UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA

VALESSA LEAL LESSA DE SÁ PINTO

IDEALIZAÇÃO DA REALIDADE E OBJETIVIDADE CULTURAL: UM ENSAIO SOBRE A NATUREZA HUMANA DA MATEMÁTICA

Rio de Janeiro – RJ

Outubro de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA

VALESSA LEAL LESSA DE SÁ PINTO

IDEALIZAÇÃO DA REALIDADE E OBJETIVIDADE CULTURAL: UM ENSAIO SOBRE A NATUREZA HUMANA DA MATEMÁTICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

Rio de Janeiro – RJ

Outubro de 2019

VALESSA LEAL LESSA DE SÁ PINTO

IDEALIZAÇÃO DA REALIDADE E OBJETIVIDADE CULTURAL: UM ENSAIO SOBRE A NATUREZA HUMANA DA MATEMÁTICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Aprovada em 02 de outubro de 2019.

Banca Examinadora:

____
Prof. Ricardo Silva Kubrusly, D. Sc., HCTE-UFRJ (Orientador)

____
Prof. Abel Rodolfo Garcia Lozano, D. Sc., UERJ/UNIGRANRIO

____
Prof. Angelo Santos Siqueira, D. Sc., UNIGRANRIO

____
Prof. Carlos Antônio de Moura, D. Sc., IME-UERJ

____
Profª. Regina Maria Macedo Costa Dantas, D. Sc., HCTE-UFRJ

Àqueles que, com muito amor, sustentaram meus passos nesta longa caminhada, permitindo-me chegar mais alto: meus pais Jorge e Valeria e meu esposo Flávio.

E, especialmente, à minha filha Flávia, maior realização da minha vida, que compartilha comigo todos os meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Muitas coisas bonitas na nossa vida não podem ser vistas ou tocadas, elas só conseguem ser sentidas pelo coração... (Autor desconhecido)
E o que vocês fizeram por mim para que eu chegasse até aqui foi uma delas, pois é impossível escrever uma tese sozinha. Por isso, registro minha profunda gratidão a todos que contribuíram para esta conquista e, principalmente, para o meu crescimento como pessoa. Tudo isso é resultado da confiança e do incentivo de cada um de vocês! Muito Obrigada!!!

A Deus, por abençoar minha vida, iluminar meus pensamentos, fortalecer minha vontade e permitir generosamente a realização dos meus sonhos.

À minha mãe Valeria, pelo amor incomensurável e por me ajudar em mais este projeto, cuidando de mim com tanta dedicação, e da minha família e da minha casa, durante todos os momentos em que estive ausente.

Ao meu esposo Flávio, pelo grande amor e companheirismo de todas as horas, pelo incentivo para a realização deste trabalho, pela compreensão com minhas ausências, pela paciência com os momentos difíceis e pelo entusiasmo com minhas conquistas.

À minha filha Flávia, pelo amor que me fortalece mais do que tudo e me motiva a buscar sempre novas realizações, pelo esforço para entender minha rotina de estudos e por ter aguentado firme tantas privações para que eu pudesse viver esse grande momento.

Ao meu pai Jorge e ao meu irmão Marcelo, pelo amor tão presente que me dá forças e me acalma nas horas de dificuldade, pelo incentivo constante e pela torcida incansável para a conclusão deste trabalho.

À minha sogra Albertina, pelo apoio e pelos cuidados com a minha família.

A todos os meus familiares, pela torcida e por entender a minha ausência em tantos encontros.

À amiga Regina, pela companhia alegre, pelas palavras de ânimo e pelos cuidados com a minha casa e com a minha família.

À amiga Ingrid, pelas incontáveis conversas que me ajudaram a colocar as ideias em ordem, pelos momentos de descontração que aliviaram minhas angústias, e pela contribuição na organização das referências bibliográficas.

À amiga Flávia, pela amizade tão presente que me anima e me fortalece.

Às amigas Barbara e Fátima pelo carinho, apoio, torcida e compreensão com minha ausência.

Ao amigo Evaldo, pela colaboração na organização da bibliografia.

Aos amigos da Unigranrio, pela força e pelo incentivo de sempre.

À professora Regina Dantas, pela recepção acolhedora quando cheguei ao Programa HCTE, pelos valiosos ensinamentos e pelo carinho e confiança desde o início do Doutorado.

Aos professores da Banca (Abel Lozano, Angelo Siqueira, Carlos de Moura e Regina Dantas), pelas reflexões críticas e pelas relevantes considerações para a elaboração do texto final, contribuindo de forma efetiva para o melhoramento dessa pesquisa.

Ao Programa HCTE e à UFRJ, pelos valiosos momentos de aprendizado.

Agradeço, especialmente, a estes professores BRILHANTES,
no sentido mais nobre da palavra...

Ao meu orientador Ricardo Kubrusly, por me ensinar a arte de pensar filosoficamente as coisas do mundo, pela orientação que me conduziu de forma livre e autônoma na elaboração desse trabalho, pelos importantes questionamentos e ricas sugestões, pela confiança nas minhas ideias, e pela paciência com minhas dificuldades e momentos de desânimo.

Ao Prof. Abel Lozano, pelo presente de uma amizade que sempre me encoraja diante dos desafios acadêmicos, por acreditar no meu potencial e me indicar o caminho do Doutorado na UFRJ, pelo entusiasmo com minhas ideias e ajuda em tantos momentos, pela paciente leitura dos originais e comentários importantes no período da qualificação, e pelo ânimo nas horas difíceis.

Ao Prof. Angelo Siqueira, por estar sempre por perto como um "anjo da guarda", guiando e iluminando meus estudos, por ser minha principal fonte de inspiração com seu exemplo, por me enxergar com um olhar generoso que nunca duvida do meu potencial, por me fortalecer com tantos conselhos e palavras de incentivo, por sua colaboração e presença no exame de qualificação, transmitindo a confiança que me faltava, pelas diversas sugestões quanto à pesquisa com uma visão crítica e necessária e pela ajuda na preparação da apresentação da tese. Enfim... pela amizade que só me faz crescer na vida acadêmica e profissional e, principalmente, como pessoa.

A matemática é humanismo, assim como tudo o que o homem cria para suas necessidades concretas e espirituais e pelo gosto sublime e não concretamente vantajoso de criar coisas novas.

Bruno D'Amore

RESUMO

PINTO, Valessa Leal Lessa de Sá. Idealização da realidade e objetividade cultural: Um ensaio sobre a natureza humana da matemática, 2019. 185 f. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia). Programa de Pós-Graduação História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

A presente tese é um ensaio sobre a natureza da matemática, que costuma estar associada a uma realidade objetiva desconhecida, de acesso misterioso, fora do espaço e do tempo, totalmente independente da nossa vida e do nosso conhecimento. Nessa perspectiva, só cabe ao homem criar mecanismos para revelá-la. No entanto, este trabalho defende a hipótese de que a matemática é uma criação do ser humano, isto é, ela não possui uma realidade efetiva para além do campo da significação humana. A partir desse pressuposto, o objetivo geral da pesquisa é apresentar a matemática como uma forma de conhecimento concebida e desenvolvida pelos homens a partir de suas atividades conscientes, intencionais e inventivas. Por ser um estudo de cunho teórico, a coleta de dados, informações e conceitos ocorreu em fontes escritas, e o material de consulta foi constituído por referências publicadas, como livros, artigos científicos, dissertações e teses acadêmicas. A estrutura da argumentação foi delineada a partir da construção de quatro capítulos, além da introdução e das considerações finais, divididos em duas partes: a primeira aborda a questão da existência e da materialidade da matemática, com a apresentação de suas principais filosofias e dos elementos que a caracterizam como uma expressão humana; a segunda trata dos domínios da matemática, que se referem as suas características marcantes enquanto produto da cultura humana. Desta forma, o trabalho aborda uma série de fatores que contempla a matemática como uma atividade que tem raízes na realidade que percebemos, mas que não tem compromisso com ela, só com a mente que a cria e com os contextos culturais e sociais em que os indivíduos estão inseridos.

Palavras-chave: Expressão humana. Experiência sensível. Idealização da realidade. Matemática. Objetividade cultural.

ABSTRACT

PINTO, Valessa Leal Lessa de Sá. Idealização da realidade e objetividade cultural: Um ensaio sobre a natureza humana da matemática, 2019. 185 f. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia). Programa de Pós-Graduação História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

The present thesis is an essay on the nature of mathematics, which is usually associated to an unknown objective reality of mysterious access, outside of space and time, totally independent of our life and knowledge. From this perspective, it is only up to man to create mechanisms to reveal it. However, this work defends the hypothesis that mathematics is a creation of the human being, that is, it does not have an effective reality beyond the field of human significance. From this assumption, the general objective of the research is to present mathematics as a form of knowledge conceived and developed by men based on their conscious, intentional, and inventive activities. Being a theoretical study, the collection of data, information, and concepts took place in written sources, and the consultation material consisted of public references, such as books, scientific articles, dissertations, and academic theses. The structure of the argument was delineated by the construction of four chapters, besides introduction and final considerations, divided in two parts: the first one addresses the question of the existence and materiality of mathematics, with a presentation of its main philosophies and elements that characterizes it as a human expression; the second one deals with the domains of mathematics, which refer to their outstanding characteristics as a product of human culture. Thus, the work approaches a series of factors that consider mathematics as an activity which is rooted in the reality we perceive, but which has no commitment to it, only with the mind that creates it and with the cultural and social contexts in which the individuals are inserted.

Keywords: Human expression. Sensitive experience. Idealization of reality. Mathematics. Cultural objectivity.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

No fundo de nós próprios encontra-se essa força criadora que nos permite produzir aquilo que tem de ser e que não nos deixa descansar, nem repousar, enquanto não o tivermos realizado, de uma maneira ou de outra, fora de nós ou em nós.
Johann Wolfgang

Esta tese foi desenvolvida por uma professora formada pelo Curso Normal (Curso de Formação de Professores), que depois fez graduação em Matemática e, mais tarde, se tornou Mestre em Ensino das Ciências na Educação Básica. Com essa formação escolar e acadêmica, foi possível atuar em todos os segmentos da Educação Básica e no Ensino Superior, permitindo uma experiência que, sem dúvida, faz com que esse trabalho esteja impregnado de vivências educacionais e relações construídas durante uma longa caminhada.

Tais colocações contribuem para o entendimento de que a presente pesquisa, que trata da *natureza da matemática*, pretende estabelecer uma versão sobre esta área do conhecimento que possa contribuir mais tarde para a realização de projetos sobre suas demandas educacionais. A escolha deste assunto também foi motivada pelas muitas discussões a seu respeito que já ocuparam o centro do debate filosófico em diversas ocasiões, envolvendo várias problematizações e, consequentemente, muitas questões que proporcionaram uma infinidade de contribuições diante das inquietações humanas sobre a matemática e sua relação com o mundo.

A escolha do Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE) da UFRJ se deu pela vontade de entender melhor os fluxos da ciência, especialmente, no que diz respeito à matemática e à ideia de que ela é algo que transcende a razão humana. O foco histórico e o perfil interdisciplinar deste Programa proporcionaram uma visão bem dinâmica dos saberes científicos levando em consideração suas relações com as demais áreas do conhecimento e, consequentemente, agindo como um fio condutor para novas descobertas sobre o assunto de interesse. Sem dúvida, as experiências vividas neste Programa favoreceram o estudo de uma historiografia que possibilitou novos olhares sobre a matemática, especialmente, a respeito de sua relação com a racionalidade humana.

Nesse contexto, foi possível entender que uma das principais abordagens da história é a relação dos seres humanos com o conhecimento, com destaque para o fato de que o mundo não é dividido em *disciplinas*. A demarcação de territórios, que é estabelecida como uma característica fundamental do ensino, é artificial e só atrapalha a educação, inclusive a científica, prejudicando o desenvolvimento da própria ciência.

No HCTE, as aulas do professor Ricardo Kubrusly[1] foram a principal fonte de inspiração para abordar a matemática sob uma nova perspectiva, ou seja, pensá-la como um sentido explicativo em relação ao mundo percebido e organizado pela experiência e pelo uso da razão. Assim surgiu o tema deste estudo que é *a matemática como parte da cultura humana*. Além disso, outros momentos despertaram o desenvolvimento de nossas ideias, como uma palestra da professora Isabel Cafezeiro[2] que fazia parte da Disciplina Seminários. Ali surgiram perguntas importantes para o direcionamento das reflexões desta tese: "qual a contribuição do seu trabalho para o desenvolvimento da ciência?"; "e que ciência é essa? A universal?".

De forma resumida, os apontamentos feitos sobre essas questões giraram em torno da concepção de que, para se falar da ciência universal, tem-se que levar em conta as expectativas universais. Daí foram colocadas duas opções: receber como desafio esses questionamentos universais e ir ao rastro disso; ou tirar deles nossos objetos de pesquisa e procurar a ciência situada. A primeira hipótese não é muito favorável, pois nos coloca numa posição subjugada. Em relação à matemática, por exemplo, a visão hegemônica subjuga a matemática local.

É necessário permitir que os vínculos da matemática com a realidade apareçam, mostrando que ela é dependente dos seres humanos e deixando claro que ela só dá conta das coisas do mundo com ajustes[3]. A relevância desta abordagem é o reposicionamento da matemática como uma expressão humana, com o reconhecimento de que ela é um saber vivo, dinâmico e, historicamente, construído pelos homens. Essa postura contribui para uma visão sobre a matemática que a integra aos demais saberes e não permite a determinação de fronteiras... E ir ao encontro desta posição é o que justifica a nossa pesquisa.

Refletindo sobre tais colocações, surgiu a questão "*que ideias sobre a matemática precisam circular entre nós?*" e a construção de respostas para tal pergunta ganhou força a partir da criação de um grupo de pesquisa, formado por professores e alunos do HCTE, que recebeu o nome de *Matemáticas*[4]. Sem dúvida, as ideias compartilhadas nos encontros desse

---

[1] Ricardo Silva Kubrusly é Matemático, Poeta e Professor Titular do Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE) da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

[2] Isabel Leite Cafezeiro é professora titular do Instituto de Computação da Universidade Federal Fluminense e professora colaboradora do Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

[3] Resumo das colocações da Professora Isabel Cafezeiro (UFF/UFRJ) em sua palestra intitulada "O mágico e o biscateiro", juntamente com o Professor Ricardo Kubrusly (UFRJ), na Disciplina "Seminários" (2S2016) em 30/11/2016 no Auditório Maria Irene (UFRJ-CCMN-NCE-HCTE).

[4] O grupo *Matemáticas* do Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia era formado por mestrandos e doutorandos do HCTE (todos professores de escolas públicas e privadas do RJ) –

grupo permitiram descobertas, reflexões e discussões importantíssimas para a construção de argumentos a favor de um novo olhar sobre a matemática diferente daquele imposto pela ciência universal. Os diálogos buscavam destituir o caráter misterioso da concepção tradicional de “perfeição” em relação à matemática, resultante de uma abordagem linear e purificada que a torna um conhecimento, supostamente, independente, neutro e fechado.

Assim, este estudo foi pensado, organizado e escrito a partir das nossas experiências profissionais e do período vivido no HCTE. Eles nos proporcionaram valiosos momentos de aprendizado e a obtenção de ferramentas importantes para a construção de uma pesquisa que procura deixar de lado a visão da matemática como verdade absoluta e busca um olhar que a enxerga como um conhecimento dependente dos contextos humanos.

Com a intenção de dar ao leitor, pelo menos um pouco, a impressão de estar seguindo os caminhos que trilhamos no HCTE, principalmente, as experiências vividas nos encontros das disciplinas “História Cultural do Infinito” e “Lógicas”, sentindo a sensação das vivências que inspiraram a realização desse trabalho, todos os capítulos da tese começam com trechos de produções de Ricardo Kubrusly, professor responsável por estas aulas e orientador desta pesquisa. Estes momentos foram fundamentais para buscarmos novas reflexões sobre a matemática e encontrarmos o melhor caminho de investigação para nossas questões. Eles guiaram nossas ideias, enriquecendo nossas colocações e sustentando nossas argumentações.

Allan Filho, Ana Paula Gonçalves, Sicleidi Valente e Valessa Leal – e por dois professores do HCTE – Isabel Cafezeiro e Ricardo Kubrusly.

INTRODUÇÃO

É possível mesmo que Deus não tenha nada a ver com isso e que o conceito de verdade matemática pertença apenas à mente de quem cria teoremas. Que o mistério da criação não passe pelo drama de descrever a natureza ou de inventar modelos que nos aplaquem a angústia inexplicável (ou não?) de ter que entender a qualquer custo o tudo que nos rodeia e que nos dá sentido. É possível que quando eu falo a palavra "ponto" ou quando penso "a reta", esteja apenas nomeando objetos abstratos cujo sentido prático é totalmente desnecessário, e que quando substituo estes nomes por "páginas amarelas" ou "bombons de frutas verdes enrolados em papel prateado", o sentido matemático não se altere, por estar amarrado apenas às propriedades que os postulados lhes destinam e não aos nomes cotidianos que emprestamos aos objetos matemáticos. Mas mesmo que Deus não tenha nada a ver com a matemática, Ela será sempre a casa de suas próprias verdades, livre de qualquer contradição, onde não há lugar para paradoxos ou meias palavras, como querem os poetas, e onde toda e qualquer verdade resplandece com sua beleza, formosura e exatidão. Estamos à beira do Paraíso que construímos com nossas mãos e pensamentos, e nada vai nos impedir de sermos nossos próprios deuses. Ou não?![5]

Ricardo Kubrusly

O presente ensaio sobre a natureza da matemática começa com algumas reflexões a respeito da relação da matemática com Deus (ou não!). Essas palavras nos levam ao pensamento corrente de que a matemática se tornou um conhecimento imensamente poderoso e misterioso ao ponto de ser percebida como um *maná caído dos céus*[6]. No entanto, acreditamos que, recorrendo à história da humanidade, é possível encontrar evidências de que ela está longe dessa condição, ou seja, a matemática é um produto da cultura humana. Assim, definimos o tema a desta pesquisa.

Uma das principais características dos seres humanos sempre foi procurar entender questões relacionadas à sua existência, como leis da natureza, nascimento, morte. A partir daí, iniciou-se uma longa caminhada de construção do conhecimento para a compreensão de si mesmo e do mundo, que se dá por um emaranhado de aspectos objetivos e subjetivos, estabelecidos por percepções, sentidos, experiências.

Então, o conhecimento humano surgiu como respostas elaboradas e fundamentadas pelo desenvolvimento do pensamento através de representações, criações de modelos da realidade, ferramentas e símbolos. No contato do homem com o mundo, surgiram ainda a imaginação, a fantasia, a contemplação, o espanto, o medo. Nesse sentido, podemos dizer que o ser humano,

---

[5] "O rei e o Bobo: A fala de Hilbert" em Pensando no Infinito: Pequenas Digressões Matemático Filosóficas e outros Pecados. Departamento de Matemática da UFRJ. Disponível em <www.dmm.im.ufrj.br/~risk/pdf/Finito.pdf >. Acesso em: 01/02/2019.

[6] O livro bíblico de Êxodo o descreve como um alimento produzido milagrosamente, sendo fornecido por Deus ao povo Israelita, liderado por Moisés, durante toda sua estada no deserto rumo à terra prometida. Disponível em <www.codigodabiblia.com/2010/07/exodo-1616-21.html >. Acesso em: 14/07/2018.

ao mesmo tempo que temeu a realidade, também desejou domesticá-la, e o desejo de controle o impulsionou às ações de conhecer e criar cada vez mais.

Acontece que, de maneira geral, a origem da matemática parte da ideia de um saber dado *a priori*, universal e imutável. Nessa perspectiva, sua existência é um fato objetivo, fora do espaço e do tempo, totalmente independente da nossa vida e do nosso conhecimento. Assim, ela sempre existiu e nunca mudará ou desaparecerá, cabendo ao homem apenas criar mecanismos para enxergá-la e revelá-la. Os esforços humanos em relação aos conhecimentos matemáticos seriam encontrar caminhos para retirá-los da realidade e, junto com eles, trazer as verdades sobre universo.

Esta é a voz corrente sobre a natureza[7] da matemática, que é fruto de uma perspectiva realista, fundamentada na ideia da descoberta, ou seja, a matemática faz parte da realidade física e espera ser desvendada. Ela é entendida como um sistema metafísico que trata de entes objetivamente existentes e, como consequência, passa a ser considerada um saber estável, bem definido e exato. Nesse contexto, é comum associá-la aos sentidos de verdade e certeza.

Certa vez, Bertrand Russell[8] (1872-1970), um dos mais influentes matemáticos que viveram no século XX, disse que, na matemática, não sabemos do que estamos falando e se o que estamos falando é verdadeiro. Tal afirmação já foi usada inúmeras vezes para introduzir discussões envolvendo a matemática, dando origem a diferentes interpretações. Ao ler tal citação, nossa sensação é a de que realmente a matemática é algo distante de nós, fora do nosso alcance, desconhecida e misteriosa. Mas, se nada se sabe sobre sua natureza, como ela pode apresentar um notável processo de evolução em suas teorias e uma extensa aplicabilidade em tantas áreas do conhecimento?

Refletindo sobre essa questão, somos levados a outras indagações, como "o que é a matemática?", "o que são seus objetos de estudo?", "quais são suas condições de existência?", "do que tratam as suas verdades?", "como é que suas formas abstratas se aplicam ao mundo empírico?", "poderá existir uma matemática alternativa?", entre tantas outras perguntas que são formuladas diante de seu caráter multifacetado.

Nesse contexto, certos autores, como Villela (2008), defendem a ideia da existência de várias matemáticas enquanto outros, como Glock (1998), acreditam que existem diferentes

[7] Significa "o que caracteriza ou define algo; qualidade. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/natureza/>. Acesso em: 12/08/2017.

[8] *"Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true."*. [A matemática pode ser definida como o assunto sobre o qual nós nunca sabemos o que estamos falando, nem se o que estamos dizendo é certo.] (RUSSELL, 2003 *apud* DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 2).

formas de se fazer matemática e não matemáticas diferentes. Aqui vamos interpretar o tema *matemática ou matemáticas* com base na filosofia de Wittgenstein (1999), esclarecendo o parâmetro de nossas colocações. Escolhemos o pensamento desse filósofo para atuar como pano de fundo, pois ele nos ajudará a explicar a escolha que se tomará entre esses termos a partir dos conceitos de *semelhanças de família* e *jogos de linguagem*.

Para Wittgenstein (1999), nada pode ser dado fora da linguagem e, além disso, ele rejeita a ideia de que a linguagem teria uma natureza única. No entanto, essa rejeição só acontece após o filósofo rever seus próprios conceitos. Em seus primeiros estudos retratados no livro *Tractatus Logico-Philosophicus*, que costuma ser indicado como primeira filosofia de Wittgenstein, o pensador defende que há uma correspondência entre a linguagem e o mundo, ocasionando que um nome seria sempre a descrição de um único objeto do mundo. Depois, na publicação de *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein reconsiderou seu antigo modo de pensar e "corrigiu" os erros do livro anterior. Ele se retrata dizendo que aquilo que denominamos linguagem não serve apenas para nomear e exemplifica:

> É como se alguém explicasse: 'Jogar consiste em empurrar coisas, segundo regras, numa superfície [...]' – e nós lhe respondêssemos: 'Você parece pensar nos jogos de tabuleiro, mas nem todos os jogos são assim. Você pode retificar sua explicação, limitando-a expressamente a esses jogos' (WITTGENSTEIN, 1999, §03).

Silva & Silveira (2013, p. 127) acrescentam que as diversas práticas nas quais a linguagem está inserida e os diferentes contextos de seu emprego são denominados de *jogos de linguagem* por Wittgenstein. O significado de uma palavra ou expressão linguística (e, consequentemente, sua lógica de uso) vem de uma vasta coleção de diferentes práticas. Os autores ainda explicam:

> Podemos dizer que os 'jogos de linguagem' são os diferentes contextos de aplicação de uma palavra ou conceito. E diferentes contextos implicam diferentes lógicas de uso das palavras. Desta maneira, uma mesma palavra pode indicar diferentes ações, dependendo do contexto no qual é empregada, dependendo da atividade na qual está envolvida (SILVA & SILVEIRA, 2013, p. 128).

Além de *jogos de linguagem*, Wittgenstein estabeleceu o conceito de *semelhanças de família*, no qual, segundo Silva & Silveira (2013, p. 128), designou a semelhança entre os usos de palavras ou conceitos, não pela posse comum de um conjunto de características essenciais[9]

[9] Segundo o essencialismo, é necessário haver algo comum a todas as instâncias de um conceito que explique por que elas 'caem' sob esse conceito. Um conceito deve ser claramente delimitado para que seja denominado conceito. Toda a vagueza deve ser eliminada. Assim, é necessário descobrir a natureza, a essência do conceito, motivo pelo qual todos os usos de um conceito caem sob o mesmo conceito. Por exemplo, deveria haver algo

ou definidoras, mas por sua relação geral de similaridade entre os diferentes usos. Cada situação de emprego do conceito revela uma parcela, um aspecto do significado. Assim, Silva & Silveira (2013, p. 130) destacam que é pela família de usos que podemos falar do conceito. Um conceito definido por *semelhanças de família* pode adquirir novos usos, mas isso não muda seu significado; o conceito é "alargado" com o acréscimo de novos membros à família. O conceito de *arte,* por exemplo, expandiu-se para incluir novos parentes como o cinema, a fotografia e o balé, sem mudar o significado da palavra *arte* (BAKER & HACKER, 2005 *apud* SILVA & SILVEIRA, 2013, p. 130).

A partir dessas considerações, podemos dizer que o que denominamos matemática é uma *família* de atividades com uma família de propósitos. A matemática é um fenômeno antropológico, algo que faz parte da história natural da humanidade, exercendo várias funções com diferentes objetivos nas práticas comunitárias. Sobre os vários usos que o cálculo pode desempenhar, ele nos convida a refletir se "seria alguma surpresa se a técnica de cálculo tivesse uma 'família' de aplicações?" (WITTGENSTEIN, 1980a, §08).

Assim, de acordo com o que expomos até aqui, usaremos ao longo dessa tese o termo *matemática* e não *matemáticas,* pois o que chamamos de *matemática* pode ser expandido a todas as atividades que caracterizam um aspecto do seu significado. Então, podemos considerar que temos *a* matemática e não *as* matemáticas, pois não temos significados independentes, mas uma família de usos inter-relacionados.

Silva & Silveira (2013, p. 131) reforçam que, em relação ao termo matemática, temos uma rede bastante extensa, no mesmo sentido em que falamos dos jogos de tabuleiro, jogos de cartas, jogos com bola etc., sem ter vários conceitos de *jogo*, mas apenas um, que é formado por sua família de usos. Nesse contexto, "não procure apenas por semelhanças a fim de justificar um conceito, mas também por conexões. O pai transmite seu nome ao filho mesmo que este seja bastante diferente dele" (WITTGENSTEIN, 1980, §923).

A partir daí, desejamos ressaltar que essa tese aborda a matemática em todos os seus contextos. Mostramos, com base nas teorias de Wittgenstein, que o nome *matemática* é capaz de contemplar várias atividades, e que nossa interpretação não pretende descartar nenhum dos significados que ela possa assumir. Apresentamos nosso olhar sobre a matemática a partir das várias atividades desenvolvidas por diferentes civilizações que formam a *família* do conceito de matemática, tentando responder a seguinte questão: "como a matemática é concebida pelos seres humanos?".

---

comum a tudo aquilo que denominamos de jogo, a essência do conceito de jogo (SILVA & SILVEIRA, 2013, p. 128).

Sabemos que muitos trabalhos sobre a matemática, que vão de encontro a essa questão, já foram realizados no âmbito do cenário filosófico, com a apresentação de muitas teorias e conclusões divergentes. No entanto, confiamos que o nosso estudo também possa dar sua parcela de contribuição nas discussões dessa esfera, mesmo tendo a certeza que é um grande desafio apresentar um ensaio que contemple um assunto de tamanha complexidade, com tantos questionamentos.

Nossa hipótese é a de que a matemática é um corpo de conhecimentos constituído à maneira como nossos corpos, incluindo nossos cérebros, reconhecem a realidade. Ela foi sendo construída a partir das diferentes experiências dos seres humanos com o mundo natural e a vida em sociedade, a partir de suas necessidades práticas e teóricas em diferentes contextos.

Ao buscar a história da matemática desde seus primórdios, vemos que ela é uma forma de conhecimento que surge a partir de experiências vividas pelos seres humanos. De forma resumida, sua existência começa com a criação de símbolos para registrar e controlar quantidades diante de necessidades básicas da humanidade. O ser humano, através dos seus sentidos, incluído aí o pensamento, conseguiu quantificar e medir o mundo, entre outras ações. Ele foi percebendo as coisas à sua volta, captando informações, racionalizando dados e criando meios de estabelecer uma conexão com o universo. Daí ele iniciou a construção de ferramentas para interagir com a realidade.

Nesse caminho, o ser humano criou os números que atenderam de forma significativa ao objetivo de representar a realidade quanto às ideias de quantificação e medição. Assim, a matemática é o acumulado dos estudos que se desenvolveram no Egito, Mesopotâmia, Grécia, Índia, China, Oriente Médio, Europa e Américas. D’Ambrosio (2005, p. 38) fala da matemática, colocando-a “como uma etnomatemática que se originou nas civilizações egípcia e mesopotâmica e que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII na Europa, sendo a partir de então, levada a todo o mundo”.

Marcada pela morte sempre presente em sua vida, a humanidade se deu conta da importância de compreender o mundo, o cosmos e todas as coisas talvez na crença de que essa compreensão lhe ajudasse a sobreviver melhor. O que chamamos de conhecimento pode ter se originado e crescido em decorrência dessa angústia existencial dos seres humanos, na qual necessidades e anseios promoveram uma existência desafiadora e, a posse da razão, em contrapartida, lhes garantiu a capacidade de pensar, emitir juízos, elaborar ideias, criar.

As respostas geradas através desses atos aos problemas e situações que foram enfrentados em busca da compreensão da realidade são parte dos nossos conhecimentos. Para

D'Ambrosio[10] (2005), o processo de construção do conhecimento tem um enfoque holístico que incorpora ao racional, o sensorial, o intuitivo e o emocional. Nesse processo, os indivíduos procuram entender as coisas ao seu redor, refletem sobre o sentido de sua existência e, consciente e intencionalmente, vão modificando as circunstâncias de acordo com seus interesses. Portanto, conhecer é intrínseco ao ser humano e resulta de impulsos naturais para sobreviver e transcender. O conhecimento impulsiona o sujeito à ação.

A matemática foi sendo construída a partir das diferentes experiências do homem[11] com o mundo natural e a vida em sociedade. Aspectos como "necessidades e interesses individuais e coletivos, lugares e épocas, entre outros fatores, foram definindo o que hoje chamamos de matemática. Um exemplo disso é que diferentes práticas matemáticas coexistiram desde sempre, dando soluções diferentes para problemas semelhantes" (ROQUE, 2012, p. 90).

Sendo uma forma de conhecimento, a matemática é um objeto da cultura humana, uma ferramenta de trabalho que está inserida no processo histórico-social no qual é produzida e que ela ajuda a produzir (MACHADO, 2009, p. 17). Encontramos reflexões interessantes sobre a relação do homem com o conhecimento, especialmente com o conhecimento matemático, no estudo do Programa Etnomatemática[12], idealizado e iniciado pelo matemático e professor D'Ambrosio, que tem por essência a abordagem de distintas formas de conhecer.

Seguindo a trajetória dessa história, observamos que, com o passar do tempo, "o ser humano passou a elaborar cálculos e medidas de grande precisão até consolidar a matemática como uma ciência de relações entre entidades, definidas abstrata e logicamente" (FERREIRA, 1999, p. 1297). Tais relações permitem que ela seja amplamente aplicável em outras áreas do conhecimento a partir de relações e deduções lógicas que produzem *objetos* que não são palpáveis e geram resultados que não possuem aplicações imediatas, constituindo ferramentas

---

[10] A aquisição e elaboração do conhecimento se dão como resultados de todo um passado, individual e cultural, com vistas às estratégias de ação no presente e projetando-se no futuro, modificando assim a realidade e incorporando a ela novos fatos, isto é, "artefatos" e "mentefatos". Em todas as culturas e em todos os tempos, o conhecimento é gerado pela necessidade de uma resposta a problemas e situações distintas e está subordinado a um contexto natural, social e cultural (D'AMBROSIO, 2005, p. 108).

[11] Significa "no sentido de espécie humana; humanidade". Disponível em: <https://www.google.com.br/search?q=Dicion%C3%A1rio>. Acesso em: 10/05/2018.

[12] Indivíduos e povos têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, de observação, instrumentos teóricos e, associados a esses, técnicas, habilidades (artes, técnicas, techné, ticas) para explicar, entender, conhecer, aprender, para saber e fazer como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência (matema), em ambientes naturais, sociais e culturais (etno) os mais diversos. Daí chamarmos o exposto acima de Programa Etnomatemática. O nome sugere o corpus de conhecimento reconhecido academicamente como Matemática (D'AMBROSIO, 2005, p. 112).

que dão legitimidade científica[13]. No entanto, a natureza abstrata da matemática tem origem a partir de um processo intelectual.

O ser humano constrói sua realidade a partir daquilo que capta do mundo e racionaliza em sua mente. Daí sua realidade é constituída de aspectos internos e externos. Com base nessa ideia, tudo aquilo que podemos alcançar com os nossos sentidos, incluindo o pensamento e a imaginação, existe, pois contribui para estruturar a realidade. É nesse sentido que entendemos a existência da matemática. Compreendemos que ela faz parte da construção da nossa realidade como toda forma de conhecimento, isto é, ela existe a partir de nós, da nossa interação com o mundo. Sua existência não é dada *a priori* e sim como um elemento da realidade humana.

A matemática versa sobre a realidade, mas ela não está no mundo físico nem é um universo independente. Essa é a base para a construção de nossas considerações sobre a natureza da matemática. Dos primórdios até a era moderna, os conhecimentos matemáticos foram produzidos nas mais diversas civilizações e nunca aconteceu de maneira isolada. Todas as culturas, de alguma forma, aproveitaram os saberes umas das outras. Assim, a matemática pode ser considerada um fazer comum da humanidade, uma atividade intelectual desenvolvida por seres humanos, cujo objeto é tipicamente um objeto cultural.

Além disso, a matemática permite ao homem transcender os limites do seu corpo e criar outras realidades, bem como lhe dá a capacidade de se recriar, se modificar e se aperfeiçoar. No entanto, esses predicados são comuns a toda forma de saber, como a literatura, a pintura, a física, a química, a poesia, a música, a ciência, a filosofia etc. Desta forma, tais atributos não são exclusivos da matemática, pois todo conhecimento é uma forma de construir a realidade.

Os povos da Antiguidade criaram a matemática para facilitar situações práticas da vida cotidiana e organizar a sociedade. Com a civilização grega houve uma crescente intenção de *matematização* do mundo devido a novas perspectivas filosóficas. Tal finalidade provocou uma preocupação cada vez maior com a estruturação da matemática. Para tanto, foi instituída uma fundamentação lógica a partir de provas dedutivas e de um sistema de teoremas complexo e dinâmico, conhecido como método axiomático, que envolveu muita abstração e generalização.

Com os gregos, a matemática passou a ser considerada uma espécie de lei “natural” que regia o universo e que revelava verdades deste mundo. Nesse contexto, surgiu uma filosofia que passou a gerar grande parte das discussões sobre a natureza da matemática: ela é um sistema

[13] A ciência, normalmente, vale-se da Matemática como forma de expressar seu pensamento. Seu emprego torna-se critério de cientificidade, na física, na medida em que a incapacidade de expressar propriedades de sistemas em linguagem matemática inviabiliza mesmo a possibilidade de admiti-las como hipóteses para o debate científico (PIETROCOLA, 2002, p. 88).

metafísico que trata de entes objetivamente existentes. Provavelmente, foi a partir daí que também surgiu a hipótese da ligação dos modelos matemáticos com as coisas do mundo.

Embora a matemática tenha passado a se apresentar de forma tão independente, nossa linha de investigação se apoia numa história que teve seus primeiros registros com as civilizações orientais do Egito e da Mesopotâmia. Elas produziam matemática numa perspectiva empírica e instrumentalista, admitindo um caráter *a posteriori* e falível enquanto conhecimento (um fazer matemático que foi continuado por civilizações posteriores, como os árabes, chineses e hindus). Seus primórdios, especialmente, nos levam a acreditar que ela é uma atividade humana estabelecida por um corpo de conhecimentos criado pelo homem, a partir de suas necessidades práticas e teóricas em diferentes circunstâncias.

Esperamos que o presente trabalho contribua para um olhar sobre a matemática diferente do que é colocado pela visão predominante cultuada a partir dos gregos, isto é, como algo que transcende a razão humana e admite questões para as quais não temos respostas. Embora a existência da matemática admita uma natureza abstrata, acreditamos que não existe um universo matemático autônomo com entes objetivamente existentes, mas sim objetos matemáticos criados pelo homem para atender às suas necessidades. Deste modo, tais objetos têm relação com o sujeito que os cria.

Assim, se a matemática tem uma essência, ela está no homem, sua realidade está aí. Todo fazer matemático contribuiu para o conjunto de saberes da matemática que temos hoje embora as convicções e construções dos gregos tenham se tornado um modelo para as demais civilizações. Isto quer dizer que a matemática tem um caráter plural que pode ser reconhecido acompanhando sua história mesmo quando ela é apresentada como um conhecimento único e universal, como na matemática hegemônica grega.

A própria matemática hegemônica é uma construção humana que se desenvolveu de acordo com circunstâncias momentâneas a seu tempo e sob a lente de uma cultura. Cafezeiro *et al* (2017, p. 243) explica que é necessário perceber que as entidades e conceitos da matemática – incluindo aí toda a matemática hegemônica – são construções sociais. Isso significa deixar evidente o seu processo histórico para ficar claro que eles foram desenvolvidos em um determinado momento como uma resposta a demandas locais.

Devemos reconhecer a pluralidade da matemática e, para isso, precisamos perceber que construções matemáticas de outras culturas devem ser colocadas lado a lado com a matemática dos gregos, que, por outro lado, não pode ser desprezada, pois também faz parte dessa história. A matemática é uma atividade ou corpo de conhecimentos constituído por demandas e convenções culturais e sociais, isto é, humanas. Esse é o caminho que seguiremos para penetrarmos em sua suposta objetividade e impessoalidade e enxergarmos que expressões, como imutável, perfeita e eterna não podem caracterizá-la. Pelo contrário, a matemática é uma atividade falível, questionável e imprecisa, que nasce de ideias que são colocadas em prática e que, por serem humanas, são sempre corrigíveis e nunca absolutas. Desta forma, justificamos mais uma vez, a importância de realizarmos esse estudo.

Em consonância com os aspectos abordados nesta introdução, os capítulos que seguem apresentarão considerações sobre a natureza da matemática à luz de teorias que envolvem elementos tanto da corrente realista quanto antirrealista desde que elas iluminem algum recanto desse conhecimento tão amplo e multiforme e de modo que nos forneçam subsídios para mostrar a matemática como um domínio humano. Sob tal perspectiva, esperamos superar as dificuldades que apareçam na defesa do tema proposto.

A postura de defender o tema de que *a matemática é parte da cultura humana* firma-se, principalmente, na concepção de que é inaceitável ter, como critério de verdade sobre a sua existência, uma realidade desconhecida, com um acesso misterioso, diante de tantas evidências de sua origem e desenvolvimento pelos homens.

A argumentação será delineada a partir de temas que constituem a filosofia e a história da matemática privilegiando fatores de natureza epistemológica e ontológica. Fatores epistemológicos são determinados por questões, teorias, definições e debates que vão se estabelecendo a propósito da natureza do conhecimento, das suas possibilidades e dos seus limites. Ao estudarmos a ontologia, nos caberá analisar virtudes epistêmicas, isto é, a expressão de um processo, os valores, como objetividade e precisão. Entender, por exemplo, que tipo de linguagem produz efeitos na natureza é um propósito ontológico da ciência.

Com base nessas colocações, o objetivo geral dessa tese é *apresentar a matemática como uma forma de conhecimento concebida e desenvolvida pelos seres humanos a partir de suas atividades conscientes, intencionais e inventivas*. O desdobramento desse objetivo se dará através dos seguintes objetivos específicos:

▪ Traçar as linhas gerais da ontologia inerente à matemática com as diferentes concepções a respeito de seus fundamentos e as principais correntes filosóficas sobre sua natureza com as devidas regras de justificação;

▪ Abordar a matemática como uma representação sobre o mundo percebido e interpretado a partir de entes criados pela razão humana dotada de criatividade e experiências;

▪ Evidenciar a matemática como um campo do conhecimento originado e desenvolvido no seio das sociedades humanas com suas contingências históricas, limites funcionais e paradigmas culturais;

▪ Justificar a existência da matemática em função de critérios, conceitos, parâmetros, metodologias e processos de renovação, configurados segundo regras limitadas ao campo da imaginação criadora e da significação humana;

▪ Apresentar a matemática através de epistemologias que a consideram uma forma de conhecimento geradora de suas próprias racionalidades, mas que faz parte de um fluxo que une todos os saberes na busca de representação e compreensão da realidade.

Vemos como significativo, para a marcha desse ensaio, apresentarmos as principais fontes da fundamentação teórica sobre a construção do conhecimento matemático, ou seja, as referências elementares que defendem nossa perspectiva sobre o assunto. Assim, buscamos todas as possíveis colaborações dos autores consultados. Outrossim, consultamos textos de comentadores das obras dos mesmos com o objetivo de auxiliar no entendimento de questões duvidosas.

