretender se a matemática não tivesse sentido. A analogia com a física não é, portanto, as proposições transfinitas não tem sentido, assim como as proposições que envolvem termos teóricos não tem significado, mas as proposições transfinitas não requerem um significado intuitivo direto, assim como não é necessário ver elétrons diretamente para teorizar sobre eles. (tradução nossa)

<sup>283</sup> Seja  $\varphi$  uma fórmula finitista. Denotemos por  $\vdash_F \varphi$  o fato de  $\varphi$  ser um teorema do fragmento finitista da aritmética de Peano e por  $\vdash \varphi$  que  $\varphi$  é um teorema da aritmética de Peano. A conservatividade da segunda etapa do programa de Hilbert pode ser expressa da seguinte forma:

(conservatividade) Se  $\vdash \varphi$  então  $\vdash_F \varphi$ . Mas Hilbert não recomenda o ataque direto à conservatividade, mas sim que olhemos para seu antigo problema da consistência da aritmética: (consistência)  $\neg (\vdash \varphi \text{ e } \vdash \neg \varphi)$ . [...] Se  $\tau$  é uma fórmula qualquer da aritmética de Peano, não obrigatoriamente finitista, então a consistência como enunciarmos equivale a " $\neg (\vdash \tau \text{ e } \vdash \neg \tau)$ ". Na lógica clássica (e por sina, no intuicionismo também) todas as contradições são equivalentes. Este salto que Hilbert dá, indo da conservatividade para a consistência não está claro nos textos que nos deixou. É fácil se convencer que a consistência é uma condição necessária para a conservatividade, como mostraremos em instantes. Por outro lado, o inverso que Hilbert parece supor, não é evidente. [...] É preciso portanto adivinhar como Hilbert se convenceu de que a conservatividade e a consistência são equivalentes. [...] (DOSÉN, 1999, p. 8-9) (tradução nossa do original em francês)

contornar as dificuldades que os teoremas de incompletude acarretam para o projeto original.

De início, é apresentada uma análise detalhada e uma defesa da visão instrumentalista da matemática ao longo dos trabalhos de Hilbert, o que inclui a questão de como a manipulação de cadeias de símbolos sem sentido pode levar ao conhecimento de verdades em termos finitistas. Detlefsen então analisa as características dos sistemas formais ideais da matemática sob o ponto de vista instrumentalista.

Na sua opinião, embora a teoria dos conjuntos seja comumente aceita como uma formalização da matemática infinita, apenas partes da teoria são instrumentalmente úteis. Em particular, (1) provas ideais de teoremas reais, que são mais complexas do que qualquer prova real do mesmo teorema, não produzem uma vantagem instrumental e, portanto, não tem utilidade instrumental; e (2) provas ideais que são muito longas ou complexas e, que portanto, nunca desempenham um papel essencial no raciocínio matemático real, também não tem valor instrumental. Uma justificativa analítica da prova da matemática instrumental, ou seja, a prova da conservatividade da teoria ideal sobre a matemática real, é necessária somente para a parte útil instrumental.

Detlefsen introduz o termo *resíduo hilbertiano* para a parte da matemática ideal que é instrumentalmente útil e, portanto, precisa de justificação teórica. Em sua opinião, então, precisamos apenas de uma prova de consistência para o resíduo hilbertiano, não para toda a matemática ideal.

Outro aspecto da abordagem de Detlefsen está relacionado à técnica envolvida na teoria da prova, com defesa da utilidade instrumental das provas ideais. Hilbert, como vimos anteriormente, também advogou a favor, chamando a atenção para a vantagem teórica e cognitiva dos métodos ideais, como o aumento da simplicidade das provas. No instrumentalismo de Detlefsen, tais considerações tomam o centro das atenções.

### **Programas de Hilbert relativizados**



Uma continuação<sup>284</sup> filosoficamente mais satisfatória do programa de Hilbert em termos teóricos de prova foi sugerida por Kreisel, inicialmente em 1954, e elaborada por Feferman (1960). Se caracteriza por uma concepção mais ampla do programa de Hilbert numa tentativa de justificar a matemática ideal por meios restritivos. Nesta concepção, o objetivo da teoria da prova de Hilbert seria o de mostrar que, pelo menos até certa classe de proposições reais, a

---

<sup>284</sup> Ibidem, p. 437.

matemática ideal não vai além da matemática real e, nesse sentido, a matemática final é uma base para a matemática ideal. Uma prova de consistência finitista do tipo previsto por Hilbert teria realizado isso para toda a matemática clássica.

Mas nesse caso, o escopo do projeto não precisaria necessariamente ser relativo a toda a matemática. Os chamados programas de Hilbert relativizados são projetos em que se consideram certos fragmentos da matemática como a teoria para a qual um fundamento é solicitado.

O incentivo para Feferman sobreveio de um questionamento feito por Kreisel acerca da validade do 2º teorema de incompletude na aritmética  $Q$ <sup>285</sup>. Em caso afirmativo, teríamos em  $Q$  a impossibilidade de uma prova de consistência de  $Q$ .

Esta questão viria, segundo ele, do fato que as técnicas de Gödel não teriam sido aritmeticamente adequadas:

In Gödel's paper, arithmetical formulas "express" metatheoretical properties like consistency through binumeration. Since a binumeration is a correlation between some formal sentences and some yet-to-be-formalized-meta-mathematics, the binumeration cannot be verified by purely arithmetic means. Thus in order to verify that a formula express consistency, one must step outside of the arithmetical setting. Gödel had not shown that an arithmetic theory could pose the question of his own consistency on its own terms. Kreisel suggested that this might be possible, but that in very weak settings like Robinson's theory it was unlikely.<sup>286</sup>

A proposta de Feferman<sup>287</sup> permite que uma metateoria possa formular diretamente suas sentenças. Trata-se de uma forma de aritmetização em que não se precisa sair da própria teoria

---

<sup>285</sup> A **aritmética Q** de Robinson foi desenvolvida por Tarski, Mostowski e Robinson em 1953. É essencialmente uma aritmética de Peano sem o axioma da indução, o que resulta numa aritmética extremamente fraca, em que muitas propriedades elementares dos números naturais não são válidas. A lógica subjacente é a de primeira ordem. Sua maior utilidade vem das propriedades metamatemáticas que podem ser demonstradas internamente. Foi construída especificamente com a intenção de ser a mais fraca possível mas suficiente para permitir a validade do 1º teorema de Gödel. É muito utilizada por uma outra qualidade: permite em si a representação de teorias mais fortes.

<sup>286</sup> FRANKS, 2009, p. 139.

No artigo de Gödel, as fórmulas aritméticas "expressam" propriedades metateóricas, como a consistência, por meio da binumeração. Uma vez que uma binumeração é uma correlação entre sentenças formais e metamatemáticas, a binumeração não pode ser verificada por meios puramente aritméticos. Assim, para verificar se uma fórmula expressa a consistência, é preciso sair da configuração aritmética. Gödel não mostrou que uma teoria aritmética poderia colocar a questão de sua própria consistência em seus próprios termos. Kreisel sugeriu que isso poderia ser possível, mas que, em contextos muito fracos, como a teoria de Robinson, isto seria improvável. (tradução nossa)

<sup>287</sup> Feferman denomina esta técnica por intencionalidade, por conta de ser executada dentro dos pressupostos da própria teoria e em contraposição às técnicas "extensionais" de Gödel que só o faz externamente à mesma.

para determinar quando uma fórmula expressa uma propriedade da metateoria. No caso da consistência, por exemplo, para se obter uma sentença que expresse a consistência da aritmética em que se insere, a técnica se concretizaria da seguinte forma: caracterizar que tipo de propriedades matemáticas envolvem a busca desta consistência e provar, sem uso da aritmética em questão, que certa sentença tem estas propriedades. Desta forma, tal sentença verificando ou não a consistência desejada, teríamos utilizado a própria aritmética para provar todas as proposições relativas a esta consistência.

### Matemática reversa



O programa da matemática reversa, lançado em meados dos anos setenta por Friedman e, subsequentemente, desenvolvido por Simpson, é outra continuação do programa de Hilbert. Em face dos resultados de Gödel de que nem toda a matemática clássica pode ser reduzida considerando as restrições finitistas, o que se quer determinar é o quanto pode ser reduzido.

Ou seja, o objetivo do programa é encontrar, para cada teorema da matemática “usual”, a axiomática mais fraca em que ele pode ser deduzido.

Na matemática reversa, estranhamente para nós comuns mortais, ao se considerar uma teoria base, o que se mostra é que o teorema em causa permite deduzir os axiomas de que é consequência. A restrição à matemática “usual” é uma delimitação operacional com vista a excluir áreas muito abstratas da matemática que emergiram com a teoria dos conjuntos: topologia geral, análise funcional abstrata, estruturas puramente algébricas de cardinalidade superior à numerável e, é claro, de modo a excluir a própria teoria dos conjuntos; uma restrição razoável numa primeira tentativa de classificar os teoremas da matemática em termos de “força dedutiva” e, de fato, uma restrição que deixa muito pouco de fora. Sendo assim, este programa está principalmente preocupado com teorias confiáveis, como por exemplo, certos subsistemas da análise.

É curioso e estarrecedor observar que por conta de Gödel, nem todas as verdades da teoria dos números são passíveis de dedução na aritmética de Peano e, portanto, nem para todos os domínios da aritmética seria possível prover fundamento tendo por base a restrição finitista. Mas então, isto sugere a questão de saber se existem suposições matematicamente importantes da teoria dos números que não são prováveis!

Mas, devemos evitar o pânico! Segundo Friedman, um grande número de resultados da aritmética usual é provável apenas em fragmentos considerados “fracos” porém, “ every

theorem published in the *Annals of Mathematics*<sup>288</sup> whose statements involves only finitary mathematical objects can be proved in elementary arithmetics.”<sup>289</sup>



As propostas e teorias sucintamente apresentadas aqui são todas continuações naturais das ideias originais de Hilbert. Um aspecto central de tais investigações é que são comumente estudados sistemas formalizados usando ferramentas metamatemáticas com o objetivo de entender sua estrutura e conteúdo. O mesmo se poderia dizer sobre as que avaliam negativamente os propósitos de Hilbert.

Tudo isso, (sussurros discretos...)... , dentro da metamatemática! Irônico, não?!

---

<sup>288</sup> *Annals of Mathematics*, abreviado como *Ann. Math.*, e denominado com frequência simplesmente como *Annals*, é um periódico científico especializado em matemática, publicado pela Universidade de Princeton e seu Instituto de Estudos Avançados. Foi fundado em 1884 e desde 1998 dispõe de uma versão eletrônica.

<sup>289</sup> *Ibidem*, p. 440.

“todo teorema publicado nos Anais da Matemática cujas afirmativas envolvem apenas objetos matemáticos no sentido finitista pode ser provado na aritmética elementar.” (tradução nossa)

## 6 UM OLHAR SOBRE O *GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK*<sup>290</sup>



ATO Nº 5

Este capítulo adicional será dedicado a alguns breves e não-técnicos comentários sobre o último texto oficial idealizado por Bernays e Hilbert em conjunto, um importante roteiro do desenvolvimento da lógica matemática moderna e testemunha histórica de uma grande fase de criação.

Na época de sua publicação, 1934 e 1939, os volumes apresentados foram significativos para a pesquisa contemporânea e apresentaram resultados correntes da metamatemática: de provas de consistência obtidas por Bernays e Hilbert, passando pelos teoremas de Gödel e Herbrand, até chegar na prova de consistência de Gentzen para a teoria dos números. Contamos ainda com apêndices importantes sobre tópicos selecionados como, por exemplo, o desenvolvimento formal da análise e uma apresentação incisiva da indecidibilidade do problema da decisão.

Desta forma, a obra se constitui numa síntese enciclopédica dos trabalhos voltados para a metamatemática nas duas décadas anteriores, ao apresentar estudos sistemáticos e abrangentes que expressam as preocupações acerca dos fundamentos da matemática do final do séc. XIX em diante.

Após algum tempo decorrido da primeira edição, Bernays preparou uma segunda edição revista onde foram adicionadas vários suplementos<sup>291</sup>:

---

<sup>290</sup>Tendo por referência os comentários de RAVAGLIA E SIEG, 2004 e a edição francesa da obra, *Fondéments des mathématiques* (2001).

1ª Edição:

Vol. I: BERNAYS, P.; HILBERT. D. Grundlagen der Mathematik I. Berlin: *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften: in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete*, Verlag Julius Springer, vol. XL, 479 p., 1934.

Vol. II: BERNAYS, P.; HILBERT. D. Grundlagen der Mathematik II. Berlin: *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften: in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete*, Verlag Julius Springer, vol. L, 506 pgs., 1939.

2ª Edição:

1968 (Vol. I – 472 p.) e 1972 (Vol. II – 561 p.). As revisões feitas para a 2ª edição estão detalhadas em notas feitas por Bernays.

<sup>291</sup> Embora as traduções em russo e francês estejam disponíveis, nunca houve uma edição em inglês desses dois marcos no desenvolvimento da lógica matemática moderna. Uma das razões para a falta de uma tradução pode ter sido a questão dos direitos autorais, mas um motivo mais importante é, certamente, a enorme amplitude da escolaridade necessária dos tradutores por causa da visão profunda mostrada no conteúdo matemático apresentado além da própria linguagem. Uma versão em inglês está sendo trabalhada no **Hilbert Bernays Project** que pode ser acessado em <http://wirth.bplaced.net/p/hilbertbernays/staff.html>.

This is the first volume of the long-awaited second edition of Bernays's masterly presentation of the main results in proof theory obtained by Hilbert and his collaborators before 1934. The modifications made in the new edition do not affect the general character of the book, since they are for the most part minor additions or amendments, or clarifications of points of detail. ... The style of *Grundlagen der Mathematik*, and the spirit in which it is written, are very different from what is now usual in systematic expositions of logic and proof theory, and the book has to a very high degree the virtues of a more reflective and less specialized age than that of today. Nowadays the non-formal background of metamathematics is normally taken for granted, and authors proceed in a wholly abstract manner, getting down to technicalities from the outset. ... Although the book has now been in existence for thirty-five years, it is still very much alive, and the logical, philosophical, and mathematical background that is to be gained from a careful reading of it remains altogether unique.<sup>292</sup>



## Volume I

De acordo com o prefácio e a apresentação da teoria da prova contidos no vol. I, a finalização da obra ocorreu apenas após os artigos de Herbrand e Gödel que produziram profundas mudanças na teoria original. O resultado foi um texto mais extenso e que teve portanto que ser dividido em duas partes, volumes I e II.

Do primeiro, constam oito capítulos, direcionados da seguinte forma:

Caps. 1 e 2: Introdução aos principais aspectos fundacionais:

- O problema da não contradição na axiomática, um problema de decisão em lógica;
- A teoria elementar dos números; o raciocínio finitista e suas limitações.

Caps. 3 a 5: Desenvolvimento sistemático do arquétipo lógico de 1ª ordem (com identidade):

---

<sup>292</sup> KNEEBONE, 1970, 321-323, sobre a segunda edição de 1968.

Este é o primeiro volume da tão aguardada segunda edição da apresentação magistral de Hilbert e Bernays dos principais resultados da teoria da prova obtida por Hilbert e seus colaboradores antes de 1934. As modificações feitas na nova edição não afetam o caráter geral do livro, uma vez que são, na sua maioria, adições menores ou emendas, ou esclarecimentos de pontos de detalhe. ... O estilo do *Grundlagen der Mathematik* e o espírito em que está escrito são muito diferentes do que é usual nas exposições sistemáticas da lógica e da teoria da prova, e o livro tem um grau muito alto das virtudes de um mais idade reflexiva e menos especializada do que a de hoje. Hoje em dia, o contexto não-formal da metamatemática é normalmente considerado como adquirido, e os autores prosseguem de forma totalmente abstrata, chegando a aspectos técnicos desde o início. ... Embora o livro já tenha existido por trinta e cinco anos, ainda está muito vivo, e os antecedentes lógicos, filosóficos e matemáticos a serem adquiridos com uma leitura cuidadosa permanecem completamente únicos. (tradução nossa)

- A formalização do cálculo lógico I: o cálculo proposicional;
- A formalização do cálculo lógico II: o cálculo de predicados;
- Inclusão da identidade. A completude do cálculo de predicados monádicos.

Caps. 6 a 8: Investigações acerca do problema da consistência e outras questões metamatemáticas para uma variedade de subsistemas da teoria dos números:

- A não contradição de domínios infinitos de objetos. Elementos da teoria dos números;
- As definições recursivas;
- O conceito de “ele, quem” e sua eliminação.

O foco do desenvolvimento da teoria da prova neste volume não inclui a consideração do operador  $\varepsilon$ .

O cap. 1 se inicia com uma exposição geral sobre axiomática, no centro da qual se encontra a distinção entre teorias axiomáticas contextuais e formais. No texto, esta distinção aparece sob diferentes formulações. Para introduzir seus conceitos e princípios básicos, as contextuais tem por base a experiência. Já as formais tomam uma via abstrata por meio de conteúdos intuitivos: iniciam-se com a consideração de um sistema fixo de objetos, delimitado exteriormente, e que vem a se constituir num domínio de indivíduos para todos os predicados que serão construídos na teoria (p. 55-58).

A seguir, por meio de uma discussão geral sobre o problema da consistência para as formais, os autores são levados a concluir que esta consistência pode ser estabelecida para um domínio finito quando se exhibe um modelo satisfatório para o sistema, porém não se pode prosseguir nesta direção quando o domínio é infinito. Neste caso, as provas de consistência apresentam um problema específico pois a consideração de objetos extramatemáticos não pode resolver a questão da existência de campos infinitos. Isto deve ser resolvido sem a matemática e tratado como um problema da lógica. Argumentam então que tal prova deverá envolver a formalização dos princípios lógicos da teoria e uma prova de não contradição (p. 72). Ou seja, que o problema deve ser tratado na perspectiva da teoria da prova.

Além disso, esta prova não precisaria ser obtida para cada teoria T. Bastaria executá-la para um sistema de axiomas T que tenha estrutura suficiente para torná-la plausível e rica o bastante para que, assumindo a existência de um sistema S de objetos e relações que satisfaçam T, se possa derivar a satisfiabilidade de sistemas de axiomas para a física e a geometria. Isto



se verificaria ao representar os objetos de tais áreas como indivíduos de  $S$  e suas relações básicas por predicados derivados dos de  $S$  por meio de operações lógicas. Hilbert e Bernays consideram a aritmética como candidata principal para  $T$  (p. 72-73).

Porém, assinalam os autores que, para que este argumento de consistência seja funcionalmente relevante, é preciso evitar considerações idealizadas de existência nas teorias axiomáticas formais.

Por outro lado, questionam: se é possível uma prova de justificação teórica para a aritmética por meios elementares, seria possível um desenvolvimento direto de uma aritmética sem considerações elementares que não requer nenhuma justificativa adicional? A resposta para esta questão envolve a apresentação elementar de partes da teoria dos números e da álgebra formal; esta apresentação simultânea serve para introduzir o ponto de vista finitista (p. 74 – 87).

No texto, as considerações deste calibre se apresentam em sua forma mais ingênua como “experimentos mentais que envolvem objetos concretos”. A palavra “finitista” é utilizada para transmitir a ideia que uma alegação ou definição acerca de tais objetos, em princípio, deve ser representável e o processo deve ser executável.

Após esta apresentação finitista da teoria elementar dos números e da álgebra formal, Hilbert e Bernays observam que não se pode obter uma justificativa elementar direta para toda a matemática, pois princípios não finitistas já fazem parte da análise e da teoria dos números (p. 97).

Embora seja concebível que se possa contornar o uso de tais princípios na teoria dos números (em que só se assume a existência do domínio dos inteiros), o caso é diferente para a análise, onde se assume ainda a existência dos números reais e se aplica o princípio do terceiro excluído.

Assim, se é levado de volta à estratégia de proceder de forma indireta, isto é, usar a teoria da prova como uma ferramenta para assegurar a consistência da matemática. Como parte dessa estratégia, Hilbert e Bernays adotam a exigência metodológica de que a teoria da prova seja finitista. Esta exigência assegura que a prova de consistência buscada para a aritmética evitará a idealização de pressupostos existenciais que afinal, necessitam de justificação (p. 98 – 99). A exigência de que a teoria da prova seja finitista é relaxada apenas ao final do segundo volume quando as extensões da estrutura metodológica da teoria da prova são consideradas.

A primeira etapa deste empreendimento, a exibição de um formalismo lógico adequado, ocupa os caps. 3 a 5. Os sistemas lógicos desenvolvidos são próximos dos contemporâneos e

são os mesmos do texto de Hilbert e Ackerman (1928).

A segunda etapa, constante dos caps. 6 e 7, envolve a formulação e investigação de subsistemas da teoria dos números, que podem ser organizados em dois grupos: o primeiro consiste de fragmentos fracos de aritmética contendo quantificação de primeira ordem; o segundo, de subsistemas da teoria dos números, compreende formalismos que surgem do cálculo elementar com variáveis livres, por meio da adição de funções definidas por recursão primitiva. A terceira e última etapa do desenvolvimento realizado neste 1º volume ocorre no final do cap. 7 e no cap.8, onde se pode encontrar um terceiro grupo de formalismos que é equivalente à aritmética de Peano.



## Volume II

Neste segundo volume, os autores se ocupam de dois temas principais: a teoria da prova, desta vez com a consideração do operador  $\varepsilon$ , e uma análise da extensão dos métodos inferenciais para além dos limites finitistas. É composto de cinco capítulos e quatro suplementos:

Cap. 1: O método de eliminação de variáveis limitadas por meio do operador hilbertiano  $\varepsilon$ ;

Cap. 2: Investigações acerca da teoria dos números em teoria da prova por meio de métodos associados ao operador  $\varepsilon$ ;

Cap. 3: Aplicações do operador  $\varepsilon$  ao estudo do formalismo lógico;

Cap. 4: O método de aritmetização da metamatemática aplicado ao cálculo de predicados;

Cap. 5: A razão para entender o escopo dos métodos em teoria da prova;

Suplementos: (I) Visão geral do cálculo de predicados e formalismos associados; (II) A precisão do conceito de função calculável e o teorema de Church sobre o problema da decisão; (III) Sobre os domínios do cálculo proposicional e suas delimitações dedutivas por meio de esquemas; e, (IV) Formalismos para o desenvolvimento dedutivo da análise.

Os caps. 1 e 2 são dedicados a apresentação e desenvolvimento da teoria da prova de Hilbert. Um métodos utilizados permitem uma forma mais simples de abordar uma sequência de teoremas, graça aos quais, a discussão acerca do cálculo de predicados toma um viés considerado satisfatório pelos autores, além de serem também aplicáveis em considerações sobre a axiomática. O ponto central de tais considerações é um teorema de lógica teórica

devido a Herbrand, cuja abordagem mais simples permite alguns desenvolvimentos sobre o problema da decisão e, a partir disso, um reforço em teoria da prova para o 1º teorema de incompletude de Gödel.

O restante do segundo volume é dedicado ao segundo tema considerado, uma análise da extensão dos métodos inferenciais em teoria da prova para além dos limites finitistas. No centro de tais considerações se encontram então os resultados de Gödel acerca da incompletude de todo formalismo estritamente delimitado e com capacidade suficiente de expressão. Os dois teoremas são abordados de forma sistemática, não apenas no que diz à sua relação com os paradoxos, mas também no tocante a sua validade; o desenvolvimento de suas demonstrações; e sua aplicabilidade em um formalismo completo da teoria dos números.

Hilbert e Bernays avaliam ainda as consequências do 1º teorema de incompletude e se questionam se a prova de completude de formalismos é uma característica necessária para que o programa de consistência faça sentido. Esta questão já havia sido abordada por Hilbert (1928) e por Bernays (1930).

Na ocasião, Hilbert formulou a questão da completude sintática para a teoria dos números e a análise como um problema a ser considerado, sugerindo que, em teorias mais fortes que a dos números, seria possível pensar que um sistema de axiomas poderia ser consistentemente estendido por uma afirmação  $S$ , mas também por sua negação  $\neg S$ ; a aceitação de uma das afirmações é então justificada por vantagens como a conservação de leis e princípios e a possibilidade de futuros desenvolvimentos sem restrições. Hilbert presumiu ainda que a teoria dos números seria dedutivamente completa. Isso é reiterado por Bernays e seguido pela observação de que o problema da realização concreta de uma prova para tal fato ainda se encontra sem solução. Continuando, Bernays avalia que o problema se tornava ainda mais difícil quando da consideração de sistemas para a análise ou a teoria dos conjuntos. No entanto, esta problemática não deveria ser tomada como uma objeção contra o ponto de vista apresentado.

Esse ainda seria também o ponto central na discussão geral acerca do 1º teorema de incompletude realizada neste vol. II. Hilbert e Bernays enfatizam ainda que, ao formularem os problemas e as metas da teoria da prova, evitaram desde o início considerar a ideia de um sistema total para a matemática como um princípio filosófico. Para seus propósitos, seria suficiente caracterizar a sistemática efetivamente disponível da análise e da teoria dos conjuntos como um quadro apropriado para o trato com as disciplinas geométricas e físicas (p. 341 - 342).