As reflexões sobre o tema proposto têm como principais referências os autores listados a seguir, agrupados por área de pesquisa. Foi procurado, especialmente, o diálogo entre: Boyer (2003), Eves (2004), Roque (2012) e Stewart (2014) no que se refere a história da matemática; Ernest (1991), Davis e Hersh (1996), Lakatos (1978), Machado (2011, 2009) e Silva (1991, 1993, 1999, 2007) sobre matemática e realidade; Cifuentes (2002, 2003, 2005), Putnam (1975), Serres (1990, 2004, 2005), Wittgenstein (1956) a respeito da matemática como uma forma de expressão humana; Bloor (2009), D'Ambrosio (1993, 1996, 2005, 2011, 2012), Foucault (2008, 2013), Struik (1998) e Wilder (1965, 1985) no que tange à relação do homem com a matemática.

Ainda contamos com as abordagens de recentes trabalhos, entre dissertações e teses, desenvolvidos por pesquisadores que, corroborando os autores citados acima, propõem ser a tarefa da filosofia da matemática explicá-la mais completamente. Isso quer dizer que seus estudos mostram uma mudança que se configura pela inclusão da "face humana" da matemática. São eles: Candiotto (2016), Chaitin (2009), Del Vecchio Junior (2010), Duarte Junior (2000), Gusmão (2013), Jesus (2002) e Santana (2007).

Esse estudo foi desenvolvido por meio de uma pesquisa bibliográfica de caráter explicativo (GIL, 2007, p. 43) que consiste basicamente na defesa de uma concepção oferecendo argumentos condizentes e refutando as objeções em favor da proposição considerada. Por ser um estudo de cunho teórico, a coleta de dados, informações e conceitos ocorreu em fontes escritas (DOXSEY & DE RIZ, 2003, p. 38). Assim, o material de consulta foi constituído por referências publicadas, exclusivamente, em livros, artigos científicos, dissertações e teses acadêmicas. O método de leitura segue basicamente o modelo indicado por

Folscheid & Wunenburger (2002) em sua metodologia filosófica para a construção dos argumentos em defesa da tese e das respostas às objeções expostas.

Então, retomando a questão proposta "como a matemática é concebida pelos seres humanos?" e confiante em estabelecer uma resposta que interpreta a matemática como uma atividade humana, colocamos de forma resumida as principais premissas que balizam o escopo de nossa argumentação:

▪ *A matemática é uma forma de expressão humana*, isto é, ela é uma construção sobre o mundo vivido na busca de soluções para problemas existenciais e outras necessidades da vida humana.

▪ *A matemática é uma idealização racional da realidade*, ou seja, ela é uma apreensão do mundo que se dá pela capacidade humana de conceber modelos ideais com dados aproximados.

▪ *A matemática é um objeto cultural e social*, o que significa que ela é fruto do trabalho prático e intelectual de diversas civilizações ao longo do desenvolvimento da humanidade.

Na tentativa de fortalecer nosso discurso, apresentamos outras proposições como consequências das premissas citadas anteriormente:

▪ A matemática só existe em função das experiências humanas no mundo, ou seja, ela não possui uma realidade efetiva para além do campo da significação humana.

▪ A matemática é mais uma criação humana na relação de reflexo na consciência, que sempre está vinculado à forma como se vive, se imagina e se sente a realidade.

▪ A matemática tem um processo histórico, sendo desenvolvida e espalhada de uma cultura para outra de acordo com as necessidades de adaptação e convivência humana ao longo do tempo, evoluindo com a construção de estruturas, padrões e formas.

A colocação dessas premissas nos leva a dialogar com fluxos divergentes. Nesse contexto, a tática proposta é responder as objeções apresentadas por ideias concorrentes a partir de sistemas que não a conduzam a uma realidade independente nem a traduzam como a linguagem da natureza. Só assim podemos partir para uma análise sobre o verdadeiro papel da matemática no esquema geral do conhecimento.

O desenvolvimento da presente tese ocorre a partir da elaboração de quatro capítulos, além da apresentação, da introdução e das considerações finais. Nesses capítulos, apresentamos os argumentos em prol da hipótese a ser defendida, diante da questão já colocada, e as refutações às principais objeções impostas por teses concorrentes.

Quanto à estrutura da argumentação, dividimos o trabalho em duas partes. A primeira contempla os capítulos I e II e é dedicada à discussão sobre a existência e a materialidade da matemática apoiando-se nas concepções defendidas por suas principais filosofias e na ideia de que a matemática é uma forma de expressão humana, ou seja, como o ser humano, através dos seus sentidos, conseguiu quantificar e medir o mundo. A segunda parte é tratada nos capítulos III e IV e faz referência aos domínios da matemática a partir da percepção de que seus objetos não são independentes, isto é, os entes matemáticos foram criados pelos homens a partir de necessidades individuais e coletivas em contextos culturais e sociais. Esta parte aborda o processo de construção da matemática que incorpora ao racional, o sensorial, o intuitivo e o emocional.

A seguir, apresentamos as ideias centrais dos quatro capítulos que procuram enquadrar a dualidade relativa a aspectos internos e externos da produção dos saberes matemáticos, destacando-os como fatores que determinam sua natureza humana. Inicialmente, abordamos numa perspectiva histórica, diferentes formas de como a matemática tem sido encarada ao longo do tempo, através de filosofias que buscam fundamentos seguros para essa área do conhecimento. Depois, tratamos de aspectos relacionadas ao papel da experiência e da razão na gênese e no desenvolvimento da matemática. Por fim, seguimos as direções atuais da filosofia da matemática considerando-a uma atividade do intelecto num contexto sociocultural.

No primeiro capítulo, chamado *A ontologia inerente à matemática*, abordamos as ideias fundamentais das principais correntes de pensamento sobre a natureza da matemática, que apresentaram, ao longo da história, uma série de possibilidades para as questões sobre sua existência e materialidade e os principais desdobramentos contemporâneos dessas concepções. De todas as formas de conhecimento, a matemática é a que passa por mais polêmicas filosóficas e discordâncias epistemológicas. Esse capítulo presta-se à apresentação de aspectos importantes desse cenário baseando-se nas colocações das duas principais posições sobre a existência da matemática: realistas e antirrealistas.

No segundo capítulo, nomeado *A matemática enquanto expressão humana*, mostramos que a matemática não é a linguagem da natureza, mas uma forma de conhecimento que teve origem a partir das necessidades humanas. Aqui ela é apresentada como uma atividade na qual predominam processos de observação, experimentação e tentativa e erro a partir de todo tipo de experiência humana, incluindo os sentidos, a intuição e o pensamento. Ela existe graças à principal faculdade humana, a racionalidade, que permite ao homem pensar, registrar, organizar, criar e modelar percepções e investigações sobre o mundo. Ela é um desafio intelectual, como qualquer outra área do conhecimento que o ser humano criou para atender suas necessidades ou pelo prazer de criar coisas novas, podendo ter características comuns com a poesia, a literatura, a física, a filosofia, a pintura, entre outras atividades.

No terceiro capítulo, intitulado *Uma idealização racional da realidade*, destacamos que a matemática é uma produção da mente humana, uma forma de conhecimento que foi construída e acumulada ao longo dos tempos. Tal processo teve início com a invenção dos números e foi evoluindo com a construção de teorias, formas, estruturas e padrões. A matemática não está na realidade, mesmo a mais abstrata, isto é, ela é uma expressão de como reconhecemos o mundo. Nesse contexto, a matemática se apresenta como um tipo de expressão sobre a realidade e não como um mundo autônomo de objetos independentes. Ela é o resultado de nossas ideias sobre o mundo a partir das experiências vividas.

No quarto capítulo, denominado *Um objeto cultural e social*, falamos que a objetividade da matemática tem suas raízes na cultura humana. Em toda a sua história, é possível identificar tal consideração, especialmente, quando identificamos que toda cultura na terra desenvolveu alguma matemática para resolver problemas práticos e teóricos e que várias civilizações se destacaram desde a Antiguidade ao contribuírem de alguma forma para o seu desenvolvimento. As contribuições desses povos fizeram da matemática uma área do conhecimento múltipla e diversa, isto é, a pluralidade é uma de suas principais características. Nossa matemática é um produto cultural, ou seja, histórico e social, acumulado ao longo do desenvolvimento da humanidade.

Nas *Considerações finais*, apresentamos as últimas reflexões sobre o tema estudado, relembrando os objetivos propostos no início da pesquisa e fazendo as devidas conexões com os argumentos expostos ao longo do trabalho. Esforçamo-nos para mostrar que a matemática é uma das ferramentas que o homem inventou, com toda a sua criatividade, para interagir com o mundo e lidar com questões da própria existência, e que inferências empíricas desempenham um papel importante no seu desenvolvimento. A conclusão está relacionada à ideia de que a matemática só existe porque o ser humano existe, isto é, ela é uma forma do homem representar a realidade e dar sentido à vida.

PRIMEIRA PARTE

Existência e materialidade da matemática

A matemática é um produto da cultura humana, não uma espécie de maná caído dos céus. Ela muda com o tempo, em função das culturas em que viceja e dos problemas práticos e teóricos que essas culturas enfrentam.

Jairo José da Silva

CAPÍTULO 1

A questão ontológica inerente à matemática

Infinitos são os números que conto e os pontos em uma porção de espaço que imagino, mas são diferentes, em tamanho e quantidade. A história da matemática é a história do homem organizando e classificando os infinitos. Muito se aprendeu nessa caminhada: que há tantos números inteiros quanto números pares ou, mesmo, múltiplos de 37; que a quantidade de pontos geométricos em uma porção ínfima de espaço é a mesma do que em todos os universos concebíveis, mesmo que infinitos e com múltiplas dimensões. Aprendemos também, que este infinito é de fato bem maior do que os dos números...Muito ainda se vai aprender. A matemática, com seus infinitos organizados é essencialmente inútil e bela, como um quadro na parede ou um quinteto de Schumann, é a lógica a serviço do puro maravilhamento humano, e é essa inutilidade lógica que a faz tão decisiva na aventura humana. O que difere a matemática dos outros conhecimentos da inteligência é que, se por um lado ela se baseia em uma lógica bivalente assemelhando-se a uma ciência clássica e distanciando-se das filosofias e das artes, por outro ela se auto-observa e não modela a natureza nem busca explicações para um universo exterior a mente, como fazem as ciências, distanciando-se assim destas para se aproximar daquelas. Esta independência dá a matemática um duplo papel: o de consciência das inteligências e o de inteligência da consciência. Suas principais questões são sempre as geradas por sua eterna auto-observação. É na primeira pessoa, como nas artes e na filosofia, que se estabelece a criação matemática, mas, seu processo criativo se dá por meio de uma organização lógica axiomática onde as verdades são conseqüências diretas das possibilidades arbitrárias dos seus postulados e da sua estrutura científica. Tão distante e tão perto das outras maneiras do pensamento, a matemática nos surpreende a cada reflexão. Por que é que ela dá tão certo, acompanhando as ciências da natureza com suas fórmulas seus algoritmos, seu raciocínio? Como ela é capaz de entender o infinito, tão além da intuição do homem? Que universos criou pra si, ao conceber-se, que a possibilita ter um olhar para o infinito que navega, com igual desenvoltura, da dinâmica das transcendências ao imobilismo científico das eternidades? Finito ou infinito, nos perguntamos admirados diante do universo? Qual universo o verdadeiro, diante de infinitas possibilidades que fabrico, nos responde paciente a matemática. Contínuos? Descontínuos? Limitados? Ilimitados? Ordenados? Orientados ou não orientados? Imaginários, multidimensionais, complexos? Atemporais? Estáticos? Do Isso ao osso, as perguntas nunca se esgotam. De onde virão tantas verdades-possibilidades, se não do homem, sua hora e sua busca do infinito?[14]

Ricardo Kubrusly

Os versos do matemático e poeta Kubrusly guiam nossas primeiras considerações a respeito da relação dos seres humanos com a matemática como propomos na introdução. Começamos com uma reflexão sobre os infinitos matemáticos que se confundem com um desejo próprio do ser humano de ser eterno. Então, a matemática permite pensar a eternidade, o infinito, como número, impulsionando o pensamento dos homens. Refletindo sobre isso, tratamos de falar da matemática com base na história da humanidade.

[14] "O finito e o infinito: O tamanho do infinito" em Pensando no Infinito: Pequenas Digressões Matemático Filosóficas e outros Pecados. Departamento de Matemática da UFRJ. Disponível em <www.dmm.im.ufrj.br/~risk/pdf/Finito.pdf >.

Ao longo da história da matemática, muitas discussões e confrontos têm ocorrido a respeito de sua natureza. É possível observar que filósofos e matemáticos discordam em vários aspectos desde a época de Platão. De todas as formas de conhecimento, ela é a que passa por mais polêmicas filosóficas, com discordâncias epistemológicas e ontológicas. De fato, questões sobre o que são os objetos matemáticos[15] (ontologia da matemática), como conhecê-los (epistemologia da matemática) e como podem ser aplicados à realidade empírica são tópicos permanentes em qualquer pauta de discussão sobre a existência da matemática.

Quando os matemáticos falam a respeito de números, funções, conjuntos etc., eles estão falando de coisas que existem de fato? Ao longo da história do pensamento ocidental, muitos responderam a essa pergunta com um *sim* enquanto outros responderam com um sonoro *não*; alguns, ainda, disseram que a resposta dependeria fundamentalmente do que se entende por *existência* (SIQUEIRA, 2013, p. 127). De modo geral, existem dois olhares distintos sobre a natureza dos objetos matemáticos. Um tem relação com a imaterialidade desses objetos, e outro os relaciona com o indivíduo que busca o seu conhecimento.

Deste modo, a questão da existência de objetos matemáticos apresenta, de forma tradicional, duas concepções: a realista e a idealista. O realismo propõe um universo matemático autônomo. Por essa percepção, o sujeito não inventa a realidade matemática, a qual só lhe cabe descobri-la. Já o idealismo define que toda a matemática é determinada pelos indivíduos que inventam essa realidade, e os objetos matemáticos possuem somente as propriedades que o pensamento puder determinar. Sobre essa questão, são importantes as considerações de Ponte *et al* (1997) quando apresenta um panorama das ideias fundamentais sobre a materialidade da matemática:

> As primeiras civilizações orientais do Egipto e Babilónia mostram claramente que os conceitos que aí intervêm dizem respeito apenas a objectos concretos: enumeração de objectos de um amontoado, medida de grandezas susceptíveis de adição e subtracção, como comprimento, área, volume, peso, ângulo, para cada uma das quais se toma uma unidade e muitas vezes os seus múltiplos ou submúltiplos. [...] Mais tarde, a partir do século V, surgem, com os pensadores gregos, as primeiras demonstrações e com elas a necessidade de precisar noções como figura, posição, grandeza, quantidade e medida. Platão mostra que estas palavras não designam noções da experiência sensível, referindo que os matemáticos se servem de figuras visíveis para estabelecerem raciocínios, pensando, contudo, não nelas, mas naquilo com que se parecem. Aristóteles não deixa de apoiar a ideia da imaterialidade dos objectos matemáticos,

---

[15] Denominam-se de objetos matemáticos a todos os entes que são assuntos de estudo da Matemática, tais como números (naturais, racionais, transcendentais, imaginários, etc.), grandezas (comprimento, distância, área, volume, etc.), formas geométricas (retas, polígonos, retângulos, círculos, etc.), entre elas as superfícies (planas, esféricas, hiperbólicas, etc.), as formas estereométricas (pirâmides, cilindros, etc.), bem como vetores, integrais, séries, etc. Os gregos denominavam esses objetos de os mathematiká (*μαθηματικά*) (ALMEIDA, 2011, p. 20).

> referindo, em particular, que as investigações dos matemáticos incidem sobre coisas atingidas por abstracção. [...] Aos poucos vai-se delineando uma ideia que será aprofundada no século XX: a ideia de estrutura na base de uma teoria matemática. Esta ideia relaciona-se com a constatação de que numa teoria matemática mais importante do que a natureza dos objectos, são as relações entre esses objetos (PONTE *et al*, 1997, p. 3-4).

A discussão entre tais perspectivas filosóficas sobre os entes matemáticos leva a uma vertente de análise com foco no papel da experiência e da razão na gênese e no desenvolvimento da matemática, que apresenta ainda duas ideias centrais e divergentes que surgiram a partir da Idade Moderna: o racionalismo e o empirismo. Essas duas vertentes são explicadas diretamente pela associação da experiência ao empirismo e da razão ao racionalismo. O racionalismo supõe a razão como uma faculdade da mente humana (o homem tem ideias inatas, ou seja, que não são derivadas da experiência), que nos permite chegar à verdade independente da observação, enquanto o empirismo afirma que a observação é a base de todo conhecimento.

De acordo com Silva *et al* (2016, p. 4), o racionalismo e o empirismo dominaram os centros de discussão da filosofia da matemática até o início do século XIX quando, a partir do desenvolvimento exponencial da matemática, em todas as áreas, a natureza desse conhecimento foi novamente colocada em questão. Outras correntes filosóficas surgiram a partir desse período, procurando explicar a natureza da matemática, como o logicismo, o formalismo e o intuicionismo.

Para D'Ambrosio (1993), os muitos debates e intransigências que ocorrem na *Filosofia da Matemática*[16] são, especialmente, a respeito das questões que envolvem sua materialidade. Elas constituem um grande desafio para a filosofia, pois é necessário compreender a história do pensamento humano.

No entanto, a filosofia da matemática serve de base para a compreensão do modo como esse conhecimento se estruturou ao longo da história. Silva[17] (2007, p. 16) nos diz que não compete à filosofia[18] nos dar teorias necessariamente verdadeiras, mas teorias interessantes que, apesar de imunes à verificação, podem oferecer, com algum conforto, providos de conceitos e ideias adequados, uma imensidade de problemas teóricos e práticos com os quais nos deparamos.

---

[16] A chamada Filosofia da Matemática talvez seja a área que sugere as maiores contradições nos vários ramos da Filosofia. Desde a Antiguidade grega, na qual os impasses do irracional e do infinito foram dominantes, até os dias de hoje, as correntes filosóficas têm encontrado na Matemática suas melhores armas para o confronto (D'AMBROSIO, 1993, p. 8).
[17] Creio que o teste crucial para uma teoria filosófica é o papel articulador que desempenha no contexto global do conhecimento e das práticas humanas e o poder de esclarecimento dos conceitos e ideias que manipula (SILVA, 2007, p. 16).
[18] A história da filosofia é a história do conhecimento no Ocidente com sua origem grega (ALBIERI, 2018).

As perguntas que são apresentadas nas discussões filosóficas sobre a matemática contribuem para que formemos nossa concepção sobre esse saber. Nesse âmbito, buscamos associar a reflexão sobre o caráter dos objetos matemáticos à ideia acerca de como se atinge tal conhecimento. Para tanto, adentramo-nos em questões como as colocadas por Chauí (2000):

> São eles uma abstração e uma purificação dos dados de nossa experiência sensível? Originam-se da percepção? Ou são realidades ideais, alcançadas exclusivamente pelas operações do pensamento puro? São inteiramente a priori? Existem em si e por si mesmos, de tal modo que nosso pensamento simplesmente os descobre? Ou são construções perfeitas conseguidas pelo pensamento humano? (CHAUÍ, 2000, p. 332).

Então, enquanto um estudo do campo filosófico, esta tese faz uma reflexão sobre a natureza do conhecimento matemático buscando as primeiras referências filosóficas na Antiguidade Clássica com os filósofos Platão e Aristóteles. Foi nessa época que se iniciou, junto com a investigação sobre temas específicos, a preocupação com o estabelecimento da verdade das investigações e, ao mesmo tempo, a divisão de pensamentos sobre a relação do conhecimento com essa verdade. Todas as investigações passaram a ser acompanhadas pela escolha do melhor método para se chegar a um consenso que determinaria o fim da pesquisa, isto é, para se chegar a uma crença verdadeira justificada[19] sobre os assuntos investigados.

Esse é o início da história da filosofia. A separação de ideias que se deu entre Platão e Aristóteles, era sobre a natureza da investigação, isto é, a teoria que se preocupava com o método, o caminho, a definição do que seria o conhecimento verdadeiro e os modos de estabelecer tudo isso. Aristóteles chamava esse tipo de investigação de metafísica e falava que esses assuntos não serviam para nada, porque estavam distantes das aplicações. No entanto, Platão afirmava que quanto mais distante da prática mais a pessoa estava próxima de um nível supremo no mundo da investigação.

No entanto, Albieri[20] (2018) destaca que a satisfação dos filósofos, independentemente de suas crenças, se restringia apenas a encontrar um bom método, pois a maioria dos diálogos terminava mais concluindo as coisas que não eram verdadeiras do que na certeza do que era a verdade. A garantia de ter chegado à verdade era o grande desafio.

---

[19] Uma opinião que pode se defender como melhor que as outras porque pode oferecer uma justificação, uma explicação racional de porquê esta opinião é confiável. (Comentários de Sara Albieri - FFLCH e IEA/USP - na palestra intitulada "Epistemologia na História da Ciência", em 24/07/2018 na I Escola USP de História das Ciências. Departamento de História. FFLCH/USP). Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=PT-pIy0tEiU >. Acesso em: 04/12/2018.

[20] Palestra intitulada "Epistemologia na História da Ciência", em 24/07/2018 na I Escola USP de História das Ciências. Departamento de História. FFLCH/USP). Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=PT-pIy0tEiU >. Acesso em: 04/12/2018.

Os filósofos conseguiam chegar a uma conclusão do que não era falso, mas não se entendiam sobre o que era, de fato, verdadeiro. Essa foi a forma como as correntes filosóficas começaram a ser estabelecidas, e é muito importante considerar esse aspecto no acompanhamento desse primeiro capítulo, pois foi nesse contexto que começaram as investigações sobre a natureza da matemática, um conhecimento que já tinha uma longa história.

Uma observação interessante de Albieri (2018) é que o conjunto de investigações sobre as condições das outras investigações, que é chamada de metafísica, também foi nomeado por Aristóteles de *filosofia primeira*[21], que é aquilo que é a pré-condição de todo o resto, enquanto os outros tipos de investigações seriam *filosofias segundas*[22], como as ciências particulares. Assim, esse capítulo mostra um panorama geral do lugar filosófico onde se discutem questões epistemológicas e ontológicas sobre a matemática que permitirão que ela possa ser discutida como parte integrante da cultura humana em geral.

Apresentamos, então, uma revisão de literatura baseada no olhar de filósofos e matemáticos sobre a matemática. Uns consideram que seus fundamentos vêm inteiramente da razão enquanto outros a relacionam com a experiência. No primeiro caso, podemos citar o realismo platônico e o racionalismo de Leibniz e, no segundo, destacamos os trabalhos de Locke e Hume. Há ainda os que consideram a matemática como um conhecimento com existência própria, como no caso do platonismo; por outro lado, existem os que a consideram como parte da criação humana. Esta última posição encontramos em correntes filosóficas mais recentes, como nas obras de Hersh (1986) e Lakatos (1978).

Esse trabalho também é amparado pela história da filosofia seguindo uma sequência dinâmica do pensamento, que vai desde os predecessores de Platão e Aristóteles até a influência que esses tiveram sobre pensadores de nosso tempo. A partir do olhar sobre esse território, desenvolveremos as reflexões dos próximos capítulos sobre as condições de existência e os domínios da matemática e construiremos os argumentos a favor da hipótese proposta.

---

[21] O conjunto de investigações sobre as condições das outras investigações. [...] Conjunto de questões, teorias, debates que vão estabelecendo a propósito da natureza do conhecimento, das suas possibilidades, dos seus limites, daquilo que permite definir o fim da investigação, daquilo que permite definir quando se tem ciência de algo. E composições mais ou menos aprofundadas, sempre divergentes. (Comentários de Sara Albieri - FFLCH e IEA/USP - na palestra intitulada "Epistemologia na História da Ciência", em 24/07/2018 na I Escola USP de História das Ciências. Departamento de História. FFLCH/USP). Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=PT-pIy0tEiU >. Acesso em: 04/12/2018.

[22] As investigações aplicadas a casos. A ciência moderna desenvolveu com muito sucesso a filosofia segunda. Todos os diferentes campos de investigação que emergiram do grande campo filosófico foram se estabelecendo como campos, de alguma forma, delimitados de investigação (ALBIERI, 2018).

1.1 Os entes independentes do realismo

Com base nas considerações sobre as formas de pensamento de Platão e Aristóteles, apresentamos a corrente realista, que ainda se impõe e que tem uma forte inspiração no platonismo. Sabendo que a constituição de uma leitura epistemológica da matemática parte da ação de aceitá-la ou rejeitá-la, apresentamos aqui aspectos importantes do cenário da ontologia inerente à matemática.

Este debate ganha certa importância ao assumir contornos de uma possível análise sobre a posição que a matemática ocupa diante das demais formas de conhecimento. A concepção predominante lhe garante um caráter infalível, que é cultuado como um atributo sagrado, postulando-se a eternidade de suas verdades e a universalidade de seus princípios. Esse olhar sobre a matemática lhe garante perspectivas do tipo: *A fonte mais fecunda das descobertas matemáticas é o estudo aprofundado da natureza* (Joseph Fourrier); *A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo* (Galileu Galilei); *A realidade matemática está fora de nós e a nossa função é descobri-la ou observá-la* (G. H. Hardy). Por essas considerações, é possível perceber que a matemática costuma ser encarada como uma realidade independente.

1.1.1 O realismo platônico

O realismo é justamente a corrente de pensamento inspirada na filosofia de Platão (428/427-348 a.C.), que considera as entidades matemáticas com existência própria, independentes do espaço, do tempo e do mundo sensível, e que não dependem da criação humana, ou seja, elas têm propriedades próprias. Assim, os objetos matemáticos são reais e só necessitam dos seres humanos para serem descobertos, pois pertencem a um universo autônomo. Meneghetti (2004) explica que, na teoria de Platão existem, separadamente, dois lugares: o sensível e o inteligível.

> O conhecimento consiste em elevar-nos por meio da dialética do mundo sensível a uma intuição intelectual desse mundo suprassensível, composto de ideias. A matemática encontra-se no lugar inteligível, sendo propedêutica a dialética. As noções matemáticas não constituem ideias puras, mas refletem tais ideias e possuem seus protótipos no domínio das realidades eternas (MENEGHETTI, 2004, p. 371).

Do ponto de vista histórico, com o realismo platônico, concretiza-se uma mudança no critério de verdade em matemática, da justificação pela experiência para o de razões teóricas: “o primitivo conhecimento matemático empírico dos egípcios e babilônios é transformado na ciência matemática grega, dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas” (BICUDO, 1998, p. 307). Essa transformação constitui um dos importantes capítulos da história da matemática embora bem pouco conhecido. É certo que houve uma matemática pré-helênica bem desenvolvida.

Segundo Nascimento (2009, p. 131), um exemplo que esclarece a visão platônica pode vir de Hermite[23] – matemático francês (1822–1901), reconhecido por clássicos trabalhos que ajudaram a educar seus contemporâneos em vários países – quando ele afirma que "os números e as funções da análise existem fora dos seres humanos com o mesmo caráter de necessidade predeterminada dos objetos da realidade objetiva como o sódio e o potássio; nosso papel é apenas descobri-los e estudá-los". Nessa perspectiva, uma descoberta seria o Teorema Angular de Tales, o qual afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

Em nível metafísico[24], o realismo está intimamente ligado ao pressuposto de que os entes matemáticos existem de modo independente das ideias humanas quer se façam estudos sobre eles ou não. Esses objetos existem mesmo que os homens não consigam desenvolver métodos adequados para sua identificação. No âmbito epistemológico, o realismo concorda com a afirmação de que uma teoria existe de modo independente da consciência humana sobre sua existência, isto é, ela já existe antes de ser elaborada.

Em linhas gerais e de modo simplificado, apresentamos o conceito de realismo científico, que é uma das caracterizações do realismo (um dos conceitos filosóficos que recebe muitas distinções) e um conceito correlacionado de grande importância para nossas reflexões. Já vimos, num sentido amplo, que o termo realismo é uma posição acerca de classes de objetos ou de proposições sobre esses objetos. Como exemplo, temos os objetos matemáticos e as *entidades não-observáveis*[25] postuladas pelas teorias científicas, entre outros.

Chibeni (1990) reforça que, nesse âmbito puramente metafísico, os objetos em questão realmente existem, ou desfrutam de uma existência independente de qualquer cognição, ou estão entre os constituintes últimos do mundo real. Pode-se, pois, ser realista com relação a uma classe ou classes de objetos e antirrealista com relação a outras: "o realista científico é aquele

[23] A posição de destaque que Hermite ocupava fazia com que ele estivesse entre os centralizadores de conhecimentos matemáticos da época. Neste ponto merece destaque o caráter extremamente cordial de Hermite para com aqueles que lhe escreviam, especialmente com os iniciantes, que tinham em Hermite uma fonte de constante encorajamento. Esta característica mostra que Hermite, além de grande matemático, foi também um grande homem (FURTADO, 1996, p. 7-8).
[24] Assim, a Matemática tem uma existência autónoma, obedecendo a uma lógica e leis internas. A actividade de fazer Matemática consiste na descrição e descoberta desses objectos, bem como das relações que os unem. Quer uns, quer outras, uma vez que são pré-existentes, podem ser descobertos pelo espírito, mas não inventados por este (PONTE *et al*, 1997, p. 4).
[25] Como exemplo, temos elétrons, vírus, campos magnéticos. Por brevidade nos referiremos a tais entidades pela expressão 'entidades teóricas da ciência', e às proposições a seu respeito por 'proposições teóricas da ciência', ou simplesmente por 'proposições teóricas' (CHIBENI, 1990, p. 2).

que mantém que pelo menos algumas das entidades não-observáveis postuladas pela ciência realmente existem” (CHIBENI, 1990, p. 2).

Oferecemos, ainda com base em Chibeni (1990, p. 3), algumas formulações do realismo científico frequentemente encontradas na literatura: algumas das entidades teóricas da ciência realmente existem; a ciência investiga um mundo independente de nossa cognição; vale a lei do terceiro excluído para as proposições teóricas da ciência, interpretadas literalmente, e o que as fazem verdadeiras ou falsas são suas conexões com uma realidade independente de nossa cognição; “a ciência objetiva a nos fornecer em suas teorias, uma estória literalmente verdadeira de como é o mundo; e a aceitação de uma teoria científica envolve a crença de que ela é verdadeira” (VAN FRAASSEN, 1980, p. 8 *apud* CHIBENI, 1990, p. 3).

No entanto, certos filósofos, como Michael Dummett, preferem determinar o realismo em termos epistemológicos, propondo que entendamos o realismo com o sentido de que “as proposições da classe em disputa possuem um valor de verdade objetivo, independente de nossos meios para conhecê-lo: são verdadeiras ou falsas em virtude de uma realidade que existe independentemente de nós” (DUMMETT, 1978, p. 145). A partir daí, o antirrealismo é visto de maneira que “as proposições da classe em disputa devem ser entendidas somente com referência ao tipo de coisa que contamos como evidência para uma proposição dessa classe” (DUMMETT, 1978, p. 145). As posições antirrealistas[26] recebem nomes especiais de acordo com a classe de objetos em questão. Por exemplo, o antirrealismo com relação às entidades matemáticas é conhecido como construtivismo, e o antirrealismo com relação aos universais é chamado de nominalismo. Assim, o antirrealismo científico assume várias formas dependendo de como a tese do realismo científico é negada.

As ideias de Pitágoras (570-495 a.C.) são um importante exemplo para a concepção realista. Segundo ele, os números existem e são a realidade última de *todas* as coisas. É evidente que a matemática está em toda parte e, se o mundo é essencialmente matemático, só nos resta descobri-la. Pitágoras fundou o movimento chamado pitagorismo e, juntamente com seus seguidores, os pitagóricos, estabeleceu a dedução do mundo através dos números[27].

Nessa mesma linha de pensamento, o realismo matemático pode ser considerado como um desdobramento da doutrina platônica das Formas, que não aceita a intuição nem a

---

[26] Veremos a corrente antirrealista com alguma extensão na próxima seção deste capítulo.

[27] Mais do que uma existência real, a concepção em tela arca de bom grado, com o peso de procurar identificar na música, na perfeição dos objetos geométricos e, mais, na pluralidade do mundo, manifestações dos números. Com isso, mesclado ao contexto místico-religioso no qual a doutrina pitagórica estava inserida, surge uma das mais inusitadas formulações do período pré-socrático. A unidade de todas as coisas, o grande princípio buscado pela via racional através da filosofia nascente encontra nos objetos matemáticos um lócus privilegiado. A realidade passava a ser uma das possíveis formas de expressão dos números (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 63).

experiência, trazendo uma posição ousada a respeito da concepção dos entes matemáticos e da maneira pela qual podemos conhecê-los[28]. No tratamento da sua doutrina, Platão considera uma realidade que transcende da aparência do concreto à perfeição da Forma. Em suma, Del Vecchio Junior (2010) descreve como se dá a articulação básica que dá sustentação ao realismo platônico:

> Dessa maneira, em Platão, o conhecimento das Formas se caracteriza por uma evidência intelectual, com o ato de olhar "com os olhos do espírito". A metáfora é bem empregada, pois é praticamente como se a contemplação racional se realizasse por um processo análogo ao da visão sensorial: o intelecto *contempla* a realidade, pois há uma realidade em si que a razão pode efetivamente apreender (que não se resume a ideias criadas pela mente humana ou a experiências sensoriais), e da qual fazem parte os entes matemáticos. Há, portanto, uma referência direta e real ao qual o matemático pode visar; em termos da metafísica clássica, há um ser a ser conhecido. Todo o trabalho do filósofo (e no caso específico, do matemático) é o de traduzir, tão perfeitamente quanto possível, a realidade eterna, perene e perfeita das Formas. Os números e as formas geométricas, por sua vez, podem ser considerados como as Formas platônicas, ou, no mínimo, constituintes do mundo dos seres que refletem as verdadeiras Formas (cf. PLATÃO, 1994, República, 509-11) (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 65).

Diversos pensadores contemporâneos defendem o realismo platônico. Um deles é Bertrand Russell (1872-1970), que entende o conhecimento matemático como uma tentativa do intelecto humano de apreender uma realidade a conhecer de modo que seus paradoxos são fatos imperfeitos de suas teorias. Para esse filósofo, a matemática é concebida por um *realismo analítico*[29]. Nesse contexto, as verdades matemáticas são universais e se encontram fora da consciência humana. Russell justifica sua posição realista diante das teses do idealismo e do empirismo, focando suas ideias exclusivamente nos objetos matemáticos e desprezando as condições do sujeito cognoscente, foco dessas outras teorias. Segundo Russell (1911 *apud* Del Vecchio Junior, 2010), o realismo é a melhor maneira de fundamentar a matemática:

> A maioria das filosofias leva à conclusão de que as proposições matemáticas não podem ser completamente verdadeiras, e elas são mais ou menos contaminadas com a contradição ou a inexatidão. A filosofia que eu denomino como realismo analítico, em contraste, leva à conclusão de que não há

[28] Há dois sentidos para o platonismo (...) O mais conhecido e o que encerra uma explicação menos plausível é o 'platonismo ontológico', que é uma doutrina sobre a realidade de objetos matemáticos, que são de alguma forma independentes de nossa atividade matemática, de nossa consciência e acesso a eles. (...) A segunda explicação do platonismo, que é ao menos *prima facie* distinta da primeira, é a que se refere ao deslocamento do tema ontológico da existência de objetos matemáticos para o campo da objetividade da verdade matemática. Não está claro se esses dois 'tipos' de platonismo são ou não independentes (FOLINA, 1992 *apud* DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 64).

[29] Defender uma posição realista e analítica significa, segundo Russell, sustentar ao mesmo tempo a crença em entidades não mentais (o que o torna realista) e, associado a esse compromisso ontológico, um outro que não deixa de ser metodológico: o autor denomina sua filosofia como analítica ao postular que tudo que é complexo é derivado do simples. Ao explicar o que entende por "simples", Russell atribui ao conceito dois sentidos: "simples" pode ser atribuído tanto a conceitos universais quanto a dados sensoriais (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 66).

> nenhuma razão para duvidar da verdade absoluta das proposições matemáticas (RUSSELL, 1911 *apud* DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 67).

Kurt Gödel (1906-1978) também sustenta os pressupostos do realismo. Ele acredita que seu realismo foi um fator importante para a descoberta da incompletude dos sistemas aritmetizáveis, pelo fato deles transcenderem a razão humana e possuir questões as quais os homens, usando a própria matemática, não conseguem responder. Além disso, a matemática reforça seu caráter de suposta inesgotabilidade[30].

Ainda como um reforço a favor do realismo, há o *argumento de indispensabilidade*[31], associado principalmente aos filósofos Quine e Putnam que, nos dias atuais, tem como um de seus principais defensores o filósofo Mark Colyvan. Na filosofia contemporânea em particular, o chamado *argumento da indispensabilidade* talvez seja a mais influente tentativa de justificar um *sim* à questão da existência das entidades matemáticas. “Sendo assim, ele é o melhor argumento disponível em favor do platonismo matemático e não apenas mais um argumento a aparecer na mesa de debates entre nominalistas e platonistas” (SIQUEIRA, 2013, p. 127). Oferecer uma resposta mais convincente para o argumento da indispensabilidade da Matemática deve estar relacionado à ideia de uma tese antirrealista em relação à ciência. Esse tópico está desenvolvido com mais detalhes nos capítulos a seguir.

Esse argumento afirma basicamente que os objetos matemáticos existem, porque eles são necessários para a ciência, e esse é um problema a ser superado por uma postura contrária ao realismo matemático. Segundo Siqueira (2013, p. 131), o argumento da indispensabilidade é atualmente um dos argumentos mais discutidos em favor do realismo ou platonismo matemático, isto é, a tese[32] de que os objetos matemáticos existem realmente e não são apenas ficções ou construções teóricas da mente humana.

Segundo Gödel, nós não temos menos razões para acreditar num domínio matemático independente do que num mundo físico independente. Afinal, tanto um quanto outro são indispensáveis para darmos conta das nossas experiências (SILVA, 2007, p. 43). O forte

---

[30] Naquilo que assume a forma de uma limitação, o seu articulador enxerga ali também um sintoma: a matemática, em sua totalidade, não é passível de ser expressa em um sistema simbólico pronto e fechado, o que talvez seja, aos seus olhos, uma consequência natural do fato de que os objetos matemáticos existem assim como os objetos concretos. Em ambos os casos, a linguagem deve ser moldada e procurar uma identidade com a realidade exterior. Existe, dessa forma, uma diferença notável entre, de um lado, a realidade dos objetos matemáticos, esse conjunto de formas perfeitas e perenes, e, de outro, a “nossa matemática”, que consiste em um esforço de chegar tão perto quanto possível do seu ideal (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 68).

[31] Ele nos garante, em poucas palavras, que se nós só podemos explicar nossa experiência do mundo apelando para certos objetos ou conceitos, ainda que abstratos, como os matemáticos, esses objetos existem. [...] se a melhor explicação da experiência requer certas entidades, elas existem, (ao menos até encontrarmos explicações ainda melhores que não as pressuponham) (SILVA, 2007, p. 43).

[32] O aprofundamento do argumento da indispensabilidade pode ser encontrado em Siqueira (2013).

desdobramento desse argumento é o reconhecimento de que a matemática desempenha um papel efetivo nas teorias explicativas da realidade através da compatibilidade entre as suas relações e as teorias das ciências naturais. Isso seria o fundamento da legítima aplicação da matemática nas coisas do mundo.

Outro platonista, portanto, adepto do realismo, foi George Cantor (1845-1918), o "criador" dos números transfinitos, que admitiu a característica da fé numa força superior e que, segundo Silva (2007, p. 43), se via apenas como um explorador do território divino. Ele ancorou suas ideias sobre a teoria dos conjuntos na crença mística de que os conjuntos, não importa quão infinitamente imensos, residem todos, acabados, na mente de Deus. Cantor acreditava que suas criações deveriam ser aceitas, pois ele estava a serviço de Deus e servia como um intermediário de seus ensinamentos. No entanto, como podemos ler em Nascimento Junior (2006):

> O princípio da boa-ordem, em Cantor, é fruto da própria perspectiva teológica que perpassa a obra de Cantor, os conjuntos, quaisquer que estes sejam, estão bem ordenados no pensamento de Deus e, mesmo que a razão humana não compreenda como se dá tal boa ordenação, ela existe desde sempre na mente divina (NASCIMENTO JUNIOR, 2006, p. 160).

De acordo com Meneghetti & Trevisani (2013, p. 150), embora o platonismo dê conta da objetividade[33] da matemática, existem fraquezas nessa corrente: "uma é que ela não oferece uma explicação adequada sobre como os matemáticos têm acesso ao conhecimento matemático do mundo ideal, outra é que tal corrente não explica a utilidade da matemática, suas relações com as outras ciências, a atividade humana e cultural, e a gênese do conhecimento".

Há ainda a dificuldade de aceitar que a matemática esteja ligada à fé. Imaginar que existe um Deus criador dos objetos matemáticos e o que nos cabe é apenas descobri-los é algo difícil de aceitar a respeito das teorias de Cantor e não é o que pretendemos defender aqui. Deste modo, nos parece que o mais adequado é buscar outras explicações para suas criações. Nascimento (2009) nos sugere que:

> O melhor é acreditar no formalismo de Hilbert e fazer como Zermelo e Fraenkel, montando um sistema formal, no qual é possível, através da axiomatização da teoria dos conjuntos, iniciada em 1904, construir a teoria dos números transfinitos, mesmo sabendo que sua consistência depende de sua incompletude. Assim, enunciados como a Hipótese do Contínuo e o Axioma da Escolha podem ser considerados como verdadeiros ou não (NASCIMENTO, 2009, p. 140).

[33] Na perspectiva platonista a matemática é uma ciência objetiva. Para o platonista, a matemática explora certos domínios abstratos de existência, assim como as ciências empíricas exploram domínios concretos. Isso de alguma forma justifica uma persistente crença "ingênua" de todo o matemático: que ele investiga realidades objetivas e busca verdades que estão aí para serem descobertas (SILVA, 2007, p. 64).

1.1.2 O realismo epistemológico de Aristóteles

Numa crítica à idealidade platônica, discordando quanto ao que deve fazer o sujeito para revelar as verdades matemáticas, mas ainda diante de uma tese do realismo – a tese do *realismo epistemológico*[34] - o filósofo Aristóteles (384-322 a.C.), discípulo de Platão, nos apresenta o empirismo num empenho de reconduzir os entes matemáticos ao mundo empírico e desfazer a dualidade entre o sensível e o inteligível.

Para Aristóteles, "o mundo sensível é a realidade fundamental. Os entes matemáticos são *extraídos* dos objetos sensíveis por meio de operações de pensamento e os conceitos matemáticos são apenas modos de tratar o mundo real" (SILVA, 2007, p. 37), isto é, os objetos matemáticos são uma abstração dos objetos empíricos[35].

Nesse contexto, a matemática estuda objetos sob certos aspectos, ou seja, uma bola *como uma esfera*, um par de mesas *como dois*, ou seja, abstraímos de tais objetos sua forma geométrica ou aritmética. E, para quantidades ou formas muito grandes, o empirismo de Aristóteles admite formas fictícias (possíveis de serem construídas a partir das formas reais). No mundo sensível, cada coisa tem uma substância, tem uma existência. A consistência da substância se dá por meio do conceito[36]. Meneghetti (2004, p. 373) explica que "os conceitos reproduziriam não as formas ou ideias transcendentes ao mundo físico, como no realismo platônico, mas sim a estrutura inerente aos próprios objetos". Em tal filosofia, a ciência tem por objeto o mundo sensível, de onde as formas inteligíveis são extraídas por abstração.

O tratamento aristotélico da matemática tem como ponto forte a explicação da aplicabilidade da matemática ao mundo empírico. Nesse âmbito, a matemática se origina do mundo físico, cabendo ao homem extrair o conhecimento através dos sentidos. "Para Aristóteles, a matemática aplica-se ao mundo sensível simplesmente na medida em que é só uma maneira de falar dele" (SILVA, 2007, p. 48). Sua concepção teve uma profunda contribuição em teorias posteriores a respeito da natureza da matemática, como por exemplo, a vertente psicologista (que considera objetos mentais ainda como objetos do mundo empírico), exercendo uma significativa participação na história da matemática. O psicologismo defende

---

[34] Tese de que a verdade matemática é independente da ação de um sujeito (SILVA, 2007, p. 38).

[35] Um objeto empírico é um objeto matemático na medida em que nós podemos considerá-lo do ponto de vista de seu aspecto matemático, ou seja, *como* um objeto matemático. Se, por exemplo, Paulo é marido de Maria, não existe um ente "o marido de Maria" separadamente de Paulo, e do qual Paulo de algum modo participa; ser marido de Maria é apenas um aspecto de Paulo. Podemos tratá-lo como um homem sem considerar em nada esse aspecto, mas podemos também, talvez para efeitos legais numa ação de divórcio, considerá-lo apenas sob esse aspecto (SILVA, 2007, p. 44).

[36] O conceito é a representação mental da coisa, o resultado de uma intuição intelectual (MENEGHETTI, 2004, p. 373).

que as sentenças matemáticas se referem a objetos mentais (como os números, por exemplo) que estão dentro do espaço e do tempo e possuem uma causa: a mente humana; e que essas sentenças, ao descreverem corretamente as ideias da mente, são verdadeiras.

Alguns empiristas que se destacam são Hume, Mill e Quine. Segundo David Hume (1711-1776), as ideias matemáticas derivam de dados empíricos e não são obtidas *a priori* a partir de uma visão pura e intelectual. Para esse filósofo, as ideias são sempre singulares e cópias de impressões sensíveis. Assim, a matemática presta-se a relações de ideias envolvendo aspectos de objetos empíricos, e o conhecimento deriva de verdades obtidas através da experiência.

Ponte *et al* (1997) explica que Hume não rejeitou os axiomas relativos a números e figuras geométricas, mas optou por desvalorizá-los, tal como fez com os resultados que deles derivavam, considerando que, quer uns, quer outros, provinham de sensações respeitantes ao presumível mundo físico. "Deste modo, todo o conhecimento deriva da experiência sensível e nada existe na razão que não tenha estado anteriormente na experiência" (HUME, 2009, p. 25). Hume (2004, p. 60) afirma que "a matemática é usada nas ciências da natureza, mas não concede certeza às questões de fato, pois só auxilia na utilização das leis naturais, que são descobertas empiricamente e para as quais não se tem comprovação".

Para o filósofo britânico John Stuart Mill (1806-1873), a matemática é uma ciência natural como as demais, e todas as verdades são empíricas: todos os princípios lógicos e os axiomas matemáticos são produtos da generalização indutiva. Prado (2006) explica que Mill tem uma visão muito ampla acerca do que são inferências[37]. Para ele, só é possível que haja qualquer conhecimento derivado obtido por inferência se, antes de tudo, a cadeia de raciocínios partir de premissas empíricas. Tal como nos coloca Ponte *et al* (1997), em meados do século XIX, Stuart Mill propôs uma teoria[38] empiricista sobre o conhecimento matemático, sustentando que as afirmações matemáticas são generalizações indutivas feitas a partir das nossas experiências ou observações.

---

[37] Todos os conhecimentos que somos capazes de obter, desde que não estejam disponíveis diretamente aos sentidos, são inferidos; e todos os tipos de inferência que somos capazes de realizar (que nos possibilitam a maior parte de nossos conhecimentos) nos fornecerão, portanto, conhecimentos derivados. Certamente, para que haja conhecimentos derivados obtidos por meio de inferência é necessário que outros conhecimentos intuitivos prévios sejam considerados. Somente por meio da intuição – entenda-se, pela faculdade que nos proporciona o acesso direto ao mundo exterior, possibilitando, assim, um conhecimento eminente empírico – é possível a passagem do não conhecimento ao conhecimento de alguma espécie, fundamental para a edificação de qualquer forma de saber (PRADO, 2006, p. 7).

[38] Esta teoria, que não punha em causa a certeza do conhecimento matemático, pois Mill supunha a certeza da indução, não teve aceitação nos meios filosófico e matemático, chegando a ser fortemente contestada, e mesmo ridicularizada por Frege (PONTE *et al*, 1997, p. 8).

Willard Quine[39] (1908-2000), um dos mais respeitados filósofos e lógicos do século XX, assume uma vertente do empirismo que admite a existência de entes matemáticos, como quadrados, números ou conjuntos, só porque são úteis de alguma forma para nossas teorias. Siqueira (2013) destaca que Quine (e, em grande medida, também o seu conterrâneo Hilary Putnam) admite a existência de objetos matemáticos pela razão de não podermos abrir mão da matemática na prática científica. Sua concepção de ciência leva a admitir como existentes todas as entidades que são indispensáveis para as teorias:

> O discurso científico comumente interpretado está irremediavelmente tão comprometido como objetos abstratos – noções, espécies, números, funções, conjuntos – quanto com maças e outros corpos. Todas essas coisas figuram como valores das variáveis em nosso sistema global do mundo. Os números e as funções contribuem para a teoria física tão genuinamente como o fazem as partículas hipotéticas (QUINE, 1981, p. 149).

De um lado o *racionalismo*[40] de Platão, que atribui à razão humana o poder de penetrar nos domínios suprassensíveis da matemática, e o seu *realismo ontológico transcendente*, que afirma a existência independente dos entes matemáticos num reino fora deste mundo. Barbosa (2009, p. 123) acrescenta que, "para Platão, o estado da alma de que a matemática se ocupa é o pensamento e, a respeito de seus objetos, procurou sustentar o seu conhecimento na razão. A mente humana é o único instrumento capaz de chegar à verdade e a experiência sensorial é uma fonte de erros na realidade do mundo".

De outro lado, o *empirismo* de Aristóteles, que se recusa a dar morada aos entes matemáticos em qualquer outro reino que não o deste mundo, e o *seu realismo ontológico imanente*, que garante, ele também, uma existência aos objetos matemáticos independentemente de um sujeito, mas *não* de outros objetos do mundo empírico (SILVA, 2007, p. 37). A partir das considerações de Barbosa (2009, p. 123), Aristóteles fixou a sua busca pelas essências no mundo terreno, no qual a matemática não pode existir como imanente aos objetos físicos nem separada em outras realidades, mas como qualidades que são por nós abstraídas. Esse autor

---

[39] Desvanece assim a necessidade matemática, na exata medida da revisibilidade de nossas teorias científicas. Se nós preferimos preservar a matemática, e mesmo a lógica, e revisar as teorias científicas, é porque assim é mais simples, pensa Quine, mas nada nos obriga a proceder desse modo. Essa vertente do empirismo, como é fácil ver, tem uma forte componente pragmática: os objetos matemáticos existem na medida em que são úteis; a verdade matemática pode ser revista em razão de conveniências práticas ou teóricas (SILVA, 2007, p. 224).

[40] Salienta o papel da razão no acesso às verdades matemáticas; as noções matemáticas podem ser conhecidas independentemente das observações. Os racionalistas entre os quais se encontram, por exemplo, Espinosa, Descartes e Leibnitz, viam, tal como Platão, a razão como um traço inerente à mente humana, através do qual as verdades podiam ser conhecidas independentemente da observação. A razão era a faculdade que permitia ao homem conhecer o Bem e o Divino e, para os racionalistas, esta faculdade era mais facilmente visível na Matemática. Afinal, esta ciência, diziam, partia de verdades auto-evidentes, os axiomas, e, através de raciocínios estabelecidos pela razão, conseguia descobrir e chegar a conclusões não evidentes, e por vezes, inesperadas (PONTE *et al*, 1997, p. 7).

reforça que, no que tange ao estatuto ontológico dos objetos de que trata a matemática, Aristóteles não desprezou o uso da razão para se chegar à sua essência, mas discordou de Platão a respeito da natureza sensível nesse processo (BARBOSA, 2009, p. 123). Assim, as ideias são provenientes dos sentidos, isto é, a mente humana ao nascer é desprovida de qualquer ideia. É a experiência que as imprime no intelecto humano.

Uma versão recente do platonismo é o estruturalismo, que emergiu no início do século XX e tem como foco a ideia de que a matemática é a ciência da estrutura. Silva (2007, p. 72) destaca que, para os estruturalistas, os objetos matemáticos, como números e conjuntos, são estruturas. No entanto, continua o problema epistemológico do acesso ou a questão do lócus dos entes matemáticos. Seus principais defensores são Paul Benacerraf (1965), Geoffrey Hellman (1989), Michael Resnik (1997) e Stewart Shapiro (1997).

A maioria dos estruturalistas é realista em valor de verdade defendendo que "cada frase não ambígua de, digamos, aritmética e análise, é verdadeira ou falsa, independentemente da linguagem, mente, e convenções do matemático" (SHAPIRO, 2015, p. 434). Esse problema tem recebido diversas respostas nas filosofias atuais da matemática que, de alguma forma, admitem a existência de objetos matemáticos sejam eles de qualquer espécie.

1.2 Os sentidos do antirrealismo

Em oposição às ideias colocadas acima, temos o antirrealismo, que subordina a existência dos entes matemáticos a nossa capacidade de concebê-los. Assim, a partir dessa perspectiva, a concepção dos objetos matemáticos está vinculada exclusivamente ao exercício do intelecto, podendo, no que diz respeito à questão ontológica, associar a existência dos entes matemáticos a nomes, conceitos ou até ficções, mas sempre concebidos no âmbito do pensamento. Del Vecchio Junior (2010) nos apresenta considerações relevantes de Poincaré (1908) sobre o ponto de vista antirrealista e a criação de objetos matemáticos, colocando a ideia de que tais processos mentais devem satisfazer ao que o intelecto exige e espera deles, como sugere o trecho:

> Quais são os entes matemáticos aos quais nós atribuímos esse caráter de beleza e elegância, e que podem desenvolver em nós uma espécie de emoção estética? São aqueles onde os elementos estão dispostos harmoniosamente, de maneira que o espírito pode sem esforço compreender seu conjunto ao penetrar em seus detalhes. Essa harmonia é, por sua vez, uma satisfação para nossas necessidades estéticas e uma ajuda ao intelecto que ela apoia e guia. E, ao mesmo tempo, ao expor aos nossos olhos um todo bem ordenado, ela nos faz pressentir uma lei matemática (POINCARÉ, 1908 *apud* DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 70).

Os adeptos do antirrealismo pensam as estruturas matemáticas por diferentes modelos. Nessa perspectiva, o Teorema Angular de Tales deixa de ser aceito, por exemplo, nas geometrias não-euclidianas[41]. Entre as doutrinas antirrealistas, a de Immanuel Kant (1724-1804) é uma importante referência. Ele apresentou concepções idealistas acerca do conhecimento até então dominadas pelas ideias do racionalismo e do empirismo.

1.2.1 O construtivismo

O idealismo considera o conhecimento fundado na razão e na experiência. Kant propunha que o conhecimento é constituído de coisas que são percebidas pelos sentidos e de seres humanos que descobrem pela razão as relações entre essas coisas. Embora apresente limitações, em particular ao conhecimento aritmético, a filosofia matemática kantiana do construtivismo (ao antirrealismo está normalmente associado o construtivismo[42]) mostra-se um exemplo de genialidade e elegância, garantindo-lhe uma forte influência em correntes posteriores. A filosofia de Kant não aceita, por exemplo, a possibilidade de números imaginários e a possibilidade de uma geometria não-euclidiana. Seu conceito de construção ocupa um lugar central em todas as variantes construtivistas da matemática, ou seja, aquelas que acreditam que a matemática é algo que se faz, não se descobre.

Segundo Silva (2007, p. 108), a tese kantiana é a de que a matemática é um corpo de conhecimento sintético[43] *a priori*[44], e o meio escolhido para as construções requeridas são as intuições puras do espaço e do tempo, que possuem sua existência vinculada à mente humana, sobre as quais se baseiam a aritmética e a geometria. Juízos sintéticos *a priori* são aqueles que acrescentam algo ao sujeito, mas que não podem ser justificados pela mera análise do conceito sujeito e, simultaneamente, não podem ser demonstrados pela experiência. Isso justificaria porque as verdades geométricas e aritméticas são válidas para todos independentemente da

---

[41] Geometrias em que o Quinto Postulado de Euclides afirma que para toda reta *l* e todo ponto P que não está sobre *l* existe uma única reta *m* passando por P e paralela a *l*, não é satisfeito. Dizemos que duas retas são paralelas se elas não têm ponto em comum (GREENBERG, 1997, p. 19).

[42] Os construtivistas em filosofia da matemática são antirrealistas quer em ontologia, quer em epistemologia, quer em ambos. Eles não acreditam que os objetos matemáticos existam “em si”, independentemente de qualquer construção, ou que enunciados matemáticos sejam determinadamente verdadeiros ou falsos independentemente de qualquer verificação efetiva. Para o construtivista, a existência ou a verdade depende da atividade matemática. Não se *descobrem* entidades ou verdades matemáticas, se as *criam* (SILVA, 2007, p. 147).

[43] O conhecimento sintético é aquele que acrescenta algo de novo ao conhecimento que já se possui. Afirmar que “um segmento de recta é a distância mais curta entre dois pontos”, constitui, para Kant, um exemplo de conhecimento sintético a priori (PONTE *et al*, 1997, p. 9).

[44] O conhecimento a priori é o conhecimento universal, necessário e intemporal, que se fundamenta na razão e é independente da experiência (PONTE *et al*, 1997, p. 8).

experiência. Segundo Domingues (2002, p. 7), Kant argumentava que uma propriedade como a de que a *soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos* não está sujeita a alterações nem a um reforço com novas coletas de dados visto tratar-se de um conhecimento universal que não comporta exceção alguma. Independente das controvérsias em torno de tal concepção, ela é compartilhada, por exemplo, por Frege (com respeito à geometria) e Poincaré (com respeito à aritmética).

Silva (2009, p. 293) explica que, apesar de dar uma explicação elegante ao fenômeno da matemática, congregando-a com um edifício científico marcado pela premência de construtividade a partir de intuições, a filosofia de Kant faz acreditar que a aritmética também se funda sobre a intuição obscurecendo a percepção de que a correlação entre aritmética e tempo não é tão natural quanto a de espaço e geometria.

Kant apresentou uma filosofia da matemática totalmente nova que confia que a cognição humana admite conteúdos próprios, diferente dos empiristas, que entendem que os sentidos e o intelecto só nos oferecem o que está do lado de fora e afirmam que os dispositivos cognitivos do homem são vazios de qualquer conteúdo próprio. Ele não buscava na matemática a comprovação de ideias e métodos filosóficos, mas a tratava a partir de um projeto filosófico. Nogueira (2006) explica de forma mais simples a tese kantiana:

> As proposições matemáticas seriam, segundo Kant, sintéticas a priori, pois, seriam as formas puras da intuição, o espaço e o tempo, que permitiriam fundamentar e legitimar os juízos sintéticos a priori (e também toda a matemática) expressando sua especificidade. Em outras palavras, a matemática se referiria à realidade concreta, mas utilizaria, para apreendê-la, conhecimentos a priori de tempo e de espaço, o primeiro, fundamentando o número e, consequentemente, toda a aritmética, enquanto que o segundo, alicerçando a geometria (NOGUEIRA, 2006, p. 3).

Silva (2007, p. 227) ainda coloca que, para Kant, os sentidos impõem uma forma determinada e irrecusável aos seus dados, a espacialidade e a temporalidade. Além disso, Kant se destaca por ser o primeiro pensador, depois dos gregos, a permitir modos radicalmente novos de conceber os domínios matemáticos, transportando-os dos mundos natural ou supranatural, onde Aristóteles e Platão os colocaram, para o interior do intelecto humano. Esse filósofo mudou o foco a partir do qual se considera a questão do conhecimento matemático, reservando ao homem um papel central no processo. Com seu criticismo[45], salienta a necessidade de interação entre a razão e a experiência na construção do conhecimento matemático.

---

[45] Podemos enxergar o criticismo kantiano “como a profunda transformação a que deve submeter-se o racionalismo”, para que evite cair no “dogmaticismo” e, ao mesmo tempo, supere as críticas do ceticismo humano (MAYOS, 2008, p. 11).

1.2.2 As teses nominalistas

As teses nominalistas também podem ser entendidas como uma contraposição às concepções realistas e referem-se à abordagem de questões sobre a natureza de entidades abstratas. Loux[46] (2006) explica que, enquanto o platônico defende um enquadramento ontológico, em que coisas como propriedades, gêneros, relações, proposições, conjuntos e estados de coisas são tomadas como primitivas e irredutíveis, o nominalista nega a existência de entidades abstratas e procura mostrar que o discurso sobre essas entidades é analisável em termos do discurso sobre concretos particulares da experiência comum.

Pedro Abelardo (1973), entre outros nominalistas, argumenta que o discurso sobre universais é um discurso sobre expressões linguísticas, isto é, só podemos atribuir a universalidade a palavras. Ele nos dá uma valiosa contribuição, datada do século XII, sobre o problema referente à natureza dos universais, a favor dessa concepção. Tais orientações reportam-se especialmente sobre os debates medievais a respeito dos universais:

> O significado dos universais (...) é sempre formado pela abstração. Quando eu ouço dizer homem, brancura ou branco, eu não me lembro pela força do nome de todas as naturezas ou propriedades que existem nas realidades substanciais, mas pela palavra homem tenho apenas a concepção, embora confusa, não distinta, de animal e de racional mortal. (...) Com efeito, os significados das coisas individuais formam-se por meio de abstração quando, por exemplo, se diz: esta substância, este corpo, este animal, este homem, esta brancura, este branco (ABELARDO, 1973, p. 243).

Os empiristas clássicos seguiram os nominalistas, enquanto particularistas, e procuraram identificar os tipos de representação mental associados aos termos gerais. John Locke (1632-1704) argumentou que essas representações têm um conteúdo especial. Chamou-lhes *ideias abstratas* e afirmou que essas se formam subtraindo os atributos específicos das ideias de particulares. George Berkeley (1685-1753), entre outros filósofos, contudo, atacou a doutrina de Locke da abstração e insistiu em que o conteúdo das ideias que corresponde a termos gerais é inteiramente determinado e particular embora os termos sejam usados pela mente como representantes de outras ideias particulares do mesmo tipo (LOUX, 2006).

O nominalismo costuma ser associado a qualquer abordagem reducionista de questões ontológicas sobre entidades abstratas que seja contrária à visão platonista. De fato, Del Vecchio Junior (2010, p. 72) reforça que “as teses nominalistas podem ser compreendidas como uma contraposição direta às teses realistas: gêneros e espécies não têm, em absoluto, qualquer

---

[46] LOUX, Michael J. Nominalismo. Tradução de: Vítor Guerreiro. Disponível em: <https://criticanarede.com/met_nominalismo.html>. Acesso em: 17/09/2018.

existência concreta; são, ao contrário, simplesmente nomes atribuídos genericamente a coisas particulares".

No entanto, Locke e Berkeley adotaram diferentes caminhos em suas interpretações sobre os universais, mas tinham em comum a rejeição ao realismo platônico. Por exemplo, Loux (2006) destaca que Locke[47] defende que as palavras indicam ideias e que tais concepções que tratam de termos gerais são ideias abstratas. Isso significa ideias formadas a partir das nossas ideias de particulares, subtraindo-lhes os atributos específicos deste ou daquele particular, retendo *apenas o que é comum* a todas as coisas às quais um dado termo geral se aplica. Já Berkeley[48] nega as convicções de Locke e desafia-nos a identificar uma ideia que corresponda a tal caracterização.

O conceitualismo, que foi visto por alguns autores como uma forma particular de nominalismo, como Spade[49] (2002, p. 147), é também considerado como uma produção intelectual, na qual o universal assume uma existência própria, destacado dos particulares e que vale mais do que um nome. O conceitualista, como indica Del Vecchio Junior (2010, p. 73), determina que "é a ação do intelecto que encontra nos particulares gêneros comuns, participações e singularidades. Ao aplicar um conceito a um conjunto de coisas, o mecanismo através do qual as operações se processam é o da abstração". Desta forma, os universais só existem quando se apresentam como objetos mentais.

Barbosa (2009, p. 93) coloca que a abstração é a atividade mental que permite aos matemáticos estabelecerem suas verdades e pergunta: "quais são as implicações ontológicas desta atividade, já que, enquanto método distingue a matemática das outras ciências?". No dicionário de filosofia, consta que:

---

[47] Do ponto de vista de Locke, o processo que produz a ideia abstracta de um triângulo, por exemplo, consiste em separar todos os atributos relativamente aos quais os triângulos diferem entre si; e o resultado deste processo é uma ideia de triângulo que não é "nem oblíquo, nem rectângulo, nem equilátero, nem isósceles, nem escaleno, mas todos estes e nenhum deles simultaneamente" (LOUX, 2006).

[48] Do seu ponto de vista, as nossas ideias são determinadas em todos os seus atributos e, em consonância, particulares no seu conteúdo. Ao mesmo tempo que ataca a ideia de que as ideias são gerais em virtude de serem abstractas, Berkeley concede que existem ideias gerais; mas insiste que o carácter geral de uma ideia é uma função do seu papel no pensamento e não um qualquer tipo de conteúdo. As ideias são gerais não porque resultem de abstracção no sentido de Locke, mas porque a ideia supostamente "representa ou significa todas as outras ideias particulares do mesmo tipo" (LOUX, 2006).

[49] O que Ockham e os nominalistas do século XIV em geral fazem, é adotar a noção dos realistas de uma entidade universal, e transferi-la para a mente, onde se torna a noção de um conceito universal. Um conceito universal não é, naturalmente, universal no sentido metafísico da palavra. Mas, uma vez que os conceitos são termos da linguagem mental, um conceito universal é universal em outro sentido: 'que pode ser predicado de muitos'. Assim, o único tipo de 'universais' que Ockham permitirá são termos universais. Estes são, em primeiro lugar e mais fundamentalmente, conceitos gerais na mente e, em seguida, em segundo lugar e consequentemente, os termos falados ou escritos subordinados a tais conceitos gerais. Tais condições – falada, escrita ou mental – são 'universais' somente no sentido lógico, pois eles são universais pela significação ou predicação (SPADE, 2002, p. 147, *tradução nossa*).

> A abstração é a operação mediante a qual alguma coisa é escolhida como objeto de percepção, atenção, observação, consideração, pesquisa, estudo, etc., e isolada de outras coisas com que está em uma relação qualquer. A abstração tem dois aspectos: primeiro, isolar a coisa previamente escolhida das demais com que está relacionada; e segunda, assumir como objeto específico de consideração o que foi assim isolado (ABBAGNANO, 1998, p. 4).

Barbosa (2009, p. 93) completa que, no âmbito da matemática, abstrair representa um processo que consiste em extrair (tirar fora) dos objetos que se pretende estudar, as características que os definam enquanto objetos matemáticos, desvencilhando-se de quaisquer propriedades que não dizem respeito à sua essência como objetos matemáticos.

Até o século XVIII, embora já inteiramente dedutiva, a matemática estava particularmente ligada aos algoritmos enquanto a preocupação com a natureza de seus elementos e fundamentos tinha sido deixada de lado. Ainda por quase todo o século XIX, o mito de Euclides era inabalável tanto para os filósofos como para os matemáticos, e a geometria euclidiana era considerada por todos “como o mais firme e confiável ramo do conhecimento” (DAVIS & HERSH, 1996, p. 371).

O panorama do século XIX, após a descoberta de novas geometrias, fez com que a matemática passasse a ser reconhecida ainda mais como uma criação intelectual do homem. O desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, que demonstrou a existência de mais de uma geometria possível, além da análise matemática com o cálculo e suas vertentes, excederam a intuição da geometria euclidiana e colocaram em dúvida o alicerce sólido da matemática. No final desse século e início do século XX, a busca por fundamentos para a matemática se intensificou com o surgimento de paradoxos sobre a teoria dos conjuntos. A partir daí, surgiram correntes de pensamento que tentaram oferecer fundamentos sólidos e definitivos a essa área do conhecimento, como o intuicionismo, o formalismo e o logicismo.

Davis & Hersh (1996, p. 372) destacam que a perda da certeza na geometria foi filosoficamente intolerável, pois implicou na perda de toda a certeza no conhecimento humano. A geometria tinha servido, desde Platão, como exemplo supremo da possibilidade dessa certeza. Assim, os matemáticos do século XIX enfrentaram esse desafio, deslocando da geometria para a aritmética a busca por novos fundamentos.

1.2.3 As correntes fundacionistas

A corrente intuicionista, ligada ao conceitualismo, admite a existência de entidades abstratas, mas somente à medida que são construídas pela mente do sujeito. Essa perspectiva defende que devemos considerar a existência dos objetos matemáticos, partindo da percepção humana e não como um conjunto de teoremas ou fórmulas já preestabelecidas. No intuicionismo, as entidades abstratas existem somente quando são construídas pela mente humana, ou seja, o que não se inicia na intuição não é matemática. O idealizador dessa escola foi o matemático holandês Luitzen Brouwer (1881-1966), que admitiu, no início do século XX, um modelo kantiano de conhecimento *a priori*. Nessa concepção, o homem tem uma intuição particular que lhe permite construções mentais a partir de uma percepção imediata. Além disso, não haveria matemática sem evidência manifestada ou objeto que não pudesse ser construído num procedimento finito, limitado e discreto.

Del Vecchio Junior (2010, p. 50) explica que, em linhas gerais, o intuicionismo toma como eixo central a ideia da faculdade da intuição como o fundamento mais importante da matemática, fazendo com que ela seja concebida como uma disciplina informal, no sentido de que o foco principal não está no rigor lógico ou em sua forma esquemático-estrutural: “a matemática não se resume a um jogo grafo-mecânico de símbolos; ela é uma atividade peculiar do intelecto humano, atividade da qual a notação é apenas uma forma de expressão mais ou menos perfeita”.

Segundo as concepções dessa escola, “os objetos matemáticos não podem ser considerados existentes, se não forem dados por uma construção, em número finito de procedimentos, partindo dos números naturais. Não é suficiente mostrar que a hipótese de não-existência conduziria a uma contradição” (DAVIS & HERSH, 1996, p. 375). Nessa concepção, os conhecimentos matemáticos são construídos e reconstruídos, não sendo separados “do conhecimento empírico, da física e de outras crenças” (BARALDI, 1999a, p. 90). A matemática é considerada uma construção humana e social. Silva (2007, p. 148) completa que a existência independente de objetos matemáticos e a transcendência da verdade matemática são enfaticamente negadas por Brouwer. Este sustenta, de forma rígida, a ideia de que a matemática é fruto do intelecto humano e esclarece o compromisso que se deve assumir diante da afirmação de que, se a matemática é um produto da razão humana, qualquer asserção que tente sustentar-se em premissas gerais e irrestritas deve considerar essa limitação. Então, na corrente intuicionista, por exemplo, a matemática torna o princípio do terceiro-excluído inválido[50] em contextos infinitos.

[50] Brouwer admite a validade geral do princípio do terceiro-excluído apenas em contextos finitos, pois aí qualquer asserção pode ser demonstrada por verificação exaustiva caso a caso. Segundo Brouwer, a matemática clássica comete o erro de generalizar para contextos infinitos o que só vale irrestritamente em contextos finitos (SILVA, 2007, p. 154).

Para Michael Dummett (1925-2011), um dos mais importantes intuicionistas da atualidade, existe um jeito de justificar a crítica de Brouwer à lógica clássica através de questões de significado. Silva (2007, p. 158) destaca que, de acordo com Dummett, “há uma *correta* teoria da significação (que não é evidentemente a teoria clássica usual) que implica na validade exclusiva da lógica intuicionista na matemática”. Este autor acrescenta que, “segundo a perspectiva dummettiana, uma asserção matemática só tem significado se dispomos de um método para verificá-la; caso contrário, ela é desprovida de significado, mesmo que nos pareça inteligível”.

Ainda há o formalismo, última grande corrente fundacionista do século XX, criado por David Hilbert (1862-1943), que é a escola que mais se aproxima do nominalismo (as entidades abstratas não têm existência nem fora da mente do sujeito, como para os realistas, nem como construções mentais, como para os conceitualistas). Na corrente formalista, Hilbert adotou as ideias de Kant organizando um programa em que a matemática era compreendida a partir das descrições de objetos, imbricados em teorias formais em que a lógica determina o que é fundamental (MACHADO, 2009, p. 45). Para Hilbert, a linguagem formal supera a linguagem cotidiana, pois ela utiliza raciocínios absolutamente seguros, acima de qualquer suspeita ou contradição.

Assim, a formalização é entendida como uma linguagem própria e uma cadeia de símbolos desenvolvida pela lógica dedutiva. Cafezeiro *et al* (2010, p. 242) explica que o programa propunha a formalização da matemática visando garantir rigidez e solidez. Em termos gerais, a proposta era reduzir toda a matemática a manipulações reais e responder afirmativamente às seguintes questões: a matemática é completa? É consistente? É decidível?[51]

No formalismo, a matemática é constituída por modelos, como sistemas formais[52], com seus axiomas e leis, criados pelo homem para representar e interpretar o mundo à sua volta. Segundo Nascimento (2009), “um sistema axiomático pode ser interpretado de várias maneiras, isto é, por vários modelos. É o que acontece nos exemplos de Klein e Poincaré para a geometria hiperbólica[53]”. Hilbert, em seu projeto fundacionista, procurou uma prova absoluta da

[51] Dizemos que um sistema formal é *completo* quando, a todo enunciado verdadeiro expresso no próprio sistema, cabe uma prova formalizada no sistema. (...) A segunda questão diz respeito à consistência: dizemos que um sistema formal é *consistente* quando não possibilita a derivação do absurdo: um enunciado provadamente verdadeiro e falso. A terceira das questões passou a ser conhecida como “o problema de decisão de Hilbert”: encontrar um mecanismo genérico (e finitário!) que, ao considerar um enunciado qualquer fosse capaz de verificar sua validade ou não. Uma sentença é dita válida quando é verdadeira para qualquer possível interpretação dos símbolos extralógicos que figuram nela própria (CAFEZEIRO *et al*, 2010, p. 242).

[52] **Sistema formal** é uma coleção finita de símbolos e regras precisas para manipulação desses símbolos, com o objetivo de formar certas combinações, chamadas **teoremas** (NASCIMENTO, 2009, p. 126).

[53] Nesta geometria o Quinto Postulado de Euclides é substituído por: Existe uma reta *l* e um ponto P que não está sobre *l* tal que pelo menos duas retas distintas paralelas a *l* passam por P (GREENBERG, 1997, p. 187).

consistência da aritmética justificando a matemática pela matemática finitária[54] (um sistema de manipulação de sinais gráficos). Segundo essa visão, a consistência era a marca a ser procurada por uma teoria. Silva (2007) completa que:

> Hilbert liberou o método axiomático de suas limitações, abrindo-lhe os horizontes do puro formalismo. Ele viu que a natureza dos objetos de um domínio descrito por uma teoria axiomática interpretada não desempenhava nenhum papel lógico, vislumbrando assim a possibilidade de abstrair completamente a natureza desses elementos reduzindo domínios matemáticos a sua pura forma lógica, e tradicionais teorias matemáticas a teorias puramente formais (SILVA, 2007, p. 187).

Quando se constrói um sistema formal, deve-se levar em conta uma série de argumentos na escolha dos axiomas, como físicos e psicológicos, e o que pode ser um bom modelo em certo tempo pode ser um mau padrão em outro momento. A maneira como entendemos o mundo vai ser o fator determinante para a escolha de certo sistema axiomático, que vai nos dar um modelo que se adapte a essa visão de mundo. Por exemplo, se a Terra fosse realmente plana, como se pensava antigamente, a geometria euclidiana seria um modelo perfeito para estudá-la (NASCIMENTO, 2009, p. 133).

Assim, a matemática é estabelecida a partir da criação de processos dedutivos, padronização e mecanismos abstratos, em que as ideias de verdade e certeza dependem de um conjunto de postulados e de uma lógica. A partir daí, tudo o que é produzido por esse sistema é verdade (geometria, aritmética, álgebra, análise). De acordo com os formalistas, não existem objetos matemáticos, "a matemática consiste em axiomas, definições e teoremas – em outras palavras, fórmulas." (DAVIS & HERSH, 1996, p. 360). No formalismo, como afirma Silva (2009, p. 296), as teorias axiomáticas podem ser interpretadas, tendo asserções com significado determinado por um domínio específico de objetos, e podem ser não-interpretadas quando seus termos só veiculam o significado que os axiomas o dão sendo meras sucessões ou sequências de símbolos.

Os teoremas de Gödel minaram o formalismo de Hilbert. O primeiro mostrava que um sistema axiomático poderia conter uma sentença a qual nem ela nem a sua negação pudessem ser demonstradas, ou seja, que tal sistema não é completo. O segundo mostrou que é sempre necessário um sistema mais forte para provar a consistência de uma teoria axiomatizada, isto é, mostrou a impossibilidade de uma prova absoluta de consistência.

---

[54] Bastaria, então, a matemática finitária, toda verificável e completa, para poder ser estendida sem inconsistências. Deste modo, esta matemática simples deveria provar a sua própria consistência sem auxílio de sistemas externos e ser completa, ou seja, para qualquer asserção "construível" dentro dela, ela ou a sua negação deveria ser demonstrada (SILVA, 2009, p. 296).

O predicativismo do matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) é um tipo de intuicionismo misturado com pragmatismo e uma dose de formalismo. Aceita-se também a denominação de construtivismo linguístico, no sentido de que as definições matemáticas criam objetos na medida em que estabelecem uma forma consistente de linguagem. Além disso, é perceptível o comprometimento de Poincaré com o verificacionismo que caracterizou seu critério de significação dos enunciados matemáticos. E ainda é possível destacar que, em relação à aritmética, ele seguia as ideias de Kant, considerando a matemática um conhecimento fundado na intuição, quanto à geometria, pela influência de conhecer as geometrias não-euclidianas, esse matemático seguia o convencionalismo[55].

Então, para Poincaré, a matemática é uma linguagem que usamos para descrever nossas experiências, “quer porque elas assim o requeiram – com a linguagem da aritmética, que descreve intuições fundamentais – quer porque tal descrição é conveniente. Os termos dessa linguagem não precisam denotar objetos determinados” (SILVA, 2007, p. 173).

Poincaré atribui à linguagem “a capacidade de gerar, por meio de definições, os objetos matemáticos. Uma vez definidos, esses objetos passam a habitar o contexto cultural dessa linguagem” (SILVA, 2007, p. 175). Poincaré afirma que depende das circunstâncias para a criação de determinados termos em detrimento de outros. Há maneiras de se expressar mais adequadas que outras, pois são os problemas teóricos e práticos o grande incentivo à invenção dos termos matemáticos, nos quais se busca criar um modo apropriado ao tratamento de cada problema.

Temos ainda o logicismo, que surgiu no final do século XIX, com o filósofo, matemático e lógico Friedrich Frege (1848-1925). O objetivo dessa corrente era reduzir a matemática à lógica, inferindo que qualquer problema matemático poderia ser resolvido ou descrito em termos lógicos. Em outras palavras, o logicismo desejava excluir da análise as intuições geométricas, substituindo-as por noções de aritmética.

Para consolidação dessa estrutura, o cálculo de Leibniz foi posto como uma ferramenta indispensável na formalização do pensamento dedutivo. Frege tentou implementar o programa de Leibniz, que era reduzir os conceitos e as verdades da aritmética a equivalentes puramente

[55] As geometrias são, para Poincaré, apenas linguagens, instrumentos a serem avaliados por critérios de adequação e utilidade, mais que por critérios de verdade. São como ferramentas ou utensílios, criações do engenho humano movido pela necessidade, incorporados à cultura e disponíveis para o uso desde que a ocasião se apresente. Como simples linguagens, segundo Poincaré, as geometrias podem ser livremente interpretadas, da maneira que nos pareça mais conveniente, de modo a descrever domínios espaciais quaisquer. Pode-se, em princípio, descrever o mesmo domínio de diversas maneiras em diversas linguagens geométricas. Essas diferentes descrições podem ser vistas como diferentes aspectos ou perspectivas de uma mesma realidade que não impõe por si mesma nenhuma descrição privilegiada (SILVA, 2007, p. 169).

lógicos. Daí novos patamares de rigor formal na matemática deveriam ser introduzidos através de expressões, notações e análises.

Bertrand Russell e Alfred Whitehead também contribuíram, através da obra *Principia Mathematica*, para possibilidade de redução e derivação de toda a matemática à lógica, já que se entendia esta como [...] "as leis fundamentais da razão, o pilar do universo" (COSTA, 2008, p. 37). O projeto fundacionista do logicismo defendia a geometria como restrita ao espaço enquanto a aritmética era reduzida à lógica por ser mais abstrata. Nesse âmbito, operações aritméticas são funções do entendimento e não da sensibilidade mesmo que pura.

Nessa obra, foram afastadas as contradições que afetavam o trabalho de Frege, e a lógica foi tomada como uma espécie de linguagem ideal. Assim, no logicismo, há uma subordinação da matemática à lógica. Del Vecchio Junior (2010) reforça tal ideia, destacando que essa corrente procurou minimizar a importância da intuição matemática por um motivo muito simples:

> Para o logicista, que indubitavelmente é inspirado em uma concepção matemática de tipo leibniziana, a sua grande obra se realizaria no momento em que se provasse adequadamente que *todos* os raciocínios da matemática são redutíveis à forma lógica, desde os mais elementares até os mais refinados, de modo que os raciocínios e leis da lógica precedem os da matemática e, por isso, podem propiciar instrumentos suficientes para a total compreensão das operações matemáticas a partir de suas bases (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 25).

Silva (2009, p. 294) corrobora a ideia de que a matemática, a partir de tantas inovações técnicas, se tornou formalista ao extremo, o que foi, em parte, a razão que causou a proliferação de paradoxos. Houve, então, a necessidade de ser regulada pela intuição imediata e justificada por construções efetivas. Enquanto Frege pretendia mostrar que a lógica era anterior a matemática, construtivistas inverteram o raciocínio e defenderam que "a lógica é a descrição a posteriori das regularidades formais dos procedimentos de construção matemática" (SILVA, 2007, p. 151). A partir disso, a filosofia da matemática ganhou mais uma vez uma função revisionista do conhecimento matemático, destacando restrições de procedimentos e práticas.