A partir de tal restrição, concluem que o 1º teorema de incompletude incidente para o formalismo central da teoria dos números, análise e teoria dos conjuntos, não invalidaria diretamente o programa de Hilbert.

Eles posam ainda uma questão peculiar que merece ser destacada:

Cependant, il y a une autre façon dont une problématique se présente, quand nous considérons la conséquence du théorème de Gödel que voici: au cas où une démonstration finitiste de non-contradiction du formalisme de l'analyse et de la théorie des ensembles serait couronnée de succès, il devrait possible d'avoir em même temps une preuve finitiste d'un énoncé de la théorie récursive des nombres, qui ne se laisse pas déduire dans le formalisme cité. Il semble alors paradoxal que les méthodes de la théorie finitiste de la preuve doivent être em un certain sens supérieures à celles de l'analyse et de la théorie des ensembles dans la preuve de propositions de la théorie des nombres.<sup>293</sup>

Assim, os métodos finitistas iriam para além daqueles da análise e da teoria dos conjuntos, mesmo para a prova de proposições numéricas. Esta é uma situação paradoxal e Hilbert e Bernays afirmam inequivocamente no vol. I que os métodos finitistas são incluídos na aritmética usual. Conseqüentemente, até mesmo o 1º teorema de incompletude leva a duas tarefas investigativas, a saber, avaliar a extensão dos métodos finitistas e demarcar apropriadamente o ponto de vista metodológico para a teoria da prova.



Os teoremas de Gödel impedem que um sistema prove sua própria consistência, como queria Hilbert para a aritmética? Sim, claro, não há solução pela via finitista. Mas isto abre um leque de novas possibilidades de orientação, muitas descritas nesta obra conjunta, como Hilbert nos assinala logo de início, na introdução do primeiro volume:

---

<sup>293</sup> BERNAYS; HILBERT, 1939, p. 343.

No entanto, existe outra maneira pela qual uma problemática se apresenta, quando consideramos a seguinte consequência do teorema de Gödel: no caso em que uma demonstração finitista de não contradição do formalismo da análise e da teoria dos conjuntos fosse coroada de sucesso, seria possível ter simultaneamente uma prova finitista de um enunciado da teoria recursiva dos números, que não poderia ser deduzida do formalismo citado. Parece paradoxal então que os métodos da teoria finitista da prova fossem, em certo sentido, superiores aos da análise e da teoria dos conjuntos na prova de proposições da teoria dos números.

J'ai détaillé em divers endroits les idées directrices de mes recherches sur les fondements des mathématiques, que – renouant avec des approches antérieures – j'ai reprises depuis 1917 dans des entretiens avec P. Bernays. W. Ackermann a également participé à ces recherches, et divers mathématiciens s'y sont joints depuis. [...] Cette mise au point des resultats montre en même temps la direction à suivre pour la recherche en théorie de la preuve, vers le but final: reconnaître la non-contradiction de toutes nos méthodes mathématiques usuelles sans exception. Au regard de cet objectif, je voudrais souligner que l'opinion apparue durant un temps, selon laquelle certains résultats nouveaux de Gödel empêcheraient ma théorie de la preuve d'aboutir, s'est montrée erronée. Car en fait, ce résultat montre tout juste que, pour les preuves futures de non-contradiction, le point de vue finitiste doit être exploité avec plus d'acuité que ne le requiert le traitement des formalismes élémentaires.<sup>294</sup>

O programa foi assim transformado, de acordo com os pressupostos iniciais de Hilbert, em uma proposta reducionista geral, em que a restrição finitista deve ser reavaliada. O que se deve tentar então é estabelecer provas de consistência para teorias clássicas fortes e efetivas para as apropriadamente construtivas.

Esta meta adaptada da original pode ser percebida no desenvolvimento do texto<sup>295</sup>, feito da ampla visão de Hilbert sobre os problemas dos fundamentos da matemática e questões afins. Outro efeito visível se encontra nos vários resultados obtidos por Hilbert, Bernays e outros membros da sua escola.

Finalmente, se deve considerar o estímulo que sua abordagem proporcionou a muitos outros como von Neumann, Herbrand, Gödel, Church, Skolem, Rosser, Kleene, Robinson, Rice e Turing, para mencionar apenas alguns.

Na questão dos fundamentos, as idas e vindas continuaram num constante crescimento de ideias e resultados importantes, não apenas no âmbito da lógica, matemática ou filosofia, mas também na então emergente ciência da computação.



<sup>294</sup> BERNAYS; HILBERT, 1934, p. 43.

Eu detalhei em vários lugares as principais ideias de minhas pesquisas sobre os fundamentos da matemática, que - retomando abordagens anteriores - eu continuei desde 1917 em conversas com P. Bernays. W. Ackermann também participou dessa pesquisa e vários matemáticos a ela se juntaram depois. Este apanhado dos resultados mostra ao mesmo tempo a direção a seguir para a pesquisa em teoria da prova, com o objetivo final: reconhecer a não contradição de todos os nossos métodos matemáticos usuais sem exceção. Tendo em vista este objetivo, eu gostaria de assinalar que, a opinião corrente por um período de que os novos resultados de Gödel impediriam a minha teoria da prova de ser bem sucedida se mostrou errada. Pois, de fato, este resultado mostra apenas que, para provas futuras de não contradição, o ponto de vista finitista deve ser explorado com mais atenção do que o tratamento dos formalismos elementares requer. (tradução nossa)

<sup>295</sup> Os correspondentes Sumários da tradução francesa se encontram no APÊNDICE B.

Nas palavras de Ravaglia & Sieg (2004):

Indeed, there is no foundational enterprise with a more profound and far-reaching effect on the emergence and development of mathematical logic. What Ackermann formulated in his review of just the first volume, holds even more for the complete two-volume work, namely that is "is to be viewed in the line with the great publications of Frege, Peano and Russell Whitehead".<sup>296</sup>

---

<sup>296</sup> De fato, não há empreendimento fundacionalista de efeito mais profundo e de longo alcance para a emergência e desenvolvimento da lógica matemática. O que Ackermann formulou em sua revisão apenas do primeiro volume, vale ainda mais para o trabalho completo dos dois volumes, ou seja, "deve ser visto na linha das grandes publicações como as de Frege, Peano e Russel-Whitehead". (tradução nossa)

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS



GRAN FINALE

Como mencionado na introdução deste texto, nossa proposta se definiu por um relato histórico do caminho percorrido por Hilbert nas questões voltadas para a fundamentação da matemática nos primeiros quarenta anos do século XX, passando pela enunciação de seu projeto, o programa de Hilbert, auge de suas concepções formalistas.

Acreditamos ter atingido este objetivo por meio da investigação de suas motivações, do método empregado e do alcance de suas teorias, na descrição e avaliação do conteúdo de cursos ministrados e conferências apresentadas no período, em particular, de sua obra final o *Grundlagen der Mathematik*, publicado em 1934 e 1939 em parceria com seu maior colaborador, Paul Bernays; das refutações de Poncaré e discordâncias de Brouwer, além dos trabalhos adicionais de seus colaboradores e tentativas de superação após os teoremas de incompletude de Gödel.

Por outro lado, pela deficiência de publicações em língua portuguesa que abordem aspectos mais detalhados da obra de Hilbert sobre os fundamentos da matemática, nosso texto se caracteriza como uma possível referência histórica global acerca do tema, como verificamos por meio de nossa pesquisa bibliográfica e que pode ser constatado pelo escrutínio da maioria das obras de autores nacionais devotados ao tema.

Até aqui, temos a pretensão de dever cumprido.

Porém nos resta ainda justificar a denominação de nosso texto como “o sucesso de um fracasso”, a tal visão positiva a que nos propomos.

Por conta disso e de idas e vindas, nos deparamos com um dos maiores opositores do formalismo<sup>297</sup> em geral, mas cuja visão de progresso científico nos parece paradoxalmente cair como uma luva para o que pensamos acerca do “sucesso de um fracasso” de Hilbert, Lakatos, cuja perspectiva filosófica segue ao extremo a teoria do conhecimento científico enunciada por Poppe: o conhecimento científico é hipotético, falível e a ciência progride a partir de problemas, no jogo que se estabelece entre fatos, conjecturas e refutações.

---

<sup>297</sup> O formalismo desliga a história da matemática da filosofia e da matemática, uma vez que, de acordo com o conceito formalista da matemática, não há propriamente história da matemática. [...] O formalismo nega o status de matemática à maioria do que comumente tem sido considerado matemática, e nada pode se dizer sobre o seu progresso. Nenhum dos períodos “criativos” e dificilmente qualquer um dos períodos “críticos” das teorias matemáticas teriam sido admitidos no céu formalista em que as teorias matemáticas habitam como o serafim, expurgado de todas as impurezas da incerteza terrestre. (LAKATOS, 1978, p.14)

Este último final de frase nos remete à sua obra fundamental<sup>298</sup>, um ensaio sobre a lógica da descoberta em matemática, onde se atribui ao erro um valor primordial no processo de produção do conhecimento. Lakatos sugere que a matemática não se desenvolve por um crescimento contínuo de teoremas seguramente estabelecidos, mas pela revisão e correção de teorias, e aprimoramento constante de conjecturas, devidas à especulação e à crítica.

É o que nos parece ocorrer em todo o trajeto histórico abordado: a produção de conhecimento matemático e lógico, em que ocorre uma adaptação constante de premissas e conceitos, em simultâneo com uma incessante busca de conjecturas, provas e refutações, num ciclo de idas e vindas. No contexto do nosso texto, pode-se observar como muitas teorias surgem em meio a uma reformulação nos modelos de conhecimento, não de modo linear ou cumulativo, tal como compreendido pela escola positivista mas em resposta às mudanças que ocorrem pela aceitação ou não de novas conjecturas ou refutações.

Este é o caso de Hilbert que procurou aprimorar constantemente sua técnica para atingir um objetivo que constrói aos poucos, iniciado ainda na resolução do problema de Gordan pela aplicação do método axiomático revisitado e o emprego de demonstrações indiretas de caráter existencial, passando pela unificação das geometrias, aprimorando e criando novos resultados em lógica, e advogando a favor de sua teoria da prova. E neste fazer, as refutações de Poincaré e Brower, os adendos logicistas e intuicionistas, e o susto proporcionado por Gödel serviram de combustível para um constante construir, refutar e aprimorar.



Voltemos ao projeto hilbertiano: formalizar todo o raciocínio matemático.

A proposta nem tão original assim, fazia sentido. Os gregos já consideravam a racionalidade como supremo objetivo! Aristóteles caminha nesta direção com seus padrões estabelecidos para o raciocínio. Desde então, a lógica se expandiu com De Morgan, Leibnitz e Boole. E ainda Cantor, que desenvolveu sua teoria dos conjuntos para os infinitos, tornando ainda mais perceptivo o contexto abstrato em que se inseriam então as teorias matemáticas. Russell e Peano levaram a matemática então para um patamar ainda mais alto de formalização.

Mas seria preciso lidar com os imprevistos e Hilbert se propôs a zerar a dívida com o seu método de trabalho preferido, a axiomática, além de preocupações com consistência por meios

---

<sup>298</sup> A Lógica do Descobrimento Matemático. Provas e Refutações.



finitistas, completude e decidibilidade.

Assim foi aberta a temporada de discussões! Durante a década de vinte, grupos distintos se formaram em favor ou contra as ideias de Hilbert, com novas propostas e refutações. Ele reage contra as críticas, se apropria da lógica e a transforma; funda a metamatemática como possibilidade concreta.

O ponto chave deste programa era a questão que a prova da consistência seria obtida por meios finitistas. [...] Hilbert e Paul Bernays abordaram estes dois temas em dois níveis: primeiro, um nível de discurso matemático cujos teoremas são demonstráveis por métodos construtivos que não requerem intervenções com argumentos que estão baseados nos infinitos cantorianos. O segundo nível é aquele que se obtém quando tomamos por base uma outra teoria que possui “elementos ideais” como a geometria projetiva que possui *pontos ideais no infinito* ou como a Teoria dos Números de Kummer que agregou os *números ideais* para demonstrar seus teoremas de fatoração única. Acreditamos que Hilbert tenha se apropriado da existência destes elementos ideais na aritmética para poder estabelecer de uma maneira mais completa o que chamamos em nosso texto de *solidariedade lógica*. Para Hilbert não foi relevante perguntar sobre as origens, a existência e ou o significado de um “elemento ideal”, assim como não houve necessidade de fazer os mesmos questionamentos na geometria projetiva ou na Teoria de Kummer. Isto quis mostrar que estas teorias existem e são consistentes, independentes das respostas dadas a perguntas do tipo: De onde veio? Existem realmente? O que são elementos ideais? Pensamos que se no porvir encontrarmos respostas bem fundamentadas aos questionamentos acerca da necessidade de criação de elementos ideais em qualquer teoria matemática, uma grande contribuição será dada às pesquisas que envolvem as bases epistemológicas da Teoria da Demonstração e para a elucidação de pesquisas que envolvem o pensamento lógico dedutivo humano que se encontra fundamentado na lógica aristotélica tradicional. Usando somente os métodos finitistas aceitáveis (e inquestionáveis), as demonstrações construídas a partir da “teoria estendida” com a introdução dos elementos ideais, contribuiriam para a composição de uma teoria independente, sem perder a consistência ou criar contradições internas. Com esta finalidade pura e simples, afirmamos sem dúvida que Hilbert “enxergou” a aritmética dos elementos ideais como um sistema de signos, sem significados, sobre os quais podemos operar por meio de regras puramente formais, previamente definidas. A intenção de provar a consistência da aritmética por meios puramente finitistas aliados à existência dos “elementos ideais” é conhecida na História da Matemática como o *Programa Formalista de Hilbert*.<sup>299</sup>

Todas essas discussões levaram ao florescimento de sistemas axiomáticos diversos como os de Zermelo e Fraenkel, Gödel, Bernays e Neumann, além da tentativa de formalização de Russell e Whitehead por meio da teoria dos tipos.

Mas apesar de tudo, o projeto não se realiza plenamente. Gödel e Turing nos mostraram que formalizar a matemática e alcançar a verdade absoluta não é possível. Mas, e daí?

De fato, os matemáticos continuaram com seu trabalho e os resultados de Gödel e Turing tiveram pouco impacto na forma como os matemáticos trabalham. O único e mais perceptível

<sup>299</sup> MARTINS, 2011, op. cit., p. 210.

efeito talvez tenha sido a observação de um maior cuidado na precisão da linguagem e escrita de suas provas.

Mas, e tudo tem um “mas”, o que restou disso tudo para nós, simples mortais?

Nas palavras de CHAITIN<sup>300</sup>, que aqui reproduzimos:

So I'd like to explain the philosophical history of the computer. In a way what happened, and I'll tell you more, is that Hilbert said we should formalize all of mathematics, mathematical reasoning. And this failed: it took Gödel and Turing to show that it couldn't be done. It failed in that precise technical sense. **But in fact it succeeded magnificently**, not formalization of reasoning, but formalization of algorithms has been the great technological success of our time - computer programming languages!

So if you look back at the history of the beginning of this century you'll see papers by logicians studying the foundations of mathematics in which they had programming languages. Now you look back and you say this is clearly a programming language! If you look at Turing's paper of course there's a machine language. If you look at papers by Alonzo Church you see the lambda calculus, which is a functional programming language. If you look at Gödel's original paper you see what to me looks like LISP, it's very close to LISP, the paper begs to be rewritten in LISP!<sup>301</sup>

So I'd like to give you this hidden philosophical history of computer technology which is how philosophically minded mathematicians set out to solve once and for all the foundational problems of mathematics and did not succeed but helped to create computer technology as a by product. **This was the failure of this project! We're all benefiting from the glorious failure of this project!**

[...] Take formalism to the absolute limit and invent a completely artificial language with completely precise rules of the game --- artificial grammar and everything --- and eliminate all these problems, like the problems that Russell had. This was an ambitious program to once and for all put mathematics on a firm footing.

And one thing that Hilbert emphasized, which was as far as I know a key contribution that he himself made, was that he wanted the rules of the game for this formal axiomatic system for all of mathematics to be so precise that you have a mechanical proof checker. So it's completely certain and objective and mechanical whether a proof obeys the rules or not. There should be no human element, there should be no subjective element, there should be no question of interpretation. If somebody claims they have a proof, it should be absolutely clear, mechanical, to check it and see, does it obey the rules and you proved a theorem or does it have a mistake, does it fail. So this is the idea that mathematics should be absolutely black or white, precise, absolute truth. This is the traditional notion of mathematics. (grifos nossos!)<sup>302</sup>

---

<sup>300</sup> Mathematics Controversy — A Century of Controversy Over the foundations of Mathematics.  
Disponível em: <<http://vedicsciences.net/articles/mathematics-controversy.html>> Acesso em 03/2018.

<sup>301</sup> **LISP** é uma família de linguagens de programação concebida por John McCarthy em 1958. Num célebre artigo, ele mostra que é possível usar exclusivamente funções matemáticas como estruturas de dados elementares. A linguagem LISP foi projetada primariamente para o processamento de dados simbólicos; uma linguagem formal matemática. Durante os anos de 1970 e 1980, se tornou a principal linguagem da comunidade de inteligência artificial. O seu nome vem de **LISt Processing** (a lista é a estrutura de dados fundamental desta linguagem). Tanto os dados como o programa são representados como listas.

<sup>302</sup> Então, eu gostaria de apresentar a história filosófica do computador. Da forma como aconteceu, e vou lhe contar mais, é que Hilbert disse que deveríamos formalizar toda a matemática, o raciocínio matemático. E isso falhou: Coube a Gödel e Turing mostrarem que isso não poderia ser feito. Falhou nesse preciso sentido técnico. **Mas, na verdade, isso foi conseguido magnificamente**, não a formalização do raciocínio, mas a formalização de algoritmos tem sido o grande sucesso tecnológico do nosso tempo - as linguagens de programação de computadores! Então, se você olhar para a história do início deste século, verá artigos de lógicos estudando os

É isso: algoritmos, linguagens formais, computação!

Para os formalistas, o raciocínio matemático conduzido num sistema formal passa pela manipulação de cadeias de símbolos. “Manipular símbolos é o que os computadores fazem”:

The theory of computation became an independent academic discipline and was separated from mathematics. It is one of the disciplines of CS. Computability theory is closely related to recursion theory. Recursion theory is not restricted to consider models of computation that are reducible to the Turing model. For formalists mathematical reasoning as captured in a formal system means manipulating strings of symbols. Manipulating symbols is what computers do. Thus the formalists approach encourages projects of systematic encoding in computer-readable format of mathematical knowledge so as to facilitate automated proof checking of mathematical proofs and the use of interactive theorem proving in the development of mathematical theories and computer software. Moreover, if human knowledge could be expressed in a formal language, it would be possible – as some researchers predicted in the 1950s and 1960s – an artificial intelligence, a machine that “thinks”. Today AI is a flourishing branch of CS. Logic, mathematics, and CS are strongly related to each other. They are the only genuine formal sciences in the sense that they can be carried out purely formally. Programs are of course nothing more than rather large and very complicated formal objects. The consequences of Hilbert’s program, unexpected by himself, are summarized by Chaitin (2004): As I said, formal systems did not succeed for reasoning, but they succeeded wonderfully for computation. **So Hilbert is the most incredible success in the world, but as technology, not as epistemology.**

[...] Hilbert’s idea of going to the limit, of complete formalization, which was for epistemological reasons, this was a philosophical controversy about the foundations of mathematics – are there foundations? And in a way this project failed, as I’ve explained, because of the work of Gödel and Turing. But here we are with these complete formalizations which are computer programming languages, they’re everywhere!<sup>303</sup>

---

fundamentos da matemática nos quais eles utilizam linguagens de programação. Agora você olha para trás e diz que eram claramente linguagens de programação! Se você olhar para o artigo de Turing, é claro que há uma linguagem de máquina. Se você olhar os artigos de Alonzo Church, verá o cálculo lambda, que é uma linguagem de programação funcional. Se você olhar para o artigo original de Gödel, verá o que para mim se parece com o LISP, é muito próximo do LISP, o artigo implora para ser reescrito no LISP! Então, gostaria de lhes dar esta história filosófica oculta da tecnologia de computadores, que é como os matemáticos com mentalidade filosófica se propuseram a resolver de uma vez por todas os problemas fundamentais da matemática e não conseguiram, mas ajudaram a criar a tecnologia computacional como subproduto. **Este foi o fracasso deste projeto! Estamos todos nos beneficiando do glorioso fracasso deste projeto!** [...] Leve o formalismo ao limite absoluto e invente uma linguagem completamente artificial com regras completamente precisas de jogo - gramática artificial e tudo - e elimine todos esses problemas, como os problemas que Russell tinha. Este foi um programa ambicioso para uma vez por todas colocar a matemática firmemente de pé. E uma coisa que Hilbert enfatizou, que foi até onde eu sei uma contribuição chave que ele mesmo fez, foi que ele queria que as regras do jogo para este sistema axiomático formal para toda a matemática fossem tão precisas que você tem uma prova mecânica. verificadora. Portanto, é completamente certo, objetivo e mecânico, se uma prova obedece às regras ou não. Não deve haver elemento humano, não deve haver elemento subjetivo, não deve haver questão de interpretação. Se alguém afirma que tem uma prova, deve ser absolutamente claro, mecânico, verificar e ver, obedecer às regras e você provou um teorema ou tem um erro, falha. Portanto, esta é a ideia de que a matemática deve ser absolutamente absoluta, absoluta ou negra, branca ou precisa. Esta é a noção tradicional de matemática. (tradução nossa)

<sup>303</sup> Ibidem

A teoria da computação tornou-se uma disciplina acadêmica independente e foi separada da matemática. É uma das disciplinas da CC (*Ciência da Computação*). A teoria da computabilidade está intimamente relacionada à teoria da recursão e esta não se limita a considerar modelos de computação que são redutíveis ao modelo de Turing. Para os formalistas, o raciocínio matemático, conforme capturado em um sistema formal, significa manipular cadeias de símbolos. Manipular símbolos é o que os computadores fazem. Assim, a abordagem formalista encoraja projetos de codificação sistemática em formato legível por computador de conhecimento matemático, de modo a



Assim, voltando ao início, embora o projeto formalista de Hilbert não tenha sido plenamente realizado, os subprodutos que nos deixou formam uma significativa lista. Sua herança proveniente das investigações acerca dos fundamentos permanece viva em pelo menos três tópicos:

- A teoria da prova - Hilbert introduziu a noção de prova como objeto matemático; com os resultados de Gödel e Gentzen (demonstrações de consistência com meios transfinitos) o programa de Hilbert sobreviveu numa forma revista;
- A Teoria de Computabilidade - Hilbert foi o primeiro que levantou a questão de computabilidade (funções recursivas), mais tarde tema investigado por Church e Turing (teoremas de indecibilidade);
- Sistemas de axiomas - Hilbert revolucionou e reinventou o método axiomático na matemática. Pesquisadores matemáticos (antes e depois dos sucessos e insucessos nos fundamentos nas primeiras três décadas do séc. XX) aderiram firmemente aos métodos axiomáticos, levando as ideias de Hilbert aos seus limites. Por fim, Hilbert levou à identificação verdade / consistência em matemática.

A genialidade e brilhantismo de Hilbert e seus colaboradores nas pesquisas acerca dos fundamentos da matemática não pode e nem deve ser diminuída - o conjunto de realizações é um dos maiores destaques intelectuais do século XX.

---

facilitar a verificação automatizada de provas matemáticas e o uso de teoremas interativos no desenvolvimento de teorias matemáticas e softwares de computador. Além disso, se o conhecimento humano pudesse ser expresso em uma linguagem formal, seria possível - como alguns pesquisadores previram nas décadas de 1950 e 1960 - uma inteligência artificial, uma máquina que “pensa”. Hoje a IA é um ramo florescente da CC. Lógica, matemática e CC estão fortemente relacionadas entre si. São as únicas genuínas ciências formais, no sentido de podem ser desenvolvidas de maneira puramente formal. Os programas são, é claro, nada mais do que objetos formais muito grandes e muito complicados. As consequências do programa de Hilbert, inesperadas por ele mesmo, são resumidas por Chaitin (2004): Como eu disse, os sistemas formais não foram bem-sucedidos no raciocínio, mas foram bem sucedidos para computação. Então, **Hilbert é o sucesso mais incrível do mundo, mas como tecnologia, não como epistemologia.** [...] A ideia de Hilbert de ir ao limite, de completa formalização, por razões epistemológicas, foi uma controvérsia filosófica sobre os fundamentos da matemática - existem fundamentações? E, de certa forma, este projeto falhou, como já expliquei, por causa do trabalho de Gödel e Turing. Mas aqui estamos com essas formalizações completas, que são linguagens de programação de computadores, elas estão em todo lugar! (tradução nossa)

## A HISTÓRIA DOS FUNDAMENTOS E SEU COMPONENTE TRÁGICO



Da leitura de nosso texto surge naturalmente uma questão de formato e apresentação: por que identificar um relato de natureza acadêmica, um texto que deveria em tese ser formal, seguidor de inúmeras regras, com o desenvolver de uma ópera?