Frege contribuiu de forma significativa com o logicismo, mas, para atingir sua finalidade de demonstrar todos os princípios da matemática em bases lógico-dedutivas, ele percebeu que necessitava criar uma linguagem que lhe permitisse expressar de modo mais preciso seus conceitos, o que não era possível na linguagem coloquial. Então, sua obra começa com a criação da linguagem que precisava para atender sua finalidade de veicular de forma adequada o conteúdo a ela atribuído. Conforme Del Vecchio Junior (2010), o que Frege fez foi dar uma nova dimensão à lógica, estabelecendo um tratamento funcional-veritativo[56] das proposições:

> Frege abandona a concepção clássica de forma lógica do enunciado conforme concebido por Aristóteles (que envolve a bipolaridade e a complexidade essencial da proposição), a fim de apresentar um novo conceito de enunciado enquanto função proposicional. Em sua nova concepção, o enunciado passa a ser identificado como uma função de verdade de determinada variável. Ao contrário do que tínhamos sob a égide do paradigma aristotélico, a combinação dos operadores de condicional e negação permite efetuar operações entre enunciados através de regras preestabelecidas, consolidando a possibilidade de um trato dedutivo em seu sistema, marcado inclusive pela transitividade permitida entre funções que possuam o mesmo grau de carência (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 29).

Assim, o projeto logicista de Frege idealizava a aritmética a partir de uma estrutura estritamente lógica, que lhe garantiria o compromisso de grande fundamento da matemática. Isso aproximaria definitivamente esses dois ramos do conhecimento. Mas, embora logicista, Frege era um realista em ontologia da aritmética, pois acreditava que números eram entes que existem objetivamente[57] e independentemente dos seres humanos. No entanto, Silva (2007, p. 130) destaca que, para Frege, "os números não eram *reais* em nenhum sentido do termo, isto é, não eram objetos físicos nem mentais. Frege admitia que a aritmética era pura lógica. Ele, inclusive, lutava contra empiristas e psicologistas que comprometiam o caráter puro da verdade aritmética".

Apesar dos seus aspectos notáveis, a construção de Frege foi rapidamente minada pela descoberta de uma contradição por Russell em 1902. Mesmo assim, Russell prosseguiu com a obra de Frege não apenas querendo fundamentar a aritmética, mas com o sonho de criar uma ciência rigorosa e fundadora de todas as outras ciências. Ele conduziu seu trabalho de fundar a matemática sobre uma base puramente lógica, única e suscetível de garantir a sua objetividade (MONALISA & LAURO, 2010, p. 2).

---

[56] Se "os gregos derrotaram os persas em Plateia" e "os persas foram derrotados pelo gregos em Plateia" são, por assim dizer, indiscerníveis do ponto de vista da fórmula da linguagem, parece óbvio que o sentido das proposições deve ser tomado de forma genérica, deixando em segundo plano o modo como se constitui o sentido proposicional, bastando que ele exista, abandonando-se a característica de complexidade essencial da proposição. Ela acaba por exercer, na realidade, a função de um nome do fato (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 29).

[57] Frege fornece um exemplo prosaico de outras entidades objetivas, mas não reais. Por exemplo, o trópico de Capricórnio. Essa linha imaginária tem até localização no espaço, mas nenhuma propriedade física, ela existe objetivamente, mas não é um objeto real. O trópico de Capricórnio só existe na verdade, e só podemos localizá-lo, no contexto de um sistema de coordenadas e um conjunto de convenções de medida, fora disso não podemos nem sequer nos referir a ele e a expressão "trópico de Capricórnio" não tem um sentido determinado. O mesmo se passa com os números. Só podemos nos referir a eles no contexto de uma teoria que fala deles, isto é, a aritmética. Isso garante simultaneamente um *locus*, isto é, uma "residência" para esses objetos, e uma forma de acesso a eles. Os números existem no contexto da aritmética, eles "habitam" os espaços dessa teoria (SILVA, 2007, p. 131).

As correntes do intuicionismo, do formalismo e do logicismo são as abordagens mais preocupadas em estabelecer algum alicerce seguro para a matemática, por isso são conhecidas como fundacionistas. Essas perspectivas também são chamadas filosofias absolutistas, pois sustentam que a matemática é formada por saberes certos, absolutos, isto é, que não são contestados. No entanto, esses modos de conceber a matemática aceitam que é possível descobrir novas teorias e verdades as que já são conhecidas. Deste modo, outras inclinações têm surgido focando nas consequências improdutivas dessas tendências, negando seus fundamentos ou afirmando que esses são insuficientes. Daí outras explicações sobre a matemática têm surgido com base em outros parâmetros.

Até aqui, relatamos a posição das escolas tradicionais sobre a natureza da matemática. As correntes apresentadas iluminam múltiplas facetas deste conhecimento, embora não sejam hegemônicas nem definitivas. Agora seguem as direções mais recentes sobre esse tema que questionam sua natureza *a priori* e os argumentos a favor de suas bases empíricas. No entanto, não se tem um retorno ao empiricismo. Ponte *et al* (1997, p. 9) explica que se trata, antes, de uma aproximação entre a matemática e as ciências naturais que admite, tal como acontece nessas ciências, o carácter *a posteriori* e falível do conhecimento. Trata-se de uma perspectiva quase empírica sobre a Matemática, que questiona ser essa ciência um corpo de saber imutável e infalível.

1.3 As dimensões do falibilismo

Atualmente, concepções pós-modernistas nos propõem um novo modo de pensar sobre como a verdade é constituída no âmbito da matemática. Elas nos dizem que, se queremos compreender o que é a matemática e os seus processos de produção, é importante buscarmos entender as práticas dos matemáticos e encontrarmos uma filosofia que descreva essas ações. É uma proposta filosófica que envolve crítica, discussão, conjecturas e refutações. Esse novo paradigma direciona a preocupação com a natureza dos objetos matemáticos para uma perspectiva voltada ao processo de produção em matemática, isto é, como se faz matemática. Essas teorias tendem a quebrar a visão absolutista sobre esse conhecimento.

Essas filosofias são chamadas falibilistas e veem a matemática como resultado de processos sociais. Segundo Lakatos (1978), a matemática desenvolve-se pela correção de teorias e pelo melhoramento de conjecturas, graças à especulação, crítica e existência de contraexemplos. Eleutério (2014, p. 6) esclarece que, desta forma, a matemática é vivenciada de forma ativa, colaborativa, criativa, cultural, investigativa e histórica, relacionando-se assim com situações humanas. Os falibilistas olham a matemática sem a preocupação de encontrar sempre fundamentos seguros e absolutos para essa ciência, reconhecendo e aceitando que os matemáticos e a própria matemática são falíveis, incluindo provas, teoremas e conceitos. As concepções falibilistas ainda consideram que o conhecimento matemático não pode ser separado do conhecimento empírico, da física e das outras crenças. Deste modo, ele está inserido na história e prática humana e, portanto, não pode ser separado de ciências humanas e sociais ou de considerações culturais em geral (BARALDI, 1999b, p. 12).

Meneghetti e Trevisani (2013, p. 155) corroboram a visão falibilista, que considera o conhecimento matemático falível, corrigível e em contínua expansão como qualquer outro tipo de conhecimento humano e que o quase empirismo leva em consideração a atividade dos matemáticos, isto é, o que eles fazem com todas as imperfeições inerentes a qualquer atividade ou criação humana.

1.3.1 Novos fundamentos para a matemática

Nesse sentido, diversos matemáticos, filósofos e historiadores, como Davis, Hersh, Ernest, Kline, Tymoczko, Putnam, entre outros, inspirando-se no *falibilismo*[58] de Lakatos (1922-1974), substituem a crença na verdade absoluta[59] pela relativa, sujeita a erros e revisões, e propõem uma nova abordagem para a filosofia da matemática designada por *quase empiricismo*[60].

Essa abordagem procura caracterizar a matemática com base na análise das práticas dos matemáticos e a partir de um enfoque filosófico que a ressalta como uma atividade humana, simultaneamente individual e social, que decorre do diálogo entre pessoas diante da busca de solução de problemas. O quase empiricismo passou a representar uma “nova direção na filosofia da matemática” (TYMOCZKO[61], 1986 *apud* ERNEST, 1991, p. 35). Nessa perspectiva, a filosofia da matemática passa a:

---

[58] No início do século XX, Imre Lakatos, seguidor das idéias de Popper, propõe a superação dos fundamentos da Matemática, o formalismo, o intuicionismo e o logicismo, os quais tinham a pretensão de contribuir com fundamentos seguros para explicar o corpo da Matemática. Este autor considera que as teorias científicas não são deduzidas dos fatos, mas são inventadas a partir de hipóteses que podem ser observadas, experimentadas e, portanto, sujeitas a serem refutadas. As teorias não são demonstradas, por isso não podemos dizer com certeza se são verdadeiras (NEHRGIN E POZZOBON, 2006, p. 8).

[59] Segundo a visão absolutista, “[...] o conhecimento matemático é feito de verdades absolutas e representa o domínio único do conhecimento incontestável [...]” (ERNEST, 1991, p. 7).

[60] Dizemos que um método é quase empírico quando “são análogos aos métodos das ciências físicas exceto pelo fato de que os enunciados singulares que são ‘generalizados por indução’, usados para testar ‘teorias’, etc., são eles próprios o produto de provas ou cálculos mais do que ‘relatos de observação’ no sentido comum (TYMOCZKO *apud* SANTANA, 2007, p. 57).

[61] TYMOCZKO, T. (ed.) New Directions in the Philosophy of Mathematics, Boston, Birkhauser.

> [...] questionar a atividade matemática e seu produto como dados, e não como problemas que lhe caberia equacionar e resolver. Em outras palavras, a filosofia da matemática hoje pergunta-se "o que é isto, a matemática?" não "como deveria ser isto a matemática?". Sua tarefa torna descritiva, com tudo o que uma descrição filosófica comporta de crítica, antes que normativa (SILVA, 1999, p. 50).

Nessa nova visão, os filósofos da matemática recorrem à história em suas reflexões. Essa conduta pode ser considerada como uma reação à visão absolutista da matemática, que a encara de forma vazia, sem significados e dada fora da experiência, como um conhecimento privilegiado em relação às outras áreas do conhecimento.

Silva (1999) esclarece isso ao afirmar que "esse ponto de vista é compartilhado por intuicionistas, para os quais a matemática apenas descreve certos aspectos de nossa vida mental; por logicistas, para os quais a matemática, sendo pura lógica, não está à mercê da experiência; e por formalistas, para os quais a matemática é apenas um jogo formal" (SILVA, 1999, p. 52). O estudo da história da matemática é um fator determinante para a compreensão de sua natureza. Isso ocorre devido à matemática ser-nos:

> [...] dada precisamente estendida ao longo de sua história, e não concentra toda no momento presente. Se a matemática está constantemente reinterpretando-se, esta tarefa de reinterpretação é um fato filosoficamente relevante, precisamente porque reescrever a matemática passada em termos de matemática presente é uma atividade matemática. Assim, o estudo do desenvolvimento histórico da matemática não pode ser ignorado pelo filósofo. Caso escolha olhar apenas a matemática em estágio atual, o filósofo da matemática estará escolhendo uma perspectiva parcial, quando não falsificada, da atividade matemática (SILVA, 1999, p. 51).

Observando essas práticas, retomamos fatores importantes sobre a matemática que foram negligenciados ao longo de sua história, como o reconhecimento de que muito do seu desenvolvimento ocorreu com base em provas informais, processos de tentativa e erro, conjecturas e procura de evidências, intuição. Também é possível constatar que há regras culturais de cada época que determinam os critérios de rigor em relação à aceitação de demonstrações matemáticas, isto é, os padrões que uma geração aceita a outra recusa, entre outros aspectos.

Uma análise fornecida por Meneghetti & Trevisani (2013, p. 156) fornece que Restivo[62] destaca o caráter social do conhecimento matemático. Para esse autor, a matemática é concebida como uma prática social que está conectada e é interdependente de outras práticas sociais. Ele destaca que mundos matemáticos são mundos sociais e enfatiza que é preciso recuperar os

---

[62] RESTIVO, S. The Social Life of Mathematics. In: RESTIVO, S.; BENDEGEM, J.; FISCHER, R. (Eds). Math Words. Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education. Albany: State University of New York Press, 1993, p. 247-278.

mundos sociais que temos progressivamente tirado do processo de produzir e apresentar os objetos matemáticos.

Paul Ernest (professor emérito da filosofia da educação matemática no Reino Unido) também contribui para o reconhecimento da natureza social da matemática com sua filosofia conhecida como construtivismo social, que tem por base duas outras filosofias da matemática: o quase empiricismo de Lakatos, o qual já detalhamos, e o convencionalismo de Wittgenstein. Além dessas referências, Ernest também utiliza outras ideias filosóficas na composição do seu trabalho, como as concepções de Ernest Von Glasersfeld e Jean Piaget.

Gottschalk (2004) apresenta algumas ideias de Wittgenstein, um dos maiores representantes da virada linguística, movimento filosófico que se deu no final do século XIX e início do século XX. Sob sua perspectiva, as proposições matemáticas não descrevem objetos ideais pertencentes a um reino platônico, tampouco são extraídas da experiência sensível. "Se olharmos para o uso que fazemos delas, veremos que exercem uma função normativa, pois organizam nossa experiência empírica de determinadas maneiras. São invenções dos homens, e não descobertas. Neste sentido, são de natureza *convencional*" (GOTTSCHALK, 2004, p. 10).

O construtivismo social, que é uma das vertentes do construtivismo, pretende ser uma filosofia descritiva da matemática. Jesus (2002, p. 5) afirma que, da filosofia de Lakatos, Ernest herda a concepção de que a matemática é um conhecimento falível e sempre sujeito à revisão, como todo trabalho humano. Da filosofia de Wittgenstein, Paul Ernest herda que o conhecimento matemático tem a sua origem e está presente nas regras compartilhadas que disciplinam a linguagem natural.

A partir de Wittgenstein, Ernest também considera que o conhecimento matemático está assegurado por provas cujas bases repousam em regras e conhecimentos linguísticos. Para Meneghetti & Trevisani (2013, p. 157), a matemática tem uma natureza dialógica que inclui sua base textual, seus conceitos, as origens e a natureza da prova e os processos sociais por meio dos quais o conhecimento matemático é criado, justificado e aprendido[63].

Ainda destacamos outro tipo de abordagem sobre a matemática, idealizada por Raymond Wilder, que a descreve como um tipo de sistema cultural. Wilder participou da conferência intitulada *The cultural basis of Mathematics* no Congresso Internacional de

[63] Para esse autor a forma dialética é intrínseca aos processos heurísticos e epistemológicos do conhecimento matemático. Estes por sua vez são analisados sob seus aspectos culturais e linguísticos (MENEGHETTI e TREVISANI, 2013, p. 158).

Matemáticos de 1950. Esse teórico desenvolveu suas ideias por várias décadas através de vários artigos e livros, entre os quais o *Mathematics as a Cultural System* publicado em 1981.

Wilder se preocupou em estudar como se deu a evolução da matemática e qual a relação da cultura com os seus fundamentos. Tal abordagem é chamada epistemologia evolutiva, e seu principal objetivo é analisar o desenvolvimento do conhecimento matemático. Wilder nos apresenta o processo de contagem dentro da noção de progresso cultural, que engloba tópicos como evolução e difusão, sendo um exemplo de como ele entende o par matemática-cultura. Ele diz que esse processo é um invariante cultural, pois está presente em todas as culturas mesmo que de forma rudimentar.

Uma colocação significativa de Wilder é a de que o indivíduo, em sua atividade matemática, é influenciado por sua cultura, e essa ligação não pode ser ignorada. Tal como posto por Meneghetti & Trevisani (2013, p. 156), Wilder, na sua obra *A Base Cultural da Matemática*, desenvolve a concepção de que a matemática é, em parte, um produto cultural e, portanto, um assunto em constante mudança.

Assim, para esse autor, tal como outros traços culturais, a matemática não é uma construção arbitrária perfeita de um indivíduo matemático. O estado e a direção do crescimento da matemática são determinados pela complexidade geral de forças culturais (internas e externas)[64]. Também Bishop (1988) enfatiza o aspecto cultural do conhecimento matemático. Para ele, as ideias matemáticas são geradas por diversos grupos culturais, desenvolvidas como resultados de várias atividades. Nesse sentido, a matemática ocidental, por exemplo, é uma entre muitas outras (MENEGHETTI & TREVISANI, 2013, p. 156).

Os produtos matemáticos podem necessitar de renegociação à medida que mudam os padrões de rigor ou que emergem novos desafios e significados. É a discussão de ideias relativas aos entes matemáticos que torna possível o surgimento de conhecimentos matemáticos novos, o alargamento, a correção, o reconhecimento e a rejeição de teorias. Diante dessa proposta, Hersh (1986) diz que a matemática é um mundo de ideias criado e que existe na consciência partilhada dos seres humanos:

> (1) Os objectos matemáticos são inventados ou criados pelos seres humanos; (2) São criados, não arbitrariamente, mas emanam da actividade desenvolvida a partir de outros objectos matemáticos já existentes e de necessidades da ciência e da vida diária; (3) Uma vez criados, os objectos têm propriedades bem determinadas, que poderemos ter grande dificuldade em descobrir, mas

[64] A cultura não é apenas uma coleção de costumes, rituais, crenças, instrumentos, mas, sim, algo que muda no curso do tempo, formando o que chamamos de uma "corrente cultural". Da mesma forma que os botânicos, os economistas, os fazendeiros, como matemáticos (individuais) também somos suscetíveis a forças culturais (WILDER, 1985 *apud* MENEGHETTI e TREVISANI, 2013, p. 156).

> que possuem independentemente do nosso conhecimento acerca delas (HERSH, 1986, p. 22).

Como diz Santana (2007), há razões para se acreditar que novas abordagens em filosofia da matemática surgiram em meio à crise epistemológica contemporânea, que se caracteriza como uma reação ao positivismo e ao dualismo cartesiano. “Nesta perspectiva, a matemática passa a compor ao lado de outras atividades humanas, apenas mais um modo de compreender e organizar a realidade” (SANTANA, 2007, p. 55). Essas novas tendências desafiam as filosofias tradicionais da matemática, afirmando que ela é resultado de uma prática, situando-a em espaços e tempos determinados.

No final da década de 70, percebeu-se uma crescente tomada de consciência por parte, especialmente, dos matemáticos em relação aos aspectos sociais e culturais da matemática. Nesse período, Ubiratan D'Ambrósio, professor e teórico brasileiro em educação matemática, lançou o programa conhecido como etnomatemática, com o objetivo de tentar compreender o saber/fazer matemático ao longo da história da humanidade. D’Ambrosio procurou evidenciar que não se trata de propor uma outra epistemologia, mas sim de entender a aventura dos homens na busca do conhecimento.

Além disso, esse programa tem como aspecto essencial apresentar uma proposta historiográfica que remete à dinâmica da evolução da matemática, que resulta da exposição mútua de culturas, isto é, a etnomatemática busca entender o ciclo do conhecimento a partir dos seus diversos ambientes.

Nesse contexto, a etnomatemática nos traz um enfoque epistemológico alternativo sobre os estudos referentes à natureza da matemática, associado a uma historiografia ampla. D’Ambrosio (1996, p. 9) explica que “este programa de pesquisa consiste em investigar holisticamente a geração [cognição], a organização intelectual [epistemologia] e social [história], e a difusão [educação] do conhecimento matemático”.

Essas abordagens mais atuais que surgem no campo da filosofia da matemática, nos trazendo uma perspectiva sociocultural, contribuem para o surgimento de discussões e reflexões inovadoras, que podem nos ajudar a compreender o que é e como progride a matemática a partir do levantamento de questões como: Há relação entre a produção individual e a construção social do conhecimento matemático? Existem normas e convenções compartilhadas pelos membros de uma comunidade matemática? É possível comparar os produtos matemáticos com os demais produtos culturais? Tais indagações se mostram como grandes desafios em relação à filosofia da matemática, no entanto, representam grandes avanços na busca de um melhor entendimento sobre os aspectos de sua natureza.

1.3.2 Visões tradicionais versus epistemologias atuais

Se a filosofia da matemática abrir espaço para a discussão dessas novas questões, a atividade matemática terá mais chances de ser reconhecida como parte integrante da cultura humana em geral. Nesse contexto, ficamos atentos às orientações de Silva (2007):

> A história da matemática guarda lições importantes para um filósofo da matemática (...). A matemática dos gregos, por exemplo, que a inventaram nos moldes com a entendemos hoje, deve tanto ao espírito teórico-especulativo de sua cultura quanto à matemática dos babilônios, ao caráter prático de uma cultura talvez mais preocupada com problemas cotidianos que com metafísica (SILVA, 2007, p. 21).

Platão, com sua interpretação realista da matemática pela convicção de um domínio objetivo independente e acessível apenas pelo entendimento e, Aristóteles, com a ideia de outro tipo de realismo que assume um domínio independente, mas extraído de objetos reais, admitiram métodos sistemáticos e rigorosos de cálculos, que desvincularam a matemática de interesses práticos. Essas teorias permitiram que ela fosse tomada pela ideia de racionalidade, pureza e validade universal. Sob essas perspectivas, a matemática possibilitaria o acesso ao cosmos pela constituição numérica das coisas do mundo. Por isso, as filosofias gregas são paradigmas de explicação sobre a natureza da matemática que precisam ser revisitados, remontados e reelaborados.

A partir das considerações feitas até aqui, podemos observar que, desde as correntes filosóficas matemáticas da antiguidade até as teorias fundamentalistas do século XX, todas buscaram reduzir o conhecimento matemático a um único aspecto, seja ideal, empírico, lógico, intuitivo ou formal. Vimos, como resume Silva (2009, p. 297), que as principais correntes defendem teses distintas sobre o que são os objetos da matemática e como conhecê-los:

> Uma tese defende que a matemática estuda a manipulação regrada de sinais gráficos (operações e relações). Outra que números são peças no jogo formal da aritmética, não objetos e não verdadeiros. Outra ainda defende que matemática é o estudo das conseqüências lógicas ou definições arbitrárias dadas por sistemas de axiomas, desenvolvendo-se em uma teoria de possíveis antes de ter o domínio efetivo de aplicação. E, por fim, outra tese assume que a matemática estuda a forma ou estrutura do domínio de objetos existentes ou meramente possíveis, ou seja, a matemática só seria coagida pela consistência do que já foi (SILVA, 2009, p. 297).

No entanto, correntes que surgiram após a crise dos fundamentos da matemática buscaram explicá-la, reconhecendo e recuperando aspectos que eram deixados de lado, como a falibilidade, os elementos intuitivos, experimentais, temporais, históricos, culturais e sociais, procurando analisar a matemática como parte da criação humana e, como tal, sujeita a erros e correções. Deste modo, a matemática pode deixar de ser vista como um conhecimento que repousa sobre verdades absolutas e que admite uma essência imutável: “o caráter menos normativo das epistemologias recentes da matemática em comparação com as tradicionais considera que ela possui uma natureza descritiva e empírica, tal como a posição quase empírica de Lakatos” (STEINER, 1987, p. 8, *tradução nossa*).

Chamamos a atenção para o fato de que todas as abordagens filosóficas sobre a natureza da matemática, independentemente de suas concepções, são caracterizadas por uma pesquisa metacientífica que explora os territórios epistemológico e ontológico, ou seja, que discute o que é e como se dá o conhecimento, mas que não é considerada uma ciência. No entanto, ela permite a quem faz ciência se perguntar sobre o que faz e qual a relação de sua atividade com o mundo. Isso também encoraja nosso pensamento crítico e acorda a capacidade de raciocinar no campo específico de atuação. Nesse caso, aspectos voltados à filosofia da matemática nos ajudam a entender melhor o seu papel no esquema geral do conhecimento.

Apesar de muitos cientistas acharem que questões filosóficas não são significativas, elas têm grande importância, pois essas perguntas sempre estão em suas pesquisas e são elas que conduzem tais investigações. Não é possível o fim do conhecimento especulativo embora tais saberes tenham se tornado uma espécie de campo perdido na história das ciências. Acreditamos que esse tipo de estudo estimula o exercício da argumentação e da defesa de ideias. Todas essas preocupações, embora não sejam consideradas questões científicas, são uma espécie de metainvestigação que discute a ciência e sua natureza, estabelecendo critérios e enquadrando aquilo que a investigação particular vai fazer no seu campo. Alguns autores, como Machado (2009) e Menezes (2008), indicam, por exemplo, que o trabalho dos matemáticos, enquanto cientistas, costuma se apoiar em concepções como o platonismo e o formalismo.

Silva (2009, p. 288) ressalta que as correntes filosóficas, mesmo sendo excludentes entre si, podem revelar um aspecto pertinente sobre a natureza da matemática. Cada perspectiva pode contribuir para evidenciar a matemática. Até erros em teorias podem gerar bons subprodutos por serem, sobretudo, esforços que evidenciam determinadas características. Cada programa filosófico pode iluminar um recanto particular de um domínio amplo e multifacetado, destacando que, às vezes, como diz Silva[65] (2007, p.110) “buscar soluções é mais fértil que

[65] Jairo da Silva destaca também que resultados matemáticos não resolvem divergências filosóficas. Por exemplo, para Brower, a questão problemática não está na consistência de teorias, mas na sua construção. Depois de Gödel, o formalismo de Hilbert ficou condenado à humildade de buscar provas relativas de consistência, uma vez que nenhum sistema consistente pode provar a sua própria consistência. Mais ainda se impõe, como bem vê Jairo da Silva, coerente com sua posição a respeito da irrefreabilidade dos problemas filosóficos, o problema sobre o estatuto dos axiomas da matemática: serão eles enunciados verdadeiros sobre determinado domínio de objetos ou simples regras que fixam as operações legítimas de símbolos? (SILVA, 2009, p. 297).

obtê-las". No entanto, perceber as posições filosóficas é um assunto complexo, e classificações usuais, como realismo, idealismo, construtivismo etc., embora, de fato, sirvam para arrumar ideias, também podem ser simplistas e nos obrigar a encaixar, no mesmo conjunto, coleções de ideias que diferem bastante entre si.

A partir dos próximos capítulos, tomamos uma posição que se aproxima das concepções filosóficas mais recentes sobre a matemática, reconhecidas como concepções humanistas, que relacionam esse conhecimento com o mundo, compreendendo-o como uma criação dos seres humanos. Tais correntes se distanciam bastante das filosofias da matemática da época da crise dos fundamentos, pois, ao invés de buscar um lugar de destaque para o conhecimento matemático no sistema do conhecimento humano, elas buscam aproximar a matemática do conhecimento empírico, tornando-a também falível e aberto à revisão. Nas novas filosofias, o apriorismo da matemática está sendo contestado, certamente, em virtude da própria evolução da matemática.

A nosso ver, essas tendências atuais mostram, ao longo do tempo, uma evolução do pensamento sobre a relação dos indivíduos com o conhecimento matemático. Então, dentro desse domínio, traremos pressupostos epistêmicos na tentativa de mostrar que a matemática é fruto da racionalidade humana, e sendo construída a partir de uma objetividade cultural.

No contexto das questões que essa tese visa debater, realizaremos uma abordagem acerca dos elementos que justificam a matemática como uma vasta aventura em ideias dos seres humanos: apresentaremos, inicialmente, uma reflexão sobre o que consideramos serem os seus fundamentos, isto é, as faculdades e as necessidades humanas e, a seguir, sua principal característica, ou seja, ser uma idealização do intelecto humano em relação à realidade a partir do contexto social e cultural dos indivíduos. A história da matemática representa um dos mais nobres pensamentos de incalculáveis gerações. Esses aspectos devem conduzir o desenvolvimento de nossa perspectiva sobre a natureza da matemática.

CAPÍTULO 2

A matemática enquanto expressão humana

Há muitos e muitos anos, quando os animais ainda falavam com voz humana, antes dos deuses, homens, bicicletas, descansava, pendurado em uma árvore frondosa de um solitário verde entre desertos, um jovem macaco, feliz pelo encontro que acabara de ter com sua macaca interrogativa e pela presença abundante de frutas de todas as cores que o saciavam pleno de ócio e curiosidades. Ali, no alto da árvore protetora, não havia, predadores ou medo, e sem razões prementes de ataque ou fome ou fuga, pôs-se a observar a natureza que, sob sua cabeça pendida, jazia como uma fotografia em movimento. Agora, ali, desgovernado, era e não era parte do tudo que em sua volta, lentamente, movia o ciclo da vida. Nesse instante, talvez o primeiro instante, por desatenção ou desequilíbrio ele cai: como um corpo morto, cai. O susto é grande, principalmente agora que presenciara tantas mudanças na natureza que nunca se dera conta. Lá está ele, jogado a um chão que se transforma, e em sua volta, nascimentos, mortes, brincadeiras, mortes e mortes se equilibrando no vai e vem dos acontecimentos. Levanta-se, já não é o mesmo, a morte impregnou seu pensamento, está de pé, seu rabo ainda balança a árvore perdida, ajeita os óculos, procura abrigo e se pergunta: o que fazer com isso? A angústia de se saber finito é a diferença. Como lidar com essa morte corporificada, que agora existe e resiste em plena vida? Como driblar a inexorabilidade do seu destino recém descoberto? Como existir, apenas como passagem? Como lidar com o que se acaba, quando o que se acaba somos nós? E se perguntava enquanto atônito olhava as estrelas. E eram tantas... E ali, lá, ainda não havia a linda mulher azul e pássara a lhe sorrir as possibilidades. Completamente só e um pensamento: morrer, morrer então agora, por ver-se morto a qualquer hora ou inventar, definitivamente, o infinito...[66]

Ricardo Kubrusly

As diferentes formas do ser humano se relacionar com o mundo, sendo uma delas a criação da matemática com seus infinitos e suas lógicas, surgem a partir das condições e das angústias do homem diante da imensidão e dos mistérios do universo, e, por conseguinte, dos seus primeiros pensamentos e ações em busca de sobrevivência. Pinto (2012, p. 6) nos diz que "a humanidade tem sua vida limitada pela capacidade, pelo espaço e pelo tempo", e as palavras do poeta Kubrusly trazem a morte como o motor das transformações humanas, como a mãe das ideias. A morte impulsiona todas as coisas, inclusive o pensamento do qual o infinito se tornou parte importante por trazer consigo os mistérios da vida e a construção do conhecimento. Acreditamos que o conhecimento matemático surgiu nesse contexto.

A psique humana compreende componentes que sustentam a relação do homem com a realidade. Segundo Cardoso (1998, p. 6), os elementos são: a cognição, que inclui aprendizagem, lógica, raciocínio e capacidade de resolver problemas; a emoção, que envolve coisas como excitação, alegria; e a consciência, que é aquilo que permite ao homem dar-se

[66] "O finito e o infinito: Razão" em Pensando no Infinito: Pequenas Digressões Matemático Filosóficas e outros Pecados. Departamento de Matemática da UFRJ. Disponível em < www.dmm.im.ufrj.br/~risk/pdf/Finito.pdf >. Acesso em: 14/09/2018.

conta do que ele sabe, bem como tentar prever o futuro, o que inclui o conhecimento de sua mortalidade. Com a consciência, a vida percebe-se a si mesma no mundo, domesticando simbolicamente o tempo e o espaço. Leakey (1994, p. 139 *apud* CARDOSO, 1998, p. 6) define que a consciência provê o "olho interior" que possibilita a autoanálise e, em seguida, a aplicação do que nela se aprenda, estendendo os seus resultados ao esforço[67] de inteligência e previsão das motivações de outrem.

E mais, Serres nos lembra que a mente não está dissociada do corpo, pelo contrário: "em qualquer atividade a que nos dedicamos, o corpo é o suporte da intuição, da memória, do saber, do trabalho e, sobretudo, da invenção. Um procedimento maquinal pode substituir qualquer operação do entendimento, jamais as ações do corpo" (SERRES, 2004, p. 36). Ele ainda complementa: "específico, particular e original, o corpo todo inventa; (...) O corpo é genial" (SERRES, 2004, p. 17).

A proposta de Serres é uma superação da visão mecanicista do mundo fragmentado que é adotada pela ciência clássica. Suas colocações nos levam de volta à ideia de uma unidade na qual ciência, arte e religião andam juntas. Ancelmo (2007, p. 8) destaca que, para Serres, não existe nenhum aspecto no conhecimento que não tenha primeiramente passado pelo corpo, referindo-se não somente ao conhecimento intersubjetivo, mas também ao objetivo: "o corpo é dotado de uma presença e uma função cognitivas próprias e nele reside a origem do conhecimento. O corpo recebe, emite, conserva, transmite; estes são dons do corpo. [...] Os sentidos desenvolvendo-se progressivamente na percepção do ambiente que invade e convida" (ANCELMO, 2007, p. 8).

Nóbrega (2008, p. 146) ressalta que a cognição é inseparável do corpo, sendo uma interpretação que emerge da relação entre o eu e o mundo nas capacidades do entendimento:

> A mente não é uma entidade des-situada, desencarnada ou um computador; a mente também não está em alguma parte do corpo, ela é o próprio corpo. Essa unidade implica que as tradicionais concepções representacionistas enganam-se ao colocar a mente como uma entidade interior. O pensamento é insuficiente e a estrutura mental é inseparável da estrutura do corpo (NÓBREGA, 2008, p. 146).

Varela *et al* (1996, p. 149) ainda complementa que "essas capacidades são originadas na estrutura biológica do corpo, experienciadas no domínio consensual e ações da história e da cultura". Nesse sentido, defendemos que a matemática é inseparável do ser humano e acompanha sua história no confronto com o desconhecido e o inesperado, pois é uma das

[67] Esforço que informa os antagonismos, as alianças, as defesas e as manipulações no complexo jogo social humano (LEAKEY, 1994, p.139 *apud* CARDOSO, 1998, p. 6).

expressões de homens e mulheres em suas demandas e seus conflitos na busca da construção de sua identidade quando eles criam formas de transformar o mundo em que vivem e de se livrar dos seus medos. Como diz Freire (1997 *apud* CAFEZEIRO *et al*, 2017, p. 234), a "matemática é uma condição de estar no mundo". Cafezeiro *et al* (2017, p. 234) apoia as palavras de Freire quando apresenta o seguinte discurso:

> O humano primitivo pinta suas mãos nas paredes das cavernas. [...] O principal problema do ser humano é e sempre foi driblar a morte, por isso, ele deixa marcas que deverá ultrapassar a sua própria vida. Ao estar ciente de sua própria morte, o ser humano procura maneiras de estender sua vida indefinidamente. É a busca do infinito. Esta é a origem de toda a matemática que conhecemos hoje: no momento em que o ser humano, por representação, procura entender o tempo e o espaço e, assim, constrói o seu lugar como sujeito de si mesmo e de seu mundo (CAFEZEIRO *et al*, 2017, p. 233, *tradução nossa*).

A matemática nasceu junto com as representações em paredes e se desenvolveu a partir da busca de soluções para problemas existenciais e outras necessidades da vida humana. As entidades matemáticas passaram a existir mediante às condições circunstanciais do lugar e do momento em que foram estabelecidas, como uma exigência da experiência social. Por isso, ela é socialmente construída, e a convicção de que sua existência é independente da vida dos indivíduos precisa ser desfeita.

Se recorrermos à história da humanidade não é possível admitir que a matemática seja um saber imutável e independente do mundo sensível e dos desejos humanos. Pelo contrário, ela é um processo de criação que surgiu junto com a vida humana e que se manifesta como um modo de relação do ser humano com o mundo, assumindo várias condições de acordo com o contexto em que os indivíduos estão inseridos. Tal perspectiva está concernente com o pensamento de Kubrusly (2014, p. 8):

> Começarmos, como a história dos números nos ensina, pela contagem, que em cenário pastoril inventava consigo as noções de ordem e de convívio. Era contando que se era e que se tinha. Era contando que se desejava e que se inventava infinitos. O último número, o maior de todos não existe! É isso, por não saber-se, seguirá sendo. É o infinito que se apresenta e dribla a inexorabilidade da Morte (KUBRUSLY, 2014, p. 8).

A primeira criação matemática da humanidade foi a correspondência biunívoca, e as histórias da Antiguidade nos mostram que ela foi se desenvolvendo "na feira, no comércio, na agricultura, entre outras atividades do cotidiano dos indivíduos, para resolver questões imediatas da vida e pela busca para explicações em face de sua finitude" (CAFEZEIRO *et al*, 2017, p. 235). São muitas as evidências de que a matemática tem suas origens como uma atividade vinculada às maneiras de responder questões particulares dos seres humanos, que foram surgindo de acordo com as características de grupos, sociedades e civilizações.

Desta maneira, formas matemáticas são historicamente produzidas. E seguir esse percurso histórico ajuda a compreender que a matemática sempre atendeu às exigências de cada povo em seu tempo e lugar. Ela está em permanente construção e expansão, como no exemplo das geometrias euclidiana e não-euclidiana. Rosa & Orey (2016) apresentam os fatores e contextos relacionados ao ser humano que influenciam no processo de desenvolvimento da matemática:

> Assim, o pensamento matemático é influenciado por uma diversidade de ambientes humanos e seus elementos, que incluem a linguagem, religião, costumes, economia, atividades sociais e políticas. Junto com a linguagem, parece que todos os seres humanos passaram a desenvolver processos lógicos relacionados à quantificação, mensuração e modelagem, a fim de compreender e explicar seus contextos sócio-histórico-culturais. Esses processos permitem que cada grupo cultural desenvolva seu próprio caminho para matematizar a realidade. Essas ferramentas permitem a identificação e integração de idéias, noções, procedimentos e práticas matemáticas específicas, esquematizando, formulando e visualizando um problema de diferentes maneiras, descobrindo as relações, padrões e regularidades, e transferindo uma situação do mundo real para a matemática (ROSA & OREY, 2016, p. 4, *tradução nossa*).

Ainda na Antiguidade, o aparecimento de novas atividades e seus consequentes problemas envolveram o humano numa busca cada vez maior de leitura do mundo, compreensão de fenômenos e desenvolvimento de estratégias para lidar com o lugar que vivia e com novas formas de vida. Assim se deu o início da caça e da agricultura. Nesse contexto, os sujeitos sentiram a necessidade de viver em grupo e trabalhar em equipe organizando-se em aldeias e dividindo a produção.

Desta forma, apareceram as primeiras cidades. Essa foi uma nova maneira do ser humano estar no mundo e expressar sua existência, resultando em mais matemática. A partir das trocas das produções, surgiu o comércio com seus símbolos de controle, ou seja, mais expressões matemáticas foram sendo criadas de acordo com a maneira dos indivíduos estarem no mundo.

Mais tarde, a matemática sofreu um processo de lapidação que priorizou a argumentação, transformando-a num conhecimento de aspecto universal, preciso e rigoroso, reconhecido como um padrão da “realidade”. Sua forma foi outro aspecto que mudou bastante: passou a admitir uma apresentação elaborada, priorizando um encadeamento linear. A partir daí, a matemática passou a ser enxergada não apenas como um tipo de atividade humana sobre o mundo, mas como a própria linguagem do mundo.

Acontece que, embora esse novo estilo (aparentemente independente de situações vividas como um produto exclusivo do intelecto) tenha se tornado o modelo predominante de se pensar e fazer matemática, ela não deixou de ser uma atividade humana.

Enxergamos que tanto a matemática formal (dedutiva) como a informal (processual) são construções sociais. Assim, esta tese considera a matemática hegemônica apenas como uma forma de se fazer matemática, que foi imposta por uma sociedade a fim de melhor atender às suas necessidades. O problema do processo de construção da matemática formal foi a sua determinação como o modelo de uma "matemática real" única e universal depreciando os demais métodos matemáticos.

A partir dessa concepção, a maneira dedutiva de apresentar a matemática não pode ser considerada o único meio do ser humano se expressar matematicamente. Ela deve ser vista como resposta a uma situação localizada. Desta maneira, nossa tese considera toda forma de se fazer matemática, seja processual ou dedutiva, podendo ser de qualquer lugar, época e cultura. Neste viés, pensamos no componente do conhecimento matemático, e a análise das principais características do ser humano e suas estratégias de interação com a realidade conduz nossas reflexões.

De acordo com Candiotto (2016, p. 139-140), mesmo o homem primitivo já verificava as regularidades dos fatos acontecidos e formulava hipóteses que se verificavam nas práticas de suas vidas[68]. Esse autor explica que, a geometria, por exemplo, era assimilada pelo homem primitivo intuitivamente ao calcular a distância entre ele e a caça, ao construir suas moradias e até mesmo ao empregar elementos estéticos em seus desenhos para representar a realidade por meio de seu misticismo. A construção do conhecimento matemático foi um movimento que contou com a participação de várias civilizações desde os tempos mais primitivos.

2.1 A matemática como um reflexo da realidade

O homem, enquanto único ser que tem noção da realidade à sua volta, pensa em estar e se movimentar no espaço e no tempo e percebe a existência do universo e de si mesmo. Sua consciência, enquanto um aspecto peculiar, é a responsável pelo desejo de conhecimento da realidade material diante de suas necessidades e pela construção lógica do pensamento. Daí o

[68] O resultado das observações dos fatos fez o homem produzir leis e teorias que qualificassem suas ações na produção da vida e, para isso, produziu métodos para o desenvolvimento de tais ações, práticas e teorias. Esse processo é válido para todas as ciências e, em particular, para a Matemática (CANDIOTTO, 2016, p. 139).

fluxo do pensamento em direção ao objeto e à compreensão da matéria. No âmbito dessa questão, a matéria é o elemento central nas discussões sobre a origem de tudo o que existe. Cheptulin (1982, p. 62) diz que “o conceito de matéria se encontra em todos os sistemas filosóficos, com as mais diversas acepções”.

Por exemplo, Ovtchinnikov (1955, p. 216) afirma que “uma concepção do mundo é um sistema de ideias sobre o mundo em seu todo, são os princípios básicos segundo os quais os homens abordam e explicam a realidade que os cerca e pelos quais se orientam em sua atividade prática”. Esse autor diz que tal concepção de mundo abarca todas as ciências, direcionando seus métodos e resultados e apresentando soluções distintas para os problemas da humanidade, das quais destacamos a materialista e a idealista. Para Ovtchinnikov (1955, p. 216), “a questão básica da filosofia, em tôrno da qual se trava luta intransigente entre o materialismo e o idealismo, é a questão da relação mútua entre o ser e o pensamento, a matéria e a consciência”.