A resposta não é simples, já que se trata de uma identificação pessoal que passa pela forma como se estabelecem rituais de estudo e pesquisa, no nosso caso, ouvindo música clássica, em particular, óperas.

Mas acreditamos existir um outro componente sutil, que não se encontra explícito na narrativa, mas que se percebe ao percorrer esta história por meio das referências a que se tem acesso; um componente até certo ponto trágico, que acompanhou muitas vidas ao longo da história da matemática, em particular, a história dos fundamentos. Este componente combina perfeitamente com a definição de ópera como uma composição musical dramática. Senão, vejamos:

Tudo se passa no pior tempo do mundo: tempo de guerras!

A partir de 1933, Hilbert vivenciou o fim da dinastia matemática da Universidade de Göttingen, Hitler assumiu o poder na Alemanha, tendo então os nazistas afastado a maior parte dos membros da faculdade.

Cerca de um ano após este desastre, Hilbert frequentou um banquete e sentou-se ao lado do novo ministro da educação nazista, que lhe indagou: "É mesmo verdade, professor, que o seu instituto sofreu muito com a partida dos judeus e dos seus amigos?" Hilbert respondeu, "Sofreu? Não, Herr Minister, não sofreu. Ele simplesmente deixou de existir." Quando Hilbert faleceu em 1943, os nazistas tinham praticamente acabado com a universidade, uma vez que muitos de seus membros eram judeus, ou casados com judeus.

Por outro lado, seu funeral foi presenciado por menos de uma dúzia de pessoas, das quais apenas duas eram colegas da universidade. Sonhos cheios de imponência e arrogância são desfeitos de forma silenciosa. A história dos fundamentos muitas vezes não lhe fez justiça pois é mais fácil lembrar da derrota do que dos feitos.

E ainda, citemos, por exemplo, Cantor, que definhou mentalmente por conta de suas crenças no infinito, hostilizado pela maioria de seus contemporâneos, em particular Kronecker, que de tudo fez para destruí-lo. Durante a última metade da sua vida sofreu repetidamente de ataques de depressão, o que comprometeu a sua capacidade de trabalho e o forçou a ficar hospitalizado várias vezes. A descoberta do Paradoxo de Russell conduziu-o a um esgotamento nervoso do qual não chegou a se recuperar. Começou, então, a se interessar por literatura e religião. Desenvolveu o seu conceito de Infinito Absoluto, que identificava a Deus. Ficou na penúria durante a Primeira Guerra Mundial, morrendo num hospital psiquiátrico em Halle; Ackermann, cuja escolha pela vida familiar tem como consequência a hostilidade e desaprovação de Hilbert, relegado à escola secundária como forma de ganhar a vida.

E Gentzen morto em 1945, após a Segunda Guerra Mundial por inanição, três meses depois de ter sido preso em Praga; Blumenthal, morto em 1942 no campo de concentração de *Theresienstadt* sofrendo de pneumonia, disenteria e tuberculose; Herbrand que, no início de 1931, aos 21 anos, escalando os Alpes franceses com dois amigos, cai nas montanhas de granito do Massif des Écrins e perde a vida; Hadamard, que perdeu dois filhos na Batalha de Verdun na 1ª guerra e mais um, o último, na 2ª guerra; Cavaillès, membro da resistência francesa, preso pela Gestapo em 1943, torturado e morto; Gödel, nosso gênio em desequilíbrio, que termina seus dias se recusando a comer; o próprio Hilbert, cujo único filho Franz portava o germe de uma doença mental e por muitos anos não esteve no convívio familiar; e outros, como Von Neumann e Courant, obrigados a abandonar seu próprio país, de fato, muitos do nosso elenco de coadjuvantes do início do século passado tiveram o mesmo destino. Alguns estão homenageados por suas lápides em Göttingen. Outros se reduziram às cinzas do esquecimento por conta de raça e credo.



E quanto às nossas máscaras? Foram apenas componentes alegóricos que nos permitimos utilizar para de certa forma dar voz a tantos personagens anônimos. Todas são lindas mas algumas tem um componente visual um tanto quanto aterrador, a beleza do trágico.

Por essas e outras, se seguiu a identificação.

Estranho?

Sim.

Mas o que não é estranho na natureza humana?

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS



PATROCINADORES

## I – DAVID HILBERT

[1898/1899] *Grundlagen der Euklidischen Geometrie*. In: M. Hallet e U. Majer (eds). **David Hilbert's Lectures on the Foundations of Mathematics and Physics 1915 – 1927 v. 1**. New York: Springer, 2004, 302-395.

[1899] *Die Grundlagen der Geometrie*. 1968. Berlin: Vieweg e Teubner Verlag, 1968.

[1900a] *Mathematische Probleme*. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse, Göttingen, p. 253–297. (Conferência proferida no Congresso Internacional de Matemáticos, Paris, 1900. Tradução para o inglês em GRAY, 2000, p. 240 - 296)

[1900a] *Über den Zahlbegriff. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker – Vereinigung*, Berlin, n. 8, p. 180–84. (Tradução para o inglês em EWALD, 2007, p. 1089 – 1095)

[1905a] On the foundations of logic and arithmetic. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). **From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931**. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1904]. p. 129-38.

[1905b] *Logische Principien des mathematischen Denkens*. (Curso do verão de 1905) Notas de Ernst Hellinger. Manuscrito não publicado. Biblioteca do Instituto de Matemática de Göttingen. 277 p.

[1908] **Prinzipien der Mathematik**. (Curso do verão de 1908) Manuscrito não publicado. Biblioteca do Instituto de Matemática de Göttingen,

[1910] *Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik*. (Curso do verão de 1910) Notas de Richard Courant. Manuscrito não publicado. Biblioteca do Instituto de Matemática de Göttingen, 163 p.

[1917] *Mengenlehre*. (Curso do verão de 1917) Notas de Margarethe Goeb. Biblioteca do Instituto de Matemática de Göttingen.

[1917/1918] *Prinzipien der Mathematik*. (Curso de inverno – 1917/1918). Notas de Paul Bernays. Manuscrito não publicado. Biblioteca do Instituto de Matemática de Göttingen.

[1918] *Axiomatisches Denken. Mathematische Annalen*, v. 78, p. 405 – 415. (Tradução para o inglês, Axiomatic Thinking, em *Philosophia Mathematica*, Oxford, v. s1-7, Issue 1-2, p. 1 – 12, 1970)

[1920a] *Logik-Kalkül*. (Vorlesung, (Curso de inverno) Notas de Paul Bernays. Manuscrito não publicado. Biblioteca do Instituto de Matemática de Göttingen.

[1920b] *Probleme der mathematischen Logik*. (Curso de verão) Notas de Paul Bernays. Manuscrito não publicado. Biblioteca do Instituto de Matemática de Göttingen.

[1921/1922] *Grundlagen der Mathematik*. (Curso do verão 1921) Notas de Paul Bernays. Texto não publicado. Biblioteca do Instituto de Matemática de Göttingen.

[1923] *Die logischen Grundlagen der Mathematik*. *Mathematische Annalen*, Berlin, v. 88, p. 151-165, 1923. (Tradução para o inglês em EWALD, 2007, p. 1134 – 1148)

[1925] *Über das Unendliche*. *Mathematische Annalen*, v. 95, p. 161–90. (Tradução para o português em CARNIELLI, W, ; EPSTEIN, R., 2009, p.75 – 91)

[1927] *Die Grundlagen der Mathematik. Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität* 6, p. 65-85, 1927. (Tradução para o inglês em VAN HEIJENOORT, 1967, p. 464-479)

[1928] *Probleme der Grundlegung der Mathematik*. In: Nicola Zanichelli (ed). *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Bolonha, p. 135 – 141, 1928.

[1930] *Naturerkennen und Logik*. *Die Naturwissenschaften*, n. 18, p. 378 – 387, 1930. (Tradução para o inglês em EWALD, 2007, p. 1157 – 1165)

[1931a] *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre*. *Mathematische Annalen*, v. 104, p. 485– 94, 1931. (Tradução para o inglês em EWALD, 2007, p. 1148 - 1157)

[1931b] **Beweis der tertium non datur**. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goöttingen, Math.-Phys. Klasse, Göttingen, p. 120 - 125.

[2012] **David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1894-1917**. Berlin: Ewald, W., Hallett, M., Majeur, U. e Sieg, W. (eds). Springer Verlag, 2012, 690 p.

[2013] **David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917 -1933**. Berlin: Ewald, W., Sieg, W. (eds). Springer Verlag, 2013, 1062 p.

## II – DAVID HILBERT E WILHELM ACKERMANN

[1928] *Grundzüge der theoretischen Logik*. **Grundlehren der mathematischen Wissenschaften**, Springer Verlag, Berlin, 1959.



### III – DAVID HILBERT E PAUL BEARNAYS

[1934] **Grundlagen der Mathematik**. v. I. 2 ed. Berlin: Springer, 1968.

[1939] **Grundlagen der Mathematik**. v. II. 2 ed. Berlin: Springer, 1970.

[2001] **Fondéments des Mathématiques 1**. Tradução do alemão de François Gaillard, Eugène Guillaume e Marcel Guillaume. Paris: l'Harmattan, 2001. Versão em língua francesa do original *Grundlagen der Mathematik I*, 2 ed., 1968.

[2001] **Fondéments des Mathématiques 2**. Tradução do alemão de François Gaillard, Eugène Guillaume e Marcel Guillaume. Paris: l'Harmattan, 2001. Versão em língua francesa do original *Grundlagen der Mathematik II*, 2 ed., 1970.

### IV – PAUL BEARNAYS

[1983] **On Platonism in mathematics**. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1934], p. 258-271.

[1998] P. Hilbert's Significance for the Philosophy of Mathematics. In: Mancosu, P. (ed.). **From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s**. Oxford University Press, 1998, p. 189-197. Disponível em:  
<<https://pdfs.semanticscholar.org/0f8a/9a5a272bcdf3ad982a7292890cb718232674.pdf>>  
Acesso em 10/2016.

### V – DEMAIS REFERÊNCIAS

AGAZZI, E. La logique et le probleme de la rigueur. In: Vuillemin, J. (Org.). *Mérites et limites des methodes logiques en philosophie*. Paris: Fondation Singer-Polignac/Librairie Philosophique J. Vrin, 1986. p.17 - 47.

ALCARAZ, C. T. **La matematica, require fundamentos?** Universidade Autónoma Metropolitana, *Iztapalapa*. v. 24, n. 54, p. 167 – 181.

ALMIRA, J. M.; LIS J.C.Sabina. **Hilbert: Matemático fundamental**. Tres cantos, Madrid: nivola libros ediciones, 2007/2008. (La matemática em sus personajes 31)

AVIGARD, J.; RECK E. **Clarifying the Nature of the Infinite: The Development of Metamathematics and Proof Theory**. Carnegie Mellon Technical Report CMU-PHIL-120. Nov. 2001. Disponível em: < <http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/Papers/infinite.pdf>>. Acesso em: 10/2016.

BARKER, Stephen F. **Filosofia da Matemática**. Tradução do inglês de Leônidas Hegenberg e Octanny S. da Mota. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976. Versão em português do original *Foundatios of Philosophy*.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GRACIA, S. C. **Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

BAROT, E. En quoi la crise des fondements des mathématiques est-elle terminée? *Philosophia Scientiae*. Paris: Kimé, 2005, v.9, p. 23-39.

BICUDO, I. A Hipótese do *Continuum* ou o primeiro problema de Hilbert. **Revista Brasileira de História da Matemática**, vol. 3, n. 5, p. 15 - 26, 2003. Disponível em: <[http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20%20vol.3,%20no5,%20abril%20\(2003\)/Problema%201%20-%20Irineu.pdf](http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20%20vol.3,%20no5,%20abril%20(2003)/Problema%201%20-%20Irineu.pdf)> Acesso em 03/2018.

BISPO, D. C. **Dos fundamentos da matemática ao surgimento da teoria da computação por Alan Turing**. 2013. 89 fls. Dissertação. (Mestrado em História da Ciência) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

BLANCK, R. Some remarks on the Reverse mathematics as a partial realization of Hilbert's Program. *Acta Universitatis Gothoburgensis*. 2009. Disponível em: <[https://flov.gu.se/digitalAssets/1302/1302700\\_someremarks-blanck.pdf](https://flov.gu.se/digitalAssets/1302/1302700_someremarks-blanck.pdf)> Acesso em: 01/2018.

BOMBAL, F. David Hilbert: La búsqueda de la certidumbre. **Revista da Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**, Madrid, 2013, p. 123 – 145.

BROUWER, L. Consciousness, philosophy and mathematics. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1948], p. 90-6.

\_\_\_\_\_ Formalism and intuitionism. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1912]. p. 77-89.

\_\_\_\_\_ On the significance of the principle of excluded middle in mathematics, especially in function theory. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1923]. p. 334- 45.

CAFEZEIRO, I. et al. Crises e Incompletudes, Multi-histórias Matemáticas. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 11, p.162-177, 2016.

\_\_\_\_\_ ; MARQUES, I. da C. Da corte suprema, a Matemática, à Matemática nos tribunais. **Livro de anais do Scientiarum Historia IV**. Rio de Janeiro, p. 369 – 376.

CANTOR, G. **Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers**. New York: Dover Publications, 1915.

CARNIELLI, W.; EPSTEIN, R. **Computabilidade, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática**. 2 ed. revista. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

CASANAVE. A. L. **Dos fundamentos à filosofia da Aritmética: uma interpretação do Programa de Hilbert**. 1995. 184 fls. Tese (doutorado em Filosofia) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas –SP, 1995. Disponível em: <<http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/280205>> Acesso em: 12/2017.

CASSOUS- NOGUÈS, P. **Gödel**. Paris: Les Belles Lettres, 2008. (Figures du Savoir 34)

\_\_\_\_\_ **Hilbert**. Paris: Les Belles Lettres, 2004. (Figures du Savoir 29)

CAVAILLÈS, J. **Philosophie mathématique**. Paris: Hermann, 1962.

CHAITIN, G. Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas. **Investigación y Ciencia**, p. 28-35, julho/2003.

CHATEAUBRIAND, O. **Logical forms – part I – truth and description**. Campinas: Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2001.

\_\_\_\_\_ **Logical forms – part II – logic, language and knowledge**. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2005.

CHERUBINI, E. La noción del continuo matemático de Hermann Weyl conciliando formalismo e intuicionismo. **Síntesis**, Córdoba, n. 4, 2013, p.1-21.

CHURCH, A. **Introduction to Mathematical Logic**. New York: Princeton University Press, 1956.

CONSUEGRA, F.A.R. Frege, Peano and Russell: On descriptions. **The Journal of Bertrand Russell Studies**, Hamilton, n. 20, p. 5-25, 2000.

CORRY, L. **David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918): From Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.

COSTA, N. da. **Ensaio sobre os fundamentos da lógica.** São Paulo: Hucitec/Edusp, 1980.

DAVIS, R.; HERSH, P. **A Experiência Matemática.** 2. ed. Tradução do inglês de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985. Versão em português do original *The Mathematical Experience*.

DEL VECCHIO JR, J. **Metafísica e Racionalidade científica: um ensaio sobre os fundamentos da matemática.** 2010. 239 fls. Tese (Doutorado de Filosofia) – Departamento de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

Disponível em:

<[www.teses.usp.br/teses/disponiveis/8/8133/tde.../2010\\_JacintoDelVecchioJunior.pdf](http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/8/8133/tde.../2010_JacintoDelVecchioJunior.pdf)>

Acesso em 12/2017.

DETLEFSEN, M. **An Essay on Mathematical Instrumentalism: Hilbert's Program.** Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986.

\_\_\_\_\_. Formalism. In: Shapiro, S. (ed.). *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic.* New York: Oxford University Press, 2005. p. 236-317.

DO CARMO, M. P. **Superfícies Mínimas.** Rio de Janeiro: Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1987.

DOSEN, K. Le Programme de Hilbert. In: Sallantin, J. e Szczeciniarz, J. (eds). *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle.* Nouvelle Encyclopédie Diderot. Paris: Presses Universitaires de France, 1999. p. 87 - 106.

Disponível em: < <http://www.mi.sanu.ac.rs/~kosta/hilbert.pdf>> Acesso em: 10/2016.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução do grego de Irineu Bicudo. Rio Claro: Ed. UNESP, 2009.

EWALD, W. **From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics.** Vol. II. Oxford: Oxford University Press, 678 p., 2007.

FEFERMAN, S. Infinity in mathematics: Is Cantor necessary? In: G. Toraldo di Francia (Ed). *L'infinito nella scienza.* Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 1987, p. 151-209.

\_\_\_\_\_. Does Mathematics need new axioms? **The American Mathematical Monthly**, v. 106, n. 2, p. 99-111, fevereiro/1991.

\_\_\_\_\_ **The development of programs for the foundations of mathematics in the first third of the 20th century. Manuscrito.** 2002. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/247836461\\_The\\_development\\_of\\_programs\\_for\\_the\\_foundations\\_of\\_mathematics\\_in\\_the\\_first\\_third\\_of\\_the\\_20th\\_century](https://www.researchgate.net/publication/247836461_The_development_of_programs_for_the_foundations_of_mathematics_in_the_first_third_of_the_20th_century)> Acesso em: 05/2016.

FERREIRA, F. No paraíso, sem convicção: uma explicação do programa de Hilbert. In: Coelho, Furtado (org). **Matemática e Cultura II.** Lisboa: Centro Nacional de Cultura e SPB Editores, 1995.

FERREIRA JR, W.C. O sexto problema de Hilbert: quando o fim se tornou o método. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v 3, n. 5, p. 63 – 72, 2003. Disponível em: <[http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20%20vol.3,%20no5,%20abril%20\(2003\)/Problema%206%20-%20Wilson%20-%20revisado.pdf](http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20%20vol.3,%20no5,%20abril%20(2003)/Problema%206%20-%20Wilson%20-%20revisado.pdf)> Acesso em 02/2018.

FERREIRÓS, J. Hilbert, logicism, and mathematical existence. *Synthese*, v. 170, p. 33-70, 2009.

\_\_\_\_\_ On the relations between George Cantor and Richard Dedekind. *Historia Mathematica*, v. 20, p. 343 – 363, 1993.

\_\_\_\_\_ The crisis in the foundations of Mathematics. In: T. Gowers (ed. colaboração com J. Barrow-Hilbert. **Princeton Company to Mathematics**, Princeton University Press, 2007, p. 142 – 156. Disponível em: <<https://personal.us.es/josef/pcmCrisis.pdf>> Acesso em 02/2018.

FRANKS, C. **The Autonomy of Mathematical Knowledge: Hilbert's Program Revisited.** New York: Cambridge University Press, 2009.

\_\_\_\_\_ David Hilbert's contributions to logical theory. In: **The History of Philosophical and Formal Logic.** Bloomsbury: A. P. Malpass and M. Antonutti-Marfori (eds.), 2017. Disponível em: <<https://www3.nd.edu/~cfranks/HilbertLogic.pdf>> Acesso em 12/2017.

FREDHOLM, E. I. Sur une classe d'equations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, n. 27, p. 365–390, 1903.

FREGE, G. **The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number.** Tradução do alemão de J. L. Austin. Oxford: Basil Blackwell, 1950. Versão inglesa do original *Die Grundlagen der Arithmetik*.

FRÉSAN, J. **Gödel: La lógica de los escépticos.** Tres cantos, Madrid: nivola libros ediciones, 2007/2008. (La matemática em sus personajes 30)

FREUDENTHAL, Hans. (1973). David Hilbert. In: Charles Coulston Gillispie et al. (eds.). **Dictionary of Scientific Biography**. New York: Scribner, 1976, v. 6, p. 388–95.

GALLOWAY, D. W. **Finitism: An essay on Hilbert's Programme**. 1991. 219 fls. Tese (Doutorado em Filosofia) – Departamento de Lingüística e Filosofia, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 1991. Disponível em: <<https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/13939>> Acesso em 05/2016.

GIAQUINTO, M. Hilbert's Philosophy of Mathematics. **The British Journal for the Philosophy of Science**, v. 34, n. 2. Oxford University Press, 2014.  
Disponível em: <[https://www.jstor.org/stable/pdf/687445.pdf?seq=1#page\\_scan\\_tab\\_contents](https://www.jstor.org/stable/pdf/687445.pdf?seq=1#page_scan_tab_contents)>  
Acesso em: 12/2017.

GIAROLO, K. A. A Crítica de Frege à Concepção Kantiana de Sinteticidade da Aritmética. **Existência e Arte - Revista Eletrônica do Grupo PET**, São João Del Rei, n. VII, 2012.

GIRARD, J. -Y. Du pourquoi au comment: la théorie de la démonstration de 1950 a nos jours. In: J.-P. Pier (eds). **Developments of Mathematics 1950 – 2000**. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000, p. 515 – 546.

GÖDEL, K. On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I. (1931) In: S.G. Shanker (ed). **Gödel's Theorem in focus**. Londres: Routledge, 1988, p. 17–47.

\_\_\_\_\_ *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls Monatshefte für Mathematik und Physik* In: S. Feferman et al. (eds), Oxford University Press. **K. Gödel, Collected Works, v. I**. New York: 1986, pp. 102 – 123.

GOLDSTEIN, Rebecca. **Incompleteness: A prova e o paradoxo de Kurt Gödel**. Tradução do inglês de Ivo Korytowski. São Paulo: Companhia das Letras, 2008. Versão em português do original *Incompleteness – The proof and the paradox of Kurt Gödel*. (Coleção Grandes Descobertas)

GRAY, J. J. **Le défi de Hilbert: um siècle de Mathématiques**. Tradução do inglês de Christos Grammatikas. Paris: Dunod, 2004. Versão francesa do original *The Hilbert's challenge*.

GRAY, Jeremy J. **The Hilbert Challenge**. New York: Oxford, University Press, 2000.

HAIRER, E.; WANNER, G. **Analysis by its history**. Dordrecht: Springer, 2008.

HEYTING, A. Disputation. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). **Philosophy of mathematics – selected readings**. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1956]. p. 66-76.

\_\_\_\_\_ The intuitionist foundations of mathematics. In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1931], p. 52-60.

HINTIKKA, J. Hilbert Vindicated ? In: **Language, Truth and Logic in Mathematics**. Jaakko Hintikka Selected Papers, Vol 3. Dordrecht: Springer, p. 84 – 105, 1997.

HOFSTADTER, Douglas R. **Gödel, Escher, Bach: um entrelaçamento de gênios brilhantes**. Tradução do inglês de José Viegas Filho. Brasília: Ed. da Universidade de Brasília (UnB), 2001. Versão em português do original *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid*.

JEANRENAUD, M. L. R. A.; MARTINS, D.F.N Sobre a noção de número em Hilbert: uma questão filosófica ou epistemológica? **Caderno de resumos do Scientiarum Historia V**. Rio de Janeiro, p. 259- 265, 2012.

\_\_\_\_\_ ; KUBRUSLY, R. S. A questão do infinito em Hilbert. **Caderno de resumos do 13º Seminário Nacional e História da Ciência e da Tecnologia**. São Paulo, p. 144, 2012.

KNEALE, W.; KNEALE, M. **O desenvolvimento da lógica**. 3 ed. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1991.

KNEEBONE, G. T. Review: D. Hilbert, P. Bernays, Grundlagen der Mathematic I. **Journal of Symbolic Logic**, vol. 35, n. 2, p. 321 – 323, 1970.

KRAUSE, D. **Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência**. São Paulo: EPU, 2002, 211 p.

KREISEL, G. Hilbert's programme. *Dialectica* 12, p. 346–372. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1746-8361.1958.tb01469.x>> Acesso em: 01/2018.

LAKATOS, I. **A Lógica do Descobrimto Matemático. Provas e Refutações**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LANNES, W. **A Incompletude além da Matemática: impactos culturais do Teorema de Gödel**. 2009. Tese (Doutorado em História). Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, UFMG, Belo Horizonte, 2009.

LAURIA, P. **Cantor et le transfini mathématique et ontologie**. Paris: L'Harmattan, 2004.

LEGRIS, J. **On the epistemological justification of Hilbert's metamathematics.** *Philosophia Scientiae*. Paris: Kimé, 2005, v. 9, cad 2, p. 225 – 238, 2005. Disponível em: <[http://www.numdam.org/article/PHSC\\_2005\\_\\_9\\_2\\_225\\_0.pdf](http://www.numdam.org/article/PHSC_2005__9_2_225_0.pdf)>. Acesso em 05/2017.

LOLLI, G. **Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento.** Milano: Cortina Raffaello, 2016, 184 p.

LOURENÇO, Manuel S. **Os elementos do Programa de Hilbert.** Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa, 2004.

MANCOSU, Paolo. Hilbert and Bernays on metamathematics. In: Paolo Mancosu (Ed.). **From Brouwer to Hilbert – The debate on the foundations of mathematics.** (pp. 149–188). Oxford: Oxford University Press, 1998b, p. 149 – 188.