Os idealistas têm em comum tanto “a negação da existência da matéria, como a negação de sua objetividade” (CHEPTULIN, 1982, p. 62). No entanto, o marxismo concebe por matéria “o mundo exterior, a realidade objetiva, qualidade do todo, como o conjunto de todas as formas do ser objetivo, com todas suas propriedades características, com todas as relações que lhe são próprias” (CHEPTULIN, 1982, p. 70), ou seja, a matéria é uma realidade objetiva existente independentemente da consciência que se reflete nela. Nessa concepção, a matéria existe eternamente, antes do aparecimento da consciência, existe em sua presença e existirá depois de seu desaparecimento se isso acontecer.

Já Lenin (1979, p. 134, *tradução nossa*) afirma que a matéria é “uma categoria filosófica para designar a realidade objetiva dada ao homem por meio de suas sensações, que a copiam, a fotografam, a refletem e que existe independentemente das sensações”. Esse conceito de matéria é clássico e aparece em vários autores que tratam desse tema, dos quais é possível citar Cheptulin (1982) e Ovtchinnikov (1955), entre outros.

Esses autores convergem em suas apreciações em relação a essa categoria e baseiam-se na concepção marxista dessa questão. Cheptulin (1982) apresenta um parecer da definição de Lenin (1979), que se destaca por ser contra as definições idealistas e materialistas pré-marxistas que deturpam a ideia de matéria:

> A idéia segundo a qual a matéria é uma realidade objetiva, dada ao homem por suas sensações, diferencia a concepção marxista da matéria da concepção que têm sobre isso alguns agnósticos e, em particular, Kant, que reconhecia a existência da matéria, mas considerava que ela é inacessível aos nossos órgãos sensitivos, que é uma “coisa em si” incognoscível” (CHEPTULIN, 1982, p. 68).

Kant, um filósofo alemão reconhecido por muitos como o principal filósofo da era moderna, tinha sua filosofia baseada na geometria euclidiana, uma forma *a priori* da sensibilidade humana. Ovtchinnikov (1955, p. 226) destaca sobre a visão de matéria de Lenin (1979) que "definindo a matéria como realidade objetiva que nos é dada nas sensações, Lenin tem como alvo todas as variedades de idealismo que, de uma forma ou de outra, negam a existência da realidade objetiva, da matéria, ou negam possibilidade de seu conhecimento".

O conhecimento se desenvolve num contexto em que a consciência, enquanto um tipo especial de reflexo, tem como propriedade principal a possibilidade de conhecer a realidade material. Assim, ele possibilita agir sobre a realidade e transformá-la. Candiotto (2016) diz que a categoria reflexo está inserida no âmbito da discussão referente à matéria que o possui, como propriedade universal no seu processo de desenvolvimento:

> Desde sua forma mais elementar até a altamente organizada. Para além do desenvolvimento das formas de reflexo objetivas da matéria, verificamos as formas subjetivas, em especial, a consciência. Nesse viés, a categoria reflexo é um elemento importante na discussão sobre as formas de existência da matéria. Nosso pressuposto de que o reflexo é uma propriedade universal da matéria, torna-se indicativo de uma direção para o entendimento do movimento da formação da realidade material, bem como da relação entre a matéria e a consciência (CANDIOTTO, 2016, p. 168).

Para Cheptulin (1982, p. 78), o reflexo representa a faculdade de uma formação material reagir de uma maneira sob a influência de uma outra formação material, e a faculdade de representar ou de reproduzir as particularidades desta outra formação material. Em outro momento de sua obra, Cheptulin (1982, p. 78) trata da consciência como uma propriedade particular da matéria (um tipo especial de reflexo): subjetivo ou consciente. Nesse sentido, Rubinstein (1963, p. 11) acrescenta que a consciência é a mais organizada forma do reflexo, possível apenas pelo cérebro humano.

A consciência é uma forma particular de reflexo que caracteriza a matéria altamente organizada, e mais, ela é o reflexo subjetivo da realidade. Nesse contexto, apresentamos o objeto da matemática como um reflexo da realidade física que só existe na relação entre ela e a consciência. Assim, negamos a existência desse objeto como inerente à realidade e como forma *a priori* da sensibilidade humana. A matéria possui uma objetividade independente, mas o conhecimento – uma produção intelectual[69] – possui uma objetividade que é intermediada pela subjetividade.

---

[69] Há uma diferença entre as objetivações de objetos físicos e de objetos intelectuais. Por exemplo, se ocorresse a extinção da humanidade, implicaria necessariamente no desaparecimento do conceito de árvore. Esta, porém, permaneceria e, mesmo que ela se transformasse, continuaria a existência da sua materialidade física sob outra formação material particular (por isso, a realidade é independente de eu existir ou não). Para continuar a

Candiotto (2016, p. 87) reforça que a consciência é a expressão ideal da realidade material, ela é uma objetivação em forma de subjetividade. O movimento da consciência é dialético, porque assim também é a realidade material. Do mesmo modo, ela é a forma social de movimento da matéria. Cheptulin (1982, p. 94) destaca, a partir de Marx, a ligação do ideal com o material e a dependência do primeiro com relação ao segundo. Assim, o movimento que constitui a consciência tem em sua base a realidade material.

O elemento cognitivo é apenas uma característica do reflexo em seu mais alto grau de complexificação[70], a consciência. De acordo com Cheptulin (1982, p. 100), "o saber é um modo ou uma forma de existência da consciência que não existe nele mesmo, mas na medida em que chegamos, por meio dele, à tomada de consciência (intelecção, compreensão) de um estado de coisas dado". Neste sentido, a consciência refere-se não apenas a um indivíduo, mas igualmente à sociedade implicando numa consciência social e no conteúdo dessa consciência, entra apenas a parte do saber que reflete, de uma maneira ou de outra, o ser social existente.

Candiotto (2016, p. 90) explana que esse saber (conhecimento) da realidade material, ou seja, o reconhecimento da existência de si e daquilo que o rodeia, é peculiar ao ser humano, ao seu nível de desenvolvimento da consciência. Ele é uma forma de existência da consciência que se dá à medida que o homem atua socialmente na realidade ambiente.

Cheptulin (1982, p. 99), em suas citações, diz que a consciência é o saber que nasce do cérebro humano (único lugar onde esse processo é possível) quando há compreensão de uma situação concreta, mas que tem a base material para o nascimento desse conhecimento. Resumindo, Cheptulin (1982) explana que:

> Ainda que a consciência manifeste-se como saber, ela está longe de lhe ser idêntica. A consciência existe não apenas sob a forma de conhecimentos, mas igualmente sob a forma de emoções, sentimentos, vontade etc. [...] A consciência é formada unicamente pela rede de informações que entram no processo concreto do pensamento do sujeito e a partir dos quais elabora-se sua compreensão da situação. Em outros termos, a consciência não é todo o saber, mas somente aquele do qual o homem utiliza-se a cada momento dado, que nasce de seu cérebro, quando da compreensão dessa ou daquela situação concreta (CHEPTULIN, 1982, p. 99).

Ovtchinnikov (1955, p. 245) explica que "o movimento, o espaço e o tempo, como formas fundamentais de existência da matéria, encontram-se em unidade orgânica indissolúvel,

exemplificação, pensemos em um objeto produzido pela atividade humana: o estranhamento. Nesse caso, extingue-se tanto o estranhamento quanto o seu conceito, pois, apesar de ser independente de cada indivíduo consciente, não existe independente da humanidade (CANDIOTTO, 2016, p. 89).

[70] As emoções, sentimentos, vontade etc. produzidos nas relações do homem com o mundo e com os outros homens complexificam o processo de conhecimento da realidade natural e humana. Essa relação com a realidade material é limitada pelo nível de desenvolvimento da consciência, bem como pelo processo produtivo da vida humana (CANDIOTTO, 2016, p. 90).

condicionada pela unidade do mundo material". Em consonância com essas colocações, Candiotto (2016, p. 70) elucida que a unidade do mundo está em sua materialidade e, por sua vez, há uma indissolubilidade entre movimento, tempo e espaço. O reconhecimento dessas categorias como realidade objetiva é um fundamento da concepção materialista de mundo.

A matéria se manifesta em formações materiais que expressam a propriedade do movimento[71] da matéria, o qual é uma de suas propriedades universais: "sendo eterno como a matéria, o movimento absoluto[72] assim como o repouso relativo condicionam a existência eterna da matéria, mediante as formações materiais particulares, encerradas no espaço e no tempo" (CHEPTULIN, 1982, p. 157). Concordando com esta ideia, Ovtchinnikov (1955) explica que o movimento da matéria:

> [...] tem as formas mais variadas: o simples deslocamento no espaço, os diferentes fenômenos físicos, as transformações químicas, os processos inerentes aos organismos vivos, o movimento que caracteriza os fenômenos sociais. [...] As diferentes ciências estudam as diferentes formas de movimento da matéria. A mecânica estuda a forma mais simples do movimento da matéria, a forma mecânica, ocupa-se do estudo do deslocamento dos corpos no espaço. A forma física do movimento da matéria é constituída pelo movimento atômico-molecular, pelos processos magnéticos, pelo movimento intra-atômico e intranuclear, etc. A forma química do movimento da matéria inclui os processos de combinação e de dissociação dos átomos e moléculas e as leis da estruturação das mais diferentes combinações orgânicas e inorgânicas. A vida orgânica, objeto de pesquisa das ciências biológicas, distingue-se por uma diversidade ainda maior de forma (OVTCHINNIKOV, 1955, p. 240).

Nesse contexto, Kopnin (1978, p. 183) destaca que há um movimento histórico[73] que determina o movimento lógico, que "o pensamento visa à reprodução do processo histórico real

---

[71] Cada forma de movimento é superior à outra e incorpora as inferiores na sua constituição e desenvolvimento. Assim, a forma biológica não pode existir sem as formas física, química e mecânica. Entretanto, a compreensão da forma biológica de movimento não pode ser reduzida à compreensão das outras formas [...]. A forma social do movimento da matéria é a mais complexa e está constituída sobre a base de todas as demais. [...]. Explicar as relações sociais, por exemplo, por meio das propriedades biológicas é incorrer no chamado "darwinismo social" (CANDIOTTO, 2016, p. 72-73).

[72] Quando o movimento absoluto provoca a superação dos limites impostos pela formação material em repouso relativo, surge um ser de outra ordem, até que se forme uma nova espécie ou um novo regime social. [...]. Quando falamos em movimento absoluto e repouso relativo, não os limitamos a sua forma mecânica, ou seja, ao deslocamento no espaço. Em vez disso, referimo-nos às diversas formas de movimento da matéria, à mecânica, física, química, orgânica e social (CANDIOTTO, 2016, p. 71).

[73] Uma das ciências que estabelece essas conexões espaço-temporais é a Geometria, cuja especificidade está na análise das formas espaciais e das relações entre os corpos físicos. O movimento histórico das transformações materiais do mundo cria, estabelece e muda constantemente as legalidades dessa estrutura. Ou seja, modifica continuamente a geometria da realidade física. A consciência, que é peculiar ao ser humano, é o que possibilita estabelecer as legalidades do movimento dessa transformação, bem como a lógica de sua historicidade, abstraída em forma de conceitos, juízos e deduções. A legalidade que está na objetividade do movimento material é inerente ao seu processo, porém, somente pode ser abstraída e compreendida no próprio ato do conhecimento da realidade (CANDIOTTO, 2016, p. 168).

em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade". Desta forma, "o lógico é o reflexo do histórico em forma teórica, [...] é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações". Sobre esse aspecto, Candiotto (2016, p. 46) comenta que:

> A realidade existe como síntese de múltiplas determinações, não como elementos abstratos do processo de conhecimento. O movimento de reflexo como forma de conhecimento é próprio ao indivíduo, é uma atividade do pensamento. Assim, as primeiras sensações e percepções do indivíduo, em relação ao objeto, representam um relativo concreto caótico apenas no pensamento, pois na realidade material, o concreto continua síntese de múltiplas determinações. Na sequência (e esse movimento não ocorre linearmente, é um processo dialético e envolve mútuas relações intrínsecas), surgem as abstrações que são próprias à consciência, não existem fora dela. Elas promovem a possibilidade de o indivíduo elaborar um conhecimento mais profundo e aproximado da essência desse objeto. Quando alcança esse patamar, dizemos que ele chegou ao nível de relativo concreto pensado (CANDIOTTO, 2016, p. 46).

É importante apresentar a relação entre a matéria e a consciência, pois é nesse cenário que encontramos o caminho para compreender o objeto da matemática. Ele se encontra na intercessão entre a realidade física e suas formas de reflexo consciente. Por isso, apresentamos algumas reflexões sobre essa relação, assim como seus desdobramentos.

Nesse sentido, a constituição do objeto da matemática é dependente desses da consciência e da realidade física. Esse objeto só existe no fluxo do movimento entre esses polos. A respeito desse assunto, Kopnin (1978, p. 131-132) complementa que assim como "o redondo não existe independente dos corpos arredondados, mas, como forma pura, é destacado pela atividade representativa do homem, o ideal não existe fora da atividade material do homem, podendo ser desmembrado apenas como forma dessa atividade".

A realidade física não produz um quadrado ou um círculo. Esses componentes são produções da consciência na sua constituição como reflexo da realidade física, que é a base para a formação dos objetos matemáticos. Especialmente sobre os objetos geométricos, Candiotto (2016) afirma que a consciência possui as formas como sua propriedade e explica como elas se modificam no fluxo contínuo do movimento da matéria:

> As formas desenvolvem-se a partir do movimento mecânico, físico, químico e orgânico da matéria. O último e mais desenvolvido tipo de movimento, o social, não produz diretamente a transformação das formas da matéria, pois não constitui uma realidade física. De todo modo, ele forma a consciência, transforma a realidade física indiretamente, ou seja, quando produz conhecimento que promova as transformações da matéria para satisfazer as necessidades humanas, bem como o faz abstratamente as formas espaciais corrigidas como reflexo das formas brutas da realidade física. Mas essas transformações não ficam apenas na consciência, elas modificam

> efetivamente a realidade física, desde os objetos de sua corporalidade até o seu próprio corpo (CANDIOTTO, 2016, p. 168-169).

Ao tratarmos da consciência como reflexo da realidade material, não é possível defender a precisão absoluta de nenhum tipo de conhecimento, e Cheptulin (1982, p. 114) apresenta três argumentos sobre a impossibilidade dessa precisão em relação ao conhecimento:

> Primeiramente, o conhecimento humano nunca atingirá o ponto de desenvolvimento em que tudo será inteiramente conhecido, em que o mundo inteiro será refletido na consciência dos homens; isso é impossível, porque a realidade refletida não é estática, mas transforma-se e desenvolve-se continuamente. Em segundo lugar, nenhum desenvolvimento do conhecimento pode conduzir à transformação da consciência de um homem em consciência universal, porque as possibilidades de um indivíduo são sempre limitadas e ele não está em condições de possuir todos os conhecimentos dos quais dispõe a humanidade. Em terceiro lugar, o acréscimo dos conhecimentos dos homens não apenas não elimina sua atividade, mas a reforça pelo fato de que sua possibilidade criativa e seu campo de atividade alargam-se (CHEPTULIN, 1982, p. 114).

A colocação desse autor nos faz acreditar na impossibilidade de precisão absoluta de toda forma de saber, pois a matéria está sempre em transformação e o ser humano não pode compreender toda a estrutura da realidade. A partir dessa condição, o conhecimento matemático cumpre um papel importante na compreensão da realidade, mas seu objeto é apenas uma forma de representação dessa realidade, o que não significa que nossa matemática não seja significativa.

Daí levanta-se a questão de o conhecimento humano ser relativista, isto é, que ele está em função de cada sujeito e de seus juízos sobre a verdade no entendimento das coisas do mundo. No entanto, seguimos a posição de Candiotto (2016, p. 122) quando ele elucida que "o conhecimento é relativo e não relativista, pois sempre haverá novos nexos e estruturas da matéria em movimento para que o ser humano possa conhecer e estabelecer novas relações".

O problema a respeito desse assunto, segundo Duayer (2012, p. 21), é que "as correntes teóricas hoje predominantes deduzem do relativismo epistemológico o relativismo ontológico". Em outros termos, do caráter transitório e relativo de nossos conhecimentos, deduzem que eles não podem ser objetivos. Assim, o conhecimento é objetivo, mas não devemos reduzi-lo a uma forma mecanicista do reflexo da realidade.

Nossa hipótese é que a relação entre a matemática e a realidade física se expressa na relação entre a consciência e o ser, ou seja, as relações quantitativas e espaciais se constituíram em condições humanas a partir de sua compreensão da realidade. Observamos, na história da matemática, que o ser humano surgiu em um mundo com forma, movimento e tempo, constituintes da matéria. Daí sua adaptação ativa o conduziu à produção dos conhecimentos para ser e estar neste mundo, incluindo o conhecimento matemático que, inicialmente, se constituía como um conjunto de regras para satisfação de necessidades imediatas e, posteriormente, desenvolveu-se como uma ciência.

Nos subitens a seguir, continuamos nossa análise acerca da relação do reflexo matemático com a realidade física através de algumas reflexões sobre os objetos e as abstrações matemáticos, buscando o entendimento, especialmente, sobre as interações das abstrações desses objetos com o estabelecimento dos critérios de verdade e, consequentemente, sobre as aplicações práticas da matemática.

2.1.1 A concepção dos objetos matemáticos

O entendimento sobre o conhecimento da realidade material, em particular, o conhecimento matemático, requer a compreensão de como o homem se movimenta na construção de seu mundo. Assim, é possível identificar algumas perspectivas acerca da concepção de seus objetos. Nesse estudo, destacamos três ideias fundamentais: a materialista mecanicista (concebe o objeto da matemática como inerente à realidade física); a idealista (reconhece o objeto matemático como uma forma *a priori* da sensibilidade); a dialético-materialista (concebe o objeto matemático através da relação entre a realidade física e a consciência). Essa questão ontológica se apresenta na teoria do conhecimento no que diz respeito à cognoscibilidade e à unidade do mundo.

Tanto a concepção materialista mecanicista quanto a idealista tratam o conhecimento matemático como absoluto e alheio ao desenvolvimento histórico. Para Candiotto (2016, p. 101), o conhecimento geométrico, por exemplo, traz uma perspectiva utilitarista em uma concepção materialista mecanicista e, na concepção idealista, apresenta uma transcendência em relação a realidade material. Corroborando o autor acima, Aleksandrov (1991a, p. 23, *tradução nossa*) diz que "vendo a abstração extrema e a força lógica dos resultados matemáticos, os idealistas imaginam que a matemática brota do puro pensamento".

Uma vez colocada a base do materialismo dialético da categoria matéria, nos apropriamos dessa posição para fundamentar nossa concepção do objeto da matemática e falamos sobre suas formas fundamentais de existência: o movimento, o tempo e o espaço. Elas possuem as particularidades de serem objetivas e indissociáveis da categoria matéria. Segundo Afanasiev (1963, p. 63, *tradução nossa*), "os princípios fundamentais da concepção materialista dialética do mundo consistem em reconhecer a objetividade do mundo circundante e a aptidão da compreensão humana para conhecer esse mundo".

A respeito dos objetos matemáticos, Machado (2011) afirma que tais objetos, como números, formas, propriedades, relações, estruturas etc., não são construídos tendo como referentes objetos homólogos de qualquer outro sistema preexistente, mas exclusivamente tendo em vista a realidade que se pretende mapear. Então, ele comenta:

> Não pressupomos que tais objetos tenham uma existência soberana em uma realidade supratemporal, ou que eles sejam componentes de uma linguagem cifrada, de um código misterioso em que o "livro de Universo" estaria escrito, e que aos pobres mortais caberia apenas a tarefa de decifrar, como sugeriu Galileu. Em vez disso, concebemos a Matemática como um sistema de representação da realidade, construído de forma gradativa, ao longo da história, tal como as línguas (MACHADO, 2011, p. 101-102).

Lenin (1979, p. 127, *tradução nossa*), por sua vez, explica que "a independência do mundo exterior em relação à consciência é a premissa fundamental do materialismo". Esse pressuposto é uma condição imprescindível na proposta dialético-materialista, que admite que a objetividade do conhecimento somente pode existir como criação humana a partir da realidade material. É justamente com o materialismo dialético que é possível pensar que o sujeito, com sua consciência, procura capturar o mundo existente, ou seja, busca representar e conceituar o existente.

Candiotto (2016, p. 88) sustenta que o reflexo do objeto na consciência não o cria na realidade. O que acontece é o surgimento de uma nova objetivação, além do próprio ser: o seu conceito. Daí são dois tipos de objetivações: o ser e seu conceito. Essa distinção é apenas no plano do conhecimento humano, pois ontologicamente a realidade constitui uma unidade indivisível.

Essa concepção está em harmonia com as ideias de Cheptulin (1982, p. 95) que diz: "há duas realidades – a realidade objetiva que existe fora e independentemente da consciência e a realidade subjetiva engendrada pela primeira, da qual é reflexo". Por sua vez, Marx (2011, p. 28) afirma que "o ideal não é mais do que o material transposto para a cabeça do ser humano e por ela interpretado".

Nesse sentido, segundo Candiotto (2016, p. 88), o objeto da geometria é a expressão ideal do movimento real da matéria, das leis físicas que regem tal movimento. A forma espacial, sendo propriedade da matéria, possui uma objetividade independente da consciência enquanto o objeto da geometria possui uma objetividade intermediada pela subjetividade.

Esse pensamento difere da concepção materialista mecanicista, que considera o objeto da geometria como inerente à matéria, e da concepção idealista, que o concebe como uma forma *a priori* da sensibilidade. Desta forma, "o conhecimento geométrico é a subjetivação das relações espaciais objetivadas e, dialeticamente, torna-se uma subjetividade objetivada em forma de conhecimento” (CANDIOTTO, 2016, p. 88).

Autores, como Aleksandrov (1991a), Duayer (2012) e Cheptulin (1982), discutem sobre a questão fundamental da filosofia, que é a relação entre a matéria e a consciência, e criticam as correntes do materialismo mecanicista e do idealismo. Eles defendem a posição dialético-materialista e é, nessa linha de raciocínio, que nossa tese segue: confiamos que as duas primeiras ideias não correspondem à realidade do conhecimento matemático, ou seja, apostamos que é o materialismo dialético que permite, como afirma Candiotto (2016, p. 138), “a concepção dos objetos da matemática em sua relação entre a realidade física e as formas de reflexo do ser humano em seu processo de conhecimento, uma vez que esse objeto se constitui nessa realidade e se reflete na consciência”.

Ríbnikov (1987) também defende a concepção materialista dialética e apresenta, com base nessa compreensão, uma composição da matemática que, segundo ele, é a mesma que a de qualquer outra ciência e que se constitui da seguinte forma:

> a) FATOS acumulados ao longo de seu desenvolvimento; b) HIPÓTESES, isto é, pressupostos científicos, baseados nos fatos, que são posteriormente submetidos a uma verificação experimental; c) os resultados da generalização do material real expressos, neste caso, pelas TEORIAS E LEIS MATEMÁTICAS; d) A METODOLOGIA da matemática, esta é a interpretação teórica geral das leis e teorias matemáticas, que caracterizam a abordagem geral no estudo do objeto da matemática (RÍBNIKOV, 1987, p. 9-10, *tradução nossa*).

Ao destacar os fatos acumulados no transcurso do desenvolvimento da produção da vida humana, Ríbnikov (1987, p. 10) expressa bem sua convicção materialista dialética da ciência explicando que “tais fatos acontecem no fluxo da história e respondem às necessidades de um determinado momento, bem como avançam e retrocedem nessas respostas, de acordo com sua eficácia”. A ordem histórica dos fatos varia dialeticamente em cada época, ou seja, avança, retrocede, estagna numa ordem o ser humano cria para entender a realidade.

O conhecimento geométrico ganhou uma nova face, no final do século XVIII e início do século XIX, com os estudos de Bolyai, Lobachevsky, Riemann e Gauss. Surgiram as geometrias não-euclidianas[74], que trouxeram outra maneira de conceber o conhecimento geométrico. Nesse cenário, Lobachevsky[75] também foi uma referência para a visão materialista

---

[74] O primeiro registro sobre Geometria Não-Euclidiana ocorreu em 1826 com a Geometria Hiperbólica, quando Lobachevsky, apresentou vários teoremas sobre este assunto que chamou de Geometria Imaginária, entretanto, o nascimento oficial dessa Geometria ocorreu três anos mais tarde, em 1829, com a publicação do artigo sobre os Princípios da Geometria, de Lobachevsky, no Kasan Messenger (BOYER, 2003, p. 85).

[75] Entre os matemáticos citados, o que mais se dedicou e acreditou na Geometria diferente da Euclidiana, foi Lobachevsky. Durante vinte anos se dedicou e escreveu três exposições completas, sendo a mais importante

dialética sobre a existência do objeto da matemática, especialmente da geometria, pois entendia sua concepção mediante às relações entre a matéria e a consciência. Esse autor corrobora a ideia defendida por Candiotto[76] (2016, p. 166), em sua tese *Crítica da razão matemática: Uma análise do objeto da Geometria*, de que o objeto da geometria[77] não é inerente à realidade física, tampouco uma forma *a priori* da sensibilidade.

Kopnin (1978, p. 131-132) apresenta a ideia de atividade representativa, destacando a imprescindível relação da representação humana com a realidade material como o reflexo das formas físicas. Enquanto isso, Candiotto (2016) evidencia os aspectos dessa atividade em relação à geometria descrevendo o que acontece quando o homem começa a reconhecer as formas como propriedade da matéria e passa a transformá-las e aperfeiçoá-las:

> Ele percebe as possibilidades de abstração das formas consideradas em si mesmas. Há, portanto, uma passagem da ideia de que o objeto da Geometria é constitutivo da realidade física à ideia de que ele constitui uma abstração. Com isso, há um mútuo aperfeiçoamento: do trabalho e da sua capacidade de abstração da geometria da realidade física. Somente com um enorme tempo de experiência prática e observação das regularidades físicas, o homem realizou esses aperfeiçoamentos. No atual estágio de desenvolvimento, elaboramos abstratamente os conceitos geométricos sem necessariamente ter que fazer todas as observações para chegar a uma generalização. De início, deparamo-nos com conceitos generalizados que nos permitem a compreensão das suas singularidades físicas (CANDIOTTO, 2016, p. 169).

Interessa-nos destacar ainda que, segundo Candiotto (2016, p. 171), a geometria é uma ciência da natureza, tomada desde o ponto de vista abstrato. Esse autor diz que a geometria euclidiana não foi ultrapassada, apenas superada por incorporação. Nos domínios pequenos, ela é efetiva e reflete a realidade física em questão. No entanto, não é universal como se pensava desde o seu surgimento, mas trata-se de um caso singular de outras geometrias[78] que constituem o espaço físico.

---

lançada em 1855 com o título Pangeometria, conhecida atualmente por Geometria Lobachevsky (COUTINHO, 2001, p. 34).

[76] A interrelação do homem com a realidade material promove o reflexo das formas físicas, próprias à matéria, em sua consciência. Ela não brota da própria consciência em um processo especulativo puramente abstrato. O critério de verdade do conhecimento geométrico é a própria realidade física, porém estabelecido mediante uma necessária generalização das propriedades dos respectivos objetos físicos que formam seus conceitos (CANDIOTTO, 2016, p. 166-167).

[77] O objeto da Geometria possui a propriedade de ser uma abstração e não encerra qualquer propriedade física. Com isso, não estamos afirmando que a Geometria é independente da realidade física, mas tão somente que seu objeto não é físico. Em contrapartida, também não concebemos a Geometria como uma pura abstração que não seja reflexo da realidade física (CANDIOTTO, 2016, p. 168).

[78] A Geometria de Lobachevsky também se revelou um caso singular com o desenvolvimento da Geometria de Riemann, nascida como síntese de três ideias: a possibilidade de uma Geometria diferente da desenvolvida por Euclides, o conceito de Geometria intrínseca a uma superfície e o conceito de espaços de n dimensões (ALEKSANDROV, 1991b, p. 202, *tradução nossa*).

Enfim, o materialismo dialético representa nossa posição sobre a relação entre a matéria e a consciência e sobre a concepção do objeto da matemática como reflexo do desenvolvimento da realidade material no ininterrupto movimento da consciência para entendê-la. Nessa perspectiva, a dialética materialista concebe a movimento da consciência na apreensão da realidade material.

2.1.2 A formação das abstrações matemáticas

O processo de abstração que envolve o pensamento matemático costuma ser definido como o ato de extrair uma relação pura a partir da qual desenvolve-se provas rigorosas. Essa relação "privilegia determinado aspecto do ente ou do conceito em tela, deixando outros em segundo plano e procurando levar em conta apenas aquilo que para o desenvolvimento da prova analítica importa" (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 99). Mas, no âmbito das questões que estão sendo discutidas neste capítulo e que estão na fronteira entre a matemática e a filosofia, nossa reflexão sobre esse conceito tem o comprometimento de aprofundar a compreensão da relação entre a matemática e a realidade física através do corpo humano, incluindo aí sua consciência.

Isso requer um novo olhar sobre as abstrações matemáticas e a sua função no processo de conhecimento da realidade uma vez que os conceitos matemáticos alcançaram e prometem alcançar patamares cada vez mais elevados de abstração e, por conseguinte, de interpretação da realidade material. Trazemos uma abordagem sobre os sentidos e a abstração a partir de Monteiro (2009), com base em Michel Serres e Isabelle Stengers, que relaciona a construção de abstrações matemáticas ao corpo humano. Monteiro (2009, p. 65) diz que "o corpo que sente, que é afetado, é o mesmo que constrói as abstrações matemáticas, não por exclusão, mas por extensão, por potencialização". Esclarecendo essa colocação, o autor ainda comenta:

> O que podemos perceber é que o olhar é um aliado do tato. Não é o abandono do corpo que nos capacita à abstração, mas, ao contrário, ao acrescentarmos mais elementos ao próprio tato, é possível estabelecer relações que antes seriam impossíveis apenas pelo tato. Neste sentido, a abstração não se contrapõe à prática, nem mesmo à experiência, mas é impossível sem estas (MONTEIRO, 2009, p. 65).

Sobre esse assunto, podemos obter maiores elucidações com Serres (2005). Esse autor nos define a universalidade antes de apresentar sua ideia de abstração. Vamos à definição:

> Seguir rumo a um ponto comum (*versus*) para que seja formado um conjunto único (*unus*). Um campo de forças, um cardume de peixes, um bando de patos ou uma divisão de infantaria que seguem na mesma direção, cada um de seus

> elementos em posição paralela ao outro. Da mesma forma, num estado sistêmico tudo se deduz de um princípio (SERRES, 2005, p. 229).

A partir da colocação de Serres (2005), Monteiro (2009) comenta que a universalidade não está fora das relações mundanas. Pelo contrário, se constitui a partir do que podemos pensar como processos, nos quais o que está em jogo é menos as partes que compõem o todo e mais a própria totalidade, que não é constituída desde sempre, mas que se faz, se constrói, necessita o tempo todo de estabilizações posteriores.

Em outras palavras, essa universalidade[79] não se apresenta como algo estanque, mas como "construções que, devido ao seu direcionamento, se apresentam sempre como totalizações incompletas" (MONTEIRO, 2009, p. 62). Nessa perspectiva, a universalidade não se apresenta de forma *a priori*, ou seja, ela não se encontra antes das relações, mas na convergência de muitos atores.

Nesse mesmo caminho, a abstração não se apresenta como algo dado, mas como algo que se constitui como instrumento. Stengers (2002) nos diz: "abstração não é o produto de uma 'maneira abstrata de ver as coisas'. Ela diz respeito à invenção de uma prática experimental que 'cria' um fato que singulariza uma classe de fenômenos entre outros" (STENGERS, 2002, p. 107).

Nesse sentido, Monteiro (2009, p. 63) chama nossa atenção para o fato de que, em nenhum momento, Stengers (2002) considerou a abstração como algo que se constitui *fora* do corpo, como se ela pudesse ser pensada como uma característica *pura* do pensamento, ou seja, as diferenças entre aquilo que percebemos e aquilo que pensamos não são de *natureza*, mas, de relação. Assim Stengers completa:

> Quando falamos de "representação científica abstrata" referimo-nos com excessiva freqüência a uma noção geral da abstração, comum, por exemplo, à física e às matemáticas. Ora, a abstração traduz aqui não um procedimento geral, mas um acontecimento: o triunfo local, condicional e seletivo sobre o ceticismo (STENGERS, 2002, p. 107).

A partir do que foi dito acima, podemos refletir sobre a abstração considerando que ela não ocorre sem o corpo. No texto a seguir, Serres (1990) continua nos mostrando tal relação, a qual Monteiro (2009, p. 64) chama de a *astúcia da razão*[80], que seria relacionar o corpo com

[79] A universalidade deve ser produzida, deve organizar determinados atores de forma a estabelecer um contrato. No sentido de Serres, um contrato que leve em consideração também as coisas, um contrato natural que não se abstenha nem das relações entre humanos, nem das relações entre as coisas (MONTEIRO, 2009, p. 62).

[80] Ao invés de considerarmos o "tribunal da razão", de pensar a razão como um "investigador", nos é mais produtivo pensar a razão desta maneira: como astuciosa. [...] Ao invés de julgar, buscamos pensar como as conexões entre atores heterogêneos são capazes de produzir novas alianças. Tais alianças, por sua vez, constituem novas relações que, ao se estabelecerem, tanto modificam quanto fortalecem seus componentes (MONTEIRO, 2009, p. 64).

aquilo que escapa ao alcance da medida corporal, ou seja, estabelecer escalas comparativas de medida:

> A medida, a agrimensura, diretas ou imediatas, são operações de aplicação. [...] Na grande maioria das vezes, no sentido de a medida ser o essencial da aplicação. Mas sobretudo no sentido do tato. [...] A medida imediata ou direta é possível ou impossível de acordo com a possibilidade ou impossibilidade desta aplicação. Desse modo, o inacessível é aquilo que não posso tocar, sobre o qual não posso transpor minha régua e sobre o qual a unidade não pode ser aplicada. É preciso, digamos, passar da prática à teoria, através de uma astúcia da razão, imaginar um substituto desses comprimentos que meu corpo não consegue alcançar, a pirâmide, o Sol, o navio no horizonte, a outra margem do rio. A matemática seria o circuito destas astúcias. [...] O circuito consiste, enfim, na passagem do tato à visão, da medida por aplicação à medida por visada. Neste caso, teorizar é ver, como bem diz a língua grega. A visão é um tato sem contato. (...) O inacessível é, às vezes, acessível à vista. [...]Que eu saiba, mesmo para os objetos acessíveis, a vista por si só pode assegurar-me que a régua-regra é fielmente aplicada sobre a coisa (SERRES, 1990, p. 38-39).

A relação entre o tato e o olhar se dá na medida em que o olhar já constrói relações e estipula diferenças de escala. Há, como Monteiro (2009, p. 64-65) nos faz perceber, uma potencialização dos sentidos e não um enfraquecimento desses, pois o olhar se revela como potência do tato e não como substituto deste. É o tato que pode alcançar o inatingível, não é o olhar que julga a importância das coisas. Ao contrário do que se possa pensar, o olhar produz a potência do tato.

Aleksandrov (1991a) coloca outras indagações que são fundamentais para explorarmos esse tema, tentarmos organizar as ideias sobre a relação da matemática com a realidade física e construirmos os argumentos em prol de sua natureza humana:

> O que esses conceitos matemáticos abstratos refletem? Em outras palavras, qual é o verdadeiro objeto da matemática? Por que os resultados abstratos da matemática parecem tão convincentes e seus conceitos iniciais tão óbvios? Em outras palavras, quais são os fundamentos dos métodos matemáticos? Por que, apesar de toda sua abstração, a matemática encontra aplicações tão amplas e não permanece simplesmente num jogo fútil de abstrações? Em outras palavras, como o significado da matemática é explicado? Finalmente, que forças levam a novos desenvolvimentos em matemática, permitindo que a abstração seja vinculada à amplitude de suas aplicações? Qual é a base para o seu crescimento contínuo? (ALEKSANDROV, 1991a, p. 23, *tradução nossa*).

Como resposta a estas questões, Candiotto (2016, p. 109) aborda que a matemática e suas abstrações são reflexos corrigidos da realidade, que nos fornecem apenas *formas brutas* sem lapidação intelectual. Isso significa que não encontramos na natureza formas perfeitas, isto é, a abstração permite a concepção de formas regulares próprias. Lukács (2012) completa essa reflexão afirmando que:

> De nenhuma lógica do mundo poder-se-ia obter a proposição de que a circunferência do círculo é igual a $2\pi r$. Por outro lado, tais proposições não precisam ser corroboradas na realidade física. Ao contrário, a geometria espelha uma realidade reduzida a pura espacialidade e, portanto, homogeneizada, investigando nesse meio homogêneo as conexões legais de configurações puramente espaciais. Essa homogeneização verifica-se já no fato de que as dimensões do espaço adquirem desse modo um puro ser-para-si que, na realidade física das coisas, por princípio não poderiam ter (LUKÁCS, 2012, p. 64-65).

A homogeneização citada nesse trecho é característica da abstração, particularmente, da matemática, pois lida com relações quantitativas e espaciais em forma conceitual. Candiotto (2016, p. 110) afirma que “tal característica provém da realidade material e para ela retorna na prática social humana, mas se estrutura conceitualmente de forma relativamente autônoma”. Daí Lukács (2012) confirma a relação entre o reflexo e a forma que existe na realidade física.

Deste modo, em nenhuma forma circular de objetos da natureza, encontraremos as medidas $2\pi r$, pois ela só existe na abstração do conceito de circunferência, e as possíveis aproximações feitas acontecem para satisfazer as necessidades em cada situação localizada. E mais, “todos esses triunfos da abstração razoável não alteram em nada o fato ontológico fundamental de que tanto a geometria quanto a matemática constituem espelhamentos, e não partes, nem "elementos" etc. da realidade física” (LUKÁCS, 2012, p. 65).

A possibilidade de entendimento do movimento dialético objetivo e a ampliação do campo de atuação do ser humano na modificação da realidade se dão no contexto de que, com base em Candiotto (2016, p. 101), todos os ramos da matemática – álgebra, geometria, aritmética etc. – possuem objetos de conhecimento específicos que interagem mutuamente. Esse movimento dos conceitos possibilita um dinamismo dos próprios conceitos, sobretudo da interpretação da realidade na sua própria dinâmica.

Dividimos com esse autor a ideia de que avançar na compreensão do desenvolvimento da matemática pressupõe refletir sobre a relação das verdades lógicas dessa ciência com os fenômenos reais, com as relações e formas da realidade física. Quando esse processo é marginalizado, adquire força uma concepção idealista da matemática que se fundamenta apenas em axiomas apriorísticos. Na busca do domínio da ligação da matemática com a realidade física, esse trabalho é o caminho para um sensato entendimento materialista dessa área do conhecimento.

No entanto, muitos estudiosos professam compreensões idealistas ou materialistas sem ao menos pensar nessas questões e reflexões. Por exemplo, o desenvolvimento do cálculo diferencial surgiu das necessidades da prática social humana, ou seja, do desenvolvimento da produção da vida dos homens, expressa pelas novas tecnologias, pela produção industrial etc.

Existem estudiosos que aproveitam os momentos de fragilidade intelectual da humanidade e fundamentam suas concepções idealistas mesmo que a realidade material as contrarie. O que acontece é que "mesmo uma interpretação materialista não basta, é necessário compreender a dialética[81] desse movimento" (CANDIOTTO, 2016, p. 110). Em relação ao desenvolvimento das várias áreas do cálculo, Gerdes (2008) comenta:

> Alguns cientistas explicaram os infinitesimais ou grandezas infinitamente pequenas como a existência dialéctica de contrários – ao mesmo tempo igual a zero e diferente de 0. Janovskaja chama pseudo-marxistas a estes cientistas, porque eles se esqueceram do facto de que o materialismo dialéctico não reconhece uma contradição estática (= 0 e ≠ 0), mas apenas uma contradição ligada a um movimento (GERDES, 2008, p. 42).

Outro fato que chama a atenção sobre a abstração matemática é o seu distanciamento em relação ao conteúdo numérico, que é a sua origem. No entanto, isso mostra a sua potencialidade no desenvolvimento da consciência. Para Aleksandrov (1991a), as abstrações matemáticas se caracterizam por três traços:

> Em primeiro lugar, tratam fundamentalmente de relações quantitativas e formas espaciais, abstraindo-as de todas as outras propriedades dos objetos. Segundo, elas aparecem em uma sucessão de graus de abstração crescente, indo muito mais longe nessa direção do que na abstração das outras ciências. [...] Finalmente, e isso é óbvio, a matemática como tal move-se quase completamente no campo dos conceitos abstratos e suas inter-relações. Enquanto o cientista da natureza constantemente experimenta para demonstrar suas afirmações, o matemático usa apenas raciocínios e cálculos (ALEKSANDROV, 1991a, p. 18-19, *tradução nossa*).

Além dos traços predominantes da abstração matemática, Rosental & Straks (1958) afirmam que a matemática apresenta três graus de abstração:

> Primeiro: nascimento do conceito de número (identificação de objetos, dispensando a diversidade infinita de suas qualidades individuais) e criação de símbolos numéricos, isto é, figuras. Segundo: passagem dos números concretos para o uso de letras como símbolos (passo da aritmética para a álgebra). Terceiro: eliminação não só do conteúdo numérico dos símbolos, mas também do conteúdo quantitativo concreto das operações matemáticas; Assim, por exemplo, a igualdade $a + b = b + a$ é apresentada, então, não apenas como igualdade de grandezas, mas também como vetores, como fatores cuja ordem é alterada, etc. (ROSENTAL & STRAKS, 1958, p. 308-309, *tradução nossa*).

Tanto os traços das abstrações matemática quanto seus graus não tornam essa ciência alheia à realidade física, pelo contrário, potencializam sua função na interpretação da realidade.

---

[81] A dialética do pensamento, tendo surgido da dialética da natureza, possui em consequência um caráter profundamente materialista. Cabe-nos compreender como esse movimento se traduz nos conceitos matemáticos e, particularmente, o que expressam aqueles mais abstratos. O movimento do conhecimento matemático é reflexo do movimento material (CANDIOTTO, 2016, p. 116).

Aleksandrov (1991a, p. 27, *tradução nossa*) destaca a aritmética, afirmando que “o objeto da aritmética são as relações entre números. Mas essas relações são as imagens abstratas de relações quantitativas reais entre coleções de objetos”. Com isso, esse autor evidencia o que é o conceito de número e a coleção que está sendo representada. Ele acrescenta: “assim, podemos dizer que a aritmética é a ciência das relações quantitativas reais consideradas abstratamente, isto é, simplesmente como relações” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 27, *tradução nossa*).

Aleksandrov (1991a) ainda define número[82] de maneira mais elementar, como uma relação biunívoca: “a aritmética não surge do pensamento puro, como os idealistas afirmam, mas é um reflexo das propriedades definidas das coisas reais; emerge de uma longa experiência prática de muitas gerações” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 27, *tradução nossa*). Enquanto isso, Ríbnikov (1987) aborda outros enganos idealistas sobre a aritmética:

> A abstração do objeto de matemática às vezes é percebida como um elemento independente de seu conteúdo. Em tais casos, os elementos dos conjuntos investigados são geralmente entendidos como separados dos objetos do mundo real, e os sistemas de axiomas, definições e operações são arbitrariamente introduzidos. Isso leva a mal-entendidos idealistas (RÍBNIKOV, 1987, p. 11, *tradução nossa*).

A visão idealista deforma o caráter lógico-histórico do desenvolvimento da matemática. Assim, ela adquire um caráter imutável e eterno. Acontece que sua abstração não é isolada, embora admita separação da realidade material, pois trata-se de um objeto refletido e não característico da própria realidade material. Candiotto (2016, p. 118) fortalece nossa concepção quando conclui que “essa abstração matemática é a expressão ideal do próprio movimento material da realidade”.

A matemática traz em si uma perspectiva de percepção que sempre esteve presente nos modelos e nas formas de produzir conhecimento dos seres humanos e, por princípio, nada tem a ver com quaisquer fatos da realidade, a não ser com aqueles que extrai de si própria. Lukács (2012) a fim de esclarecer como deve ser a compreensão desses objetos, adverte com justeza que:

> Por espelharem momentos importantes e fundamentais, puras relações espaciais e puras relações quantitativas respectivamente, a geometria e a matemática são excelentes instrumentos para conhecer toda a realidade cuja essência consiste de relações espaciais ou quantitativas. Mas a despeito de todos esses brilhantes resultados não se deve esquecer a singela verdade de que espelhamentos desse tipo podem espelhar somente determinados

[82] A quantidade de objetos de uma coleção é uma propriedade da mesma, porém o número abstrato que representa as relações entre as várias coleções com a mesma quantidade de objetos é uma propriedade da abstração matemática (ALEKSANDROV, 1991a, p. 27, *tradução nossa*).

> momentos da realidade, enquanto a realidade existente em si possui uma infinidade de outros componentes (LUKÁCS, 2012, p. 65-66).

Aleksandrov (1991a, p. 42, *tradução nossa*) acrescenta que “as propriedades dos conceitos geométricos, como os próprios conceitos, são abstraídas do mundo que nos rodeia. Foi necessário que os homens desenhassem muitas linhas retas antes de considerarem um axioma em que é sempre possível traçar uma linha reta através de dois pontos distintos”. A falta de compreensão da especificidade do caráter abstrato da matemática leva a deformações idealistas do seu objeto. Ríbnikov (1987, p. 11, *tradução nossa*) contribui afirmando que “uma correta compreensão materialista do objeto da matemática e do conhecimento de sua história é uma condição necessária para uma compreensão profunda do lugar dessa ciência na atividade produtiva e social dos homens”.

2.2 Razão e experiência na gênese da matemática

Há aproximadamente 5 milhões de anos a.C., na chamada Idade da Pedra, os povos já tinham a percepção de quantidade ao realizarem suas atividades de sobrevivência, como a caça e a colheita de raízes e frutas. A isso, o historiador matemático Tobias Dantzig chamou de senso numérico[83]. O homem baseava-se em saber a quantidade de pessoas em uma tribo e a quantidade de animais em seus rebanhos utilizando os dedos das mãos, arranhaduras em barro ou pedras e nós em corda. A relação do ser humano com as quantidades ainda não se estabelecia por meio de uma abstração, mas por uma espécie de sentido qualitativo que se referia à capacidade de distinguir entre o muito e o pouco.

O surgimento e o desenvolvimento da matemática se deram no contexto da história do ser humano desde quando ele se defrontou com a necessidade de contar, registrar e controlar as quantidades das coisas ainda no período de coleta e caça até desenvolver a agricultura e a pecuária. Ao se ocupar dessas atividades e das consequentes dificuldades em grande parte do tempo, o homem foi pensando e criando instrumentos em função da resolução de problemas e do progresso de tais ações. Entre as formas de pensamento elaboradas nesses processos, estava

[83] O homem, mesmo nas mais baixas etapas de seu desenvolvimento, possui a faculdade que, por falta de um nome melhor, chamarei de senso numérico. Essa faculdade permite-lhe reconhecer que alguma coisa mudou numa pequena coleção quando, sem seu conhecimento direto, um objeto foi retirado ou adicionado à coleção. O senso numérico não deve ser confundido com contagem que, provavelmente, é muito posterior, e que envolve, como veremos, um processo mental bastante intrincado. A contagem, pelo que sabemos, é um atributo exclusivamente humano, apesar de que algumas espécies irracionais parecem possuir um senso numérico semelhante ao nosso (DANTZIG, 1970, p. 45).

a ideia de número, que passou a fazer parte de seus instrumentos para tentar entender o mundo e a si mesmo.

O conhecimento faz-se sempre através de perspectivas humanas e, segundo Ribeiro (2013, p. 190), “a construção científica do mundo é a união de reflexão abstrata e de atividade empírica, de pensamento e de experimentação”. Com essa afirmação, a autora pretende mostrar que algumas das dicotomias tradicionais da filosofia, como a dicotomia entre o racionalismo e o empirismo, estão ultrapassadas. E mais, “os nossos conceitos e a nossa linguagem não agem como constrições rígidas que nos impedem o acesso ao mundo; pelo contrário, são formados através do nosso contato com uma parte desse mundo e este corrige-os quando necessário” (RIBEIRO, 2013, p. 192).

Deste modo, a natureza do conhecimento matemático não é puramente uma questão epistemológica abstrata, mas sim uma questão sobre a atividade matemática, que é, em última análise, sobre a história da matemática. A matemática não é um conhecimento naturalizado e inquestionável, muito menos autoritário e desligado da vida... ela é uma experiência humana. É possível perceber isso acompanhando a rota histórica de sua construção, na qual conceitos e entidades foram concebidos como resposta a situações particulares para atender questões existenciais e, até mesmo, determinadas configurações de poder de algum lugar e tempo. Deve-se, a partir disso, aceitar cada lógica, cada linguagem da matemática e reconhecer todos os seus tipos de expressão.

Então, considerando a matemática como uma experiência humana, entender o fazer matemático requer buscar também algum entendimento sobre esse ser do qual a única certeza que se tem é a sua morte. A nosso ver, sua melhor definição é dada na trilogia *Do Tempo o que se diz* (KUBRUSLY, 2012), *O Zero como Espelho do Mundo: a matemática como ordenadora de todas as coisas* (KUBRUSLY, 2012a) e *Costurando uma fita na cabeça. Um ensaio sobre a invenção da Pessoa* (KUBRUSLY, 2013). Aí o homem é definido como um complexo não orientável que mantém uma permanente identificação exterior-interior e que tem costurada em seu corpo uma *Faixa de Mobius*[84]. Com maiores detalhes, Kubrusly (2014) explica como se dá a relação entre essa fita e a existência de um ser humanizado:

> É a torção (uma semi-torção) desta faixa-banda que o aperta e liberta que nos põem em movimento. É por ela que nos misturamos e dançamos aos deuses e é com ela que pensamos nossas ciências, artes e religiões. Dela extraímos nossas ideias, modelos e tragédias. Este ser continuamente mobiusiano, não necessariamente carbônico tem sua humanidade constituída não pelo arranjo estrutural de seus componentes, mas pela topologia não orientável que liga

[84] Superfície topologicamente não orientável. Também conhecida como fita ou banda. Sobre o assunto, ver: http://pt.wikipedia.org/wiki/Fita_de_M%C3%B6bius. Acesso em 24 de março de 2019.

> interior-exterior. Este ser humanizado ligando seu interior ao cosmo torna-se memória e motor de um mundo para sempre misterioso. A máquina humanizada é tão possível quanto o homem-máquina e esse encontro que une tecnologia e humanidade está, há tempos, em curso (KUBRUSLY, 2014, p. 12).

A propriedade que nos torna o que somos, como queria Nietzche, é sermos seres "costurados" por uma *Faixa de Mobius* na cabeça (KUBRUSLY, 2012a, 2013). "É a propriedade topológica da *não-orientabilidade* que nos faz humano. Humano é todo ser que gera ou é gerado por uma topologia que identifica interior e exterior. É a não-orientabilidade que define e estrutura o humano em nós e fora de nós" (KUBRUSLY, 2014, p. 1).

Mesmo diante de um ser de natureza tão complexa, Kubrusly (2014, p. 5) nos chama a atenção para o fato de que "não importa de que somos feitos, mas o quanto de mágico existimos"[85]. É esse ser mágico costurado topologicamente que é capaz de idealizar e criar um mundo como um universo de totalidade que tudo guarda e contém. Kubrusly (2014) define esse mundo como lógico matemático:

> Ao pegarmos uma proposição (esses são os habitantes no mundo das palavras) e ao evidenciarmos essa proposição, inviabilizamos o resto que torna a aparecer quando essa mesma proposição é por nós, que a analisamos, negada. Nesse jogo de saber-se que há, para nossa segurança, um universo que tudo contém e que, por isso, torna conhecível todo e qualquer desconhecido é que construímos nossas matemáticas. É essa possibilidade de controlarmos, por possibilidade de conhecimento, tudo o que escapa à proposição analisada que nos permite a construção de lógicas articuladas por dupla negação; quando a negação da negação de uma proposição volta sempre a proposição inicial. Assim são feitas as matemáticas que se querem inferentes e as físicas que se querem modelantes. Essas são as lógicas determinantes que se alastram pelo mundo e modelam todas as coisas que existem deixando de fora, felizmente, o que não existindo, desiste e que é o tudo que interessa (KUBRUSLY, 2014, p. 7).

Assim, a matemática pode ser considerada como um exercício humano para o alcance de novos limites e o controle da realidade através da busca de compreensão do infinito embora, segundo Kubrusly[86], "o limite sonhado que se move sempre para além do entendimento, este ficará ainda por ser desvendado. O infinito, necessário e implacável, que não se revelará pela física e seus quanta, mas pela razão e arte dos matemáticos e dos poetas, que sem laboratório e utilidade vivem de ser plena busca".

---

[85] Nós, que morremos e que sabemos disso, vivendo estranhamente misturando natureza e cultura, identificamos, permanentemente, interior-exterior, construindo um universo completo dentro de nossas cabeças, ou melhor, do corpo que trazemos e que gera tudo o que somos ou sentimos. Nosso corpo é o universo que nos cerca (KUBRUSLY, 2013, p. 6).

[86] "Matemática para Poetas", p. 2. Disponível em < www.dmm.im.ufrj.br/~risk/pdf/Gazeta.pdf>.

Daí o uso da razão humana parece estar ligado à busca da descoberta do sentido das coisas do mundo e da existência do homem. Feita essa colocação, chegamos ao ponto de começarmos a falar como a razão tenta estabelecer um conhecimento significativo sobre o mundo e cria mecanismos para decifrar algum tipo de padrão ou regularidade que possa traduzir como se dá o funcionamento das leis do universo. Ao esforço da razão humana em associar, relacionar e ordenar o mundo percebido à sua volta, chamamos de racionalidade, ou melhor, racionalidades, como propõe Chaitin (2009):

> As racionalidades são como "sistemas produtores de verdades e significados" que resultam da combinação, associação e ordenamento realizados pela razão humana que, de alguma maneira, assume – se não a possibilidade de encontrar um ordenamento existente - pelo menos a possibilidade de criar algum ordenamento com significado do mundo que percebe-organiza-decifra (CHAITIN, 2009, p. 94).

Então, acreditando que a racionalidade[87] humana pode assumir diferentes formas e, a partir disso, se manifestar de diversas maneiras através dos saberes que buscam um sentido explicativo ao mundo que se percebe e é organizado pela experiência e pelo uso da razão humana, Chaitin (2009, p. 10) diz que "cada saber é justificado nos termos da sua própria racionalidade e se constitui na sua própria rede conceitual imersa numa forma de vida". A autora destaca que todos os saberes, as ciências inclusive, "são formados por e formadores de alguma racionalidade, algum conjunto de regras formado e reformado na prática desse saber" (CHAITIN, 2009, p. 10).

Nesse sentido, a matemática, enquanto conhecimento, não é uma verdade absoluta, mas uma entre tantas formas de expressão humana. Ela é um dos diferentes saberes que surge a partir das diversas formas de racionalidade que a razão, dotada de criatividade, é capaz de organizar as respectivas visões de mundo e formas de vida observadas na humanidade. Como não existe um conjunto de regras que seja neutro a todos os saberes e capaz de, externamente, julgar as racionalidades, ou a maior proximidade delas com a realidade, também não existe a possibilidade de a matemática ser um modelo ideal de conhecimento sobre essa realidade, sendo considerada superior aos demais saberes. É nesse contexto que pretendemos inserir a matemática para refletir sobre a sua função no cenário do conhecimento.

[87] Por compreender a racionalidade como um conjunto de regras e requisitos de legitimação que se formam e reformam na prática, juntamente com o saber a que se referem. a racionalidade é empregada como um critério de justificação ou de legitimação, seja de saberes, discursos, ações e visões de mundo, incluindo as diferentes concepções dos sujeitos que vivenciam esses mundos [...] a racionalidade não se vê fixa, única, universal e predeterminada e sim como um conjunto variável de regras e critérios específicos de justificação e legitimação de cada um dos saberes, discursos, ações e visões de mundo criados e postos em prática pela humanidade (CHAITIN, 2009, p. 17).

De maneira a evidenciar essa ideia, Chaitin (2009, p. 25) explica que cada saber estabelece a sua própria métrica interna de justificação, “que confere parâmetros e medidas às regras de cada jogo de conhecimento, e também às suas regras de validação no tocante às práticas que relacionam este saber com o ‘real’, com o nível ontológico ao qual este saber se refere”.

Com certeza, esse olhar enriquece as discussões filosóficas sobre o conhecimento matemático, pois a ideia de múltiplas racionalidades sobre a noção de conhecimento abre espaço para entender a matemática como mais um critério de justificação ou de legitimação de visões de mundo, incluindo as diversas concepções dos indivíduos que vivenciam esses mundos. Chaitin (2009, p. 17) ainda explica que, sob esse enfoque, “a racionalidade não se vê fixa, única, universal e sim como um conjunto variável de regras e critérios específicos de justificação e legitimação de cada um dos saberes, discursos, ações e visões de mundo criados e postos em prática pela humanidade”.

2.2.1 A racionalidade humana e a matemática

A apreciação da ideia de vários usos da razão, através de suas racionalidades, nos permite seguir para o tratamento de outro importante conceito, gerado na prática das diferentes formas de vida e que dá sentido a todas essas articulações entre razão e experiência humana: o sujeito e a verdade. Então, abordamos agora como a relação entre sujeito e verdade é estabelecida diante das múltiplas racionalidades que a compõe para trazer outras considerações sobre a matemática a partir da concepção de uma racionalidade plural.

A racionalidade que fundamenta a matemática é estabelecida dentro de um contexto que reconhece a existência de uma racionalidade plural, ou seja, de diferentes usos da razão, que permite admitir a racionalidade humana a saberes que costumam ser considerados irracionais. Segundo Chaitin (2009, p. 82), “os saberes que não atendem às regras de racionalidade herdadas da tradição grega platônico-aristotélica são considerados irracionais e por isso chamados extra científicos. Então científico e racional se relacionam diretamente, estabelecendo ainda um vínculo com o real”.

A partir daí, essa autora propõe uma epistemologia pluralista[88] que procura alcançar todos os sentidos do cenário das possibilidades da razão humana e recuperar o sentido racional

[88] Ao invés de bipartir o cenário entre racional-irracional, a epistemologia pluralista se dispõe a estudar a partição que comumente se considera irracional e epistemicamente amorfo. Novamente, percebe-se aqui a assimetria epistêmica entre os saberes, uma vez que cada saber só pode julgar a sua própria relação com o “real” percebido

desses saberes considerados irracionais, pois "não faz sentido considerar este ou aquele saber racional e outro irracional; cada um atende à sua forma de racionalidade com suas regras e seus princípios praticados em alguma forma de vida" (CHAITIN, 2009, p. 85).

Essa epistemologia caracteriza todos os saberes[89] a partir de suas racionalidades, e esse olhar nos permite entender a matemática como um saber fruto da racionalidade humana científica, que busca estabelecer uma regra sobre o *real*, mas não única, nem a universal e nem uma espécie de racionalidade predeterminada. Além disso, não existe um conjunto de regras, fora do cenário comum a todos os saberes, capaz de estabelecer um julgamento sobre eles e definir quais deles são racionais ou irracionais ou qual é o mais racional de todos.

Laudan (1996, p. 133) diz que "a racionalidade depende de contextos, valores, objetivos, épocas e visões de mundo". Essa revelação explicita que a sua concepção de racionalidade se assemelha à ideia do segundo Wittgenstein, adotada por Chaitin (2009, p. 89), para compor "sua epistemologia pluralista e permeável", que também adotamos para propor que a matemática é uma visão de mundo em particular. Wittgenstein (1999) emprega uma ideia de racionalidade entendida como justificação contextualizada que significa: justificação em sua forma de vida, seus jogos de linguagem e suas regras de uso.

Badiou (2002) fundamenta a teoria da epistemologia pluralista de Chaitin (2009) sustentando que as relações entre o sujeito e seus processos de verdade abrigam as diferentes verdades dos diversos saberes em suas devidas racionalidades e que tais relações se iniciam nas formas de vida dos indivíduos que os promovem[90].

Chaitin (2009, p. 118) explica que sua ideia é de "uma verdade que se compreende como um 'processo real' em que eventos indecidíveis são fixados por um sujeito, ou seja, eventos que não são auto evidentes, mas que precisam ser instaurados como tal para que se dê partida ao 'processo de verdade' decorrente desses eventos fixados". Alguns exemplos são os axiomas na lógica e na matemática e os dogmas nas religiões.

---

conforme as suas próprias regras de racionalidade e a sua própria métrica. Ao julgar-se os demais saberes com as regras que a epistemologia tradicionalmente atribui às ciências, incorre-se no equívoco de empregar regras de racionalidade que não se aplicam saberes extra científicos. Tal procedimento só se justifica se for feita uma escolha de um dado conjunto de regras de conhecimento a ser aplicado sobre todos os demais, uma vez que não há (CHAITIN, 2009, p. 25).

[89] Entende-se por saber um jogo de conhecimento imerso numa visão de mundo, ou seja, um saber é o conjunto de regras de racionalidade e sua rede conceitual que confere um sentido explicativo ao mundo percebido e organizado pela experiência e pela razão humana. Uma vez que as regras de racionalidade emergem e subjazem ao desenvolvimento do saber em que se constituem, configura-se a assimetria epistêmica entre os diferentes saberes, ou seja, cada saber constitui e é regulado por suas próprias medidas (CHAITIN, 2009, p. 40).

[90] Dessa forma, o sujeito de Badiou (2002) pode dar partida a quaisquer processos de verdade, inclusive ao processo da verdade clássica do verdadeiro-ou-falso juízo ou sentença (CHAITIN, 2009, p. 118).

O que pretendemos nessa tese com a adoção da concepção de epistemologia pluralista e permeável de Chaitin[91] (2009) é a abertura para uma reflexão sobre a clássica oposição racional-irracional. Esse critério coloca a matemática numa posição privilegiada em relação aos demais saberes, por isso a necessidade de uma melhor compreensão sobre a racionalidade científica e o percurso das ideias matemáticas. Precisamos estudar as interações entre os saberes, enfatizando que existem várias possibilidades de moldá-los em suas racionalidades, e que, por esse motivo, a matemática não deve ser vista como algo tão distinto e notável, mas apenas como uma expressão do ser humano. Nesse sentido, conseguimos ampliar nossa visão e enxergar que o mundo deve ser visto de uma maneira unificada, com os saberes conversando num mesmo lugar.

O detalhe mais relevante desse conceito é a contribuição deste tipo de estudo para que aspectos epistemológicos atribuídos ao conhecimento produzido por cientistas, como objetividade, neutralidade, racionalidade, universalidade, veracidade, entre outros, possam ser, de fato, esclarecidos. Realizar um estudo sobre a matemática por esse enfoque permite reconhecer seus diversos aspectos, como epistêmico, psicológico, social, antropológico, político e cultural, entendendo que cada um deles se constitui num contexto estabelecido tanto pelo uso da razão quanto pelas contingências individuais, sociais, antropológicas, políticas e culturais. Segundo Chaitin (2009, p. 20), por esse motivo, “cada um desses aspectos toma forma de maneira sobreposta, sugerindo um atravessamento entre as disciplinas que tradicionalmente estudam estes aspectos e, portanto, a recomendação de um enfoque transdisciplinar”.

2.2.2 A matemática a partir da experiência sensível

Tradicionalmente, costuma-se admitir que a matemática é, por natureza, um conhecimento puramente racional. Isso quer dizer que, das potencialidades do ser humano, a única responsável pelo conhecimento matemático é a razão *pura*. Para Cifuentes (2002, p. 1), essa tradição baseia-se na tese platônico-cartesiana de que “os objetos matemáticos são ideias desligadas de toda experiência sensível e que a verdade matemática se acede pela razão”.

[91] O conceito plural de racionalidade não tem como propósito apenas relativizar as racionalidades e os saberes, mas, acima de tudo, buscar as suas “semelhanças epistêmicas estruturais e processuais” ou a sua “caracterização epistêmica em aspectos comuns” no sentido de buscar identificar e compreender as interações entre os saberes, todos compreendidos como tentativas da razão associada à experiência (CHAITIN, 2009, p. 137).

Um conhecimento centrado na razão *pura*[92] se mostra livre da interferência dos sentidos e sentimentos humanos. Entretanto, como é possível o corpo humano entrar em contato com o mundo sem os sentidos? Na nossa concepção, a razão precisa ser revertida numa ideia mais ampla, na qual os dados sensíveis sejam levados em conta, possibilitando conhecimentos mais abrangentes.

Conforme Kujawski (1988, p. 120), "a razão pura não foi feita para entender a vida". Para tanto, faz-se necessário a contribuição daqueles saberes ampliados provenientes de nossa sensibilidade maior. E Touraine (1994, p. 223) destaca uma importante concepção a respeito da razão: "Max Horkheimer formulou uma das idéias mais profundas deste século quando escreveu: 'A razão não basta para defender a razão'...".

Daí refletindo sobre o *Sentido*, cogitamos que é uma palavra que beira o poético com sua variedade de significados[93]. Deixando de lado certos empregos, como o caso de mágoa ou de comando militar, vejamos os significados que vão ao encontro das reflexões a serem desenvolvidas nesse subitem. Nesse caso, cinco deles merecem destaque e são comentados por Duarte Júnior (2000) em sua tese *O sentido dos sentidos: A educação (do) sensível*:

> O primeiro se refere ao uso do termo para denotar consciência, como em "perdi os sentidos". O segundo, indica uma lógica, uma razão de ser: "qual o sentido disso?" O terceiro, diz respeito a uma orientação, a uma direção: "em que sentido devo seguir?" E, por fim, o quarto e o quinto remetem à nossa percepção do mundo, numa referência aos "órgãos dos sentidos" e também àquela faculdade que, supõe-se, possuímos e os transcenda: nosso "sexto sentido", que aponta uma intuitiva capacidade de conhecer. Mas é preciso ainda tomar o termo enquanto particípio passado do verbo sentir, indicativo de tudo o que foi apreendido pelo nosso corpo de modo direto, sensível, sem passar pelos meandros do pensamento e da reflexão (DUARTE JÚNIOR, 2000, p. 13).

Assim, a palavra *sentido* admite um número significativo de referências à capacidade humana de apreender a realidade que, segundo Duarte Júnior (2000, p. 13), acontece de modo consciente, sensível, organizado e direcionado, ou seja: "tudo aquilo que é imediatamente acessível a nós através dos órgãos dos sentidos, tudo aquilo captado de maneira sensível pelo corpo, já carrega em si uma organização, um significado, um sentido".

Nesse contexto, acreditamos que a matemática pode ser considerada como uma forma de percepção, de sensação, imbuída de particularidade e de singularidade, que se revela na

---

[92] Uma razão que se quer "pura", que se pretende não contaminada por tudo aquilo que o cientista acredita consistir em "tropeços no caminho do conhecimento", feito os valores e a nossa dimensão sensível (DUARTE JÚNIOR, 2000, p. 17).

[93] Segundo o Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa, o termo *sentido* possui dezoito significações, afora algumas mais, advindas de expressões compostas com outras palavras (Aurélio Buarque de Holanda Ferreira, 2a ed. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1986).

criatividade da expressão humana. Consideremos também a matemática como um mundo (criado) particular, que pode ser chamado de imaginário e inventado, mas que, na sua expressão, recria a percepção e a sensação desse mundo.

Sem dúvida, “há um saber sensível, inelutável, primitivo, fundador de todos os demais conhecimentos, por mais abstratos que estes sejam; um saber direto, corporal, anterior às representações simbólicas que permitem os nossos processos de raciocínio e reflexão” (DUARTE JÚNIOR, 2000, p. 14). É sobre essa sabedoria primordial que devemos voltar nossa atenção se queremos refletir acerca das bases sobre as quais repousam toda e qualquer forma de conhecimento, especialmente sobre a matemática. Merleau-Ponty (1971) completa essa ideia dizendo que:

> Tudo o que sei do mundo, mesmo devido à ciência, o sei a partir de minha visão pessoal ou de uma experiência do mundo sem a qual os símbolos da ciência nada significariam. Todo o universo da ciência é construído sobre o mundo vivido, e se quisermos pensar na própria ciência com rigor, apreciar exatamente o seu sentido e seu alcance, convém despertarmos primeiramente esta experiência do mundo da qual ela é expressão segunda. (...) Retornar às coisas mesmas é retornar a este mundo antes do conhecimento cujo conhecimento fala sempre, e com respeito ao qual toda determinação científica é abstrata, representativa e dependente, como a geografia com relação à paisagem onde aprendemos primeiramente o que é uma floresta, um campo, um rio (MERLEAU-PONTY, 1971, p. 6-7).

Trabalhamos com a ideia de que, através de nossa sensibilidade e de nossa percepção, compreendemos as mais diversas qualidades do real que estão ao nosso redor: sons. Duarte Júnior (2000, p. 14) explica que, de pronto e ao longo da vida, aprenderemos sempre com o *mundo vivido*, “numa miríade de impressões que o corpo ordena, na construção do sentido primeiro. O mundo, antes de ser tomado como matéria inteligível, surge a nós como objeto sensível”.

Completando esse raciocínio, Abbagnano (1998, p. 840) diz que o sensível é “aquilo que pode ser percebido pelos sentidos. Nesta acepção, ‘o sensível’ é o objeto próprio do conhecimento sensível, assim como o ‘inteligível’ é o objeto próprio do conhecimento intelectivo”. Esse autor ainda comenta a importância de o saber sensível e o conhecimento intelectivo se complementarem:

> Aqueles que estão acostumados a julgar pelo sentimento não entendem nada das coisas do raciocínio porque querem desvendar imediatamente a questão com uma olhada e não estão acostumados a procurar os princípios. E os outros, pelo contrário, que estão acostumados a raciocinar por princípios, não entendem nada das coisas do sentimento, porque procuram princípios e não podem atingi-los apenas com uma olhada (ABBAGNANO, 1998, p. 843).

Nesse âmbito, convém destacar o estudo de Damásio acerca do cérebro humano e da mente através de uma meticulosa percepção do que ocorre no corpo como um todo. Eis o seu comentário:

> Se o cérebro evoluiu, antes de mais nada, para garantir a sobrevivência do corpo, quando surgiram os cérebros “mentalizados”, eles começaram por ocupar-se do corpo. E, para garantir a sobrevivência do corpo da forma mais eficaz possível, a natureza, a meu ver, encontrou uma solução altamente eficiente: representar o mundo exterior em termos das modificações que produz no corpo propriamente dito, ou seja, representar o meio ambiente por meio da modificação das representações primordiais do corpo sempre que tiver lugar uma interação entre o organismo e o meio ambiente (DAMÁSIO, 1996, p. 260-261).

Isso significa que a tese de Damásio (1996) defende que a mente humana se desenvolveu com o cérebro observando as modificações — os sentimentos — que os estímulos provenientes dele produziam no corpo. Duarte Júnior (2000, p. 223) interpreta Damásio (1996) dizendo que a razão tem como ponto de partida o nosso corpo: “é a ele que devemos sempre nos referir como fundamento de qualquer processo de conhecimento da realidade. É preciso reverter esse ponto de vista que veio constituindo o esteio da concepção moderna acerca da existência humana, a dicotomia corpo/mente”.

O autor ainda explica que “os processos sensíveis à disposição de nosso corpo, os quais engendram um sentimento de existência e de se estar no mundo consistem, portanto, no saber primeiro de que nos valemos e ao qual, direta ou indiretamente, todo conhecimento outro se refere” (DUARTE JÚNIOR, 2000, p. 223). Por conseguinte, Duarte Júnior (2000, p. 224) conclui que qualquer contestação racionalista é inútil: “e os sentimentos não são nem intangíveis nem ilusórios. Eles são precisamente tão cognitivos como qualquer outra percepção. São o resultado de uma curiosa organização fisiológica que transformou o cérebro no público cativo das atividades do corpo”.

O fato de essa razão pura ter se tornado a razão por excelência, que ignora e despreza outras maneiras de se saber o mundo, é um erro que precisamos corrigir retificando o percurso de nossas ideias. Nossa discussão aponta justamente na direção de uma compreensão mais ampla da vida e do mundo, no sentido de uma razão afrouxada e mais plena das potencialidades humanas.

2.3 A face estética da matemática

Indo ao encontro da raiz grega da palavra *estética* (*aisthesis*), a encontramos como a capacidade do ser humano de sentir a si próprio e ao mundo num todo integrado. Segundo

Duarte Júnior (2000, p. 15), voltar à *aisthesis* – ou à estesia, em português – talvez seja uma volta "às coisas mesmas": "um dedicar-se ao desenvolvimento e refinamento de nossos sentidos, que nos colocam face a face com os estímulos do mundo". Nesse contexto, a sensibilidade pode interagir com a racionalidade para elaboração de uma estética da matemática.

Cifuentes (2003, p. 59 *apud* GUSMÃO, 2013, p. 9) diz que a beleza da matemática consiste na perspectiva de que "além de ser uma ciência racional, comporta também características emocionais, as quais estão ligadas com a intuição e a experiência estética". Segundo Cifuentes (2005), a emoção é uma das faculdades humanas fundamentais que, junto com a razão, é responsável pela existência do conhecimento matemático:

> Enquanto faculdade, ela é uma capacidade intelectual, pois permite a percepção e o reconhecimento de um valor e, portanto, é fonte de conhecimento, o conhecimento sensível. [...] As dimensões do pensamento matemático são permeadas pela razão e pela intuição. A aquisição do conhecimento em matemática envolve tanto lógica, razão e linguagem, quanto intuição, imaginação e sensibilidade, estas últimas estão intimamente ligadas à experiência estética (CIFUENTES, 2005, p. 56).

O estético não é apenas um olhar sobre a matemática. Confiamos que existe um conteúdo estético na matemática ligado aos métodos matemáticos como, por exemplo, os seus valores estéticos: perfeição, simetria, forma, contexto. Cifuentes (2005, p. 58) completa com "o contraste, a ordem, o equilíbrio, a simplicidade e a abstração, também a liberdade e a espontaneidade".

Esse conteúdo é oriundo de uma *experiência estética* [94] que nasce com o ato da criação, dando origem a outra experiência chamada apreciação da beleza: "em essência o ato de criação e o ato da apreciação da beleza não se distinguem. Isto é válido quer o objeto belo seja uma obra de arte, uma composição musical ou um teorema matemático" (HUNTLEY, 1985, p. 33).

Na matemática, do ponto de vista racional, dá-se pouca ênfase à intuição matemática e aos processos do pensamento ligados a ela, como "a visualização, os argumentos narrativos e indutivos, a imprecisão" (CIFUENTES, 2002, p. 1). No entanto, esses elementos contribuem para caracterizar a natureza geral do conhecimento matemático conforme a perspectiva aqui concebida, isto é, existe uma racionalidade ligada aos fenômenos da emoção, uma racionalidade

---

[94] Na matemática, a experiência estética consiste no reconhecimento da transcendentalidade de seus objetos, por exemplo, a triangularidade do triângulo. Transcender é "tirar de". A experiência estética deriva do reconhecimento dessa transcendência. A emoção não é apenas uma função biológica, é uma das faculdades humanas fundamentais, junto com a razão. Ela é uma capacidade intelectual pois é o reconhecimento de um valor e, portanto, é fonte de conhecimento, o conhecimento sensível (CIFUENTES, 2002, p. 1).

estética. Assim, Cifuentes (2002) reforça que o estético não é apenas um olhar sobre a matemática, de fato, existe um conteúdo estético na matemática:

> Para Cantor, a essência da matemática reside na sua liberdade. Em particular, o contexto dá existência espaço-temporal ao objeto, o contexto envolve uma outra concepção de espaço. Todo espaço é um contexto e também todo contexto é um espaço. Definir um conjunto, por exemplo, é criar um contexto para seus elementos (CIFUENTES, 2002, p. 2).

Esse olhar também nos leva a pensar numa proximidade da matemática com a arte. Assim como o artista, o matemático constrói mundos possíveis e inventa hipóteses imaginárias. Gusmão (2016, p. 9) nos lembra que "somos todos seres profundos com capacidades imensas para criar, imaginar, poetizar e produzir". Então, destacamos que a matemática entra nesse contexto e revela características próprias do campo da arte ao admitir, por exemplo, elementos como a intuição e a imaginação. Conforme o entendimento de Gusmão (2016, p. 2), a matemática, nessa forma alargada de compreensão, também permitiria "uma abordagem epistemológica vinda dessa epistemologia da arte, dessa poética transformada em epistemologia".

Deste modo, "a matemática como a arte, é um instrumento de registro do que se viu e se aprendeu sobre os mistérios da vida e do universo. Artistas e matemáticos são privilegiados leitores da natureza; é, pois, com a linguagem visual e a linguagem formal que complementam essa leitura" (BARTH, 2006, p. 1). A autora complementa que a matemática e a arte procuram interpretar e explicar as coisas do mundo, pois, através de suas formas e suas estruturas, ele pode ser traduzido e representado.

Cifuentes (2003, p. 61-62 *apud* GUSMÃO, 2013, p. 111) nos dá uma importante contribuição para compor os aspectos de uma estética da matemática a partir das considerações de François Le Lionnais (1965), que se apropria de categorias[95] culturais da arte, como o classicismo e o romantismo, para submeter feitos e procedimentos matemáticos.

Gusmão (2013, p. 112) nos diz que exemplos dessa característica estética da matemática, que podem ser regidos pelas leis da simplicidade, destacam-se "na simetria de uma figura, na evidência de um axioma, na 'melhor' aproximação à solução de um problema e na própria conclusão de um raciocínio por indução ou analogia".

---

[95] Classicismo caracteriza-se fundamentalmente pela elegância e a ordem, enquanto que o romantismo pela loucura e o caos. A beleza clássica unifica mostrando conexões inesperadas, enquanto que a beleza romântica desperta emoções violentas. [...] O método de demonstração por indução e o método de demonstração pelo absurdo correspondem, respectivamente, ao método de beleza clássica e de beleza romântica. O método axiomático, desenvolvido pelos gregos, é um procedimento que visa sistematizar um corpo de conhecimento e faz uso explícito, em diversos momentos, do recurso estético de simplicidade, especialmente na sua estruturação: como o simples – os axiomas – pode fundamentar o complexo – os teoremas (CIFUENTES, 2003, p. 62 *apud* GUSMÃO, 2013, p. 112).

O autor ainda afirma que “a própria abstração, tão cara à matemática, é também um processo ligado à simplicidade”. O contexto, um dos aspectos estéticos da matemática, envolve uma concepção de espaço que define um conjunto ou classe, por exemplo, e “cria certo contexto para determinados elementos, que lhes dá unidade como conjunto, isto é, como totalidade agregada” (CIFUENTES, 2005, p. 61).

O contraste é um elemento fortemente relacionado com o contexto. De acordo com Cifuentes (2005, p. 61), na percepção do espaço, o contraste se dá na diferença objeto-contexto. Na matemática, ele é dado através da “noção de analogia, que é de extrema relevância nos processos de compreensão e descoberta em matemática” (CIFUENTES, 2005, p. 61). Gusmão (2013) destaca a contextualização como outro aspecto estético da matemática defendido por Cifuentes (2003, 2005):

> Contextualizar um objeto é dar um referencial espaço-temporal – não necessariamente num sentido físico – ao objeto, ao seu contexto, de modo que, do ponto de visto estético, o contexto passe a fazer parte, como resultado de uma síntese, do próprio objeto. Por exemplo, uma forma de contextualizar uma sequência num contexto espaço temporal é através de uma representação geométrica que permita evidenciar ou visualizar suas simetrias e seu padrão ou moldura, assim como os pitagóricos faziam ao classificar os números naturais pelas suas propriedades geométricas em números triangulares, quadrados, pentagonais etc. (GUSMÃO, 2013, p. 113-114).

Precisamos notar e reforçar que o estético na matemática não pode ser resumido a deslumbramentos superficiais que avigoram a beleza da matemática a partir da ideia de que ela é uma criação dos deuses, descoberta por gênios. Segundo Detoni (2010, p. 36), estética é “sensibilizar-se com o mundo e expressar dimensionamentos dele”. E, como já foi dito, o conhecimento do mundo advém da razão e da emoção.

A emoção se traduz num sentimento que antecede ao pensar e compreende aspectos perceptivos e aspectos emocionais. Assim, a aquisição do conhecimento matemático admite, em geral, as dimensões do racional e do emocional (ligado à experiência estética), refletindo um desejo de perfeição estética. Esse olhar pretende mostrar que o conhecimento matemático não é somente objeto puro da razão, mas também da emoção através da apreciação estética.

No contexto das questões que essa tese visa debater, trazemos uma abordagem acerca do caráter da matemática que prioriza a ideia de que ele não vem de uma universalidade misteriosa, como querem a maioria dos matemáticos e seus seguidores, mas de nós mesmos, das nossas necessidades, vontades e relação com o mundo enquanto sujeitos topológicos.

Sem dúvida, essa característica torna o humano, como afirma Kubrusly (2013, p. 8), “consciente de sua finitude, vestido e inventor, consequentemente, de infinitos”. Essa invenção se dá através de criações humanas, como a matemática, a arte, a poesia etc. A ideia compartilhada por esse autor surge com Lacan (1977) quando ele estabelece “um diálogo entre a topologia matemática e a psicanálise, construindo, para além de simples analogias, uma nova interpretação do sujeito pela *Fita de Möbius*[96]” (KUBRUSLY, 2013, p. 8).

Como a história demonstra, a matemática evolui muitas vezes por motivações de ordem estética. As falas a seguir que corroboram essa ideia, são, respectivamente de Aristóteles e Hardy: "os filósofos que afirmam que a Matemática não tem nada a ver com a Estética, estão seguramente errados. A Beleza é de facto o objecto principal do raciocínio e das demonstrações matemáticas"; "o matemático, tal como o pintor ou o poeta, é um criador de padrões. Um pintor faz padrões com formas e cores, um poeta com palavras e o matemático com ideias. Todos os padrões devem ser belos. As ideias, tal como as cores, as palavras ou os sons, devem ajustar-se de forma perfeita e harmoniosa."[97]

Assim, o homem é capaz de criar padrões e estruturas, sejam elas matemáticas, artísticas ou poéticas, e, em todas elas, há a preocupação com a beleza e o rigor, elementos provenientes da capacidade de criação de padrões inerente ao ser humano.

Nesse capítulo buscamos, inicialmente, expressar nossas concepções filosóficas, mesmo que não completamente elaboradas, acerca do conhecimento de modo geral, antes de apresentarmos nossas ideias sobre o conhecimento matemático. No decorrer de nossa exposição, acabamos por falar das nossas crenças não justificadas sobre as potencialidades do ser humano e seu poder de criação, para depois tratarmos dos aspectos voltados à construção da matemática.