\_\_\_\_\_. Between Russell and Hilbert: Behmann on the Foundations of Mathematics. **The Bulletin of Symbolic Logic**, local, v. 5, n. 3, p. 303-330, set. 1999.

MARTINS, Daniel F. N. **David Hilbert e suas produções acadêmicas: o Grundlagen der Geometrie como exemplo de solidariedade lógica entre a aritmética e a geometria.** 2011. 242 fls. Tese (Doutorado em Histórias das Ciências, das Técnicas e Epistemologia) – HCTE – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

MARTINS, GILLI. **Sobre revoluções científicas na matemática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em: <[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos\\_teses/MATEMATICA/Tese\\_Gilli.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Tese_Gilli.pdf)> Acesso em: 04/2015.

MOORE, G. Hilbert on the infinite: the role of set theory in the Evolution of Hilbert's thought. **Historia Mathematica**, n. 29, p. 40-64, 2002. Disponível em: <<https://core.ac.uk/download/pdf/82788374.pdf>> Acesso em: 03/2017.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. **A prova de Gödel.** São Paulo: Perspectiva, 1973.

OGAWA, Y. **The pursuit of rigor: David Hilbert's early Philosophy of Mathematics.** 2001. 207 fls. Tese. (Doutorado em Filosofia) - Departamento de Filosofia, University of British Columbia, British Columbia, 2001.

OLIVEIRA, A. J. F. Formalismo hilbertiano x pensamento intuitivo. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Lisboa, n. 25, p. 1- 25, 2004. Disponível em: <<http://caul.fc.ul.pt/abstracts/FormHilbPensIntuitbook.pdf>> Acesso em: 04/2017.



OOSTERWIJK, A. **Hilbert's Programme and Gödel's Theorems**. TCC. (Bacharelado em Ciências). 2013. 69 fls. Utrecht University, Utrecht, 2013.

PATY, M. Des fondements vers l'avant. Sur la rationalité des mathématiques et des sciences formalisées. In: *Philosophia Scientiae*. Paris : Kimé, 2005, v. 9, p. 109-30.

PECKHAUS, V. The pragmatism of Hilbert's program. *Synthese*, v.137, p. 141 – 156, 2003.

POINCARÉ, H. La logique de l'infini (1). In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1909.3], p.235 - 56.

\_\_\_\_\_ **Revue de métaphysique et de morale**. Paris, Flammarion, 1908, p. 22-34.

PRAWITZ, D. Remarks on Hilbert's program for the foundations of mathematics. In: G. Corsi (ed). **Bridging the gap: Philosophy, Mathematics and Physics**. Dordrecht: Kluwer, 1993, p. 87 – 98.

REID, Constance. **Hilbert**. New York: Springer – Verlag, 1996.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 2012.

ROSELLÓ, J. **From Foundations to Philosophy of Mathematics: An Historical Account of Their Development in the XX Century and Beyond**. Cambridge: Cambridge Scholars Publications, 2011.

ROWE, D. E. Klein, Hilbert, and the Göttingen mathematical tradition. *Osiris*, n. 5, p. 186-213, 1989.

\_\_\_\_\_ The Calm before the Storm: Hilbert's Early View of the Foundations. In: *Hendriks*, V. et al. (eds.), **Proof Theory: History and Philosophical Insignificance**. Dordrecht: Kluwer, 2000, p. 55-94.

RUSSELL, B. Les paradoxes de la logique. In: Heinzmann, G. (Ed.). *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris: Blanchard, 1986[1906.2]. p. 121-144.

\_\_\_\_\_ ; WHITEHEAD, A. **Principia mathematica vol 1**. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.

\_\_\_\_\_. *Principia mathematica* v. 2. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.

SABATÉ, F. M. La polémica intuicionismo – formalismo en los años 20. **Filosofia.net.** / **Caderno de materiais**, n. 23, p. 557 – 574, 2011. Disponível em: <<http://www.filosofia.net/materiales/pdf23/CDM35.pdf>> Acesso em: 03/2016.

SAUTOY, Marcus du. **A música dos números primos: A história de um problema não resolvido na matemática.** Tradução do inglês de Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 2007. Versão em português do original *The music of the primes: why an unsolved problem in mathematics matters.*

SIEG, Wilfried. **Hilbert's Programs and Beyond.** New York: Oxford University Press, 2013.

\_\_\_\_\_; Ravaglia, M. David Hilbert and Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik.* In: Grattan-Guinness (ed.). **Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940.** Elsevier, 2005, p. 981–999. Disponível em: <<http://repository.cmu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1130&context=philosophy>> Acesso em: 02/2018.

SIMPSON, S. G. 988). Partial realizations of Hilbert's Program. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 53, n. 2, p. 349–363.

SMULLYAN, Raymond M. **Lógica de Primeira Ordem.** Tradução do inglês de Andréa Loparic, René Mazak e Luciano Vicente. São Paulo: Editora UNESP, Discurso Editorial, 2002/2009. Versão em português do original *First – Order Logic.*

STENLUND, S. Different senses of finitude: An inquiry into Hilbert's finitism. *Synthese*, n. 185, p. 335 – 363, 2012.

TOEPELL, M. **Über die Entstehung von David Hilberts 'Grundlagen der Geometrie'.** Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht., 1986.

VENTURI, G. **Hilbert between the formal and the informal side of mathematics.** Manuscrito, Campinas, v. 38, n. 2, p. 5 - 38. Agosto/2015. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0100-60452015000200005](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-60452015000200005)> Acesso em: 03/2018.

VON NEUMANN, J. "The formalist foundations of mathematics". In: Benacerraf, P. & Putnam, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics – selected readings.* 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983[1931], p. 61-5.

WEYL, H. Comments on Hilbert's second lecture on the foundations of mathematics. In: Van Heijenoort, J. (Ed.). *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879- 1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967[1927]. p. 480-4.

\_\_\_\_\_ *The Continuum*. New York: Dover. (Original work published 1918)

\_\_\_\_\_ David Hilbert and his mathematical work. **Bulletin of the American Mathematical Society**, vol. 50, 1944, p. 612–654.

ZACH, R. Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the development of propositional logic. **Bulletin of Symbolic Logic**, n. 5, p. 331 – 366, 1999.

\_\_\_\_\_ **Hilbert's finitism: Historical, Philosophical and Metamathematical Perspectives**. 2001. 172 fls. Tese. (Doutorado em Filosofia) – Universidade da Califórnia – Berkeley, California, 2001. Disponível em:  
<<http://www.ucalgary.ca/rzach/papers/hilbert.html>> Acesso em: 03/2018.

\_\_\_\_\_ Hilbert's program then and now. In: Jacquette D. (eds) **Handbook of the philosophy of science**, v. 5: Philosophy of Logic. Amsterdam: Elsevier, 2006.  
Disponível em: <<http://people.ucalgary.ca/~rzach/static/hptn.pdf>>  
Acesso em: 03/2018.

## APÊNDICE A - CRONOLOGIA



CENÁRIO

S  
É  
C  
U  
L  
OX  
I  
X

- 1821 | Cauchy publica *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, onde fundamenta os métodos do cálculo infinitesimal, obtendo uma formalização rigorosa tendo por base a noção de limite e permitindo um novo tratamento matemático do infinito.
- 1851 | Bolzano publica *Paradoxien des Unendlichen*, sendo o primeiro a efetuar um tratamento eminentemente matemático do infinito e fundamentar a noção de infinito atual, uma crítica direta à concepção dominante do infinito potencial.
- 1862 | Nascimento em Königsberg.**
- 1872 | Dedekind publica *Stetigkeit und irrationale Zahlen* onde apresenta sua construção dos reais via cortes; Cantor publica um artigo sobre séries trigonométricas, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihe*, no qual aborda a construção dos reais.  
Cantor prova a não enumerabilidade dos reais (método diagonal)
- 1879 | Frege publica *Begriffsschrift* (Ideografia) onde apresenta a construção da lógica dos enunciados e de 1ª e 2ª ordens.
- 1880 | Admissão na Universidade de Königsberg.**
- 1883 | Cantor publica *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* onde apresenta seus resultados em teoria dos conjuntos.
- 1884 | Frege publica *Die Grundlagen der Arithmetik* sobre a justificativa de construção dos naturais via lógica.
- 1885 | Término do Doutorado.**
- 1886 | Admitido como Privatdozent em Königsberg.**
- 1888 | Dedekind publica *Was sind und was sollen die Zahlen?*, compêndio de seus trabalhos na direção de um programa para fundamentar a matemática clássica por meio da teoria dos conjuntos. Nesta obra estabelece ainda o princípio de definição de funções por indução, o que é hoje conhecido por *recursão primitiva*.
- 1889 | Peano publica *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposit* em que apresenta sua axiomatização para os números naturais, conhecida desde então como Aritmética de Peano.
- 1890 | Apresenta a resolução final do Problema de Gordan.**
- 1891 | Casamento de Hilbert**
- 1893 | **Nascimento de Franz, seu único filho; É nomeado *Extraordinarius* em Königsber e logo a seguir, *Ordinarius*.**  
Frege publica o vol. I de seu *Grundgesetze der Arithmetik*, aprimoramento do trabalho de 1884 em que apresenta suas leis fundamentais para a aritmética, esta considerada como parte da lógica.

- 1895** | **É nomeado *Ordinarius* em Göttingen onde fica até 1930.**  
Cantor apresenta seus transfinitos na obra *Beiträge zur Begründung der tranfiniten Mengenlehre*.
- 1897** | **Publica *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper (Zahlbericht)*; Conhece Cantor em visita a Gordan.**  
Burali-Forti apresenta o paradoxo que leva seu nome, relacionado aos ordinais, num estágio mais avançado da teoria de Cantor.
- 1899** | **Demonstra o Princípio de Dirichlet; Publica *Grundlagen der Geometrie*.**
- 1900** | **Publica *Über den Zahlbegriff* em que apresenta sua proposta de construção dos reais; Participa do 2º Congresso Internacional de Matemática em Paris e profere a conferência *Mathematische Probleme*.**
- 1902** | Russell descobre um paradoxo na obra de Frege – Paradoxo de Russell.
- 1904** | **Apresenta a conferência *Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik* em Heidelberg.**
- 1905** | **Ministra o curso *Logische Prinzipien des mathematisches Denken*.**  
Richard descobre outro paradoxo, desta vez semântico – Paradoxo de Richard.
- 1906** | Poincaré publica *Les mathématiques et la logique II*, crítica às pesquisas sobre o problema dos fundamentos, em particular as de Hilbert.
- 1908** | **Prova a Conjectura de Waring; Ministra os cursos *Zahlbegriff und Prinzipien der Mathematik e Prinzipien der Mathematik*.**  
Axiomatização da teoria dos conjuntos por Zermelo.  
Brower publica seu 1º artigo sobre o problema dos fundamentos, em que faz objeções à lei do 3º excluído, *De onbetrouwbaar heid des logische principes*, um clássico do intuicionismo.
- 1910** | **Ministra o curso *Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik*.**  
Russell e Whitehead publicam os *Principia Mathematica*, em que advogam que toda a matemática pode ser desenvolvida como parte da lógica.
- 1912** | **Hilbert publica *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, resultado de suas pesquisas sobre equações integrais; Ministra o curso *Logische Grundlagen der Mathematik*.**
- 1913** | **Ministra o curso *Grundlagen der Mathematik und Physik*.**

- 1914 | Em Göttingen, Behmann ministra o curso *Über mathematische Logik*, uma introdução aos *Principia Mathematica*.
- 1915 | **Publica *Die Grundlagen der Physik I –II*; Ministra o curso *Probleme und Prinzipien der Mathematik*.**
- 1917 | **Apresenta a conferência *Axionatisches Denken* em Zurique; Conhece Bernays e o convida para ser seu assistente em Göttingen; Ministra os cursos *Prinzipien der Mathematik* sobre lógica matemática, início de sua parceria com Bernays e , *Mengenlehre*, sobre teoria dos conjuntos.**
- Weyl publica *Das Kontinuum*, onde é visível sua afinidade com o intuicionismo de Brouwer.
- 1918 | Brouwer publica *Intuitionistische Mengenlehre* , a teoria dos conjuntos intuicionista que não utiliza o princípio do 3º excluído.
- 1919 | **Ministra o curso *Natur und mathematisches Erkennen*.**
- 1920 | **Ministra os cursos *Logik – Kalkül* e *Probleme der mathematischen Logik*.**
- 1921 | **Ministra o curso *Grundlagen der Mathematik*.**
- Post formaliza o método de tabelas verdade para estabelecer a validade da lógica proposicional, e demonstra que a parte proposicional da axiomática de Russell e Whitehead é completa e portanto consistente.
- 1922 | **Apresenta a palestra *Die logischen Grundlagen der Mathematik* em Leipzig; ministra o curso *Logische Grundlagen*.**
- Behmann demonstra a decidibilidade da lógica monádica de segunda ordem, usando métodos semânticos para atacar o *Entscheidungsproblem*.
- Fraenkel e Skolem aprimoram os resultados de Zermelo (ZF).
- 1924 | Courant, ex-aluno e assistente de Hilbert, publica *Methoden der mathematischen Physik*, e inclui seu nome como coautor, já que o texto recorre a grande parte de seus artigos e conferências.
- Ackermann publica uma prova construtiva para o que ele sustenta ser a totalidade da análise matemática (aritmética com quantificação sobre funções). Mas um pouco antes da publicação ele encontra um erro e esclarece que restrições significativas no sistema devem ser feitas para que a prova funcione.
- 1925 | **Apresenta a palestra *Über das Unendliche* em Münster.**

- 1927** | **Apresenta a palestra *Die Grundlagen der Mathematik* em Hamburgo.**  
Von Neumann revisa as ideias de Ackermann para aplicá-las corretamente à aritmética de primeira ordem na qual o esquema de indução é restrito às fórmulas livres de quantificadores e publica uma prova de consistência.  
A Associação Matemática Holandesa oferece um prêmio para quem possa formalizar a matemática intuicionista de Brouwer.
- 1928** | **Publica com Ackermann o texto *Grundzüge der theoretischen Logik*; Apresenta a palestra *Probleme der Grundlegung der Mathematik* em Bolonha.**  
Heyting vence o concurso proposto pela Associação Matemática Holandesa e publica sua axiomatização da lógica proposicional intuicionista.
- 1929** | **Inaugura o Instituto de Matemática de Göttingen.**  
**Apresenta as palestras *Natureerkennen und Logik* em Königsberg e *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre* em Hamburgo (última palestra);**
- 1930** | **Hilbert se aposenta.**  
Tarski anuncia que a teoria dos números reais na linguagem de  $+$ ,  $\leq$ ,  $1$  é decidível. Ele publica um esboço da prova em 1931, usando eliminação de quantificadores, onde demonstrabilidade e verdade parecem coincidir.
- 1931** | **Apresenta a palestra *Beweis des tertium non datur* em Göttingen.**  
Gödel publica seus teoremas de incompletude em *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*.  
Herbrand apresenta uma demonstração de consistência construtiva para um sistema fraco da aritmética utilizando o  $\varepsilon$  – cálculo.
- 1934** | **Publicação do *Grundlagen der Mathematik I* de Hilbert e Bernays.**
- 1936** | **Gentzen prova que a aritmética de Peano de primeira ordem é consistente.**
- 1938** | **Gödel demonstra que tanto o axioma da escolha quanto a hipótese do contínuo são consistentes com os demais axiomas de Zermelo – Fraenkel.**
- 1939** | **Publicação do *Grundlagen der Mathematik II* de Hilbert e Bernays.**
- 1940** | **Ackermann publica o artigo *Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie*, no qual a consistência da aritmética dos números naturais é comprovada, utilizando indução transfinita.**
- 1943** | **Morte de Hilbert.**

- 1963 Cohen mostra que as negativas tanto do axioma da escolha quanto da hipótese do contínuo são consistentes com os demais axiomas de Zermelo – Fraenkel. Ou seja, este resultado e também o de Gödel (1938) afirmam que tanto um quanto o outro são proposições independentes dos demais axiomas da teoria dos conjuntos. Assim, quem aceita a teoria usual dos conjuntos pode, sem risco de introduzir contradições, adotar tanto a hipótese do contínuo, como sua negação.
- 1954 / 1960 Uma continuação filosoficamente mais satisfatória do programa de Hilbert em termos teóricos de prova foi sugerida por Kreisel, inicialmente em 1954, e elaborada por Feferman (1960). Se caracteriza por uma concepção mais ampla do programa de Hilbert numa tentativa de justificar a matemática ideal por meios restritivos.
- 1986 Detlefsen, filósofo e pesquisador americano da Universidade de Notre Dame, concebe um projeto reducionista tendo por base o programa de Hilbert, com o intuito de contornar as dificuldades que os teoremas de incompletude acarretam para o projeto.





**APÊNDICE B**

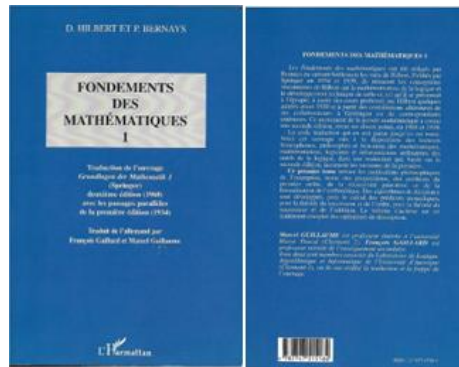
**FONDÉMENTS DES MATHÉMATIQUES I E II - SUMÁRIOS PARCIAIS**

CENÁRIO FINAL

**VOLUME I**

BERNAYS, Paul; HILBERT, David. **Fondements des Mathématiques 1**. Tradução do alemão de François Gaillard, Eugène Guillaume e Marcel Guillaume. Paris: l’Harmattan, 2001. Versão francesa do original *Grundlagen der Mathematik I*, 2ª edição, 1968.

Figura B1: CAPAS EXTERNAS - *Les Fondements des Mathématiques – I*



Fonte: Arquivo pessoal.

<b>§1. O problema da não contradição na axiomática, um problema de decisão em lógica.</b>	
1a. Axiomática formal. ....	55
<b>§2. A teoria elementar dos números; o raciocínio finitista e suas limitações.</b>	
2a. O método do raciocínio intuitivo e sua aplicação à teoria elementar dos números. ....	74
2b. Outras utilizações dos raciocínios intuitivos. ....	83
2c. O ponto de vista finitista; transgressão na teoria dos números. ....	87
2d. Métodos não finitistas em análise. ....	91
2e. Pesquisas sobre o fundamento finitista da aritmética; retorno ao problema precedente; a teoria da prova. ....	96
<b>§3. A formalização do cálculo lógico I: o cálculo proposicional.</b>	
3a. Teoria das funções verdade. ....	100
3b. Aplicação da teoria das funções verdade na dedução lógica; formalização de inferências na lógica dos enunciados por meio de expressões identicamente verdadeiras; sobre a regra de substituição e o esquema de inferência. ....	119
3c. Lógica dedutiva dos enunciados. ....	123
3d. Provas de independência segundo o método de valoração. ....	131
3e. Retorno ao método para formalizar a dedução (considerado em b); regras abreviadas; observações sobre um caso de contradição. ....	144

**§4. A formalização do cálculo lógico II: o cálculo de predicados.**

4a. Introdução de variáveis de individuais; noção de fórmula; regra de substituição; exemplo; comparação com o raciocínio material. ....	146
4b. As variáveis associadas e as regras para os símbolos de quantificação universal e existencial. ....	153
4c. Prática de deduções. ....	167
4d. Problemas sistemáticos. ....	179
4e. Considerações sobre o formalismo do cálculo de predicados. ....	193
4f. Equidedução e teorema da dedução. ....	211

**§5. Inclusão da identidade. A completude do cálculo de predicados monádicos.**

5a. Extensão do formalismo. ....	227
5b. Solução de problemas de decisão; teoremas de completude. ....	254

**§6. A não contradição de domínios infinitos de indivíduos. Elementos da teoria dos números.**

6a. Passagem do problema da não dedução de fórmulas do cálculo de predicados, idênticas no finito, ao problema da não contradição de um sistema de axiomas em teoria dos números. ....	274
6b. Parte lógica geral da demonstração de não contradição. ....	286
6c. Execução da demonstração de não contradição por meio de um procedimento de redução. ....	299
6d. Passagem a um sistema de axiomas dedutivamente fechado. ....	314
6e. Acréscimo da indução completa. ....	330
6f. Demonstração de independência. ....	342

**§7. As definições recursivas.**

7a. Discussões fundamentais. ....	356
7b. A teoria recursiva dos números (Aritmética primitiva recursiva).....	382
7c. Extensão dos esquemas de recorrência e indução. ....	407
7d. Representatividade das funções recursivas; passagem a um sistema de axiomas suficiente para a teoria dos números. ....	434
7e. Considerações suplementares sobre os axiomas da igualdade. ....	461

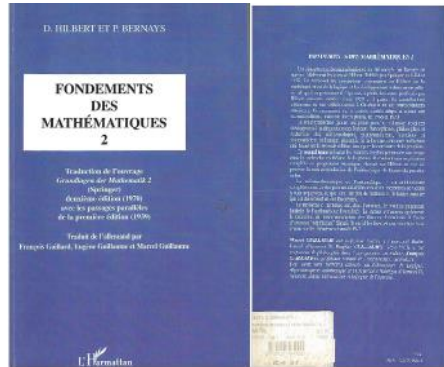
**§8. O conceito de “ele, quem” e sua eliminação.**

8a. A $\exists$ - regra e seu manuseio. ....	473
8b. Desenvolvimento dedutivo da teoria dos números a partir do sistema de axiomas (Z), com acréscimo do conceito formalizado de menor número. ....	492
8c. Redução das recorrências primitivas às definições explícitas por meio da função $\mu_x A(x)$ , admitindo por princípio o sistema (Z). ....	505
8d. A eliminação das descrições (dos $\exists$ símbolos). ....	517
(Item com subitens diferentes nas duas edições da obra)	
8e. Consequências da eliminação dos $\exists$ símbolos. ....	570
8f. Suplemento: ampliação do teorema da flexibilidade do axioma da igualdade com o acréscimo da $\exists$ - regra. ....	586

**VOLUME II**

BERNAYS, Paul; HILBERT, David. **Les Fondements des Mathématiques 2**. Tradução do alemão de François Gaillard, Eugène Guillaume e Marcel Guillaume. Paris: l’Harmattan, 2001. Versão francesa do original *Grundlagen der Mathematik II*, 2ª edição, 1970.

Figura B2: CAPAS EXTERNAS - *Les Fondements des Mathématiques – II*



Fonte: Arquivo pessoal.