Para nós, fica claro que a matemática é uma criação desse ser complexo e dinâmico que pensa e age em função de suas necessidades e interações com o mundo em que vive. Ela é uma perspectiva para ver o mundo e mostra toda a inquietação dos seres humanos quando eles se deparamos com o fim.

Embora a matemática tenha atingido o ápice de um pensamento lógico-formal, sua base empírica não pode ser renunciada. Tentamos deixar claro, nesse capítulo, que só é possível reconhecermos isso e compreendermos um pouco mais sobre a natureza da matemática quando nos debruçamos nos estudos histórico-filosóficos de suas obras e seus métodos.

---

[96] Objeto com propriedades topológicas bastante peculiares e que trazida ao diálogo, estabelece uma possibilidade de explicação teórica para o arranjo entre as instâncias conscientes e inconscientes do sujeito e suas relações recíprocas. A propriedade deste estranho objeto, qual seja, a de identificar interior e exterior, anulando o sentido dessas qualificações do ponto de vista global, mas permitindo, no entanto, que localmente ainda possamos ter a ilusão de dentro e fora, chama-se Não-Orientabilidade (KUBRUSLY, 2013, p. 8).

[97] TAVARES, J. N. Arte e Matemática. Universidade do Porto. Disponível em: https://cmup.fc.up.pt/cmup/arte/index.html. Acesso em: 12/05/2019.

Então, por meio das colocações feitas até aqui, confiamos que fomos capazes de aperfeiçoar nossas reflexões e construir um escrito significativo a respeito da matemática enquanto uma expressão humana, sejam com palavras consideradas simples crenças ou justificações plausíveis. A matemática é uma atividade humana criativa que está associada à imaginação, intuição, experimentação, tentativa e erro, além do uso de analogias das mais variadas.

SEGUNDA PARTE

Domínios da matemática

Entendo a matemática como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural.

Ubiratan D'Ambrosio

CAPÍTULO 3

Uma idealização racional da realidade

... Invenção do homem em sua hora, do medo, da angústia de um Adão-Eva-Serpente estarrecido, o infinito é o pai do pensamento. A mãe, a morte. Não há acordo, há que driblá-la para enfim inventar pacientemente uma outra vida para além da morte. É a lógica que se estabelece vencedora, e se necessário deuses, deuses! ... E religiões e espíritos alados e trevas e luz, e mãos impressas nas paredes das cavernas, e arte e cosmos, real, simbólico e imaginário entrelaçados, alma e tempo, tempo, eternidade e movimento. A carne ressuscitada e a ciência se enamoram. É a busca da transcendência que marca o homem que pergunta e o que responde, o que ordena o caos e o que compreende os mistérios do universo. Não há acordo, há que explicar o tudo e o nada, há que inventar os olhos e o destino e dividir a matéria e torturá-la até que ela confesse seus números. Sem opções, o homem é a parte e o todo. Cria um universo exterior a seus próprios pensamentos para poder ordená-lo, e mentes em volta de si para poder compreendê-lo. Hoje somos os deuses que adorávamos, às portas do paraíso, à véspera do entendimento absoluto temos a eternidade em nossas mãos. Está imóvel, parece uma pequena bola de vidro brilhante que nos ofusca. Fixamos bem o olhar em busca de uma melhor compreensão, e lá está ela, por trás dos reflexos e do brilho, a mulher-pássaro, ainda sentada no mesmo e velho sofá azul, sorrindo suas verdades matemáticas.[98]

Ricardo Kubrusly

Neste capítulo, continuamos a nos apoiar nos versos do poeta Kubrusly com a convicção de que eles nos subsidiam na reflexão sobre a relação do ser humano com a matemática. E, mais do que nunca, confiando que a matemática é um caminho que o homem criou para buscar “um infinito” com uma ideia de encontrar “o paraíso”. Desde o início, pintar cavernas deixando marcas já era uma forma de buscar a eternidade, e a matemática começou aí, junto com a arte. São as diferentes formas de expressão humana que surgiram e se integraram para dar um sentido à vida e à morte. Com base nesse pensamento, o ser humano criou a contagem, os números, o infinito, a matemática.

Entretanto, por que a matemática parece independente de quem a formula? Por que insistimos tanto em buscar nela a compreensão das coisas do mundo que não entendemos? Kubrusly (2012, p. 6) responde que as matemáticas servem e sempre serviram de estrutura para a modelagem física do universo:

> A resposta a essa preocupação genuína se dá pela abrangência de possibilidades das estruturas matemáticas. Não estamos recorrendo ao Cálculo tradicional e suas equações diferenciais, nem mesmo às análises funcionais e seus espaços hilbertianos que modelam as mecânicas quânticas, mas, o que buscamos nas matemáticas que investigamos e o que a elas pedimos, são as possibilidades estruturais que nos apresentam. Não nos interessam aqui, suas

[98] “O finito e o infinito: Razão” em Pensando no Infinito: Pequenas Digressões Matemático Filosóficas e outros Pecados. Departamento de Matemática da UFRJ. Disponível em < www.dmm.im.ufrj.br/~risk/pdf/Finito.pdf >. Acesso em: 03/04/2018.

> técnicas estabelecidas, mas os fundamentos que nos possibilitam novas invenções e surpresas. O que buscamos, aqui, nas matemáticas é mais que a analogia, a confirmação lógica de possibilidades (KUBRUSLY, 2012, p. 6).

Há uma relação entre a matemática e a realidade que se estabelece através do ponto de vista da aplicação, pois a matemática sempre foi uma ferramenta importante para a humanidade: mensuração de terras, agricultura, engenharia. Ela proporciona uma eficiente maneira de representar e estruturar a realidade desde os seus primórdios. E, segundo Ferrara (2002, p. 159), representar é "tornar o mundo cognoscível e compreensível ao pensamento que é o arquiteto das representações que medeiam as experiências do mundo". Para Makowiecky (2003), a representação e a interpretação são dois parâmetros que traçam limites para o científico:

> Apreender o mundo como fenômeno e representá-lo em mediações possíveis e incompletas é o grande avanço da ciência, apontando uma nova racionalidade que supera o afastamento epistemológico entre sujeito e objeto científicos para envolvê-los na mesma conexão que faz com que o mundo se apresente cognoscível, porque mediado por uma representação que permite ao sujeito se reconhecer no objeto (MAKOWIECKY, 2003, p. 23).

A historiografia nos mostra que babilônios e egípcios cultivavam álgebra e geometria em prol de suas necessidades práticas a partir de atividades matemáticas provenientes de uma perspectiva empírica e instrumentalista, com observação e experimentação, e processos de tentativa e erro de forma não dedutiva. China, Índia e Grécia desenvolveram métodos de forma sustentável. Os chineses seguiram a mesma linha babilônica, compilando coleções com problemas práticos e, como os egípcios, eles alternaram seus cálculos com resultados simples e elaborados. A matemática hindu exibiu surpreendente independência em seu trabalho geométrico a partir da influência babilônica. Enquanto isso, os gregos iniciaram o desenvolvimento de uma matemática diferenciada das demais civilizações, dando-lhe um caráter exclusivamente abstrato e fundamentos firmes com complicados sistemas de raciocínio lógico-matemático.

Nesse contexto, eles compunham tratados logicamente ordenados e apresentados de maneira sistemática pelo desenvolvimento do método axiomático dedutivo. O povo grego separou o pensamento da experiência. Assim começou a real abstração da matemática. Isso aconteceu, pois esse povo passou a estabelecer outro tipo de relação entre a matemática e a realidade. Ela passou a ser definida como um modelo explicativo e inteligível para o homem entrar na ordem da natureza e desvendar o mistério que aí parecia existir.

As considerações apontadas acima se referem ao pensamento matemático desenvolvido por diversos povos e em diferentes épocas. Em todas elas, é possível perceber que a nossa mente é moldável, e a matemática, enquanto uma construção humana, está sempre em transformação:

conceitos e teorias são criados e possivelmente deixados de lado conforme sua utilidade, e as verdades autossuficientes que assumimos como reais, por parecerem tão óbvias, são modelos construídos por tentativa e erro, herdados e aperfeiçoados por diversas gerações face à sua capacidade preditiva. Por exemplo, Euclides e seus seguidores pensavam que não havia outra geometria. Mais tarde, aquilo que parecia ser a essência da realidade, com a mudança de um dos axiomas, mostrou que era possível explicar muito mais coisas.

Assim, o mundo sensível sempre será uma fonte de inspiração para a nossa matemática, mesmo que sua complexidade não nos permita traduzi-lo integralmente. No entanto, nossa capacidade de abstração sempre nos permite conceber modelos ideais com dados aproximados. Então, chamamos a atenção para o fato de que a matemática está no mundo que pensamos e não no mundo em que vivemos.

Com os postulados, por exemplo, pode-se modelar qualquer coisa matematicamente desde que se tenha estrutura para isso. O teorema vai ao encontro dos postulados que saem do senso comum para a abstração, inferindo coisas do futuro com modelos matemáticos – o modelo é previsível e, por isso, a matemática existe com seu formalismo. A matemática que se constrói formalizada com conceitos da Lógica Clássica desde Aristóteles propõe essa estrutura para o pensamento.

Nesse sentido, podemos dizer que a matemática não tem compromisso com a natureza, só com a própria pessoa que decide suas dúvidas dentro do próprio corpo da matemática. Ela é apenas um ponto de vista desenvolvido no interior do nosso pensamento que nasce com base nos signos criados pela razão humana. Segundo Kubrusly[99] (2013), usamos a matemática neste mundo real, mas não tiramos a matemática dele, o fazemos se quisermos. A matemática é independente da realidade. A matemática não está em lugar nenhum. Por que aprendemos que está em todo lugar? A matemática não está nas coisas... Ela tem relação com as coisas do mundo.

O infinito, por exemplo, é um mundo imaginado. Os números reais, como uma produção intelectual, estão fora do mundo, não tem contrapartida em nada, em lugar nenhum. As coisas não são quebráveis (divisíveis) infinitamente. Temos que tirar do mundo para dividir na mente, e a distância matemática é difícil de entender no mundo. No entanto, o melhor modelo de mundo parece ser o matematicamente construído, e o homem usa esse modelo com o intuito de entender e dar sentido à vida.

[99] Comentários de Ricardo Silva Kubrusly (Professor de Matemática da UFRJ) em suas aulas no HCTE/UFRJ no primeiro semestre de 2013 na disciplina “História Cultural do Infinito I”.

Kubrusly (2013) ainda diz que “na matemática, o laboratório é dentro de cada um. Na mente há perfeição, há a abstração. Na mente π é irracional, mas na vida π é racional e vale 3,14. Temos obsessão pela continuidade, temos horror do vácuo”. E isso é uma marca das construções humanas. Como estar seguro de cobrir todos os “buracos”? A criação dos irracionais partiu disso. Emmer (1997, p. 1097 *apud* D’Ambrosio, 2012, p. 172) contribui com essa ideia dizendo que “a matemática é a única ciência com a capacidade de passar da observação de coisas visíveis à imaginação de coisas não visíveis. Este é, talvez, o segredo da força da matemática”.

3.1 As bases empíricas da matemática

A matemática é construída a partir da necessidade de sobrevivência do ser humano e evolui de maneira em que o mundo apresenta mudanças nas quais a humanidade tem que adaptar-se. Toda cultura na terra desenvolveu um pouco de matemática desde o ato banal de contar ovelhas em um campo ao processo de calcular o diâmetro da Terra. Não encontraremos, no cotidiano de todos os povos e de todas as culturas, atividades que não envolvam alguma forma de matemática (D’AMBROSIO, 1993, p. 8).

Pensando nas palavras de D’Ambrosio, buscamos ainda na pré-história os indícios das primeiras atividades matemáticas para resgatar a concepção de que elas têm sua origem em bases empíricas, ou seja, a matemática admite proposições fundamentadas nas experiências e nas observações do mundo físico. Eves (2004, p. 25) reforça que “a matemática mais antiga é aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número”. Esse autor ressalta que é por aí que devemos começar nossa análise, focando, inicialmente, o surgimento no homem primitivo do conceito de *número* e do processo de *contar*.

Os primeiros conceitos matemáticos foram criados a partir do interesse do homem pela terra. Essa relação era de teor prático e vinculada a necessidades utilitárias. Ifrah (2005, p. 25) enumera ainda outras situações que levaram o homem primitivo ao processo de contagem como: contagem de animais, ferramentas, armas, reservas de alimentos. Sobre o primeiro método de contagem que se deu por uma correspondência um a um, Ifrah (2005, p. 25) ressalta que “foi sem dúvida graças a esse princípio que, durante milênios, o homem pré-histórico pôde praticar a aritmética antes mesmo de ter consciência e de saber o que é um número abstrato”.

Registros sobre a origem primitiva dos números nas civilizações antigas mostram várias explicações acerca do princípio desses objetos cuja gênese se perde no passado. No entanto, encontramos em todas elas algo bem característico – o número sendo criado a partir das relações do homem com o meio, isto é, o número sendo construído a partir das atividades de representação do mundo às conveniências dos grupos sociais. Nesse caminho, esse conceito bastante abstrato se configura de forma absolutamente humana. Assim, as atividades matemáticas são indissociáveis do ser humano. O pensamento matemático e suas construções nos revelam uma epistemologia que se configura como aspecto constitutivo da história do ser humano.

Existem várias construções formais dos números, mas, nessas construções, os aspectos históricos e sociais que geraram nas civilizações a necessidade de construção dessa ferramenta não costumam aparecer. Segundo Jesus (2002, p. 19), isso acontece porque "na construção de um determinado mundo da ciência matemática, importa somente as relações lógicas que dão sentido e coerência a esse mundo. De modo que os aspectos da dimensão histórica e social não têm ao menos nessa construção, alguma relevância".

Desta forma, voltamos a criticar a compreensão idealista sobre a matemática, também censurada por Candiotto (2016) e por Engels (1976). Estes autores ressaltam a relação de dependência entre as abstrações matemáticas e a realidade física. Conforme Candiotto (2016, p. 108), existe uma "autonomia das abstrações, mas que é apenas um momento do processo de conhecimento, uma vez que o objeto da matemática não é uma constituição própria da realidade física. Ele existe na mediação entre a consciência e tal realidade". Complementando, Engels (1976) nos explica que:

> De onde são tirados os conceitos de número e figura, senão do mundo real? Os dez dedos pelos quais se aprende a contar e, por conseguinte, a executar a primeira operação aritmética, nada tem de uma livre criação do espírito [...]. E o mesmo que acontece com o conceito de número, acontece também com o da figura, que é tomado exclusivamente no mundo exterior e não surge no cérebro de ninguém por obra da pura especulação (ENGELS, 1976, p. 34).

Candiotto (2016, p. 108) ainda evidencia a necessária abstração de todas as características dos objetos físicos, exceto suas relações quantitativas e espaciais, e Engels (1976) mais uma vez destaca como a matemática considerada *pura* está vinculada à realidade material:

> As matemáticas puras versam sobre as formas no espaço e as relações quantitativas do mundo exterior, e, portanto, de uma matéria bastante real. O fato de essa matéria se apresentar sob forma sumamente abstrata, apenas superficialmente, pode nos fazer crer que não tem sua origem no mundo exterior. O que acontece é que, para poder investigar essas formas e relações em toda a sua pureza, é necessário desligá-las completamente de seu conteúdo, deixando-o de lado como indiferente, para assim chegarmos aos pontos sem dimensões, as linhas sem largura e espessura, [...]; e por fim, depois de percorrer todos esses caminhos, chegarmos às criações verdadeiramente livres da inteligência, isto é, as grandezas imaginárias (ENGELS, 1976, p. 34).

Então, os objetos matemáticos existem a partir de ideias derivadas da realidade, isto é, a origem da matemática se dá a partir da realidade material. Isso quer dizer que precisamos avançar em relação à perspectiva idealista que despreza as bases empíricas da natureza da matemática. Nesse sentido, Candiotto (2016, p. 108) diz que se quisermos progredir na compreensão da matemática, não teremos outro remédio senão "introduzir nas verdades matemáticas, fenômenos reais, relações e formas plásticas, tomadas da realidade, ou seja, atravessar as verdades lógicas dessa ciência com os fenômenos reais, com as relações e forma da realidade física".

Desta maneira, as abstrações matemáticas são reflexos da realidade que nos fornecem representações estabelecidas como formas regulares do que encontramos na natureza. Isso quer dizer que jamais encontramos na natureza tais formas, ou seja, as formas regulares são próprias do processo de abstração. Acontece que, ao longo do seu desenvolvimento histórico, a matemática caminhou em direção a uma rígida formalização, na qual explicações passaram a ser apresentadas através de um encadeamento lógico, que consistia na aceitação de proposições sem demonstração – os axiomas – para a demonstração de outras proposições conhecidas como teoremas. Essa estruturação da matemática se fez presente na cultura ocidental como uma herança da cultura grega apresentada, especialmente, por Platão. No entanto, não devemos esquecer que, antes dessa fase, a matemática já apresentava noções muito abstratas.

A mudança crucial que se obteve com a matemática grega foi a condição do critério de verdade. No período pré-helênico, a verdade era pautada no valor empírico, e, no grego, era embasada na demonstração. Diante dessa complexa transição, ficou difícil compreender o significado da realidade das ideias matemáticas, principalmente pelo abandono da explicitação das experiências individuais que levam à estruturação das verdades e afirmações mais gerais e abstratas. O método dedutivo implantado pelos gregos separou o conhecimento matemático do mundo da experiência.

Diante das colocações feitas, pretendemos resgatar a origem da matemática com suas bases empíricas, isto é, seguimos a ideia de conceber a realidade da matemática a partir de uma modalidade diferente daquela apresentada por Platão e assumida por muitos matemáticos.

3.1.1 As raízes do pensamento matemático

Todo o conhecimento humano é produzido e é fruto de um processo que deriva das interações do homem com o meio. Tal produção se deve, inicialmente, às necessidades de sobrevivência do homem e, posteriormente, à busca de compreensão do mundo que o cerca e de sua essência na ânsia de libertação.

Ancelmo (2007, p. 10) afirma, com base em Merleau-Ponty (1971), que tudo o que sabemos do mundo, mesmo o que provém da ciência, sabemos a partir da nossa visão pessoal ou de uma experiência vivida por nós. Esse autor destaca que, sem esta troca de fluxo entre as informações biológicas e as fenomenológicas, os símbolos da ciência nada significariam. Merleau-Ponty (1971, p. 12) explica melhor: "todo o universo da ciência é construído sobre o mundo vivido, e se quisermos pensar na própria ciência com rigor, apreciar exatamente o seu sentido e seu alcance, convém despertarmos primeiramente esta experiência do mundo da qual ela é expressão segunda".

Nesse cenário, a matemática é uma atividade humana em que conceitos são construídos ou desfeitos na tentativa de solução das circunstâncias, oriundas do mundo perceptível aos sentidos ou de reflexões teóricas relativas a modelos obtidos por meio de generalizações das observações e hipóteses. As elaborações matemáticas mais primitivas se caracterizam pela imediaticidade[100] da aparência física das coisas (CANDIOTTO, 2016, p. 126). Tal aspecto é esclarecido por esse autor da seguinte forma:

> A base dessa imediaticidade se encontra nas generalizações empíricas, ou seja, que surge por consequência de uma série de observações empíricas que criam uma regularidade aparente, na qual criam generalizações que, geralmente, não correspondem à realidade do fenômeno em questão ou, na melhor das hipóteses, expressam algum caso singular do mesmo (CANDIOTTO, 2016, p. 126).

Outro elemento importante a ser aqui considerado é que a matemática é uma atividade criadora que acontece, segundo Candiotto (2016, p. 94), por meio do "reflexo subjetivo da materialidade do mundo e suas relações objetivas". O desenvolvimento do conhecimento geométrico, por exemplo, traça o caminho da análise das formações materiais e sua constante transformação. O autor deixa claro que esse conhecimento não é um jogo especulativo da consciência, com uma estrutura intrínseca e uma forma *a priori* da sensibilidade humana, mas:

> As relações métricas do espaço estão dadas na materialidade do mundo. Porém, somente a consciência pode refleti-las em forma de conhecimento e estabelecer abstratamente os nexos e as estruturas dos seus movimentos. Nesse caso, o objeto da geometria não é constituinte da realidade física, pois ele é a imagem dessa realidade. Em contrapartida, essas imagens não são

[100] Quando se considera que qualquer forma de quatro lados iguais é um quadrado, se expressa uma singularidade desse objeto. Sendo assim, impossibilita a compreensão, por exemplo, que todo quadrado é também um retângulo e um losango, mas, que a recíproca não é verdadeira. As formas físicas dos objetos induzem a uma generalização empírica, em detrimento da generalização teórica. Esta última não se limita às observações aparentes dos fenômenos, mas os consideram desde o movimento de seu desenvolvimento histórico e lógico (CANDIOTTO, 2016, p. 126).

> elementos autônomos, que existem ao lado dos objetos físicos, elas se referem a esses objetos, compõem sua constituição e entram no fluxo de seu movimento reflexivo (CANDIOTTO, 2016, p. 94).

Segundo Belov (1955, p. 286), o conteúdo material da consciência “não se encontra na própria consciência, mas fora dela – no mundo exterior que é refletido pela consciência”. Assim, a consciência não tem outro conteúdo senão o mundo que está fora dela, independente dela e que ela reflete. Candiotto (2016, p. 94) reforça as palavras de Belov (1955) quando afirma que “o conteúdo do objeto da geometria não está na consciência, mas fora dela, está na realidade física. Sua existência enquanto tal está nas relações conscientes estabelecidas pelo reflexo subjetivo que produz a consciência”. A respeito dessa questão, Rubinstein (1963) elucida a relação do objeto com a consciência que o reflete, dizendo que “a imagem não constitui uma coisa ideal existente no mundo interior da consciência de um modo semelhante a como um objeto real existe no mundo da matéria”.

A imagem como tal é constituída pela “relação cognitiva de uma impressão sensorial em relação à realidade que está fora da referida imagem e que não se reduz ao conteúdo da imagem” (RUBINSTEIN, 1963, p. 28). Essa relação se dá de acordo com o nível de conhecimento que dispomos em nosso espaço de observação e atuação e nos indica a hipótese de que nosso conhecimento matemático não dá conta da compreensão de toda a realidade material. Já Lenin (1979) esclarece que os reflexos subjetivos dependem das relações cognitivas e do desenvolvimento da sensação, e só existem enquanto tiver a consciência: “nossas sensações e nossa consciência são apenas a imagem do mundo externo, e entende-se apenas que a reflexão não pode existir sem a refletida, enquanto a coisa refletida existe independentemente da reflexão” (LENIN, 1979, p. 70, *tradução nossa*). Daí Gaidukov (1955, p. 353) completa essa ideia afirmando que “a sensação, sendo subjetiva pela sua forma, é objetiva pelo seu conteúdo originário”.

Tal concepção confirma que a sensação e a percepção são funções do cérebro, portanto, seu conteúdo é determinado pelas relações sociais estabelecidas concretamente na realidade material. Assim, o conteúdo do objeto da geometria, por exemplo, se encontra nas relações espaciais da realidade física. Fechando essa reflexão, Candiotto (2016, p. 94) reforça que esse objeto não existe sem as relações cognoscitivas: “organização da geometria da realidade física estabelece-se nos próprios objetos físicos desse mundo e suas relações entre si. Entretanto, a imagem de tais conexões somente se constitui na consciência que os reflete”.

Ao abordarmos a questão da generalização empírica, podemos clarificar a relação entre os conceitos matemáticos e o movimento da realidade material. Mesmo considerando o distanciamento das abstrações matemáticas em relação à realidade material, devemos tomar cuidado com a solidificação dessas abstrações ao não admitir a matemática como uma ciência que depende da realidade material, isto é, uma ciência do pensamento puro. Mais uma vez, tomamos como base as ideias de Candiotto (2016) para sinalizar que essa crítica perpassa a análise histórica do objeto da matemática.

Nosso pressuposto de negar a perspectiva idealista sobre o objeto da matemática também se apoia nas palavras de Ríbnikov (1987), entre outros autores, quando ele destaca a ampla interação entre a evolução do conhecimento matemático e o desenvolvimento de outras ciências. As colocações de Ríbnikov (1987) e Aleksandrov (1991) servem de resposta, como coloca Candiotto (2016), a perguntas do tipo:

> Se a matemática brota do pensamento puro, de uma sensibilidade *a priori*, por que seus conceitos não se apresentam ao homem universalmente? Por que surgem singular e parcialmente em cada época? Se os conceitos matemáticos são verdades apriorísticas, como explicar seu crescente desenvolvimento? (CANDIOTTO, 2016, p. 105).

O movimento histórico revela os momentos em que as abstrações se desenvolvem com base na estrutura lógica interna da própria matemática: "somente em um momento mais avançado de desenvolvimento das ciências é que essas abstrações se efetivam como relações surgidas na realidade material" (CANDIOTTO, 2016, p. 105). Sobre isso, Aleksandrov (1991a, p. 35, *tradução nossa*) defende que "a história dos conceitos de aritmética mostra quão equivocada é a visão idealista de que eles surgem do 'pensamento puro', da 'intuição inata', da 'contemplação de formas *a priori*', ou algo similar". O autor cita a aritmética, porém tem a mesma compreensão em relação às outras áreas da matemática.

A eliminação da concepção de que o surgimento da matemática se deu a partir da realidade material desconsidera as questões que são mediadas pelas relações sociais de cada época e lugar, deixando à mostra apenas um pensamento matemático puro. Na mesma direção, Ríbnikov (1987) compreende o surgimento das abstrações matemáticas na dinâmica da prática social humana:

> O resumo do objeto da matemática apenas obscurece o surgimento de todos os conceitos de matemática da realidade material, mas em nenhum caso o suprime. A história mostra que as reservas de relações quantitativas e formas espaciais estudadas pela matemática são constantemente enriquecidas em uma relação indissolúvel com as demandas da tecnologia e das ciências naturais, completando cada vez mais o rico conteúdo da definição geral da matemática (RÍBNIKOV, 1987, p. 11, *tradução nossa*).

Segundo Engels (1976, p. 34), as demonstrações matemáticas "são grandezas em um patamar puramente teórico, isto é, representam uma construção racional efetuada pelo sujeito humano inserido em seu meio sociocultural, em que os processos cognitivos podem ser compreendidos e acionados". Candiotto (2016, p. 106) sinaliza que os conceitos puramente abstratos devem encontrar, na realidade, o seu correspondente material. A respeito de tal aspecto, Engels (1976) reforça que:

> Nas matemáticas puras pode, segundo ele, mover-se livremente a inteligência, com as "suas criações e imaginações próprias"; [...]. É indubitavelmente certo que os conceitos das matemáticas puras regem independentemente da experiência concreta de qualquer indivíduo, ainda que essa virtude não pertença exclusivamente às matemáticas, o que é fato comum comprovado por todas as ciências, e, mais ainda, a todos os fatos em geral, cientificados ou não (ENGELS, 1976, p. 34).

O caminho percorrido pelos objetos matemáticos que é apresentado por Engels (1976) evidencia a necessária abstração de todas as características dos objetos físicos, exceto suas relações quantitativas e espaciais. Candiotto (2016, p. 108) destaca que esse traço característico do objeto da matemática "é a porta de entrada das reflexões das perspectivas idealistas que tentam destruir a origem da matemática a partir da realidade material. Acontece que tal abstração não garante uma origem apriorística para a matemática, mas apenas sua concatenação racional".

Por exemplo, a ideia da forma de um cilindro, que surge pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados, parte da investigação na realidade de vários retângulos e cilindros. A matemática surgiu das necessidades dos homens e, como acontece em todas as demais áreas do pensamento humano, ao alcançar certa fase de desenvolvimento, as regras e leis abstraídas do mundo real se distanciam desse mundo que é a sua origem, passando a ser compreendidas como algo à parte, como se viessem de fora e às quais o mundo deveria se ajustar.

3.2 A matematização da realidade

Ao longo da história da humanidade, a concepção idealista sobre o objeto da matemática se fortaleceu, principalmente, ao serem desenvolvidos conceitos sem aplicações práticas ou que representam uma contradição em relação à realidade. Um exemplo é o paradoxo *Aquiles e a* *tartaruga*[101], um dos quatro paradoxos de Zenão de Eléia[102] que nos remete a uma análise sobre a lógica do cálculo diferencial e sua ligação com a realidade material. Seguindo Gerdes (2008), defendemos que essas abstrações se constituem como a forma de movimento social da matéria, que se expressa subjetivamente na consciência. Esse autor explica que:

> A distância entre Aquiles e a tartaruga, inicialmente |A0T0|, depois |A1T1|, |A2T2|, |A3T3|, |A4T4|, etc., ficará cada vez mais pequena, tendendo para zero. Mas a distância tornar-se-á uma vez igual a zero? Para os matemáticos e filósofos, que, ao utilizarem as definições de limite de Cauchy[103]-Weierstrass[104], deixam em aberto se o acontecimento $\Delta x = 0$ vai ter lugar ou não. Para estes matemáticos e filósofos parece, neste exemplo, ser apenas uma questão da nossa vontade se Aquiles apanha a tartaruga ou não. É este voluntarismo escondido que Marx implicitamente critica: Aquiles é na realidade capaz de ultrapassar a tartaruga, a distância entre os dois será uma vez igual a zero, por isso o limite será alcançado. [...] Podemos verificar que Marx exigiu a máxima clareza de pensamento ao interpretar o aparelho formal dos símbolos (neste exemplo, Δx tende apenas para 0 ou torna-se igual a 0), salientando como materialista, que a matemática só pode ser significante e relevante, quando refletir processos do mundo real (GERDES, 2008, p. 80).

No paradoxo de *Aquiles e a tartaruga*, nos deparamos com a questão do alcance ou não de um limite matemático no cálculo. Nesse caso, questiona-se se é possível que Aquiles alcance a tartaruga. A resposta é afirmativa, porém, dentro dos limites da realidade física e com as devidas abstrações corrigidas. Outra questão interessante é a diferenciação entre o tempo e sua medição. Segundo Candiotto (2016, p. 177), o primeiro é uma propriedade da realidade física, e a segunda é uma criação humana na relação de reflexo na consciência. Tais elementos podem ter como base as palavras de Einstein & Infeld (2008):

> A sensação psicológica subjetiva de tempo nos permite ordenar as nossas impressões, declarar que um acontecimento precede outro. Mas ligar todo instante de tempo a um número, pelo uso de um relógio, considerar o tempo um contínuo unidimensional, já é uma invenção (EINSTEIN & INFELD, 2008, p. 242).

Um relógio pode ser atribuído a qualquer objeto material que possa medir certa regularidade na realidade física, tornando-se mais preciso tanto mais precisa for a tecnologia aplicada, como o relógio atômico, que é o mais avançado já criado pelo homem. Entretanto, a precisão absoluta é uma abstração da qual não se pode abusar (CANDIOTTO, 2016, p. 177-

---

[101] Segundo esse paradoxo, Aquiles é colocado em um ponto e uma tartaruga é colocada a uma dada distância a sua frente. A pergunta é: Aquiles pode alcançar a tartaruga? Bem, fisicamente sim, ele alcança a tartaruga. Porém, alguns matemáticos idealistas fazem desse paradoxo uma abstração pura e mistificam a matemática a tal ponto que fundamentam a sua teoria de que o movimento não existe (CANDIOTTO, 2016, p. 104).
[102] Zenão de Eléia (490 a. C. – 430 a. C.) foi um filósofo pré-socrático da escola eleática, considerado por Aristóteles como o criador da dialética.
[103] Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) foi um matemático francês.
[104] Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815 – 1897) foi um matemático alemão.

178). O autor citado acima ainda comenta que tais medições não são absolutas porque a matéria se transforma continuamente no espaço e no tempo: "o que fazemos é recortar essas medições e conceitualizar a realidade física no limite de nossas necessidades e possibilidades" (CANDIOTTO, 2016, p. 177-178). Mais uma vez, Einstein & Infeld (2008) fundamentam essas ideias:

> O tempo é determinado por relógios, as coordenadas espaciais por réguas, e o resultado de sua determinação pode depender do comportamento desses relógios e réguas quando em movimento. Não há razão alguma para acreditarmos que se comportarão da maneira que gostaríamos (EINSTEIN & INFELD, 2008, p. 158).

Assim, a geometria da realidade física se caracteriza num processo de medição, no qual as medições do tempo e do espaço dependem de objetos físicos. Desta forma, o objeto da geometria não pode ser um atributo da própria realidade física e tampouco uma forma *a priori* da sensibilidade humana. Nesse contexto, Candiotto (2016) destaca que o senso comum, que não concebe a possibilidade de mudança do ritmo do tempo e das medidas de um corpo sob a influência do movimento, está fundado nos fenômenos mecânicos ordinários:

> Tais fenômenos são justamente a base do surgimento da Geometria euclidiana e caracteriza o desenvolvimento da Física na época de Euclides. Não foi possível outra Geometria naquela época, porque não era possível outra compreensão da realidade física além dos limites da mecânica clássica, e vice-versa (CANDIOTTO, 2016, p. 178-179).

As aplicações do conhecimento matemático se tornam mais úteis quando se tem a compreensão das suas limitações e a diferenciação entre suas abstrações e o objeto refletido. O caráter abstrato do objeto da geometria tem um papel importante na compreensão da realidade física uma vez que "possibilita à consciência ir além das experiências e necessidades imediatas" (CANDIOTTO, 2016, p. 179). O autor ainda elucida que a dependência em relação ao observador para se determinar o comprimento de um objeto não encerra um relativismo ontológico, mas um relativismo epistemológico[105].

No exercício de conceitualizar a realidade física no limite de nossas necessidades e possibilidades, a matemática é mais uma criação humana na relação de reflexo na consciência, que sempre está vinculado à forma como se vive e se sente a realidade. No entanto, também

[105] Essa medição, que é relativa ao observador, quando feita em movimento, requer a consideração da categoria tempo, mais especificamente a simultaneidade. Para a teoria da relatividade, a simultaneidade é relativa, depende do observador interno ou externo ao fenômeno em questão e, assim, a métrica da geometria do espaço também é relativa ao observador. Essa relatividade passa pela esfera do reflexo objetivo da realidade material e sua relação com o reflexo subjetivo que ocorre na consciência em sua apreensão da realidade. Nessa relação se encontra o objeto da Geometria, constituído abstratamente (CANDIOTTO, 2016, p. 179).

acreditamos que as abstrações matemáticas são frutos de um pensamento capaz de imaginar. D'Amore (2012) fala da matemática, especialmente, como:

> A matemática é humanismo, assim como tudo aquilo que o homem cria para suas necessidades concretas e espirituais e pelo gosto sublime e não concretamente vantajoso de criar coisas novas, é um desafio intelectual como a poesia, a física, a literatura, a química, o canto, a eletrônica, a música, a zoologia, a astronomia, a mitologia, a botânica, a filosofia, a pintura, o cinema, a história, o teatro (D'AMORE, 2012, p. 202).

Ao pensarmos na matemática como uma idealização da realidade, lembramos mais uma vez, a partir de Candiotto (2016, p. 112), que uma das formas fundamentais de existência da matéria é o movimento que está na natureza, na sociedade e no pensamento. Tal movimento não pode ser sucumbido na análise da realidade material e das relações humanas, pois é o que proporciona o avanço das teorias matemáticas e seu desenvolvimento lógico-histórico[106]. Gerdes (2008, p. 27) reforça essa ideia afirmando que "a matemática das grandezas variáveis representa o reflexo matemático do domínio de movimentos".

Ríbnikov (1987) também contribui com tal reflexão dizendo que "a matemática surgiu da atividade produtiva dos homens e que os novos conceitos e métodos, em sua maioria, foram formulados sob a influência das ciências naturais exatas" (RÍBNIKOV, 1987, p. 12, *tradução nossa*). A partir dessa concepção, o conhecimento matemático se desenvolveu para satisfazer as necessidades humanas; do contrário, não existiria. Finalizando esse raciocínio, Candiotto (2016, p. 112) destaca que os traços peculiares da matemática, como a abstração, a precisão e o rigor lógico, não violam sua processualidade histórica diante do desenvolvimento da humanidade.

Ao refletirmos sobre a matemática como idealização da realidade, precisamos notar também que é pela imaginação que o ser humano estrutura seu olhar sobre as coisas e cria suas possibilidades de mundo e as melhores maneiras de fazer parte dele. Então, nesse sentido, a matemática é mais um processo criativo do homem em que ele mobiliza a razão com base em suas vivências e sentimentos. Imaginando, ele é estimulado a produzir conhecimento. Assim, a imaginação também é motor das criações, como os sentimentos e as emoções humanas, embora apresente uma história de exclusão no domínio cognitivo.

Segundo Gusmão (2016, p. 3), na matemática, a intuição, a imaginação e o conhecimento a partir da imaginação, apesar de não estarem do lado da objetividade científica, não correspondem a um fato trivial, desprovido de toda racionalidade, ou seja, é possível

[106] Os conceitos matemáticos avançam e retrocedem, ampliam e reduzem suas aplicações, proporcionam o surgimento de novas teorias e a refutação de outras (CANDIOTTO, 2016, p. 112).

caracterizá-los como parte de um processo pré-científico. Esses elementos não fazem parte apenas do processo de construir ou criar imagens, mas envolvem a realização de sínteses nessa criação. Vamos, então, inclui-los no elenco de traços peculiares da matemática, enfatizando sua relevância no processo de matematização da realidade.

Gottschaltk (2008) chama a atenção para a relação entre tais elementos e a existência de paradoxos e contradições no *mundo* da matemática quando faz uma analogia entre atividade dos matemáticos e dos poetas: "a palavra poesia significa criação e, assim, o poeta seria aquele que convive com paradoxos e contradições. Este valor da dissidência, fundamental para se pensar o novo e, principalmente, a capacidade de imaginação, estaria excluído da formação matemática?" (GOTTSCHALK, 2008, p. 2). Segundo essa autora, o matemático também convive com paradoxos e contradições que o obrigam a inventar novos objetos e a formular novas teorias matemáticas, abrindo novos campos de investigação e criando condições de sentido para organizar o mundo empírico:

> Como vemos, não tão distante das humanas assim, a matemática, para além da aplicação de cálculos e algoritmos, também exige imaginação e criatividade. A resolução do problema da continuidade não se deu através de uma demonstração matemática, mas sim por uma invenção, inventou-se um axioma que passou a exercer uma função normativa, ou seja, passou a ser condição de sentido para o conceito de reta: diz o que é ser reta no jogo de linguagem da geometria analítica. Em outras palavras, inventou-se uma nova convenção. Neste sentido, como na literatura, o matemático também imagina outras realidades e cria novos conceitos. E são estes atos que contribuem para o pluralismo das idéias, evitando-se, assim, o totalitarismo do pensamento. A história da matemática também nos mostra, em diferentes momentos, como ela é movida por paradoxos e contradições obrigando o matemático a inventar novos objetos, e não a descobri-los (GOTTSCHALK, 2008, p. 14).

Tais colocações nos mostram como considerar perspectivas a favor do aprimoramento da imaginação e da intuição no campo da matemática, favorecendo a compreensão de seus fundamentos. Pensamos que falar de uma *epistemologia da imaginação e da intuição* no contexto da matemática, no qual a lógica é soberana, é praticamente uma contradição, mas tal epistemologia envolve uma racionalidade nos processos de criação que pode permitir uma melhor compreensão da própria matemática. Gusmão (2016, p. 9) contribui para esse olhar afirmando que na matemática, "as ideias estão em movimento, sendo necessário a intervenção da intuição para auxiliar a fazer escolhas e decidir qual hipótese convém para estruturar uma teoria e, que com essa multiplicidade, promovida pela imaginação, teremos um todo organizado que leva ao conhecimento".

3.2.1 Uma epistemologia da imaginação para a matemática

A criatividade não é uma propriedade exclusiva de alguns escolhidos, mas uma característica própria do ser humano. Assim, ela não deve ser tratada como objeto isolado, ou seja, como se fora compartimento estanque. Pelo contrário, ela deve ser considerada dentro de uma problemática social, econômica, política e cultural, que, sem dúvida, obstaculiza o livre fluir da condição humana. Etimologicamente, a palavra criatividade vem do verbo *creare*, em Latim, que significa gerar ou produzir. O processo criativo gera algo novo que é resultado das experiências vividas pelo indivíduo e das situações em que ele se encontra envolvido.

Segundo Ostrower (2010, p. 5), a criatividade é um potencial próprio do ser humano, e a utilização desse potencial, uma de suas necessidades. Desta forma, essa autora defende que a criatividade é inerente à vida e que os processos criativos não se restringem somente à arte, ou seja, criar e viver são ações que estão interligadas e que a natureza criativa do homem se elabora no contexto cultural:

> Nessa busca de ordenações e de significados reside a profunda motivação humana de criar. Impelido, como ser consciente, a compreender a vida, o homem é impelido a formar. Ele precisa orientar-se, ordenando os fenômenos e avaliando o sentido das formas ordenadas; precisa comunicar-se com outros seres humanos, novamente através de formas ordenadas. Trata-se, pois, de *possibilidades*, potencialidades do homem que se convertem em *necessidades existenciais*. O homem cria, não apenas porque quer, ou porque gosta, e sim porque precisa; ele só pode crescer, enquanto ser humano, coerentemente, ordenando, dando forma, criando... [...] O criar só pode ser visto num sentido global, como um agir integrado em um viver humano. De fato, criar e viver se interligam [107] (OSTROWER, 2010, p. 9-10).