**§1. O método de eliminação de variáveis associadas por meio do  $\varepsilon$  – hilbertiano**

1-1. O procedimento da resolução simbólica das fórmulas existenciais. ....	51
1-2. O $\varepsilon$ – símbolo de Hilbert e a $\varepsilon$ - fórmula. ....	59
1-3. Prova do primeiro $\varepsilon$ - teorema. ....	71
1-4. Demonstração da não contradição. ....	83

**§2. Investigações acerca da teoria dos números em teoria da prova por meio de métodos associados ao  $\varepsilon$  – símbolo.**

2-1. Aplicação do teorema de não contradição á teoria dos números. ....	99
2-2. Inclusão do axioma geral da igualdade no primeiro $\varepsilon$ - teorema. ....	107
2-3. Obstáculos à introdução do esquema de indução não limitada no procedimento de eliminação. Formalização do princípio de indução com a ajuda de uma segunda fórmula para o $\varepsilon$ - símbolo. Passagem à abordagem originária de Hilbert. ....	133
2-4. Abordagem originária de Hilbert para a eliminação dos $\varepsilon$ – símbolos e desenvolvimento anterior. ....	143

**§3. Aplicações do  $\varepsilon$  – símbolo ao estudo do formalismo lógico.**

3-1. O segundo $\varepsilon$ – teorema. ....	179
3-2. Inclusão do axioma geral da igualdade no segundo $\varepsilon$ - teorema; estudos de eliminação correlatos. ...	186
3-3. O teorema de Herbrand. ....	197
3-4. Critérios de refutação no cálculo de predicados. ....	220
3-5. Aplicação dos critérios obtidos ao problema da decisão. ....	235

**§4. O método de aritmetização da metamatemática aplicado ao cálculo de predicados.**

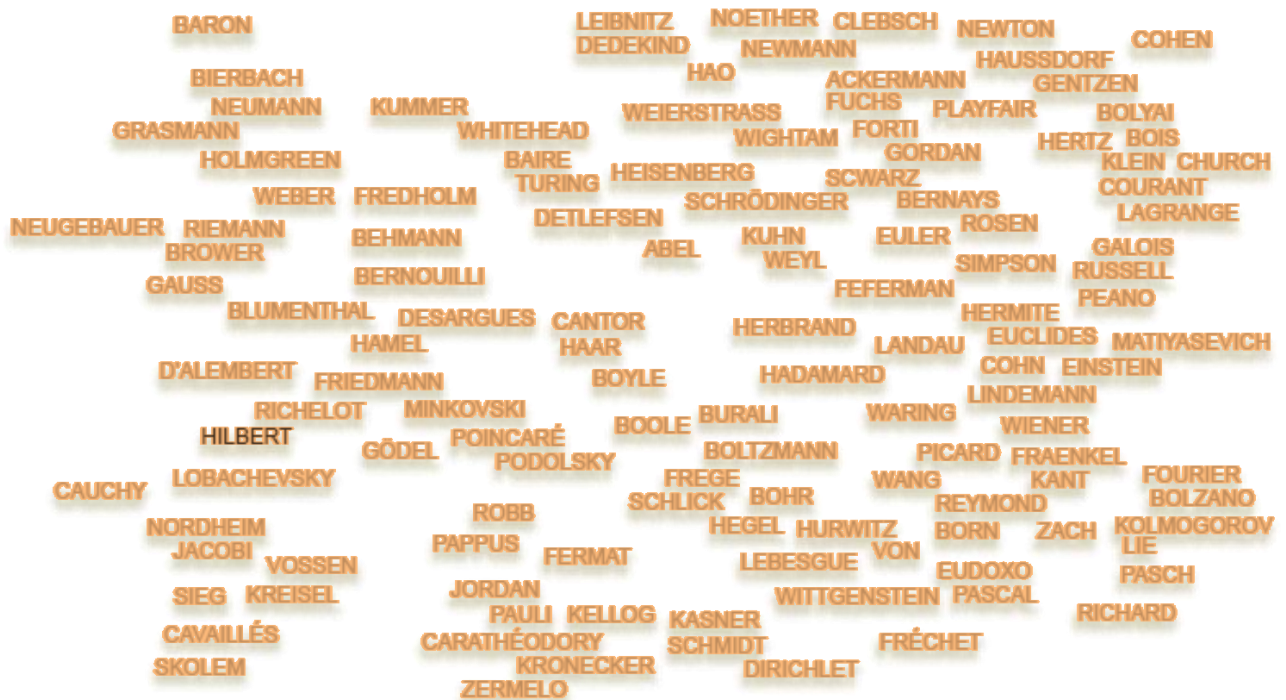
4-1. Realização de uma aritmetização da metamatemática do cálculo de predicados. ....	264
---	-----

4-2. Aplicação do método de aritmetização ao teorema de completude de Gödel. ....	293
<b>§5. A razão para ampliar o escopo do método em teoria da prova.</b>	
5-1. Limites da representação e dedução nos formalismos dedutivos. ....	314
5-2. A metamatemática formalizada do formalismo da teoria dos números. ....	355
5-3. Demonstrações de não contradição do formalismo completo da teoria dos números. ....	406
<b>Suplemento I: Visão geral sobre o cálculo de predicados e dos formalismos correlatos. ....</b>	<b>447</b>
<b>Suplemento II: Uma formulação precisa do conceito de função calculável e o teorema de Church sobre o problema da decisão. ....</b>	<b>465</b>
<b>Suplemento III: Sobre certos domínios do cálculo das proposições e suas delimitações dedutivas com a ajuda de esquemas. ....</b>	<b>495</b>
<b>Suplemento IV: Formalismos para o desenvolvimento dedutivo da análise. ....</b>	<b>523</b>
<b>Suplemento V: Provas de não contradição para o formalismo da teoria dos números. ....</b>	<b>573</b>

## APÊNDICE C – PESQUISADORES REFERENCIADOS



ELENCO



Para obter uma completa biografia de cada um dos citados, sugerimos os seguintes endereços eletrônicos:

- Mac Tutor History of Mathematics archive:  
<<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html>>
- Mathematics Genealogy Project:  
<<https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/index.php>>
- Stanford Encyclopedia of Philosophy.  
< <https://plato.stanford.edu/entries/vienna-circle/>>

ANEXO A – “AXIOMATISCHES DENKEN” – 1917 - ZURIQUE  
(PENSAMENTO AXIOMÁTICO)



BASTIDORES

HILBERT, David. Axiomatisches Denken. Mathematische Annalen 78, 1918, p. 405 – 415

# MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG DER HERREN

L. E. J. BROUWER, CONSTANTIN CARATHÉODORY, OTTO HÖLDER,  
CARL NEUMANN, MAX NOETHER

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN  
IN GÖTTINGEN

WALTHER V. DYCK  
IN MÜNCHEN

DAVID HILBERT  
IN GÖTTINGEN

OTTO BLUMENTHAL  
IN AACHEN

78. Band.

Mit 16 Figuren im Text




---

Reprinted with the permission of B. G. Teubner Verlagsgesellschaft m.b.H., Stuttgart

JOHNSON REPRINT  
CORPORATION  
111 Fifth Avenue,  
New York, N.Y. 10003

JOHNSON REPRINT  
COMPANY LIMITED  
Berkeley Square House,  
London, W. 1

## Axiomatisches Denken.\*)

Von

DAVID HILBERT in Göttingen.

Wie im Leben der Völker das einzelne Volk nur dann gedeihen kann wenn es auch allen Nachbarvölkern gut geht, und wie das Interesse der Staaten es erheischt, daß nicht nur innerhalb jedes einzelnen Staates Ordnung herrsche, sondern auch die Beziehungen der Staaten unter sich gut geordnet werden müssen, so ist es auch im Leben der Wissenschaften. In richtiger Erkenntnis dessen haben die bedeutendsten Träger des mathematischen Gedankens stets großes Interesse an den Gesetzen und der Ordnung in den Nachbarwissenschaften bewiesen und vor allem zu Gunsten der Mathematik selbst von jeher die Beziehungen zu den Nachbarwissenschaften, insbesondere zu den großen Reichen der Physik und der Erkenntnistheorie gepflegt. Das Wesen dieser Beziehungen und der Grund ihrer Fruchtbarkeit, glaube ich, wird am besten deutlich, wenn ich Ihnen diejenige allgemeine Forschungsmethode schildere, die in der neueren Mathematik mehr und mehr zur Geltung zu kommen scheint: ich meine die *axiomatische Methode*.

Wenn wir die Tatsachen eines bestimmten mehr oder minder umfassenden Wissensgebietes zusammenstellen, so bemerken wir bald, daß diese Tatsachen einer Ordnung fähig sind. Diese Ordnung erfolgt jedesmal mit Hilfe eines gewissen *Fachwerkes von Begriffen* in der Weise, daß dem einzelnen Gegenstande des Wissensgebietes ein Begriff dieses Fachwerkes und jeder Tatsache innerhalb des Wissensgebietes eine logische Beziehung zwischen den Begriffen entspricht. Das Fachwerk der Begriffe ist nichts Anderes als die *Theorie* des Wissensgebietes.

So ordnen sich die geometrischen Tatsachen zu einer Geometrie, die arithmetischen Tatsachen zu einer Zahlentheorie, die statischen, mechanischen, elektrodynamischen Tatsachen zu einer Theorie der Statik, Mechanik, Elektrodynamik oder die Tatsachen aus der Physik der Gase zu einer Gastheorie. Ebenso ist es mit den Wissensgebieten der Thermodynamik, der geometrischen Optik, der elementaren Strahlungstheorie, der

\*) Dieser Vortrag ist in der Schweizerischen mathematischen Gesellschaft am 11. September 1917 in Zürich gehalten worden.

TEXTO EM INGLÊS

*Philosophia Mathematica*, Volume s1-7, Issue 1-2, 1 June 1970, Pages 1–12.  
Disponível em: < <https://philmat.oxfordjournals.org>.>. Acesso em: 21/08/2017

## AXIOMATIC THINKING

David Hilbert

Each nation can do well, as in the life of individuals, only if things go equally well in all of her neighboring nations; the life of sciences is similar to that of states whose interest demands that everything be in order within individual states as properly as their relations be in good order among themselves. Understanding this correctly, the most important carriers of mathematical thoughts have always shown great interest in the law and order in neighboring sciences and, above all for the benefit of mathematics, have cultivated the relations to the neighboring sciences, in particular to physics and epistemology. The essence of these relations and the ground of their fertility will be made most distinct, I believe, if I sketch to you that general method of inquiry which appears to grow more and more significant in modern mathematics; the *axiomatic method*, I mean.

If we collate the facts of a specific field of more or less comprehensive knowledge, then we shortly observe that these facts can be set in order. This order occurs invariably with the aid of certain *framework of concepts* such that there exists correspondence between the individual objects in the field of knowledge and a concept of this framework and between those facts within the field of knowledge and a logical relation among concepts. The framework of concepts is nothing but the *theory* of the field of knowledge.

The geometric facts thus order themselves into a geometry, the arithmetic facts into a number theory, the static, mechanic, electrodynamic facts into a theory of statics, mechanics, electrodynamics, or the facts out of physics of gases into a gas theory. The same holds for the fields of knowledge of thermodynamics, of geometric optics, of elementary radiation theory, of heat conduct, or even for probability theory and set theory. Indeed, it holds as well for such specific fields of pure mathematical knowledge as theory of surfaces, Galois theory of equations, theory of primes, and even for none other than some fields of know-



ledge remotely related to mathematics such as certain segments of psychophysics or economics.

If we examine a specific theory more closely, we then discern on all occasions that at the bottom of the construction of a framework of concepts are certain few prominent propositions of the field of knowledge, which alone are then sufficient for building up the entire framework upon them in accordance with logical principles.

The proposition of the linearity of the planar equation is thus sufficient in geometry, and that of orthogonal transformation of point-coordinates is complete to produce the entirety of extensive knowledge in the geometry of Euclidean space solely by the means of analysis. Similarly, the laws and rules of computation for integers are sufficient for setting up the theory of numbers. The same role is taken over by the parallelogram law of forces in statics, something like Lagrangian differential equations of motion in mechanics, and Maxwell's equations accepting the condition of rigidity and change of electrons in electrodynamics. Thermodynamics is completely built upon the concept of energy function and the definition of temperature and pressure as derivatives from their variables, entropy, and volume. In the midpoint of elementary radiation theory there stands Kirchhoff's law on the relations between emission and absorption; there is the Gaussian law of error in the calculus of probability, the theorem of entropy as negative logarithm of probability of events in the gas theory, the representation of arc elements by quadratic differential form in the theory of surfaces, the existence theorem of roots in the theory of equations, the reality and frequency theorem of zero-points of Riemann zeta function, the fundamental theorem in the theory of primes.

Viewed from a primary standpoint, these theorems may be looked upon as the *axioms of individual fields of knowledge*; the advancing development of individual fields of knowledge rests then on the more extensive logical enlargement of the completed framework of concepts. This standpoint predominates principally in pure mathematics, and we are indebted for the corresponding modes of operation to the mighty development of geometry, arithmetic, function theory,

and analysis in entirety.

In the preceding cases the problem of founding individual fields of knowledge had consequently obtained a solution; this solution, however, was only a tentative one. As a matter of fact, it became necessary in individual fields of knowledge to found anew the aforementioned founding propositions themselves, once considered axioms and placed at the foundation. So came into being the "proofs" for the linearity of the planar equation and the orthogonality of the transformation expressing a motion, and also for the laws of arithmetic computations, for the parallelogram of forces, for the Lagrangian equations of motion and Kirchhoff's law of emission and absorption, for the principle of entropy and the existence theorem of the roots of an equation.

But the critical examination of these "proofs" makes it discernible that they are not proofs in themselves; rather, they are in the main only capable of leading back to certain more deeply lying propositions which in turn are now to be looked upon as new axioms in place of those propositions to be proved. So originated the proper, currently so-called axioms of geometry, of arithmetic, of statics, of mechanics, of radiation theory or of thermodynamics. These axioms form a more deeply lying layer of axioms opposite to another layer of axioms as they have been characterized by the aforementioned propositions of the first foundation in individual fields of knowledge. The procedure of the axiomatic method, as articulated here, comes thus up to a *deeper-laying of foundations* of individual fields of knowledge, just as such a one is indeed necessary for each building according as it will be enlarged, built higher, and yet vouched for its safety.

If the theory of a field of knowledge, that is, the framework of concepts that represents the theory, is to serve its purpose, namely the orientation and order, it must then satisfy chiefly two fixed demands: it must offer, first, a general view of the *dependence* or *independence* of the propositions of the theory and, second, a guarantee of *consistency* of all propositions of the theory. In particular, the axioms of each theory have to be proved in accordance with these two viewpoints.

Let us work first at the dependence or independence of axioms.

The *parallel axiom* in geometry offered the classic example for the examination of independence of an axiom. Euclid answered in the negative to the question as to whether the proposition of parallels is already conditioned by other axioms, because he placed it under the axioms. Euclid's method of investigation became typical of the axiomatic investigation and, since Euclid, geometry has at once been the model example for an axiomatic science in general.

Classic mechanics offers another example for an investigation of independence of axioms. The Lagrangian equation of motion, as has already been observed, could act as axioms of mechanics — upon these does mechanics no doubt found itself completely in their general formulation for arbitrary forces and arbitrary secondary conditions. A closer examination reveals, however, that arbitrary forces as well as arbitrary secondary conditions are unnecessary to presuppose for the construction of mechanics, and that, consequently, the system of presuppositions can be reduced. This recognition leads on the one hand to the axiomatic system of Boltzmann who presupposes only forces, indeed central forces in particular, and on the other hand to the axiomatic system of Hertz who rejects forces and wants no more than the secondary conditions, indeed fixed connections in particular. These two axiomatic systems form thus a deeper layer in the advancing axiomatization of mechanics.

It is similarly the case if we would assume as an axiom something like the reality theorem of zero points of Riemann zeta function in the theory of primes. The proof of this reality theorem would become necessary for the progress towards the deeper layer of pure arithmetic axioms, and it would best guarantee the safety of important conclusions; we have already set up the axioms through its postulation for the theory of primes.

Special interest for the axiomatic treatment is offered by the question of dependence of the propositions of a field of knowledge on the axiom of continuity.

It is shown in the theory of real numbers that the axiom of measurement, the so-called Archimedian axiom, is independent of all other axioms of arithmetic. As is well-known, this knowledge is of essential significance to geometry, but it

seems to me that it has principal interest in physics as well; for it leads us to the following outcome. That is, the fact that we can come up with the dimensions and ranges of celestial bodies by putting together terrestrial ranges, namely measuring celestial lengths by terrestrial measure, as well as the fact that the distances inside atoms can be expressed in terms of metric measure, is by no means a merely logical consequence of propositions on the triangular congruence and the geometric configuration, but rather an investigative result of experience. The validity of the Archimedian axiom in the nature, in the sense indicated as above, needs experimental confirmation just as much as does the proposition of the angular sum in triangle in the ordinary sense.

In general, I should like to formulate the axiom of continuity in physics as follows: "If a certain arbitrary degree of exactitude is prescribed for the validity of a physical assertion, a small range shall then be specified, within which the presuppositions prepared for the assertion may freely vary such that the deviation from the assertion does not overstep the prescribed degree of exactitude." This axiom in the main brings only that into expression which directly lies in the essence of experiments; it has always been assumed by physicists who, however, have never specifically formulated it.

If one derives, after Planck for instance, the second Heat Theorem from the axiom of the impossibility of the *Perpetuum mobile zweiter Art* (perpetual motion machine of the second kind), this axiom of continuity is then necessarily employed for it.

Hamel has shown in a very interesting manner, referring to the well-ordering principle of the continuum, that the axiom of continuity is necessary for the proof of the parallel law of forces in the foundation of statics — at least for a certain handy choice of other axioms.

The axioms of classic mechanics can experience a process of deeper founding if one considers the continuous motion, by virtue of the axiom of continuity, in short successive, rectilinearly uniform piecewise broken motions caused by impulse, and then employs Bertrand's maximal principle as a primary mechanical axiom; according to the latter, the actually occur-

ring motion after each push is what makes the kinetic energy of the system a maximum opposite to all motions compatible with the principle of the conservation of energy.

Into the newest modes of founding physics, especially of electrodynamics, which in entirety is nothing but the theory of continuum itself and accordingly takes up the challenge of continuity to the widest extent, I would not enter here, since this investigation has not yet been sufficiently completed.

We will now examine the second of the aforementioned viewpoints, namely the question of the consistency of axioms; this is manifestly of greater importance, since the presence of a contradiction in a theory manifestly imperils the stability of the entire theory.

The understanding of the internal consistency is linked to difficulty even in the long accepted and flourishing theories; I am thinking of "*Umkehr- und Wiederkehrleinwand*" (arguments against Boltzmann's "H-Theorem" by Loschmidt and Zermelo, respectively) in the kinetic gas theory.

It often happens that the internal consistency of a theory is considered self-explanatory while, in truth, deep mathematical developments are necessary for proofs. For example, let us reflect upon a problem from the elementary theory of *heat conduction*, namely the temperature distribution inside a homogeneous body whose surface is kept well within a definite temperature varying from spot to spot; then, the demand for the existence of temperature equilibrium contains in fact no internal contradiction of the theory. To understand this, however, it is necessary to prove that the well-known boundary value problem of potential theory is always solvable, because this boundary value problem alone shows that a temperature distribution satisfying the equation of heat conduction is possible at all.

It is all the more insufficient in physics, however, if the propositions of a theory are in harmony with themselves; rather, they still have to meet the demand that they never contradict the propositions of a neighboring field of knowledge as well.

Thus, as I showed a short while ago, the axioms of elementary radiation theory affords, in addition to the foundation of Kirchhoff's law on emission and absorption, still

another special law on reflection and refraction of single light rays, namely the law: If two rays of natural light and of equal energy fall at a time from a side upon the area of separation of two media in such directions that one ray after penetration and the other after reflection take the same direction, the ray created by the union is then again of natural light and of equal energy. This law, as it shows in fact, is in no way contradicting optics, but it can be derived as conclusion from the electromagnetic theory of light.

The results of the kinetic gas theory are well-known to be in the best harmony with thermodynamics.

Similarly, *electromagnetic inertia* and *Einstein's gravitation* are compatible with their corresponding concepts in classic mechanics as long as the latter are considered borderline cases of the more general concepts.

On the other hand, the *modern theory of quanta* and the advancing knowledge of the inner structure of atoms have led to the laws which flatly contradict the electro-dynamics that, up to now, has substantially been built upon Maxwell's equations; as everyone concedes, therefore, the contemporary electro-dynamics necessarily demands a new foundation and substantial modification.

As one notes from the preceding lines, the elimination of recurring contradictions in physical theories must always take place through altered selection of axioms, and the difficulty lies in the proper choice by which all observed physical laws are logically deducible.

The situation changes, however, if contradictions appear in purely theoretical fields of knowledge. Set theory offers the classic example for such an occurrence, in particular the paradox of the set of all sets that goes as far back as to Cantor himself. This paradox is so serious that such very distinguished mathematicians as Kronecker and Poincaré for instance felt induced to deny set theory in entirety — one of the most fruitful and powerful branches of mathematics in general — any justification of existence.

The axiomatic method brought remedy also under those precarious circumstances. As he set up suitable axioms to restrict, on the one hand, the arbitrariness in the definitions of sets themselves and, on the other, the admissibility of

statements on their elements in a specific way, Zermelo succeeded to develop set theory in such a manner that the paradoxes under discussion fall away and, for all restrictions, the purport and applicability of set theory remains the same.

In all the preceding cases the question was the contradictions which had been brought out in the process of developing a theory, and their elimination pressed the need for modifications of axiomatic systems. It is not enough to avoid contradictions, however, if the reputation, damaged by them, of mathematics as the model of the most rigorous science should be restored. The principal demand of axiomatics must go further ahead, namely so far as to understand that contradictions are always *altogether impossible* in a field of knowledge founded on the erected system of axioms.

Corresponding to this demand in the *Grundlagen der Geometrie* (Foundations of Geometry) I proved the consistency of the erected axioms, in which I showed that each contradiction in the deduction from the geometric axioms must necessarily be discernible in the arithmetic of the real number system as well.

No doubt for the fields of physical knowledge, too, it is always sufficient to reduce the question of *inner consistency* to the consistency of arithmetic axioms. So I showed the consistency of the axioms of elementary radiation theory as I constructed the axiomatic system for the theory with analytically independent parts — where the consistency of analysis was presumed.

Circumstances permitting, one may and must similarly proceed in the construction of a mathematical theory. If we regard as an axiom, for example, the theorem of the *existence of roots* in the development of Galois theory of equations or the theorem of the *reality of zero points* of Riemann zeta function in the theory of primes, the consistency proof of the axiomatic system then always amounts just to the proof of the theorem of the existence of roots and Riemann's theorem on the zeta function with the aid of analysis, respectively — and the completion of the theory is therewith secured for the first time.

Also the question of the consistency of the axiomatic system for *real numbers* is reduced, through the use of set

theoretic concepts, to the same question for integers. This is the merit of the theories, by Weierstrass and Dedekind, of irrational numbers.

Only in two cases, namely if it is a question of the axioms of integers themselves, and if it is a question of the foundation of set theory, this mode of reduction to another specific field of knowledge is manifestly impracticable, since beyond logic there is no more discipline to which an appeal could be lodged.

Since the consistency proof is a task that cannot be dismissed, however, it seems necessary to axiomatize logic itself and then to establish that number theory as well as set theory is only a part of logic.

This road, prepared for a long time — not in the least through the profound investigations by Frege — has finally been pursued by the ingenious mathematician and logician, Russell, with greatest success. In the completion of this extensive enterprise by Russell for the axiomatization of logic one can behold the crowning of the work of axiomatization in general.

Meanwhile, this completion still demands new and various works. By closer examination we presently discern that the consistency question of integers and sets is not isolated for itself; rather, it belongs to a great region of the most difficult epistemological questions of specific mathematical coloration. To characterize briefly this region of questions, I mention by name the problem of principal *solvability of every mathematical question*, the problem of supplementary *controllability* of the results of a mathematical investigation, the question of a *criterion for the simplicity* of mathematical proofs, the question of relations between *contentualness (Inhaltlichkeit)* and *formalism* in mathematics and logic, and finally the problem of *decidability* of a mathematical question by a finite number of operations.

Until all questions of this type in their correlation are understood and explained, then, we cannot be satisfied with the axiomatization of logic.

The last among the preceding questions, namely the question of decidability by a finite number of operations, is the most well-known and also the most frequently discussed,



because it deeply touches the essence of mathematical thinking.

I should like to stir up more interest in it as I now refer to a few particular mathematical problems in which it plays a role.

In the theory of algebraic invariants, the fundamental theorem is known to hold that there always exists a finite number in (rational) integers of invariants, by which all the rest of such invariants can be integrally represented. The first general proof, by myself, of this theorem satisfies our demands, as I believe, and indeed abundantly with respect to simplicity and lucidity. It is impossible, however, to modify this proof so that we obtain in the process a specifiable limit for the number of finitely many invariants of the full system, or even to succeed in arranging it in concrete. Rather, entirely different kinds of investigation and new principles are necessarily needed for discerning that the arrangement of the full invariant system demands only those operations, the number of which is finite and lies under a limit specifiable by computation.

The same situation is observed in an example from the theory of surfaces. In the geometry of fourth-order surfaces there is a fundamental question as to how many of mutually separated convex surfaces (i.e. sheets) such a surface at most consists of.

The first to be answered for the question is the evidence that the number of such sheets must be finite; this can easily appear on the road of function theory, namely as follows: Assume the presence of infinitely many sheets and then choose a point at a time inside a part of space bounded by a sheet. A concentration spot of these infinitely many chosen points would then be a point of such singularity as to be barred from an algebraic surface.

This road of function theory leads by no means to an upper limit for the number of sheets; for this, one should rather investigate the number of intersections, which will then finally show that the number of sheets can never be more than 12.

The second method, completely different from the first, in turn is not applicable to it and also not modifiable so that it

will enable us to decide whether there exists a fourth-order surface with 12 sheets.

Since a fourth-order quaternary form has 35 homogeneous coefficients, we can then illustrate a specific fourth-order surface through a point in a 34-dimensional space. The discriminant of the fourth-order quaternary form is of degree 108 in its own coefficients; if equated to zero, it then represents a 108th-order surface in the 34-dimensional space. Since the coefficients of the discriminant itself are specific integers, the topological character of the discriminant surface is exactly determinable according to the rules which are routine in the 2- and 3-dimensional spaces such that we can be exactly informed of the nature and meaning of individual sections in which the discriminant surface divides the 34-dimensional space. Now all the fourth-order surfaces represented by the points of these sections certainly possess the equal number of sheets, and it is therefore possible to determine, by finite if only very troublesome and wearisome steps of computation, whether or not there exists a fourth-order surface with less than or equal to 12 sheets.

The geometric consideration as above is thus a third way to treat our question concerning the maximal number of sheets of a fourth-order surface. It proves the decidability of this question by a finite number of operations. An important demand of our problem is thereby met in principle. Similarly reduced to a problem of the same rank is something like the task of establishing the decimal expression of  $\pi$  up to the

$$10^{10} \\ 10 \quad \text{-th place}$$

— a task, the solvability of which is evident, but the solution of which remains unknown.

It needs perhaps the penetrating and difficult investigation in algebraic geometry, carried out by Rohn, to understand that 11 sheets are impossible for a fourth-order surface; on the other hand, 10 sheets actually occur. This fourth method alone brings therewith the complete solution of the problem.

These specific executions show how various methods of proof are applicable to the same problem; they also suggest to us the necessity to study the essence of mathematical proof

itself if such questions as those of decidability by finitely many operations should be answered at all.

All such questions concerning principles as those I have so far characterized — of which only the last mentioned was concerned with the decidability by finitely many operations — seem to me to constitute an important and newly accessible field of research; to capture this field we must — this is my conviction — make the concept of specific mathematical proof itself the object of an investigation, just as the astronomer must take his position into account, the physicist must take care of the theory of his apparatus, and the philosopher criticizes the reason itself.

The implementation of this program is still an unsolved problem at present, of course.

In conclusion, I should like to summarize my general understanding of the axiomatic method in a few lines.

I believe: Everything that can be object of scientific thinking in general, as soon as it is ripe for formation of a theory, runs into the axiomatic method and thereby indirectly to mathematics. Forging ahead towards the ever deeper layers of axioms in the above sense we attain ever deepening insights into the essence of scientific thinking itself, and we become ever more clearly conscious of the unity of our knowledge. In the evidence of the axiomatic method, it seems, mathematics is summoned to play a leading role in science in general.

(Translator's Note. The above translation of Hilbert's article in 1918: "Axiomatisches Denken" is the first complete English rendition and appears as an appendix in

J. Fang:

*HILBERT—Towards a Philosophy of Modern Mathematics II*

published by Paideia Press, Hauppauge, N.Y. 1970. It reappears here in the hope that this oft-quoted, or rather oft-referred but apparently seldom-read, epochal paper will finally be read in entirety. Reprinted by permission of Teubner Verlag, W. Germany and Paideia Press.)

ANEXO B – “ÜBER DAS UNENDLICHE” – 1925 - MÜNSTER  
(SOBRE O INFINITO)



BASTIDORES

HILBERT, David. *Über das Unendliche*. Mathematische Annalen 95, 1925, p. 161–190

Über das Unendliche<sup>1)</sup>.

Von

David Hilbert in Göttingen.

Weierstraß hat der mathematischen Analysis durch seine mit meisterhafter Schärfe gehandhabte Kritik eine feste Grundlage geschaffen. Indem er unter anderem die Begriffe Minimum, Funktion, Differentialquotient klärte, hat er die der Infinitesimalrechnung noch anhaftenden Mängel beseitigt, sie von allen verschwommenen Vorstellungen über das Infinitesimale gereinigt und die dabei aus dem Begriff des Infinitesimalen entspringenden Schwierigkeiten endgültig überwunden. Wenn heute in Verfolgung der Schlußweisen, die auf dem Begriff der Irrationalzahl und überhaupt des Limes beruhen, in der Analysis volle Übereinstimmung und Sicherheit herrscht und in den verwickeltsten Fragen, die die Theorie der Differential- und Integralgleichungen betreffen, trotz der kühnsten und mannigfaltigsten Kombinationen unter Anwendung von Über-, Neben- und Durcheinander-Häufung der Limites doch Einhelligkeit aller Ergebnisse statthat, so ist dies wesentlich ein Verdienst der wissenschaftlichen Tätigkeit von Weierstraß.

Und dennoch hat mit der Weierstraßschen Begründung der Infinitesimalrechnung die Diskussion über die Grundlagen der Analysis noch nicht ihren Abschluß gefunden.

Der Grund hierfür liegt darin, daß die Bedeutung des *Unendlichen* für die Mathematik noch nicht restlos geklärt worden war. Zwar das Unendlichkleine und das Unendlichgroße ist in der Weierstraßschen Analysis eliminiert, indem die dies betreffenden Aussagen auf Beziehungen zwischen endlichen Größen zurückgeführt werden. Aber das Unendliche tritt noch immer auf in den unendlichen Zahlenfolgen, welche die reellen

<sup>1)</sup> Vortrag, gehalten am 4. Juni 1925 gelegentlich einer zur Ehrung des Andenkens an Weierstraß von der Westfälischen Mathematischen Gesellschaft veranstalteten *Mathematiker-Zusammenkunft in Münster i. W.*

**“Sobre o Infinito” - Tradução de Walter Carnielli  
(omitidos os comentários do tradutor)**

CARNIELLI, Walter; EPSTEIN, Richard L. Computabilidade funções Computáveis Lógica e os Fundamentos da Matemática. 2 ed. São Paulo: Ed. Unesp, 2009. p.75 – 91

Weierstrass, através de sua crítica penetrante, conseguiu uma sólida fundamentação para a análise matemática. Elucidando, entre outros, os conceitos de mínimo, função e quociente diferencial, ele removeu as falhas que ainda persistiam no cálculo infinitesimal, livrou-o de todas as noções vagas a respeito do infinitesimal e desse modo resolveu definitivamente as dificuldades advindas desse conceito.

Se em análise, hoje, existe harmonia e segurança no emprego dos métodos dedutivos baseados nos conceitos de número irracional e limite e se mesmo nas questões mais complexas da teoria das equações diferenciais e integrais, não obstante o uso das mais variadas e engenhosas combinações de diferentes tipos de limite, existe unanimidade com respeito aos resultados obtidos, isso ocorre substancialmente devido ao trabalho científico de Weierstrass.

Contudo, a despeito da fundamentação que Weierstrass obteve para o cálculo infinitesimal, as disputas a respeito dos fundamentos da análise ainda não tiveram fim.

A razão dessas disputas consiste no fato de que o significado do *infinito* para a matemática ainda não foi completamente clarificado. De fato, a análise de Weierstrass eliminou o infinitamente grande e o infinitamente pequeno, reduzindo as proposições correspondentes a relações entre magnitudes finitas. Contudo o infinito ainda aparece nas séries numéricas infinitas que definem os números reais e no conceito de sistema de números reais, o qual é concebido como uma totalidade completa e terminada.

Em sua fundamentação da análise, Weierstrass recorreu livre e reiteradamente às formas de dedução lógica envolvendo o infinito, como por exemplo, quando se trata de *todos* os números reais com uma certa propriedade, ou quando se argumenta que *existem* números reais com uma certa propriedade.

Portanto, o infinito pode reaparecer disfarçado na teoria de Weierstrass, escapando da sua aguda crítica e daí segue que o *problema do infinito*, no sentido indicado, é o que nós temos que resolver de uma vez por todas. Tal como nos processos limite do cálculo infinitesimal, onde o infinito no sentido do infinitamente grande e do infinitamente pequeno acabou se mostrando uma mera figura de linguagem, também o infinito na forma de totalidade, ainda utilizado nos métodos dedutivos, deve ser entendido como uma ilusão. Do mesmo modo em que operações

com o infinitamente pequeno foram substituídas por operações com o finito que apresentam exatamente os mesmos resultados e as mesmas elegantes relações formais, os métodos dedutivos baseados no infinito devem ser substituídos por procedimentos finitos que produzam exatamente os mesmos resultados, isto é, que tornem possível as mesmas cadeias de provas e os mesmos métodos de obtenção de fórmulas e teoremas.

Esta é a intenção da minha teoria. Ela tem por objetivo estabelecer de uma vez por todas a confiabilidade definitiva dos métodos matemáticos, o que o período crítico do cálculo infinitesimal ainda não conseguiu; essa teoria deveria portanto completar o que Weierstrass aspirou conseguir com sua fundamentação da análise e para a qual ele deu um passo essencial e necessário.

Mas a questão da clarificação do conceito de infinito leva em consideração uma perspectiva ainda mais geral. Um leitor atento encontrará a literatura matemática repleta de disparates e absurdos que têm sua raiz no infinito. Assim, por exemplo, quando se afirma, à guisa de condição restritiva, que em matemática rigorosa somente um número *finito* de deduções é admissível numa prova – como se alguém houvesse obtido uma prova com infinitas deduções!

Velhas objeções, que já se supunham há muito abandonadas, ainda reaparecem em novas formas. Por exemplo, apareceu recentemente a seguinte: embora possa ser possível introduzir um conceito sem perigo, isto é, sem obter contradições e mesmo que isso possa ser demonstrado, não está com isso a introdução do conceito ainda justificada. Não é essa precisamente a objeção que havia sido levantada contra os números complexos-imaginários quando se dizia: “De fato, seu uso não leva a nenhuma contradição. No entanto, sua introdução não está justificada, pois magnitudes imaginárias não existem”? Não; se, além da prova de consistência, a questão da justificação de uma medida tiver algum sentido, isso só pode consistir de seu grau de sucesso. Em qualquer atividade o sucesso é essencial; também aqui o sucesso é a suprema corte perante a qual todos se curvam.

Outros autores enxergam contradições – como fantasmas – mesmo onde nenhuma asserção foi proferida, a saber, no próprio mundo concreto das sensações, cujo “funcionamento consistente” é tomado como uma premissa essencial. Eu tenho sempre acreditado, contudo, que somente asserções e hipóteses na medida que estas conduzem a asserções por meio de deduções, podem contradizer-se umas às outras; a opinião de que fatos e eventos possam contradizer-se uns aos outros me parece um exemplo primoroso de pensamento descuidado.

Através destas observações quero apenas mostrar que o esclarecimento definitivo da *natureza do infinito*, muito mais do que interessar ao conhecimento científico especializado, é necessário para a própria *dignidade do intelecto humano*.

O infinito, como nenhuma outra questão, abala tão profundamente as *emoções* humanas; o infinito, como nenhuma outra *idéia*, tão frutiferamente tem estimulado a mente; o infinito, como nenhum outro *conceito*, necessita ser *esclarecido*.

Se quisermos nos voltar a esta tarefa de clarificar a natureza do infinito, devemos primeiramente notar de maneira breve o sentido que na realidade é dado ao infinito. Vamos analisar primeiramente o que podemos aprender da física. A primeira impressão ingênua dos eventos naturais e da matéria é a de estabilidade e continuidade. Se considerarmos uma peça de metal ou um volume de um fluído, temos a impressão de que podemos dividi-los indefinidamente, que mesmo o pedaço menor deles ainda conservará as mesmas propriedades do todo. Porém, em todas as direções em que os métodos de investigação da física da matéria foram suficientemente refinados, chega-se às fronteiras da indivisibilidade, que não depende do fracasso de nossos esforços, mas da natureza própria das coisas. De tal modo que se pode considerar a tendência da física moderna como de emancipação do infinitamente pequeno; em lugar do antigo princípio *natura non facit saltus* poderíamos mesmo afirmar o oposto, “a natureza dá saltos”.

É sabido que toda matéria é composta de pequenas partículas, os *átomos*, cujas combinações e ligações produzem toda a variedade de objetos macroscópicos. Mas a física não ficou só no atomismo da matéria. No fim do século passado apareceu o atomismo da eletricidade, que parecia ainda mais estranho à primeira vista. Conquanto até aquele momento fosse vista como um fluído e considerada um agente contínuo, a eletricidade mostrou-se constituída de *elétrons* positivos e negativos.

Fora do domínio da matéria e da eletricidade existe ainda na física uma entidade onde vale a lei da conservação, a saber, a energia. Foi mostrado que nem mesmo a energia admite incondicionalmente infinita divisibilidade. Planck descobriu os *quanta de energia*.

Portanto, um contínuo homogêneo que admita o tipo de divisibilidade de forma a tornar real o infinito através do pequeno não se encontra em nenhum lugar da realidade. A infinita divisibilidade do contínuo é uma operação que existe somente em pensamento, uma mera idéia que de fato é rejeitada por nossas observações e nossas experiências da física e da química.

O segundo lugar onde nos deparamos com o problema de encontrar o infinito na natureza é na consideração do universo como um todo. Temos aqui que investigar a expansão do universo para determinar se ele contém algo infinitamente grande.

A opinião sobre a infinidade do mundo foi vigente durante muito tempo. Até Kant, e ainda mais adiante, não se punha em dúvida a infinidade do espaço.

Aqui de novo a ciência moderna, em particular a astronomia, reabriu a questão e tenta

resolvê-la sem qualquer auxílio da defeituosa especulação metafísica, mas por raciocínios baseados em experimentos e na aplicação das leis da natureza. Severas objeções contra o infinito foram levantadas. A aceitação da infinitude do espaço segue necessariamente da *geometria euclideana*. Embora a geometria euclideana seja um sistema conceitual consistente, não segue daí que tenha existência real. Se o espaço é ou não euclidiano só pode ser decidido através de observação e experimentação. Na tentativa de se provar a infinidade do espaço por pura especulação foram cometidos erros grosseiros. Do fato de que além de uma certa porção de espaço existe sempre mais espaço, segue somente que o espaço é ilimitado, mas não que seja infinito. Ilimitabilidade e finitude não se excluem. A pesquisa matemática oferece na chamada geometria *elíptica* um modelo natural para um universo finito. O abandono da geometria euclideana não é mais hoje em dia mera especulação matemática ou filosófica, mas é sustentado por considerações que originalmente não tinham nenhuma relação com a questão da finitude do universo. Einstein mostrou a necessidade de se abandonar a geometria euclideana. Com base em sua teoria gravitacional, ele retoma as questões cosmológicas e mostra que um universo finito é possível e todos os resultados da astronomia são compatíveis com a hipótese de um universo elíptico.

Pudemos estabelecer que o universo é finito em relação a dois aspectos: ao infinitamente grande e ao infinitamente pequeno. Porém pode perfeitamente acontecer que o infinito tenha um lugar justificado *em nosso pensamento* e que tenha aí o papel de um conceito indispensável. Vejamos como é a situação na matemática, interrogando primeiro a mais pura e ingênua criação do espírito humano, que é a teoria dos números. Consideremos um exemplo da rica variedade de fórmulas elementares da teoria de números:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$$

Dado que podemos substituir  $n$  por qualquer inteiro, por exemplo,  $n=2$  ou  $n=5$ ; esta fórmula contém implicitamente *infinitas* proposições. Esta característica é essencial à fórmula e é por isso que ela represente a solução de um problema aritmético e precisa de uma prova, enquanto as equações numéricas particulares

$$1^2 + 2^2 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11$$

podem ser verificadas através de cálculo simples e são portanto individualmente desprovidas de interesse especial.



Uma outra concepção da noção de infinito completamente diferente e singular é encontrada no importante e frutífero método dos *elementos ideais*. Mesmo na geometria plana elementar este método encontra aplicação. Neste caso os pontos e retas do plano possuem existência real originária. Para eles vale, entre outros, o axioma da conectividade: por dois pontos passa sempre uma e somente uma reta. Segue daí que duas retas podem se interseccionar no máximo em um ponto. Não vale como teorema que duas retas se cortem sempre em um único ponto, pois duas retas podem ser paralelas. Contudo, sabe-se que através da introdução de elementos ideais, a saber, de retas infinitamente longas e pontos no infinito, podemos obter como teorema que duas retas sempre se interceptam em um e somente um ponto. Estes elementos “infinitamente distantes” têm a vantagem de tornar o sistema das leis de conexão tão simples e universal quanto possível. Ainda mais, por causa da simetria entre retas e pontos resulta o tão frutífero princípio da dualidade da geometria.

Outro exemplo do uso dos elementos ideais ocorre nas conhecidas magnitudes *complexo-imaginárias* da álgebra, que simplificam os teoremas sobre a existência e quantidade de raízes de uma equação.

Tal como em geometria infinitas retas paralelas entre si podem ser utilizadas na definição de um ponto ideal, também na aritmética certos sistemas infinitos de números podem ser considerados como *ideais*, e constituem o uso mais genial do princípio dos elementos ideais. Se isso é feito num corpo algébrico de números, recuperamos as propriedades simples e bem-conhecidas de divisibilidade, tais como valem para os números inteiros 1, 2, 3, 4, ... . Já chegamos aqui ao domínio da aritmética superior.

Vamos agora nos voltar à análise matemática, este produto mais fino e elaborado da ciência matemática. Vocês já conhecem o papel preponderante que o infinito aí desempenha e como de certa forma a análise matemática pode ser considerada uma sinfonia do infinito.

O enorme progresso realizado no cálculo infinitesimal resulta principalmente das operações com sistemas matemáticos com infinitos elementos. Como parece bastante plausível identificar infinito com “muito grande”, logo apareceram inconsistências, os chamados paradoxos do cálculo infinitesimal, em parte já conhecidos dos antigos sofistas. Constituiu progresso fundamental o reconhecimento de que muitos teoremas que valem para o finito (por exemplo, de que a parte é menor que o todo, existência de mínimo e máximo, intercâmbio da ordem dos termos entre

soma e produto) não podem ser imediata e irrestritamente estendidos para o infinito. Afirmei no começo da minha conferência que estas questões tinham sido completamente elucidadas, notadamente como consequência da acuidade de Weierstrass e hoje a análise é não somente uma ferramenta infalível como um instrumento prático para uso do infinito.

Mas a análise por si só não nos conduz à compreensão mais profunda da natureza do infinito. Esta nos é dada por uma disciplina que mais se aproxima de um método filosófico geral e que foi engendrada para lançar nova luz sobre o grande complexo das questões sobre o infinito. Esta teoria, criada por Georg Cantor, é a teoria dos conjuntos e estamos aqui interessados somente naquela parte única e original da teoria que forma o núcleo central da doutrina de Cantor, a saber, a teoria dos números *transfinitos*. Esta teoria me parece o mais refinado produto do gênio matemático e uma das façanhas supremas da pura atividade intelectual humana. O que é, então, esta teoria?

Alguém que desejasse caracterizar brevemente a nova concepção do infinito que Cantor introduziu, poderia afirmar que em análise lidamos com o infinitamente grande e o infinitamente pequeno somente como conceitos-limite, como algo a acontecer ou vir a ser, isto é, como *infinito potencial*. Mas este não é o verdadeiro infinito. Encontramos o verdadeiro infinito somente quando consideramos a totalidade dos números 1, 2, 3, 4, ... como uma unidade completa, ou quando tomamos os pontos de um intervalo como uma totalidade que existe, de uma só vez. Este tipo de infinito é conhecido como *infinito atual* ou *completado*.

Frege e Dedekind, os dois mais célebres matemáticos por seu trabalho nos fundamentos da matemática, usaram o infinito atual— independentemente um do outro— para prover fundamento para a aritmética que fosse independente da intuição e da experiência, somente baseado pura lógica e deduzindo toda a aritmética a partir dela. Dedekind chegou mesmo ao ponto de evitar o uso intuitivo de número finito, derivando este conceito a partir da noção de conjunto infinito. Foi Cantor, porém, quem desenvolveu sistematicamente o conceito de infinito atual. Retomemos os dois exemplos de infinito citados:

- 1, 2, 3, 4, ...
- Os pontos do intervalo entre 0 e 1, ou, o que é o mesmo, a totalidade dos números reais entre 0 e 1;

é bastante natural considerar estes exemplos do ponto de vista de sua magnitude, mas

tal tratamento revela resultados surpreendentes, conhecidos de todo matemático hoje em dia. De fato, quando consideramos o conjunto de todos os números racionais, isto é, as frações

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{3}{7}, \dots$$

notamos que do ponto de vista de seu tamanho este conjunto não é maior que o dos inteiros: dizemos que os racionais podem ser enumerados. O mesmo vale para o conjunto de todas as raízes de números inteiros e também para o conjunto de todos os números algébricos. O segundo exemplo é análogo: surpreendentemente, o conjunto dos pontos de um quadrado ou cubo não é maior do que o conjunto dos pontos no intervalo de 0 a 1. O mesmo vale para o conjunto de todas as funções contínuas. Quem vivencia estes fatos pela primeira vez, pode ser levado a pensar que do ponto de vista do tamanho existe um único infinito. Não. Os conjuntos em nossos exemplos (1) e (2) não são, como se diz, “equipotentes”; de fato, o conjunto (2) não pode ser enumerado, senão que é maior que o conjunto (1). Encontramos aqui o que é novo e característico da teoria de Cantor: os pontos do intervalo não podem ser enumerados da maneira usual, isto é, contando 1, 2, 3, ... . Mas já que admitimos o infinito atual, nada nos obriga a parar aí. Quando tivermos contado 1, 2, 3, ... , poderemos tomar os objetos assim enumerados como um conjunto infinito completado. Se, seguindo Cantor, chamarmos  $\omega$  a este tipo de ordem, então a contagem continua naturalmente como  $\omega+1$ ,  $\omega+2$ , ... até  $\omega+\omega$  ou  $\omega.2$  e daí de novo como  $\omega.2+1$ ,  $\omega.2+2$ ,  $\omega.2+3$ , ...  $\omega.2+\omega=\omega.3$  e novamente como  $\omega.2$ ,  $\omega.3$ ,  $\omega.4$ , ...,  $\omega.\omega = \omega^2$ ,  $\omega^2+1$ , até obter finalmente a seguinte tabela:

1, 2, 3, ...  
 $\omega$ ,  $\omega+1$ ,  $\omega+2$ , ...  
 $\omega.2$ ,  $\omega.2+1$ ,  $\omega.2+2$ , ...  
 $\omega.3$ ,  $\omega.3+1$ ,  $\omega.3+2$ , ...  
 $\omega^2$ ,  $\omega^2+1$ , ...  
 $\omega^2 + \omega$ ,  $\omega^2 + \omega.2$ ,  $\omega^2 + \omega.3$ , ...  
 $\omega^2.2$ , ...  
 $\omega^2.2+\omega$ , ...  
 $\omega^3$ , ...

$$\omega^4, \dots$$

$$\dots$$

$$\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots$$

Estes são os primeiros números transfinitos de Cantor, chamados por ele de números da segunda classe. Obtemos estes números simplesmente estendendo o processo de contagem além da enumeração ordinária, isto é, através de uma continuação natural e unicamente determinada da contagem usual finita. Da mesma forma como, até agora, temos contado somente o primeiro, segundo, terceiro, ... elemento de um conjunto, contamos também o  $\omega$ -ésimo,  $(\omega + 1)$ -ésimo,  $\omega^\omega$ -ésimo elemento.

A partir destes resultados pode-se perguntar se realmente podemos usar a contagem com respeito a tais conjuntos, que não são enumeráveis no sentido usual.

Cantor desenvolveu com base nestes conceitos e com bastante sucesso, a teoria dos números transfinitos e formulou um cálculo para eles. Desta forma, graças ao esforço hercúleo de Frege, Dedekind e Cantor o infinito se fez rei e reinou em grande triunfo. Em vôo vertiginoso, o infinito atingiu o pináculo da glória.

A reação, porém, não se fez esperar e veio de maneira realmente dramática. Ela aconteceu de forma perfeitamente análoga à reação que havia ocorrido contra o cálculo infinitesimal. No afã do descobrimento de resultados novos e importantes os matemáticos prestavam pouca atenção à validade de seus métodos dedutivos; então, simplesmente como resultado da mera aplicação de definições e métodos dedutivos que já pareciam costumeiros, contradições começaram gradualmente a aparecer. A princípio esporádicas, foram se tornando mais e mais agudas e sérias, até chegar aos paradoxos da teoria dos conjuntos. Em especial, uma contradição descoberta por Zermelo e Russell teve um efeito catastrófico quando se tornou conhecida no mundo da matemática. Confrontados com este paradoxo, Dedekind e Frege abandonaram completamente seu próprio ponto de vista e bateram em retirada. Dedekind hesitou longo tempo antes de permitir uma reedição de seu tratado que marcou época, *Was sind und was sollen die Zahlen*. Frege, num apêndice, teve que reconhecer que seu livro *Grundgesetze der Mathematik* estava no rumo errado. A doutrina de Cantor, também, foi atacada de todos os lados. A reação foi tão violenta que até os conceitos mais naturais e os métodos mais simples e importantes da matemática foram

ameaçados e seu emprego esteve na iminência de ser considerado ilícito. Os defensores da antiga ordem, é claro, não faltaram, mas sua estratégia defensiva era muito débil e eles nunca puderam formar uma frente unida na defesa de seus pontos-chave. Os remédios contra os paradoxos eram demasiados e os métodos propostos variados demais. Deve-se admitir que o presente estado de coisas em relação aos paradoxos é intolerável. Pense nisso: as definições e métodos dedutivos que todos aprendem, ensinam e usam em matemática, o paradigma da verdade e certeza, levam a absurdos! Se o raciocínio matemático é defeituoso, onde encontraremos verdade e certeza?

Existe, contudo, um caminho satisfatório para evitar os paradoxos sem trair nossa ciência. As atitudes que nos ajudarão a achar este caminho e a direção a tomar são as seguintes:

1. Definições frutíferas e métodos dedutivos que tiverem uma esperança de salvamento serão cuidadosamente investigados, nutridos e fortalecidos. Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.
2. É necessário estabelecer para todas as deduções matemáticas o mesmo grau de certeza das deduções da teoria elementar dos números, onde ninguém duvida e onde contradições e paradoxos só ocorrem devido a nosso descuido.

O completamento desta tarefa só será possível quando tivermos elucidado completamente a *natureza do infinito*.

Já vimos que o infinito não se acha em lugar algum da realidade, não importa a quais experimentos, observações e conhecimento lancemos mão. É possível que nosso pensamento a respeito da realidade seja tão distinto da própria realidade? Podem os processos de pensamento ser tão diferentes dos processos reais? Não parece claro, ao contrário, que quando pensamos haver encontrado o infinito em algum sentido real, tenhamos na verdade sido meramente iludidos pelo fato de que freqüentemente encontramos dimensões extremamente pequenas e grandes na realidade?

A dedução da lógica material<sup>304</sup> já nos decepcionou ou nos deixou em posição difícil quando a aplicamos aos eventos ou coisas reais? Não – a dedução da lógica material é imprescindível! Ela nos decepcionou somente quando formamos definições abstratas, especialmente aquelas que envolvem objetos infinitários; nestes

---

<sup>304</sup> Traduzimos o termo alemão “inhaltlich” como “material” (por exemplo, em “inhaltliche Logik” como “lógica material” no sentido de “concreta”).

casos estivemos usando a lógica material de forma ilegítima, isto é, não atentamos suficientemente para os pré-requisitos necessários para seu uso correto. Ao reconhecer que existam tais pré-requisitos que devem ser levados em conta, encontramos-nos em pleno acordo com os filósofos, notadamente com Kant. Já Kant havia ensinado e isso é parte integral de sua doutrina, que a matemática trata de um tema independente da lógica, portanto a matemática não pode e nem poderá nunca ser fundamentada somente na lógica. Conseqüentemente, as tentativas de Frege e Dedekind nesse sentido estariam fadadas ao erro. Como outra pré-condição para o uso da dedução lógica e para as operações lógicas devem ser considerados objetos concretos extra-lógicos, que existem com base na experiência imediata previamente a todo pensamento.

Para que as deduções lógicas sejam seguras, devemos ser capazes de vislumbrar todos os aspectos destes objetos, e seu reconhecimento, distinção e ordenação são dados, juntamente com os próprios objetos, como coisas que não podem ser reduzidas a outras ou requerer qualquer redução. Tal é a filosofia básica que eu acredito necessária, não só para a matemática, mas para toda comunicação, entendimento e pensamento científicos. Em especial na matemática, seu objeto deve consistir, desta forma, nos próprios símbolos concretos cuja estrutura é imediatamente clara e reconhecível.

Tenhamos presente a natureza e os métodos da teoria elementar finitária dos números. Esta teoria pode certamente ser construída a partir de estruturas numéricas, através de considerações materiais intuitivas. Mas certamente a matemática não consiste somente de equações numéricas e certamente não pode a elas ser reduzida. Contudo pode-se argumentar que a matemática é um aparato que, quando aplicado aos inteiros, sempre produz equações numéricas corretas. Mesmo assim, ainda temos que investigar a estrutura deste aparato o suficiente para garantir que ele de fato sempre produzirá equações corretas. Para levar a efeito tal investigação dispomos somente dos mesmos métodos finitários, materiais concretos que servem para derivar equações numéricas na teoria dos números. Esta exigência científica pode ser de fato satisfeita, ou seja, é possível, de uma maneira puramente intuitiva e finitária - do mesmo modo como obtemos as proposições verdadeiras da teoria dos números - conseguir as intuições que garantam a confiabilidade do aparato matemático.

Consideremos a teoria dos números mais de perto. Na teoria dos números temos os símbolos numéricos:

1, 11, 111, 11111

onde cada símbolo é intuitivamente reconhecido pelo fato de que contém somente 1's. Estes símbolos numéricos que são nosso objeto de estudo não têm em si mesmo nenhum significado. Adicionalmente a estes símbolos, mesmo na teoria elementar dos números, temos outros que possuem significado e que servem para facilitar a comunicação: por exemplo, o símbolo 2 é usado como uma abreviação para o símbolo numérico 11 e 3 como uma abreviação para 111. Usamos ainda símbolos como +, = e > para comunicar proposições. Já  $2+3=3+2$  pretende comunicar o fato de que  $2+3$  e  $3+2$ , levando em conta as abreviações, são o mesmo e idêntico símbolo, a saber, o símbolo numérico 11111. Similarmente,  $3 > 2$  serve para comunicar o fato de que o símbolo 3, isto é, 111, é mais longo do que o símbolo 2, isto é, 11; ou, em outras palavras, que o último é parte própria do primeiro.

Usamos também as letras **a**, **b**, **c** para comunicação<sup>305</sup>. Desta forma, **b>a** comunica o fato que o símbolo numérico **b** é mais longo do que o símbolo numérico **a**. Sob este ponto de vista, **a+b=b+a** comunica somente o fato de que o símbolo numérico **a+b** é o mesmo que **b+a**. O conteúdo material do que é comunicado pode também ser demonstrado através de regras da dedução material e de fato este tipo de tratamento pode nos levar bastante longe.

Gostaria de dar um primeiro exemplo onde este método intuitivo é transcendido. O maior número primo conhecido é o seguinte: (39 dígitos)

**p** = 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727

Pelo conhecido método de Euclides podemos dar uma demonstração, que cabe inteiramente dentro de nosso enfoque finitário, de que existe pelo menos um novo número primo entre **p+1** e **p!+1**. A forma da proposição já é perfeitamente apropriada ao enfoque finitário, pois a expressão “existe” somente abrevia a expressão seguinte: é certo que **p+1** ou **p+2** ou **p+3** ... ou **p!+1** é primo. Mais ainda, desde que é a mesma coisa, nesse caso, dizer que existe um número primo tal que é:

1.  $> \mathbf{p}$  e simultaneamente,
2.  $\leq \mathbf{p!+1}$ ,

podemos chegar à idéia de formular um teorema que expressa somente uma parte do teorema euclideano, isto é, podemos formular um teorema que afirma que existe um primo  $> \mathbf{p}$ . Embora este último teorema seja muito mais fraco em termos de conteúdo,

---

<sup>305</sup>Utilizamos letras em negrito onde Hilbert utilizava letras góticas.

já que afirma apenas parte da proposição euclideana e embora a passagem do teorema euclideano a este seja praticamente inócua, esta passagem envolve um passo transfinito quando a proposição parcial é tomada fora de contexto e considerada de forma independente.

Como pode ser isso? Porque temos uma proposição existencial! É verdade que tínhamos uma proposição similar no teorema euclideano, mas naquele caso o “existe”, como mencionado, é apenas uma abreviação para “ $p+1$  ou  $p+2$  ou  $p+3$  ... ou  $p!+1$  é um número primo”, exatamente como eu poderia dizer, ao invés de “ou este pedaço de giz, ou este pedaço, ... , ou este pedaço é vermelho” que “existe um objeto” com uma certa propriedade numa totalidade finita conforma-se perfeitamente a nosso enfoque finitário. Mas uma proposição da forma “ou  $p+1$  ou  $p+2$  ou  $p+3$  ... ou (*ad infinitum*) ... satisfaz uma certa propriedade” consiste na verdade em um produto lógico infinito. Uma tal extensão na direção do infinito, a menos que se tomem precauções adicionais, não é mais lícita que a extensão do finito ao infinito no cálculo integral e diferencial; sem cuidado adicional, ela nem em significado.

De nossa posição finitária, uma proposição existencial da forma “existe um número com uma certa propriedade” em geral só tem significado como uma proposição parcial, isto é, como parte de uma proposição melhor determinada. A formulação mais precisa, contudo, para muitos propósitos pode ser desnecessária.

Encontramos o infinito analisando uma proposição existencial cujo conteúdo não pode ser expresso por uma disjunção finita. De modo similar, negando uma proposição geral, que se refere a símbolos numéricos arbitrários, obtemos uma proposição transfinita. Por exemplo, a proposição que se  $a$  é um símbolo numérico então  $a+1=1+a$  vale sempre, de nossa perspectiva finitária é *incapaz de negação*. Veremos melhor isso se considerarmos que este enunciado não pode ser interpretado como uma conjunção de infinitas equações numéricas conectadas através de “e” mas somente como um juízo hipotético que afirma algo no caso de ser dado um símbolo numérico.

A partir de nossa posição finitária, portanto, não se pode sustentar que uma equação como aquela dada acima, onde ocorre um símbolo numérico arbitrário, ou é válida para todo símbolo ou é refutada por um contra-exemplo. Um tal argumento, sendo uma aplicação da lei do terceiro excluído, fundamenta-se na pressuposição de que a asserção da validade universal desta equação é passível de negação.

De todo modo, constatamos o seguinte: se nos colocamos no domínio das



asserções finitárias, como de resto deveríamos, temos em geral que conviver com leis lógicas muito complicadas. A complexidade torna-se insuportável quando as expressões “para todo” e “existe” são combinadas e involucradas. Em suma, as leis lógicas que Aristóteles professava e que a humanidade tem usado desde os primórdios do pensamento não mais valeriam. Podemos, é claro, desenvolver novas leis que valham especificamente para o domínio das proposições finitárias. Mas não nos traria nenhum proveito desenvolver tal lógica, pois não queremos nos livrar das leis simples da lógica de Aristóteles e ninguém, ainda que falasse a língua dos anjos, poderia impedir as pessoas de negar proposições gerais, ou de formar juízos parciais, ou de fazer uso do *tertium non datur*. Como devemos, então, proceder?

Vamos lembrar que *somos matemáticos* e que como matemáticos temos estado muitas vezes em situação precária, da qual fomos resgatados pelo método genial dos elementos ideais. Alguns exemplos ilustrativos do uso deste método foram vistos no início desta conferência.

Da mesma forma que  $i = \sqrt{-1}$  foi introduzido para preservar da forma mais simples as leis da álgebra (por exemplo, as leis sobre existência e quantidade de raízes numa equação); da mesma forma que os fatores ideais foram introduzidos para preservar as leis simples de divisibilidade para números algébricos (por exemplo um divisor comum ideal para os números 2 e  $1 + \sqrt{-5}$  pode ser introduzido, embora tal divisor na realidade não exista); similarmente, para preservar as regras formais simples da lógica de Aristóteles devemos *suplementar as asserções finitárias com asserções ideais*. É irônico que os métodos dedutivos que Kronecker tão veementemente atacava constituam a exata contraparte do que o próprio Kronecker tão entusiasticamente admirava no trabalho de Kummer na teoria dos números, e que ele apreciava mesmo como o mais alto feito da matemática.

De que forma obtemos *asserções ideais*? É um fato notável e ao mesmo tempo favorável e promissor que, para obter elementos ideais, precisemos apenas continuar de maneira óbvia e natural o desenvolvimento que a teoria dos fundamentos da matemática já traçou. De fato, devemos ter claro que mesmo a matemática elementar vai além da teoria intuitiva dos números. Esta não inclui, por exemplo, os métodos de computação algébrica literal. As fórmulas da teoria intuitiva dos números têm sido sempre usadas exclusivamente com o propósito de comunicar. As letras representam símbolos numéricos e uma equação comunica o fato de que dois símbolos coincidem.

Em álgebra, por outro lado, as expressões literais são estruturas que formalizam o conteúdo material da teoria dos números. Em lugar de asserções sobre símbolos numéricos temos fórmulas que são elas próprias o objeto concreto de estudo. No lugar de provas na teoria dos números temos derivações de fórmulas a partir de outras fórmulas, de acordo com certas regras determinadas.

Ocorre, portanto, como vemos na álgebra, uma proliferação de objetos finitários. Até agora os únicos objetos eram símbolos numéricos como 1, 11, ..., 11111. Estes constituíam o único objeto do tratamento material. Mas a prática matemática vai mais longe, mesmo na álgebra. De fato, mesmo quando uma asserção é válida de acordo com seu significado e pressupondo nosso ponto de vista finitário, como, por exemplo, no caso do teorema que afirma que sempre

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

onde **a** e **b** representam símbolos numéricos particulares, ainda nesse caso preferimos não usar esta forma de comunicação, mas substituí-la pela fórmula:

$$a + b = b + a$$

Esta última não constitui de maneira nenhuma uma comunicação com significado imediato, mas uma certa estrutura formal cuja relação com as antigas asserções finitárias:

$$2 + 3 = 3 + 2,$$

$$5 + 7 = 7 + 5,$$

consiste no fato de que, quando  $a$  e  $b$  são substituídos na fórmula pelos símbolos numéricos 2, 3, 5, 7, obtêm-se proposições finitárias e este ato de substituição pode ser visto como um procedimento de prova, ainda que muito simples. Concluímos então que  $a, b, =, +$  e também as fórmulas completas  $a+b=b+a$  não possuem significado próprio tanto quanto os símbolos numéricos. Contudo, podemos derivar outras fórmulas a partir destas, às quais podemos associar um significado, interpretando-as como comunicações a respeito de proposições finitárias. De maneira geral, podemos conceber a matemática como uma coleção de fórmulas de duas espécies: primeiramente, aquelas às quais correspondem as comunicações de asserções finitárias com sentido e, em segundo lugar, outras fórmulas sem significado e que são a *estrutura ideal da nossa teoria*.

Qual era então nosso objetivo? Em matemática, por um lado, encontramos proposições finitárias que contêm somente símbolos numéricos, por exemplo:

$$3 > 2, 2 + 3 = 3 + 2, 2 = 3, 1 \leftarrow 1$$

que, de nosso enfoque finitário, são imediatamente intuídas e compreendidas, sem recurso adicional; estas proposições podem ser negadas, elas são verdadeiras ou falsas e podemos aplicar a elas a lógica aristotélica de maneira irrestrita, sem precauções especiais. Para elas vale o princípio da não-contradição, isto é, uma proposição e sua negação não podem ser ambas verdadeiras. Vale também o *tertium non datur*, isto é, uma proposição, ou sua negação, é verdadeira. Afirmar que uma proposição é falsa equivale a afirmar que a sua negação é verdadeira. Por outro lado, além destas proposições elementares não problemáticas, encontramos outras asserções finitárias mais problemáticas, como aquelas que não podem ser divididas em asserções parciais. Finalmente introduzimos as proposições ideais com o intuito de que as leis usuais da lógica possam valer universalmente. Mas desde que estas proposições ideais, isto é, as fórmulas, não significam nada uma vez que não expressam proposições finitárias, as operações lógicas não podem ser materialmente aplicadas a elas do mesmo modo como o são para proposições finitárias.

É, portanto, necessário formalizar as próprias operações lógicas e demonstrações matemáticas. Uma tal formalização requer transformar relações lógicas em fórmulas. Portanto, junto com os símbolos matemáticos, precisamos também introduzir símbolos lógicos tais como:

$$\begin{array}{cccc} \&, & \vee & \rightarrow, & \sim \\ \text{(conjunção)} & \text{(disjunção)} & \text{(implicação)} & \text{(negação)} \end{array}$$

e, juntamente com as variáveis  $a, b, c, \dots$  devemos também empregar variáveis lógicas, ou seja, as variáveis proposicionais  $A, B, C \dots$ .

Como isso pode ser feito? Felizmente, a mesma harmonia preestabelecida que tantas vezes encontramos vigente na história do desenvolvimento da ciência – a mesma que ajudou Einstein, dando a ele o cálculo geral de invariantes já previamente trabalhado para sua teoria gravitacional – vem também em nossa ajuda: encontramos o cálculo lógico já previamente trabalhado. Na verdade, este cálculo lógico foi desenvolvido originalmente de uma perspectiva completamente distinta. Os símbolos do cálculo lógico foram originalmente introduzidos para comunicar. Contudo, é consistente com nossa perspectiva finitária negar qualquer significado aos símbolos lógicos, como negamos significado aos símbolos matemáticos e

declarar que as fórmulas do cálculo lógico são proposições ideais sem qualquer significado próprio. Possuímos, no cálculo lógico, uma linguagem simbólica capaz de transformar asserções matemáticas em fórmulas e capaz de expressar a dedução lógica por meio de procedimentos formais. Em exata analogia com a transição da teoria material dos números à álgebra formal, tratamos agora os sinais e símbolos de operação do cálculo lógico abstraindo do seu significado. Desta forma, finalmente, obtemos, ao invés do conhecimento matemático material que é comunicado através da linguagem comum, somente uma coleção de fórmulas envolvendo símbolos lógicos e matemáticos que são gerados sucessivamente, de acordo com regras determinadas. Algumas dessas fórmulas correspondem a axiomas matemáticos e as regras segundo as quais fórmulas são derivadas umas das outras correspondem à dedução material. A dedução material é então substituída por um procedimento formal governado por regras. A passagem rigorosa do tratamento ingênuo para o formal, portanto, é levada a efeito tanto pelos axiomas (os quais, embora originalmente vistos como verdades básicas têm sido tratados na axiomática moderna como meras relações entre conceitos), como pelo cálculo lógico (originalmente considerado como não mais que uma linguagem diferente).

Vamos agora explicar brevemente como podemos formalizar as *demonstrações matemáticas*.

Estamos portanto em posição de levar adiante nossa teoria da prova e construir um sistema de fórmulas demonstráveis, ou seja, de toda a matemática.

Mas em nosso regozijo pela conquista e em particular pela nossa alegria em encontrar um instrumento indispensável, o cálculo lógico, já pronto de antemão e sem nenhum esforço de nossa parte, não devemos esquecer a condição essencial de nosso trabalho. Há apenas uma condição, embora seja uma condição absolutamente necessária, ligada ao método dos elementos ideais: a *prova de consistência*, pois a extensão de um domínio através da adição de elementos ideais só é legitimada se a extensão não causa o aparecimento de contradições no domínio inicial, ou seja, somente se as relações válidas nas novas estruturas continuarem a ser válidas no domínio anterior, quando os elementos ideais são canceladas. O problema da consistência nas presentes circunstâncias é passível de ser tratado. Ele se reduz, obviamente, a provar que a partir dos nossos axiomas e através das regras estabelecidas não podemos obter “ $1 \leftarrow 1$ ” como a última fórmula numa demonstração, ou, em outros termos, que  $1 \leftarrow 1$  não é uma fórmula demonstrável. Esta é uma tarefa

que cabe no domínio do tratamento intuitivo, tanto quanto, por exemplo, a tarefa de obter uma prova da irracionalidade de  $\sqrt{2}$  na teoria dos números, isto é, uma prova de que é impossível encontrar dois símbolos numéricos **a** e **b** que satisfaçam a relação  $\mathbf{a}^2 = 2.\mathbf{b}^2$ , ou, em outras palavras, que não se pode neste caso produzir dois símbolos numéricos com uma certa propriedade. Similarmente, é nossa incumbência mostrar que um tal tipo de prova não se pode produzir. Uma prova formalizada, tal qual um símbolo numérico, é um objeto concreto e visível. Podemos descrevê-la completamente, do começo ao fim. Mais ainda, o requisito de que a última fórmula seja 11 é uma propriedade concreta da prova. Podemos, de fato, demonstrar que não é possível obter uma prova que termine com aquela fórmula, e justificamos assim nossa introdução das proposições ideais.

É ainda uma agradável surpresa descobrir que, ao mesmo tempo, resolvemos um problema que tem estado ardente por longo tempo, a saber, o problema de provar a *consistência dos axiomas da aritmética*. Onde quer que o método axiomático esteja sendo usado surge a questão de provar a consistência. Nós seguramente não queremos na escolha, compreensão e uso das regras e axiomas, apoiar-nos somente na fé cega. Na geometria e nas teorias físicas o problema é resolvido reduzindo a consistência destas teorias à dos axiomas da aritmética, mas obviamente este método não basta para provar a consistência da própria aritmética. Já que nossa teoria da prova, baseada no método dos elementos ideais, nos permite dar este último importante passo, ele deve ser a pedra fundamental da construção doutrinária da axiomática. O que já vivenciamos por duas vezes, uma vez com os paradoxos do cálculo infinitesimal, e outra vez com os paradoxos da teoria dos conjuntos, não ocorrerá uma terceira vez, nem nunca mais.

A teoria da prova que esboçamos não somente é capaz de prover uma base sólida para os fundamentos da matemática, mas também, acredito, pode prover um método geral para tratar questões matemáticas fundamentais, as quais os matemáticos até agora não foram capazes de manejar.

A matemática tornou-se uma corte de arbitragem, um supremo tribunal para decidir questões fundamentais – em bases concretas com as quais todos podem concordar e onde toda asserção pode ser controlada.

As alegações do assim chamado “Intuicionismo” – modestas como possam ser – devem, em minha opinião, primeiro receber seu certificado de validade deste tribunal.

Um exemplo do tipo de questões fundamentais que podem ser tratadas deste modo é a tese de que todo problema matemático é solúvel. Estamos todos convencidos de que seja realmente assim. De fato, uma das motivações principais para nos ocuparmos de um problema matemático é que ouvimos sempre este grito dentro de nós: aí está o problema, ache a resposta; você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois não há *ignorabimus* em matemática. Minha teoria da prova não é capaz de suprir um método geral para resolver qualquer problema matemático – simplesmente tal método não existe; contudo, a prova de que a hipótese da solubilidade de todo problema matemático não causa contradição cai no escopo da nossa teoria.

Mas quero ainda jogar um último trunfo: para uma nova teoria, sua pedra-de-toque definitiva é a habilidade de resolver problemas que, mesmo conhecidos há longo tempo, a teoria mesma não tenha sido expressamente projetada para resolver. A máxima “por seus frutos deveis reconhecê-las” aplica-se também a teorias.

Em resumo, vamos voltar ao nosso tema principal e tirar algumas conclusões a partir de nossas considerações sobre o infinito. Nosso resultado geral é que o infinito não se encontra em lugar algum na realidade. Não existe na natureza e nem oferece uma base legítima para o pensamento racional – uma notável harmonia entre existência e pensamento. Em contraste com os primeiros esforços de Frege e Dedekind, estamos convencidos de que certos conceitos e juízos preliminares são condições necessárias ao conhecimento científico, e que a lógica por si só não é suficiente. As operações com o infinito só podem ser tornadas seguras através do finitário.

O papel que resta ao infinito é somente o de uma idéia – se entendemos por uma idéia, na terminologia de Kant, um conceito da razão que transcende toda experiência e que completa o concreto como uma totalidade – uma idéia em que podemos confiar sem hesitar graças ao quadro conceitual erigido por nossa teoria.

Finalmente, quero agradecer a P. Bernays por sua inteligente colaboração e valiosa ajuda, tanto na parte técnica quanto editorial especialmente em relação à prova do teorema do contínuo.

**ANEXO C – “DIE GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK” – 1928 - BOLONHA  
(OS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA)**



BASTIDORES

**HILBERT, David.** The Foundations of Mathematics. In: SARKAR, Sahotra(Ed.), The Emergence of Logical Empiricism. New York & London: Garland Publishing Inc., 1996, p. 228-231. (Coleção Science and Philosophy in The Twentieth Century – vol. 1).

Disponível em: <https://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ge/hilbert.htm>.

Acesso em 21/7/2017.

**THE FOUNDATIONS OF MATHEMATICS**

**DAVID HILBERT (1927)**

It is a great honour and at the same time a necessity for me to round out and develop my thoughts on the foundations of mathematics, which was expounded here one day five years ago and which since then have constantly kept me most actively occupied.

With this new way of providing a foundation for mathematics, which we may appropriately call a proof theory, I pursue a significant goal, for I should like to eliminate once and for all the questions regarding the foundations of mathematics, in the form in which they are now posed, by turning every mathematical proposition into a formula that can be concretely exhibited and strictly derived, thus recasting mathematical definitions and inferences in such a way that they are unshakeable and yet provide an adequate picture of the whole science. I believe that I can attain this goal completely with my proof theory, even if a great deal of work must still be done before it is fully developed.

No more than any other science can mathematics be founded by logic alone; rather, as a condition for the use of logical inferences and the performance of logical operations, something must already be given to us in our faculty of representation, certain extra-logical concrete objects that are intuitively present as immediate experience prior to in thought. If logical inference is to be reliable, it must be possible to survey these objects completely in all their parts, and the fact that they occur, that they differ from one another, and that they follow each other, or are concatenated, is immediate, given intuitively, together with the objects, is something that neither can be reduced to anything else nor requires reduction. This is the basic philosophical position that I regard as requisite for mathematics and, in general, for all scientific thinking,

understanding, and communication. And in mathematics, in particular, we consider is the concrete signs themselves, whose shape, according to the conception we have adopted, is immediately, clear and recognisable. This is the very least that must be presupposed; no scientific thinker can dispense with it, and therefore everyone must maintain it, consciously, or not.

I shall now present the fundamental idea of my proof theory.

All the propositions that constitute in mathematics are converted into formulas, so that mathematics proper becomes all inventory of formulas. These differ from the ordinary formulas of mathematics only in that, besides the ordinary signs, the logical signs

$\Rightarrow$	$\&$	$\vee$	$\sim$	$\forall (x)$	$(\exists x)$
implies	and	or	not	for all	there exists

also occur in them. Certain formulas, which serve as building blocks for the formal edifice of mathematics, are called axioms. A proof is an array that must be given as such to our perceptual intuition of it of inferences according to the schema

$$\begin{array}{c} \check{S} \\ \check{S} \Rightarrow \check{Y} \\ \check{Y} \end{array}$$

where each of the premises, that is, the formulae,  $\check{S}$  and  $\check{S} \Rightarrow \check{Y}$  in the array either is an axiom or directly from an axiom by substitution, or else coincides with the end formula of an inference occurring earlier in the proof or results from it by substitution. A formula is said to be provable if it is either an axiom or the end formula of a proof.

The axioms and provable propositions, that is, the formulas resulting from this procedure, are copies of the thoughts constituting customary mathematics as it has developed till now.

Through the program outlined here the choice of axioms for our proof theory is already indicated; we arrange them as follows.



## I. Axioms of implication,

1.  $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$  (introduction of an assumption)
2.  $(A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$  (omission of an assumption)
3.  $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$  (interchange of assumptions)
4.  $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$  (elimination of a proposition).

II. Axioms about  $\&$  and  $\vee$ 

5.  $A \& B \Rightarrow A$ ;
6.  $A \& B \Rightarrow B$ ;
7.  $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \& B)$
8.  $A \Rightarrow A \vee B$ ;
9.  $B \Rightarrow A \vee B$ ;
10.  $((A \Rightarrow C) \& (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$ .

## III. Axioms of negation

11.  $(A \Rightarrow B \& \sim B) \Rightarrow \sim A$  (principle of contradiction);
12.  $\sim(\sim A) \Rightarrow A$  (principle of double negation).

The axioms of groups I, II, and III are nothing but the axioms of the propositional calculus. From 11 and 12 there follows, in particular, the formula  $(A \& \sim(A)) \Rightarrow B$  and further the logical principle of excluded middle,  $((A \Rightarrow B) \& (\sim A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ .

## IV. The logical e-axiom

13.  $A(a) \Rightarrow A (e(A))$ .

Here  $e(A)$  stands for an object of which the proposition  $A(a)$  certainly holds if it holds of any object at all; let us call  $e$  the logical e-function. To elucidate the role of the logical E-function let us make the following remarks.

In the formal system the e-function is used in three ways.

1. By means of e "all" and "there exists " can be defined, namely, as follows:

$$\forall(a) A(a) \Leftrightarrow A(e(\sim A)),$$

$$(\exists a) A(a) \Leftrightarrow A(e(A)),$$

Here the double arrow ( $\Leftrightarrow$ ) stands for a combination of two implication formulas; in its place we shall henceforth use the "equivalence" sign  $\equiv$ .

On the basis of this definition the e-axiom IV 13 yields the logical relations that hold for the universal and the existential quantifier, such is  $\forall(a) A(a) \Rightarrow A(b)$  (Aristotle's dictum), and  $\sim(\forall(a) A(a)) \Rightarrow (\exists a) (\sim A(a))$  (principle of excluded middle).

2. If a proposition Y holds of one and only one object, then  $e(Y)$  is the object of which Y(a) holds.

The e-function thus enables us to resolve t proposition such as Y(a), when it holds of only one object, so as to obtain  $a = e(Y)$

3. Beyond this, e takes on the role of the choice function; that is, in case A (a) holds of several objects,  $e(Y)$  is some one of the objects a of which Y(a) holds.

In addition to these purely logical axioms we have the following specifically mathematical axioms.

#### V. Axioms of equality

$$14. a = a;$$

$$15. (a = b) \Rightarrow (A(a) \Rightarrow A(b)).$$

#### VI. Axioms of Number

$$16. a' \neq 0; (\neq \text{ for "not="})$$

$$17. (A(0) \& \forall(a) (A(a) \Rightarrow A(a'))) \Rightarrow A(b) \text{ (principle of mathematical induction).}$$

Here a' denotes the number following and the integers 1, 2, 3, . . . can be written in the form 0', 0'', 0''',...

For the numbers of the second number class and of Cantor's higher number classes the corresponding induction axioms must be added; they would have to be combined, however, into a schema in agreement with Cantor's theory.

Finally, we also need explicit definitions, which introduce the notions of mathematics and have the character of axioms, as well as certain recursion axioms, which result from a general recursion schema. Before we discuss the formulation of these axioms, we must first lay down the rules that govern the use of axioms in general. For in my theory contentual inference is replaced by manipulation of signs according to rules; in this way the axiomatic method attains that reliability, and perfection that it can and must reach if it is to become the basic instrument of all theoretical research.

First, the following stipulations hold.

For mathematical variables we always use lower-case italic Latin letters, but for constant mathematical objects (specific functions) lower-case Greek letters.

For variable atomic propositions (indeterminate formulas) we always use capital italic Latin letters, but for constant atomic propositions capital Greek letters, example  $Z(a)$  [ $a$  is a natural number] and  $N(a)$  [ $a$  is a number of the second number class].

Concerning the procedure of substitution, the following general conventions hold.

For propositional variables we may substitute only formulas, that is, arrays constructed from elementary formulas by means of the logical signs

$$\Rightarrow \quad \& \quad \vee \quad \sim \quad \forall \quad (x) \quad (\exists x)$$

The elementary formulas are the formula variables, possibly with arguments attached, and the signs for constant propositions, such as  $Z$ ,  $N$ ,  $=$ ,  $<$  with the associated argument places filled.

Any array may be substituted for a mathematical variable; however, when a mathematical variable occurs in a formula, the constant proposition that states of what kind the variable is, followed by the implication sign, must always precede, for example,  $Z(a) \Rightarrow a + 1 = 1 + a$ ,  $N(a) \Rightarrow N(a')$ .

This convention has the effect that only substituends that are ordinary numbers or numbers of the second number class come into consideration after all. In Axioms V and VI the propositions  $Z(a)$  and  $Z(b)$ , which should precede, were omitted for the sake of brevity.

German capital and lower-case letters have reference and are used only to

convey information.

The mathematical variables are of two kinds: (1) the primitive variables and (2) the variable-sorts.

1. Now while in all of arithmetic and analysis the ordinary integer suffices as sole primitive variable, with each of Cantor's transfinite number classes there is associated a primitive variable that ranges over precisely the ordinals of that class. Hence to each primitive variable there corresponds a proposition that states of what kind it is; this proposition is implicitly characterised by axioms. With each primitive variable there is associated one kind of recursion, by means of which we define functions whose argument is that primitive variable. The recursion associated with the number-theoretic variable is "ordinary recursion", by means of which the function of the number-theoretic variable  $n$  is defined when we indicate what value it has for  $n = 0$  and how the value for  $n'$  is obtained from that for  $n$ . The generalisation of ordinary recursion is transfinite recursion; it rests upon the general principle that the value of the function for a value of the variable is determined by means of the preceding values of the function.

2. From the primitive variables we derive further kinds of variables by applying logical connectives to the propositions associated with the primitive variables, for example, to  $Z$ . The variables thus defined are called variable-sorts, and the propositions defining them are called sort-propositions; for each of these a new particular sign is introduced. Thus the formula  $\varphi(f) \equiv \forall(a)(Z(a) \supset Z(f(a)))$  offers the simplest instance of a variable-sort; this formula defines the sort of the function variable ("being-a-function"). A further example is the formula  $F(g) \equiv (P(f) \supset Z(g(f)))$ ; it defines the "being-a-function-of-a-function"; the argument  $g$  is the new function-of-a-function variable.

To produce the higher variable-sorts we must provide the sort-propositions themselves with subscripts, thus making a recursion procedure possible.

We can now characterise what is to be understood by explicit definitions and by recursion axioms: An explicit definition is an equivalence or identity that on its left side has the sign to be defined (capital or lower-case Greek [bold] letter), along with certain variables as arguments, and on its right side has an array in which only these arguments occur as free variables and in which no signs for constants occur except

those that have already been introduced.

In a corresponding way, the recursion axioms are formula systems that are modelled upon the recursive procedure.

These are the general foundations of my theory. To familiarise you with the way in which it is applied I would like to adduce some examples of particular functions as they are defined by recursion.

If we now begin to construct mathematics, we shall first set our sights upon elementary number theory; we recognise that we can obtain and prove its truths through contentual intuitive considerations. The formulas that we encounter when we take this approach are used only to impart information. Letters stand for numerals, and an equation informs us of the fact that two signs stand for the same thing.

The situation is different in algebra ; in algebra we consider the expressions formed

with letters to be independent objects in themselves, and the propositions of number theory, which are included in algebra, are formalised by means of them. Where we had numerals, we now have formulas, which themselves are concrete objects that in their turn are considered by our perceptual intuition, and the derivation of one formula from another in accordance with certain rules takes the place of the number-theoretic proof based on content.

Thus algebra already goes considerable, beyond centennial number theory. Even the formula  $1 + a = a + 1$ , for example, in which  $a$  is a genuine number-theoretic variable, in algebra no longer merely imparts information about something contentual but is a certain formal object, a provable formula, which in itself means nothing and whose proof cannot be based on content but requires appeal to the induction axiom.

The formulas  $1 + 3 = 3 + 1$  and  $1 + 7 = 7 + 1$ , which can be verified by contentual considerations, can be obtained from the algebraic formula above only by a proof procedure, such as formal substitution of the numerals 3 and 7 for  $a$ , that is, by the use of a rule of substitution.

Hence even elementary mathematics contains, first, formulas to which correspond contentual communications of finitary propositions (mainly numerical equations or inequalities, or more complex communications composed of these) and which we may call the real propositions of the theory, and second, formulas that - just like the numerals of contentual number theory - in themselves mean nothing but are merely things that are governed by our rules and must be regarded as the ideal objects of

the theory.

These considerations show that, to arrive at the conception of formulas as ideal propositions, we need only pursue in a natural and consistent way the line of development that mathematical practice has already followed till now. And it is then natural and consistent for us to treat henceforth not only the mathematical variables but also the logical signs,  $\vee$ ,  $\&$ , etc, and the logical variables, namely, the propositional variables,  $A, B, C, \dots$ , just like the numerals and letters in algebra and to consider them, too, as signs that in themselves mean nothing but are merely building blocks for ideal propositions.

Indeed, we have an urgent reason for thus extending the formal point of view of algebra to all of mathematics. For it is the means of relieving us of a fundamental difficulty that already makes itself felt in elementary number theory. Again I take as an example the equation  $a + 1 = 1 + a$ ; if we wanted to regard it as imparting the information that  $a + 1 = 1 + a$ , where  $a$  stands for any given number, then this communication could not be negated, since the proposition that there exists a number  $a$  for which  $a + 1 \neq 1 + a$  holds has no finitary meaning; one cannot, after all, try out all numbers. Thus, if we adopted the finitist attitude, we could not make use of the alternative according to which an equation, like the one above, in which an unspecified numeral occurs either is satisfied for every numeral or can be refuted by a counter-example. For, as an application of the "principle of excluded middle", this alternative depends essentially on the assumption that it is possible to negate the assertion that the equation in question always holds.

But we cannot relinquish the use either of the principle of excluded middle or of any other law of Aristotelian logic expressed in our axioms, since the construction of analysis is impossible without them.

Now the fundamental difficulty that we face here can be avoided by the use of ideal propositions. For, if to the real propositions we adjoin the ideal ones, we obtain a system of propositions in which all the simple, rules of Aristotelian logic hold and all the usual methods of mathematical inference are valid. Just as, for example, the negative numbers are indispensable in elementary number theory and just as modern number theory and algebra become possible only through the Kummer-Dedekind ideals, so scientific mathematics becomes possible only through the introduction of ideal propositions.

To be sure, one condition, a single but indispensable one, is always attached to

the use of the method of ideal elements, and that is the proof of consistency; for, extension by the addition of ideal elements is legitimate only if no contradiction is thereby brought about in the old, narrower domain, that is, if the relations that result for the old objects whenever the ideal objects are eliminated are valid in the old domain.

In the present situation, however, this problem of consistency is perfectly amenable to treatment. For the point is to show that, when ideal objects are introduced, it is impossible for us to obtain two logically contradictory propositions,  $Y$  and  $\sim Y$ . Now, as I remarked above, the logical formula  $(A \ \& \ \sim A) \Rightarrow B$  follows from the axioms of negation. If in it we substitute the proposition  $Y$  for  $A$  and the inequality  $0 \neq 0$  for  $B$ , we obtain  $(Y \ \& \ \sim Y) \Rightarrow (0 \neq 0)$ .

And, once we have this formula, we can derive the, formula  $0 \neq 0$  from  $Y$  and  $\sim Y$ . To prove consistency we therefore need only show that  $0 \neq 0$  cannot be obtained from our axioms by the rules in force as the end formula of a proof, hence that  $0 \neq 0$  is not a provable formula. And this is a task that fundamentally lies within the province of intuition just as much as does in contentual number theory the task, say, of proving the irrationality of  $\sqrt{2}$ , that is, of proving that it is impossible to find two numerals  $a$  and  $b$  satisfying the relation  $a^2 = 2b^2$ , a problem in which it must be shown that it is impossible to exhibit two numerals having a certain property. Correspondingly, the point for us is to show, that it is impossible to exhibit a proof of a certain kind. But a formalised proof, like a numeral, is a concrete and surveyable object. It can be communicated from beginning to end. That the end formula has the required structure, namely " $0 \neq 0$ ", is also a property of the proof that can be concretely ascertained. The demonstration can in fact be given, and this provides us with a justification for the introduction of our ideal propositions. At the same time we recognise that this also gives us the solution of a problem that became urgent long ago, namely, that of proving the consistency of the arithmetic axioms.

Wherever the axiomatic method is used it is incumbent upon us to prove consistency of the axioms. In geometry and the physical theories this proof is successfully carried out by means of a reduction to the consistency of the arithmetic axioms. This method obviously fails in the case of arithmetic itself. By making this important final step possible through the method of ideal elements, our proof theory forms the necessary keystone of the axiomatic system.

The final test of every new theory is its success in answering pre-existent questions that the theory was not specifically created to answer. As soon as

Cantor had discovered his first transfinite numbers, the numbers of the second number class as they are called, the question arose whether by means of this transfinite counting one could actually enumerate the elements of sets known in other contexts but not denumerable in the ordinary sense. The line segment was the first and foremost set of this kind to come under consideration. This question, whether the points of the line segment, that is, the real numbers, can be enumerated by means of the numbers of the second number class, is the famous problem of the continuum, which was formulated but not solved by Cantor. In my paper "On the infinite" (1925) I showed how through our proof theory this problem becomes amenable to successful treatment.

In order to show that this continuum hypothesis of Cantor's constitutes a perfectly concrete problem of ordinary analysis, I mention further that it can be expressed as a formula in the following way:

$$\forall(\exists h)((f)(F(f) \Rightarrow N(h(f))) \& \forall(f, g)[\varphi(f) \& \varphi(g) \Rightarrow ((h(f) = h(g)) \Rightarrow (f, g))]),$$

where, to abbreviate, we have put

$$\varphi(f) \text{ for } \forall(a)(Z(a) \Rightarrow Z(f(a)))$$

and

$$(f, g) \text{ for } \forall(a)(Z(a) \Rightarrow (f(a) = g(a))).$$

In this formula there still occurs the proposition  $N$ , which is associated with the primitive variable of the second number class. But this can be avoided, since, as is well known, the numbers of the second number class can be represented by well-orderings of the number sequence—that is, by certain functions that have two number-theoretic variables and take the values 0 and 1—in such a way that the proposition in question takes the form of a proposition purely about functions.

I have already set forth the basic features of this proof theory of mine on different occasions, in Copenhagen [1922], here in Hamburg [1922], in Leipzig [1922], and Munster [1925]; in the meantime much fault has been found with it, and objections of all kinds have been raised against it, all of which I consider just as unfair as it can be. I would now like to elucidate some of these points.

Poincaré already made various statements that conflict with my views; above all, he denied from the outset the possibility of a consistency proof for the arithmetic axioms, maintaining that the consistency of the method of mathematical induction could never be proved except through the inductive method itself. But, as my theory shows, two distinct methods that proceed recursively come into play when the foundations of



arithmetic are established, namely, on the one hand, the intuitive construction of the integer as numeral (to which there also corresponds, in reverse, the decomposition of any given numeral, or the decomposition of any concretely given array constructed just as a numeral is), that, is, contentual induction, and, on the other hand, forma induction proper, which is based on the induction axiom and through which alone the mathematical variable can begin to play its role in the formal system.

Poincaré arrives at his mistaken conviction by not distinguishing between these two methods of induction, which are of entirely different kinds. Regrettably Poincaré, the mathematician who in his generation was the richest in ideas and the most fertile, had a decided prejudice against Cantor's theory, which prevented him from forming a just opinion of Cantor's magnificent conceptions. Under these circumstances Poincaré had to reject my theory, which, incidentally, existed at that time only in its completely inadequate early stages. Because of his authority, Poincaré often exerted a one-sided influence on the younger generation.

My theory is opposed on different grounds by the adherents of Russell and Whitehead's theory of foundations, who regard *Principia Mathematica* as a definitively satisfying foundation for mathematics.

Russell and Whitehead's theory of foundations is a general logical investigation of wide scope. But the foundation that it provides for mathematics rests, first, upon the axiom of infinity and, then, upon what is called the axiom of reducibility, and both of these axioms are genuine contentual assumptions that are not supported by a consistency proof they are assumptions whose validity in fact remains dubious and that, in any case, my theory does not require.

In my theory Russell's axiom of reducibility has its counterpart in the rule for dealing with function variables. But reducibility is not presupposed in my theory rather, it is recognised as something that can be compensated for: the execution of the reduction would be required only in case a proof of a contradiction were given, and then, according to my proof theory, this reduction would always be bound to succeed.

Now with regard to the most recent investigations, the fact that research on foundations has again come to attract such lively appreciation and interest certainly gives me the greatest pleasure. When I reflect on the content and the results of these investigations, however, I cannot for the most part agree with their tendency; I feel, rather, that they are to a large extent behind the times, as if they came from a period when Cantor's majestic world of ideas had not yet been discovered.

In this I see the reason, too, why these most recent investigations in fact stop short of the great problems of the theory of foundations, for example, the question of the construction of functions, the proof or refutation of Cantor's continuum hypothesis, the question whether all mathematical problems are solvable, and the question whether consistency and existence are equivalent for mathematical objects.

Of today's literature on the foundations of mathematics, the doctrine that Brouwer advanced and called intuitionism forms the greater part. Not because of any inclination or polemics, but in order to express my views clearly and to prevent misleading conceptions of my own theory, I must look more closely into certain of Brouwer's assertions.

Brouwer declares (just as Kronecker did in his day) that existence statements, one and all, are meaningless in themselves unless they also contain the construction of the object asserted to exist; for him they are worthless scrip, and their use causes mathematics to degenerate into a game.

The following may serve as an example showing that a mere existence proof carried out with the logical  $\epsilon$ -function is by no means a piece of worthless scrip.

In order to justify a remark by Gauss to the effect that it is superfluous for analysis to go beyond the ordinary complex numbers formed with  $\sqrt{-1}$ , Weierstrass and Dedekind undertook investigations that also led to the formulation and proof of certain theorems. Now some time ago I stated a general theorem (1896) on algebraic forms that is a pure existence statement and by its very nature cannot be transformed into a statement involving constructibility. Purely by use of this existence theorem I avoided the lengthy and unclear argumentation of Weierstrass and the highly complicated calculations of Dedekind, and in addition. I believe, only my proof uncovers the inner reason for the validity of the assertions adumbrated by Gauss and formulated by Weierstrass and Dedekind.

But even if one were not satisfied with consistency and had further scruples, he would at least have to acknowledge the significance of the consistency proof as a general method of obtaining finitary proofs from proofs of general theorems - say of the character of Fermat's theorem - that are carried out by means of the  $\epsilon$ -function.

Let us suppose, for example, that we had found, for Fermat's great theorem, a proof in which the logical function  $\epsilon$  was used. We could then make a finitary proof out of it in the following way.

Let us assume that numerals  $p, a, b, c$  ( $p > 2$ ) satisfying Fermat's equation  $a^p + b^p = c^p$

$c^v$  are given; then we could also obtain this equation as a provable formula by giving form of a proof to the procedure by which we ascertain that-the numerals  $a^v + b^v$  and  $c^v$  coincide. On the other hand, according to our assumption we would have a proof of the formula

$$(Z(a) \& Z(b) \& Z(c) \& Z(p) \& (p > 2)) \Rightarrow (ap + bp \neq cp),$$

from which  $a^v + b^v \neq c^v$  is obtained by substitution and inference. Hence both  $a^v + b^v = c^v$  and  $a^v + b^v \neq c^v$  would be provable. But, as the consistency proof shows in a finitary way, this cannot be the case.

The examples cited are, however, only arbitrarily selected special cases. In fact, mathematics is replete with examples that refute Brouwer's assertions concerning existence statements.

What, now, is the real state of affairs with respect to the reproach that mathematics would degenerate into a game?

The source of pure existence theorems is the logical c-axiom, upon which in turn the construction of all ideal propositions depends. And to what extent has the formula game thus made possible been successful? This formula game enables us to express the entire thought-content of the science of mathematics in a uniform manner and develop it in such a way that, at the same time, the interconnections between the individual propositions and facts become clear. To make it a universal requirement that each individual formula then be interpretable by itself is by no means reasonable; on the contrary, a theory by its very nature is such that we do not need to fall back upon intuition or meaning in the midst of some argument. What the physicist demands precisely of a theory is that particular propositions be derived from laws of nature or hypotheses solely by inferences hence on the basis of a pure formula game, without extraneous considerations being adduced. Only certain combinations and consequences of the physical laws can be checked by experiment-just as in my proof theory only the real propositions are directly capable of verification. The value of pure existence proofs consists precisely in that the individual construction is eliminated by them and that many different constructions are subsumed under one fundamental idea, so that only what is essential to the proof stands out clearly; brevity and economy of thought are the *raison d'être* of existence proofs. In fact, pure existence theorems have been the most important landmarks in the historical development of our science. But such considerations do not trouble the devout intuitionist.

The formula game that Brouwer so deprecates has, besides its mathematical value, an important general philosophical significance. For this formula game is carried out according to certain definite rules, in which the technique of our thinking is expressed. These rules form a closed system that can be discovered and definitively stated. The fundamental idea of my proof theory is none other than to describe the activity of our understanding, to make a protocol of the rules according to which our thinking actually proceeds. Thinking, it so happens, parallels speaking and writing: we form statements and place them one behind another. If any totality of observations and phenomena deserves to be made the object of a serious and thorough investigation, it is this one—since, after all, it is part of the task of science to liberate us from arbitrariness, sentiment, and habit and to protect us from the subjectivism that already made itself felt in Kronecker's views and, it seems to me, finds its culmination in intuitionism.

Intuitionism's sharpest and most passionate challenge is the one it flings at the validity of the principle of excluded middle, for example, in the simplest case, at the validity of the mode of inference according to which, for any assertion containing a number-theoretic variable, either the assertion is correct for all values of the variable or there exists a number for which it is false. The principle of excluded middle is a consequence of the logical  $\epsilon$ -axiom and has never yet caused the slightest error. It is, moreover, so clear and comprehensible that misuse is precluded. In particular, the principle of excluded middle is not to be blamed in the least for the occurrence of the well-known paradoxes of set theory; rather, these paradoxes are due merely to the introduction of inadmissible and meaningless notions, which are automatically excluded from my proof theory. Existence proofs carried out with the help of the principle of excluded middle usually are especially attractive because of their surprising brevity and elegance. Taking the principle of excluded middle from the mathematician would be the same, proscribing the telescope to the astronomer or to the boxer the use of his fists. To prohibit existence statements and the principle of excluded middle is tantamount to relinquishing the science of mathematics altogether. For, compared with the immense expanse of modern mathematics, what would the wretched remnants mean, the isolated results, incomplete and unrelated, that the intuitionists naïve obtained without the use of the logical  $\epsilon$ -axiom? The theorems of the theory of functions, such as the theory of conformal mapping and the fundamental theorems in the theory of partial differential equations or of Fourier series - to single out only a few examples from our science, are merely ideal propositions in my sense and require the logical  $\epsilon$ -axiom

for their development.

In these circumstances I am astonished that a mathematician should doubt that the principle of excluded middle is strictly valid as a mode of inference. I am even more astonished that, as it seems, a whole community of mathematicians who do the same has now constituted itself. I am most astonished by the fact that even in mathematical circles the power of suggestion of a single man, however full of temperament and inventiveness, is capable of having the most improbable and eccentric effects.

Not even the sketch of my proof of Cantor's continuum hypothesis has remained uncriticised. I would therefore like to make some comments on this proof. ...

From my presentation you will recognise that it is the consistency proof that determines the effective scope of my proof theory and in general constitutes its core. The method of W. Ackermann permits a further extension still. For the foundations of ordinary analysis his approach has been developed so far that only the task of carrying out a purely mathematical proof of finiteness remains. Already at this time I should like to assert what the final outcome will be: mathematics is a presuppositionless science. To found it I do not need God, as does Kronecker, or the assumption of a special faculty of our understanding attuned to the principle of mathematical induction, as does Poincaré, or the primal intuition of Brouwer, or, finally, as do Russell and Whitehead, axioms of infinity, reducibility, or completeness, which in fact are actual, contentual assumptions that cannot be compensated for by consistency proofs.

I would like to note further that P. Bernays has again been my faithful collaborator. He has not only constantly aided me by giving advice but also contributed ideas of his own and new points of view, so that I would like to call this our common work. We intend to publish a detailed presentation of the theory soon.