Ostrower (2010) ainda afirma que é na integração do consciente, do sensível e do cultural que se baseiam os comportamentos criativos do homem. No entanto, ela faz a distinção de que a consciência e a sensibilidade fazem parte da herança biológica dos indivíduos, isto é, são qualidades comportamentais inatas enquanto a cultura representa o desenvolvimento social do homem configurando as formas de convívio entre os sujeitos. Primordialmente, o que vale ressaltar é que não ocorre um desenvolvimento biológico independente do cultural:

> O comportamento de cada ser humano se molda pelos padrões culturais, históricos, do grupo em que ele, indivíduo, nasce e cresce. Ainda vinculado aos mesmos padrões coletivos, ele se desenvolverá enquanto individualidade,

[107] Criar é basicamente formar. [...] Desde as primeiras culturas, o ser humano surge dotado de um dom singular... O homem é um ser formador. Ele é capaz de estabelecer relacionamentos entre os múltiplos eventos que ocorrem ao redor e dentro dele. Relacionando os eventos, ele os configura em sua experiência do viver e lhes dá um significado. Nas perguntas que o homem faz ou nas soluções que encontra, ao agir, ao imaginar, ao sonhar, sempre o homem relaciona e forma (OSTROWER, 2010, p. 9).

> com seu modo pessoal de agir, seus sonhos, suas aspirações e suas eventuais realizações (OSTROWER, 2010, p. 11-12).

O ato criador é uma maneira de reformular o mundo e, além do mais, uma forma de devolvê-lo sintetizado. Isso ocorre quando a apreensão da realidade é considerada o primeiro fato do ato criador, "pois o indivíduo vê o mundo ao seu redor, reformula-o, devolve-o e a partir daí, finca-se nele" (HOLANDA & VERAS, 2009, p. 4). Como nem toda criatividade está determinantemente ligada à arte, sugerimos a existência de uma criatividade científica, especialmente, uma criatividade matemática, que se mostra através do desenvolvimento de potencialidades humanas como a imaginação e a intuição.

Rodrigues (2007, p. 56) ressalta o caráter extremamente artístico da matemática por sua grande dependência da imaginação. Seguindo esse caminho, o autor afirma que as proximidades da matemática com a arte não são poucas e comenta: "também o poeta constrói mundos possíveis e inventa hipóteses imaginárias[108]. A diferença entre matemática e poesia não está na imaginação, mas na necessidade com que as conclusões são obtidas – na arte, não há, e nem precisa haver, qualquer necessidade no raciocínio".

Ennio De Giorgi, um dos grandes matemáticos do século XX, apresentou, segundo D'Ambrosio[109], uma das melhores conceituações sobre a matemática quando disse: "matemática é a única ciência com a capacidade de passar da observação de coisas visíveis à imaginação de coisas não visíveis. Este é, talvez, o segredo da força da matemática". E disse ainda: "eu penso que a origem da criatividade em todos os campos é aquilo que eu chamo a capacidade ou disposição de sonhar: imaginar mundos diferentes, coisas diferentes, e procurar combiná-los de várias maneiras". Ratificando as palavras de Giorgi, Gusmão (2013) defende que, no ato criador, o ingrediente principal é a imaginação:

> Ela é o substrato do processo criador e por ela o homem se desprende do universo físico para criar o mundo dos valores e dos significados. Por meio da imaginação, o homem transcende a realidade. Por meio dela, (re)criamos novas relações, teorias, poemas, músicas, tecnologias, leis científicas, entre outros (GUSMÃO, 2013, p. 105).

---

[108] O matemático não se preocupa com a verdade *positiva* de o que é de fato, mas somente com a sua verdade *hipotética*, isto é, com o que poderia ou não poderia ser concluído necessariamente com base nas hipóteses imaginárias construídas. A matemática, assim, é a ciência que busca definir puras possibilidades. O matemático primeiro constrói as hipóteses e, em seguida, observa o que necessariamente pode se concluir como consequência dessa construção. Depois disso, pode-se generalizar as conclusões alcançadas para toda ocasião possível de ser descrita nos termos das hipóteses imaginadas. [...] As construções imaginárias da matemática podem, portanto, ser aplicadas a qualquer situação de fato, qualquer ocasião atual, porque podem ser aplicadas a *alguma* situação de fato (ROGRIGUES, 2007, p. 45).

[109] D'Ambrósio (2011) coloca na conferência de abertura proferida na XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática - Ciaem, realizada em Recife/PE, que uma das melhores conceituações que ele já viu sobre o que é matemática está na entrevista que Ennio De Giorgi, um dos grandes matemáticos do século XX, concedeu a Michelle Emmer em 1996.

Duarte Junior (1991) amplia o campo de atuação da imaginação destacando que a própria ciência, que pretende ser um conhecimento rigoroso das "coisas como são", é filha direta da imaginação: "a criação de normas de objetividade, para que a razão se discipline e não sofra interferências dos valores e emoções, é um produto da imaginação. [...] A imaginação é o dado fundamental do universo humano e o motor de todo ato de criação" (DUARTE JR, 1991, p. 52). Além disso, a imaginação é "a articulação dos sentimentos, a sua transformação em imagens ao encontro de símbolos que expressem esses processos e resultados" (DUARTE JR, 2005, p. 98).

Desta forma, a ciência, ao lado da poética, dá existência ao que não é "desrealizando o real, de modo que as oposições entre elas não obscurecem as similaridades: a abertura para o novo, a recusa da imobilidade, a dinamicidade, a inegável presença do sujeito criador" (PAIVA, 2005, p. 164). Ciência e poesia podem caminhar juntas mobilizadas pela imaginação na dinâmica do pensamento que define a condição humana e a construção de conhecimentos tanto na matemática como na arte e nas ciências.

Outro autor, chamado Herbert Read, ainda defende a imaginação como integrante do domínio cognitivo. Ele afirma que a imaginação é a "atividade que inclui o uso produtivo do material sensorial que leva à descoberta científica, bem como o uso similar desse material que leva à obra de arte, não havendo uma diferença essencial entre os dois processos" (READ, 2001, p. 71-72).

Segundo Gusmão (2016, p. 3), Herbert Read (1893-1968) propôs uma espécie de razão poética, que valoriza a espontaneidade, a liberdade e a sensibilidade no processo de construção de conhecimentos em contraponto à razão científica, que ficou conhecido como o *método estético*[110]. Nesse sentido, para Read (2001), a matemática "apela para a imaginação, e é até possível afirmar que o tipo mais elevado de imaginação é precisamente o que se ocupa da criação das proporções e harmonias abstratas" (READ, 2001, p. 32).

Além da associação de um método estético à criação da matemática, Gusmão (2016) também nos apresenta a existência de uma *epistemologia da imaginação* no campo da matemática, a partir de Gaston Bachelard (1884-1962), com a finalidade de fundamentar a interdisciplinaridade entre a matemática, a arte e outras ciências, favorecendo a compreensão da própria matemática. Discutir a epistemologia de Bachelard nos faz assumir uma postura filosófica diante da matemática que a coloca em interconexão com as outras áreas do conhecimento.

[110] Esse método, então, incorpora os mecanismos da imaginação e da criação, próprios da arte, principalmente o mecanismo de "síntese" para atingir um conhecimento mais integrado (GUSMÃO, 2016, p. 3).

Para Gusmão *et al* (2017, p. 366-367), "a imaginação e a intuição, em complemento à lógica, são motores do pensamento matemático que, por meio de sua dinamicidade, favorece a criatividade na própria matemática e sua aplicação nas outras ciências". Em outras palavras, o autor enfatiza a importância de se ascender à matemática por meio da sensibilidade, além da razão, que está relacionada com a intuição, a imaginação, a espontaneidade, a liberdade e a criatividade.

A imaginação em Bachelard é uma força cuja envergadura supera a condição humana: "suas imagens buscam suplantar o que se oferece à visão, engendrando formas outras, realidades inexistentes" (GUSMÃO, 2016, p. 4). Para Bachelard (2013), "a imaginação não é a faculdade de formar imagens da realidade; ela é a faculdade de formar imagens que ultrapassam a realidade, que cantam a realidade. É uma faculdade de sobre-humanidade" (BACHELARD, 2013, p. 16). Assim, a imaginação criadora passa a ter destaque na epistemologia de Bachelard.

Bachelard (2013, p. 16) nos apresenta uma epistemologia *diurna* (científica) e uma *noturna* (poética). Nesta pesquisa, são as ideias sobre a epistemologia noturna que nos orientam tratando de identificar uma face poética para a matemática. Da vertente noturna de Bachelard, temos um pensador que pautava seu conhecimento na imaginação, na intuição e na criatividade.

Gusmão (2016) salienta que o universo da imaginação em matemática nos apresenta um mundo aberto, dinâmico, vivo e em constante transformação: "o novo se faz presente, motivado pela intuição e a imaginação" (GUSMÃO, 2016, p. 7). Assim, "quando a imaginação tiver precipitado os elementos materialistas[111] não razoáveis, terá mais liberdade para a construção das experiências científicas novas" (BACHELARD, 1994, p. 155 *apud* GUSMÃO, 2016, p. 7).

A razão no processo de imaginação "consiste em encadear entre si as relações de ideias, mediante uma substituição de termos que é puramente analítica" (BRUNSCHVICG, 1945, p. 285-286, *tradução nossa*). No entanto, a imaginação vem antes da razão. Associar a epistemologia, que costuma ser vinculada à razão científica, à imaginação, na maioria das vezes ligada à razão poética, é um desafio embora haja racionalidade na criação. Então, Gusmão (2016) explica que há um pressuposto:

> A imaginação tem uma racionalidade (o que não deve ser confundido com ter uma lógica) que pode ser subsídio para o conhecimento em matemática. Razão e imaginação não são ações dicotômicas, ambas possuem características semelhantes, de criar significados e produzir conhecimentos para instaurar o

[111] Podemos dizer que toda teoria, toda "matéria", "substância", "produto" em matemática não se isolam em sua significação abstrata, mas possuem sua materialidade que trazem a marca do sujeito em sua completude, ou seja, em uma dialética entre imaginação e razão. A imaginação permite sonhar "além do mundo e aquém das realidades humanas bem definidas" (BACHELARD, 2003, p. 3).

> que ainda não existe. Razão e imaginação caracterizam-se como criadoras, ativas, abertas e realizantes (GUSMÃO, 2016, p. 5).

Nesse cenário, o ser humano é aquele que estabelece uma dialética entre imaginação e razão, produzindo conhecimento. Ele não é um "simples ajustador, mas é também modelador, fundidor, ferreiro. [...] Ele vive, pela imaginação, esse sustentáculo" (BACHELARD, 2003, p. 1). E mais: "uma teoria do conhecimento do real que se desinteressa dos valores oníricos se priva de alguns dos interesses que impelem ao conhecimento" (BACHELARD, 2003, p. 10). Temos, nessa perspectiva, o sentir reintegrado ao pensar.

As colocações da epistemologia *noturna* de Bachelard nos fazem refletir sobre nossas capacidades de imaginar e intuir e o papel dessas competências na elaboração de conhecimentos. Segundo Gusmão (2016, p. 8-9), uma multiplicidade de fatos, ideias e hipóteses é submetida à lei da imaginação. E, nessa multiplicidade, há agitação, porém, organizada como em um formigueiro, uma agitação em atividade.

3.2.2 A matemática que vem da intuição

Com base em Ostrower (2010, p. 55), os processos de criação ocorrem no âmbito da intuição a partir da concepção de que a criatividade é um dom da natureza humana. Diretamente ligada à essa postura, a sensibilidade cumpre um importante papel no desenvolvimento do potencial criativo, podendo ser vislumbrada e compreendida como prática de vida, ampliando as percepções de nossa mente. A intuição é um comportamento natural do ser humano, que flui a todo instante desde as situações mais simples às mais complicadas. Para compreendermos tais processos, é importante considerá-los em três instâncias distintas de acordo com Nicolau (2018):

> Num primeiro momento, como um processo que flui do inconsciente para o consciente, num movimento conhecido como inspiração; num segundo momento, como processos ligados diretamente às necessidades do ser humano, à existência imediata, provocando o surgimento de respostas para a subsistência, para o trabalho de um modo geral; e, num terceiro instante, como a sistematização da criatividade para a obtenção, de forma voluntária e consciente, de soluções e alternativas específicas para casos previamente determinados (NICOLAU, 2018, p. 14-15).

Outra concepção de Ostrower (2010) que partilhamos é a de que o impulso elementar e a força vital para criar provêm de áreas ocultas do ser. É possível que "delas o indivíduo nunca se dê conta, permanecendo inconscientes" (OSTROWER, 2010, p. 55). No entanto, a criação não é um processo que surge do nada. Nicolau (2018, p. 15) explica que o ser que cria tem as bases para a criação, e seu íntimo é um solo fértil pela experiência da vida. Além dos impulsos do inconsciente, entra nos processos criativos tudo o que o homem sabe: os conhecimentos, as conjecturas, as propostas, as dúvidas, tudo o que ele pensa e imagina. E o caminho entre inconsciente e consciente por onde trafega a inspiração é a intuição.

Ostrower (2010) diz que a intuição vem a ser um dos mais importantes modos cognitivos do homem permitindo que, instantaneamente, o sujeito visualize e internalize a ocorrência de fenômenos, julgue e compreenda algo a seu respeito:

> O momento da visão intuitiva é um momento de inteira cognição que se faz presente. Internalizamos de pronto, em um momento súbito, instantâneo mesmo, todos os ângulos de relevância e de coerência de um fenômeno. Nesse momento apreendemos-ordenamos-reestruturamos-interpretamos a um tempo só. É um recurso de que dispomos e que mobiliza em nós tudo o que temos em termos afetivos, intelectuais, emocionais, conscientes, inconscientes, embora não sejam visíveis nem racionalizáveis os níveis intuitivos, nem saibamos da sua ação integradora. A intuição, portanto, está na base dos processos de criação (OSTROWER, 2010, p. 55-56).

Entre várias conotações atribuídas à intuição, especialmente à intuição matemática, Heinzmann (2002) destaca os seguintes usos:

> 1) A intuição concebida como instrumento de invenção científica. Nesse sentido, ela pode ter uma função heurística ou crítica-normativa. As atuais representações de figuras geométricas são um exemplo da primeira função; na Antiguidade, a limitação dos números quadrados e cúbicos na álgebra, levado em consideração a intuição espacial, exemplifica a segunda função.
> 2) A intuição como base epistemológica do conhecimento. Se quisermos assegurar à palavra intuição tomada nessa última perspectiva o máximo de rendimento semântico, ela designará uma apreensão simples (direta, imediata, sem conceito) de um objeto ou da validade de um domínio do conhecimento, em oposição a um conhecimento discursivo, intermediário, por demonstração. No entanto, o simples possui tantas significações quantos tipos de complexidade: ausência de composição, ausência de inferência, ausência de causas, ausência de capacidade de definir um termo, ausência de atividade, ausência de justificação, ausência de símbolos, ausência de pensamentos, etc. (HEINZMANN, 2002, p. 2, *tradução nossa*).

Diante de um conceito de difícil abordagem, Del Vecchio Junior (2010, p. 134) ainda estabelece, a partir das acepções indicadas acima, que à intuição matemática cabe “o ato originário, fundamental, do qual decorre a definição e a construção dos objetos matemáticos (algo intimamente ligado à capacidade humana de criar hipóteses e analogias), bem como a noção geral e percepção de unidade do conhecimento”. Com base nessa definição, o autor declara que essa é uma formulação *ambiciosa* da intuição, pois sob tal perspectiva, uma vez concebido um objeto, a intuição dá conta de sua delimitação sem qualquer recurso exterior, o que propicia sua efetiva definição em termos linguísticos e sua aplicabilidade na demonstração (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 134).

Tal teoria não compatibiliza com a necessidade de uma clara e irrevogável demonstrabilidade na matemática, sobretudo a partir do século XIX, no qual busca-se a solução de um problema ao qual a intuição não tem o que responder: “o projeto cartesiano, no qual toda a construção da matemática, e mais, toda a verdade em ciência, decorre de um exercício do intelecto lastreado pela intuição” (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 134-135).

No entanto, acreditamos que a intuição tem um papel importante na elaboração e no acesso aos fundamentos matemáticos, e sua intervenção pode constituir-se como um “elemento metodicamente justificável” (HEINZMANN, 2013, p. 12, *tradução nossa*) no percurso para a compreensão do desenvolvimento do conhecimento matemático. É nesse sentido que argumentamos a favor da intuição como constituinte fundamental da matemática. No entanto, deixamos claro que sustentar essa tese não significa excluir o procedimento lógico-demonstrativo do processo de criação. Só é necessário ressaltar que toda demonstração é direcionada pela intuição[112], como Poincaré (1923 *apud* DEL VECCHIO JUNIOR, 2010) nos explica:

> Para edificar a aritmética, assim como para a geometria ou para outra ciência qualquer, precisa-se de outra coisa além da lógica pura. Essa outra coisa, não temos outro termo para designá-la senão como intuição. Mas quantas ideias diferentes se escondem sob essa mesma palavra? Comparemos esses quatro axiomas:
> 1º Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si;
> 2º Se um teorema é verdadeiro para o número 1 e se demonstra-se que é válido para n+1, desde que o seja para n, ele será verdadeiro para todos os números inteiros;
> 3º Se sobre uma reta o ponto C está entre A e B, e o ponto D entre A e C, o ponto D estará entre A e B;
> 4º Por um ponto não pode passar mais de uma paralela a uma reta.
> Os quatro axiomas devem ser atribuídos à intuição, e, todavia, o primeiro é o enunciado de uma das regras da lógica formal; o segundo, é um juízo sintético a priori, o fundamento da intuição matemática rigorosa; o terceiro, um apelo à imaginação, e o quarto, uma definição disfarçada. (...) Temos, portanto, vários tipos de intuição; primeiro, um apelo aos sentidos e à imaginação; em seguida, a generalização, por meio de indução, calcada, por assim dizer, nos procedimentos das ciências experimentais; temos enfim a intuição do número puro, donde se extrai o segundo axioma enunciado outrora e que pode engendrar o verdadeiro raciocínio matemático (POINCARÉ, 1923, p. 20-22 *apud* DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 158-159).

Com base nas colocações de Poincaré (1923 *apud* DEL VECCHIO JUNIOR, 2010), é possível notar que a natureza do conhecimento matemático, um processo tão complicado de ser compreendido, pode ser relacionado, ao final das contas, ao exercício do intelecto humano.

[112] Como instrumento de invenção científica ou como base epistemológica do conhecimento (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 158).

Como explica Del Vecchio Junior (2010, p. 159), o intelecto desempenha várias funções, age de várias maneiras e impõe novos desafios e demandas a cada nova construção ou relação introduzida.

De acordo com Gusmão (2016, p. 10), a intuição não deve ser eliminada do processo de criação matemática, pois ela complementa a lógica. No entanto, o autor diz que é necessário educá-la por meio de um trabalho intenso, consciente e intelectual de formação:

> O desafio então é saber sob quais condições o acesso intuitivo ao conhecimento pode ser considerado como racional, isto é, tem uma racionalidade. Quando se fala em intuição, não se está referindo ao comportamento, a articulação e percepção do mundo, de forma imediata baseada no senso comum, mas sim à capacidade de identificar o que é inteligível, isto é, racionalmente acessível e que permita ascender ao conhecimento, especialmente o matemático. Esse que tem sua primazia na racionalidade (GUSMÃO, 2016, p. 10).

Folina (1992 *apud* DEL VECCHIO JUNIOR, 2010) ressalta, por exemplo, que o recurso à intuição em geometria é indispensável. Ele diz que na matemática obtemos conclusões "tanto do que é dado pelo conceito quanto do que é dado pela 'construção' do conceito. Uma vez que estamos construindo (linhas, pontos, triângulos), somos guiados através de nossas provas por intuição e pela síntese da imaginação" (FOLINA, 1992, p. 21-22 *apud* DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 160, *tradução nossa*).

Seguindo essa direção, nossa pesquisa pode ser subsidiada por trabalhos do matemático e filósofo Henri Poincaré (1854-1912) que aborda a intuição no processo de construção do conhecimento matemático, o que contribui para um olhar mais amplo sobre a sua natureza. No que diz respeito às concepções de ciência e sua relação com a matemática, esse pensador compartilha as ideias de Bachelard quando defende que a questão da imaginação se desenvolve através do exercício da intuição.

Assim, Poincaré também coopera para a existência de uma *epistemologia da imaginação e da intuição* na área da matemática. Então, por esse caminho, descoberta e criação são direcionadas pela imaginação e pela intuição a partir de hipóteses que são aproximações idealizadas do real. Essas são as ideias de Poincaré e Bachelard em relação às potencialidades dos seres humanos e à compreensão da realidade. Negrelli (2008) nos explica o papel das hipóteses no processo de idealização da realidade:

> São as hipóteses que permitirão realizar um recorte da realidade inicial (o mundo exterior), surgindo uma realidade intermediária, que é a que será modelada. A realidade intermediária é uma representação recortada da realidade inicial que será modelada matematicamente. É formulada através de hipóteses e aproximações simplificadoras dadas por situações limites, que são obtidas geralmente por intuição sobre a realidade inicial, pois supõem uma

> escolha. É uma abstração da realidade inicial que supõe a identificação de uma situação bem estruturada desta (NEGRELLI, 2008, p. 40).

Gusmão (2016, p. 9-10) acrescenta que, segundo esses filósofos, somos todos seres profundos com capacidades imensas para criar, imaginar, poetizar e produzir. Além disso, o confronto da lógica com a intuição coloca em evidência que o homem é, ao mesmo tempo, razão e imaginação, ou seja, ambos produzem pela racionalidade, ligada à objetividade, e pela sensibilidade, ligada a subjetividade[113]. A imaginação e a intuição estão presentes na matemática como em qualquer outra área do conhecimento. Entendemos com Bachelard e Poincaré que esses elementos são ferramentas que orientam nossas escolhas no desenvolvimento de conceitos. Por exemplo, ao elaborar uma teoria matemática com base em regras lógicas, é a intuição que "decide" as perguntas a serem feitas e as ideias a serem escolhidas, permitindo a conclusão de um raciocínio.

3.3 A realidade matemática

Como sugerido em vários momentos, o conhecimento matemático surge das necessidades da vida humana e, ao satisfazê-las, o homem também acaba produzindo necessidades de ordem superior. Aleksandrov (1991a, p. 37, *tradução nossa*) explica que "essas necessidades práticas e o pensamento abstrato que emergiram delas exerceram uma constante interação entre si. Acontece que a produção do conhecimento matemático vai além de sua imediaticidade".

Esse autor reforça que "a reflexão abstrata vai frequentemente além das necessidades imediatas de um problema prático" (ALEKSANDROV, 1991a, p. 37, *tradução nossa*). Tal característica da matemática é uma alavanca para o seu desenvolvimento e, "uma vez que a realidade material confirme ou refute essas abstrações, faz-se necessário reformulá-las para descartar, caso seja refutada, ou aprimorar, caso seja confirmada" (CANDIOTTO, 2016, p. 125). A partir daí, sugere-se que todo conhecimento surge da vida cotidiana que, basicamente, se caracteriza pelas generalizações empíricas[114]. No entanto, trata-se de um processo de complexificação da realidade material que incorpora outros patamares de conhecimento,

---

[113] A história da matemática revela criações intelectuais inesperadas quanto efêmeras, ligadas a um trabalho permanente de investigação e maturação intelectual. Newton, por exemplo, teve a intuição da força da gravitação universal para pensar a dinâmica dos sólidos e corpos em queda. Srinivasa Ramanujan (1887-1920), matemático autodidata indiano, era conhecido e respeitado por sua intuição numérica prodigiosa (GUSMÃO, 2016, p. 9).
[114] Série de observações empíricas que criam uma regularidade aparente, na qual criam generalizações que, geralmente, expressam algum caso singular do mesmo (CANDIOTTO, 2016, p. 126).

realizados por meio do pensamento. Depois, a generalização teórica que, segundo Candiotto (2016, p. 126), não se limita às observações aparentes dos fenômenos, os consideram desde o movimento de seu desenvolvimento histórico e lógico.

O amplo campo de aplicações da matemática a coloca num lugar que pode levar a uma compreensão de inerência de seu objeto à realidade física – a geometria, por exemplo, é entendida pelo tratamento das formas e admitida como constitutiva da própria realidade física. Contudo, ela deveria ser vista como uma elaboração teórica no movimento da produção material da vida humana, como afirma Candiotto (2016, p. 127):

> Essas aplicações merecem uma análise de sua gênese e da complexificação que adquire o conhecimento matemático no curso do desenvolvimento histórico da humanidade. Em determinadas épocas, essas simples aplicações que fazemos hoje era o ápice da ciência e despendeu muito tempo para ser desenvolvido. O pressuposto é que a análise histórica da Matemática possibilita a compreensão da sua complexificação no curso do desenvolvimento das forças produtivas e cujas necessidades também delineia. As necessidades surgidas na vida dos homens exigem o conhecimento matemático da realidade material, o mais aprofundado possível, da mesma forma que ele, em sua relativa autonomia, avança em seus sistemas de fórmulas, teoremas etc. (CANDIOTTO, 2016, p. 127).

Assim, a realidade matemática se dá a partir de suas aplicabilidades na realidade material em diferentes níveis de complexidade e de sua relação com outras áreas do conhecimento que, às vezes, num primeiro momento, até se mostra sem aplicação ou sem relação imediata com tal realidade ou demais ciências, como as ciências da natureza (Física, Astronomia, Mecânica etc.). Um exemplo é a geometria não-euclidiana, que, num primeiro momento, não possuía relação com a realidade material, sendo nomeada de *geometria imaginária*. Com base em Candiotto (2016), defendemos que o movimento das aplicações matemáticas à satisfação das necessidades da vida humana se conjuga dialeticamente com a produção de conhecimento matemático puro. De todo modo, a matemática não é absolutamente pura, como uma abstração idealista, mas é reflexo da realidade.

É nossa intenção tomar aqui a ideia exposta por Almeida (2011) de que a matemática é um componente parcialmente estruturante dos processos mentais racionais que podemos qualificar como puramente humanos: “ela se desenvolveu acompanhando *pari passu* a evolução da raça humana, portanto sua história se entretece com a da humanidade” (ALMEIDA, 2011, p. 9). De forma resumida[115], apresentamos, a seguir, alguns dos estágios da evolução dos

---

[115] Ver todos os estágios de forma detalhada em ALMEIDA, M. C. **Origens da matemática**: A pré-história da matemática - o neolítico e o alvorecer da história. Curitiba: Progressiva, 2011. 366 p.

processos cognitivos da matemática. De acordo com Almeida (2011, p. 46-49), eles nos mostram como os humanos, além de contarem com importantes componentes inatos quando do surgimento do pensamento simbólico, adquiriram a capacidade de pensar matematicamente e desenvolveram toda a matemática que existe hoje a partir de sua capacidade intelectual, experiência sensível e intencionalidades.

O primeiro estágio é o da matemática não verbal e não simbólica, no qual as numerosidades desempenhavam papel fundamental na estruturação do conceito de número em nosso cérebro; a segunda fase é a matemática paleolítica, que pode ser conceituada como a etnomatemática dos povos caçadores-coletores, com ordenações, comparações e uma contagem elementar (a correspondência um a um entre dois conjuntos). Nesse estágio, a mais importante aquisição cognitiva para a matemática foi o início do pensamento simbólico.

Ainda temos a terceira etapa da matemática neolítica dos povos agricultores-pastoreadores, que exigiu a concepção de novos métodos de quantificação, de conceitos, como área e volume, e de um novo padrão de rigor nas medições e nas técnicas de engenharia, de novas práticas de contabilidade e de controle; o quarto estágio é o da matemática escrita, no qual surgiram condições para o início de uma matemática abstrata; a quinta fase é a matemática grega, que assume integralmente um caráter abstrato, com os números se desvinculando da realidade física e passando a ser "ideais", além do padrão de rigor seguido até hoje, com a introdução do raciocínio lógico e das demonstrações; o sexto e último estágio é o da matemática formal, classificado como o estágio atual da matemática: abstrato, formal, axiomático (ALMEIDA, 2011, p. 46-49).

Acompanhando esses momentos, é possível notar que a matemática se adequou às circunstâncias produzindo novos conceitos e práticas a cada época. Então, na realidade, a matemática é uma ciência histórica e social que vem evoluindo ao longo do tempo, na qual cada fase constitui parte de seu processo evolutivo. Assim, mais uma vez, é possível descartar a concepção de um conhecimento pronto e acabado que fica à espera de ser desvendado.

Segundo o estudo[116] de Passes (2006, p. 245), a matemática do povo Pa'ikwené[117] é um conhecimento corporificado e metafórico, conceitualmente inventivo e lexicalmente profuso[118],

[116] Ver detalhes da 'matemática Pa'ikwené' em: PASSES, A. **Do um à metáfora. Para um entendimento da matemática pa'ikwené (palikur)**. Revista de Antropologia. Universidade de São Paulo. v. 49. n. 1. São Paulo, 2006.

[117] Os Palikur, ou Pa'ikwené, para usar a autodenominação, são um povo arawak do norte do Brasil e da Guiana Francesa, com uma população atual de cerca de 2 mil membros que vivem em ambos lados do rio Oiapoque (PASSES, 2006, p. 274).

[118] Alguns numerais têm mais de duzentas diferentes formas no uso corrente, graças a um intensivo processo de transformações de morfemas baseado no acréscimo de afixos. Portanto, uma palavra-número pode pertencer a vinte e uma classes numéricas que se relacionam a cinco diferentes categorias semânticas, que incorporam diversos

que classifica e expressa o mundo em que se vive, onde seus números operam simultaneamente nos níveis literal e figurativo. Isso significa que os números aparecem como símbolos com significados fixos e determinados e como imagens polissêmicas de diferentes classes de coisas que compõem o universo nativo. O autor esclarece que “cada numeral é fixo semanticamente, mas a morfologia permite-lhe múltiplos significados qualitativos. Portanto, o numeral não é apenas um índice abstrato lógico. Ele também é uma variedade de imagens baseadas no mundo físico e concretamente expressas nas palavras faladas” (PASSES, 2006, p. 262).

Passes (2006), ao descrever a matemática pa'ikwené, nos dá mais um exemplo que abre nossos olhos em relação à visão de uma matemática não corporificada, ou seja, com uma existência independente do mundo humano num reino abstrato além da mente e da matéria embora acessível por meio do pensamento racional. A análise da matemática desenvolvida pelo povo pa'ikwené também nos lembra, segundo Passes (2006), que:

> Na origem, quantificar e medir o mundo não são ações abstratas, mas existenciais e pragmáticas. Estão enraizadas na percepção: a experiência física, psicológica e sensorial. [...] As fórmulas matemáticas, que incluem as de tipo geométrica e algébrica, são formas que os humanos têm de conceber o meio baseando-se em sua exploração e experiência perceptiva a respeito dele (PASSES, 2006, p. 248).

O trabalho de Passes (2006) aborda o fenômeno da metáfora na matemática – “metaforizar[119] parece ser um aspecto inato, natural, universal da cognição humana” (PASSES, 2006, p. 245) – na fala indígena, especificadamente, argumentando que a matemática em si é uma metafórica e que os números indígenas descrevem com imaginação os elementos que compõem o mundo tanto quanto os denota e computa. Conforme Black (1962, p. 242), “talvez toda ciência deva começar com uma metáfora e terminar com álgebra; talvez sem metáfora nunca teria existido qualquer álgebra”.

O primeiro conhecimento e percepção experimental que nós humanos temos é do nosso próprio corpo, e, com base nisso, “derivam esquemas conceituais que vamos estendendo metaforicamente, conectando o domínio de experiências corporais a domínios extra corporais, que vão se expandindo do concreto e social para o crescentemente abstrato” (PASSES, 2006, p. 251). Portanto, conforme Passes (2006, p. 252), a metáfora, sendo ativa na conceituação da realidade, é tanto *experimentada* (subjetiva) quanto *imaginativa* (criativa). Esses atributos

---

estados e atributos discretos (macho/fêmea, concreto/abstrato, animado/inanimado, natural/sobrenatural), assim como idéias aritméticas e geométricas específicas (PASSES, 2006, p. 245).

119 A metáfora em si é corporificada, está enraizada na percepção humana do ambiente e interage com o conhecimento de nossos corpos (PASSES, 2006, p. 251).

permitem muitos conhecimentos culturalmente diferenciados da realidade perceptível, em oposição à ideia objetivista de uma única realidade verdadeira.

De acordo com Passes (2006), a metaforização ocorre na *matemática pa'ikwené*[120], pois um número indígena não apenas enumera ou simplesmente qualifica, mas também expressa qualidades, originando e sendo transferido de objetos aos quais o número se refere pelo menos no caso de coisas concretas. Por exemplo, nem todos os *uns* pa'ikwené são necessariamente a mesma coisa: pahavú, o *um* pa'ikwené em *uma mulher* é qualitativamente diferente de pahampú, o *um* em *um animal morto*, ou pahakti, o *um* em *uma flor* (PASSES, 2006, p. 263). A matemática desenvolvida pelos Pa'ikwené revela um conhecimento longe da visão platônica ao se mostrar firmemente plantada no contexto social e cultural, que molda e reflete o que é o pensar e agir pa'ikwené. Assim, a matemática pa'ikwené é parte do estoque rico e diverso do que é fazer matemática.

Embora a metáfora seja vista como subjetiva, irracional e poética, e a matemática como universal, objetiva, racional e verdadeira, sendo consideradas oponentes, Lakoff (1987), entre outros pesquisadores, sugere que a metáfora é instrumental não apenas na arte e na religião, mas também na filosofia e na ciência, inclusive na matemática. Passes (2006, p. 247) destaca que, mais recentemente, Lakoff & Nuñez (2000) propuseram a congruência entre a metáfora e a matemática especificamente; eles argumentam que a última depende da primeira, ou seja, que a matemática tem uma base metafórica e corporificada.

Embora os sistemas classificatórios das sociedades de povos indígenas sejam tipicamente metafóricos, isso não implica que sejam ilógicos ou irracionais, menos ainda que não sejam verdadeiros (PASSES, 2006, p. 262). Acontece que, ainda com o reconhecimento da racionalidade e lógica da metáfora, a aceitação da afinidade entre a metáfora e a classificação pode, às vezes, ser colocada em questão. Passes (2006, p. 262) cita algumas observações de Yalman (1968, p. 71 *apud* PASSES, 2006, p. 262) sobre as ferramentas conceituais do pensamento abstrato nativo: "estaria Yalman dizendo que, diferente dos povos ocidentais, ameríndios não pensam matematicamente, mas (apenas) metaforicamente?". No entanto, logo em seguida, rebate essa consideração como as seguintes colocações:

> Não apenas o ser humano pensa de ambas maneiras, metaforicamente e matematicamente, mas também as duas são inter-relacionadas cognitivamente – a matemática (em si um tipo de classificação) sendo derivada de uma

---

[120] A língua pa'ikwené é aglutinativa. A maioria das palavras é formada por um radical acrescido de uma multiplicidade de afixos, ou morfemas, designando/expressando conceitos, básicos e sofisticados, que indicam uma capacidade extremamente desenvolvida para pensamento abstrato e analítico, inclusive no campo da matemática (PASSES, 2006, p. 254).

> metáfora corporificada. E, como alguém (esqueci quem) perguntou uma vez, pode a matemática ocidental ser ela mesma uma forma de metáfora? (PASSES, 2006, p. 262-263).

O exemplo da análise de um sistema de numeração indígena contribui de maneira significativa para compreendermos como a matemática é construída a partir de uma adequação ao meio social, natural, econômico e mítico em que cada cultura humana se encontra. E, além disso, favorece um olhar que enxerga o humano que há na matemática através da intuição e da imaginação desenvolvidas nesse processo de criação. Isso significa que não existe uma única forma de fazer matemática para todas as sociedades existentes no mundo, ou seja, o que há é uma variedade de concepções matemáticas criadas pelos grupos de indivíduos, orientados pela sua realidade e não uma matemática universal dada *a priori*.

3.3.1 O sentido das verdades matemáticas

Desde a pré-história, a humanidade estabeleceu diferentes vínculos com o mundo e desenvolveu várias formas de conhecimento sobre a realidade através da religiosidade, da metafísica, do mito, da filosofia, da ciência, do senso comum. O conhecimento sobre a realidade nos remete à ideia de verdade sobre as coisas do mundo. No âmbito dessas reflexões, Kubrusly (2012) nos apresenta uma ideia sobre a condição do ser humano compreender as coisas:

> Mapear universos dentro de pessoas é a maneira, talvez a única maneira, de compreender o mundo. Poderíamos e podemos dizer que dentro de cada um de nós, mora ou vive um mundo completo, um universo com todas as coisas mais e mais diversas, das estrelas às ideias que se comprimem, se nos atravessam e se abrem para um novo mundo, dentro de nós. Como identificar o exterior ao qual pertencemos com o que produzimos de sensações e ilusões dentro de nós? Qual estrutura física se nos permite tal identificação? Certamente uma estrutura física que seja descrita por uma topologia não orientável, análoga aos espaços projetivos multidimensionais e certamente, contendo uma faixa de Möbius[121] (KUBRUSLY, 2012, p. 7).

Putnam nos apresenta uma teoria da verdade, que contempla diversos componentes que em outras teorias são excluídos, baseada em sua posição realista interna[122]. Tal concepção

---

[121] Essa surpreendente faixa que se torce em si e que produz completa identificação entre fora e dentro, exterior e interior, e que, usada por J. Lacan para modelar matematicamente as relações inconsciente-consciente. Somos uma faixa de Möbius, ou pelo menos temos uma grudada, topologicamente, em nossas cabeças. É essa estrutura möbiuseana que nos torna humanos, falantes, conscientes de nossa finitude e inventor, consequentemente, de infinitos (KUBRUSLY, 2012, p. 7).

[122] O realismo interno, proposto por Putnam, se contrapõe ao realismo metafísico. De acordo com a perspectiva internalista putnamiana as descrições da realidade serão sempre as *nossas* descrições da realidade. Elas, admitidamente, incorporam elementos subjetivos. No internalismo não se pretende que possa existir *a* descrição verdadeira ou correta da realidade. As nossas descrições e teorias devem ser consistentes e se ajustar aos dados

rejeita o realismo metafísico e o positivismo sem cair no relativismo radical. Acreditamos que essa concepção pode servir de base para nossas ideias sobre as verdades matemáticas, como idealizações racionais da realidade, a partir das experiências e do imaginário, pois ela defende uma forma peculiar de verdade, que admite que os padrões de racionalidade podem mudar com o tempo e que as noções de justificação racional e verdade estão relacionadas, preservando a objetividade humana (objetividade ainda em um sentido bastante tradicional).

Nesse contexto, a verdade[123] é ao mesmo tempo adequação e aceitabilidade racional. Adequação entre o entendimento e a realidade, mas não uma realidade incontaminada e totalmente independente e sim "uma realidade constituída por fatos e objetos que dependem dos esquemas conceituais. E, precisamente porque a realidade é constituída desse modo, que a verdade é também aceitabilidade racional idealizada"[124] (NAVIA, 1999, p. 34).

Para Putnam (1988 *apud* NAVIA, 1999), uma crença que é justificada em condições ideais, que passa por todos os testes imagináveis e, ainda assim, é corroborada, que satisfaz todos os critérios relevantes para ser aceita racionalmente como verdadeira, é de fato verdadeira. Embora não possamos atingir condições epistêmicas ideais, podemos, proveitosamente, imaginá-las, e é isso que aprendemos a fazer na prática. Não dispomos de uma visão do *Olho de Deus*, como diz Putnam, mas dispomos de vários pontos de vista de pessoas reais que refletem, razoavelmente, suas descrições e teorias.

Embora essa reflexão não esteja imune aos diversos interesses e propósitos envolvidos nas descrições e teorias propostas pelo sujeito, "a racionalidade humana já provou ser capaz de garantir certa objetividade, também humana e suficiente" (ALVES, 2007, p. 75). Assim, podemos ter várias visões do mundo e percebemos esse mundo por pontos de vista de onde construímos nossos modelos: mapas explicativos. A matemática é uma das possíveis maneiras que propõe verdades sobre o mundo, mas que é independente dele. A história da matemática se constrói por feitos humanos, previsões, aproximações.

Uma prova de que a matemática não é a verdade absoluta sobre a realidade é buscar as diversas maneiras como homem foi capaz de produzi-la, permitindo seu reconhecimento como

---

obtidos experiencialmente e ao nosso corpo teórico total. Nesse sentido, elas sofrem restrições empíricas e teóricas para serem racionalmente aceitas (ALVES, 2007, p. 75).

[123] "Desde a perspectiva internalista, a "verdade" é uma espécie de aceitabilidade racional (idealizada) – uma espécie de coerência ideal de nossas crenças entre si e com nossas experiências, considerando-as como experiências representadas em nosso sistema de crenças – e não uma correspondência com estados de coisas independentes da mente ou do discurso" (PUTNAM, 1988 *apud* NAVIA, 1999, p. 23).

[124] Isso significa que em um certo esquema conceitual, "p" tem sentido e é verdadeiro então existirão boas razões a favor de "p"; e não podem existir, em condições epistêmicas excelentes, boas razões contra a aceitação de "p". Isso não significa que se dê uma aceitação fática e sim que em condições epistêmicas aperfeiçoadas, os sujeitos epistêmicos pertinentes aceitariam "p" (NAVIA, 1999, p. 34).

forma de expressão da criatividade humana. Na matemática, algumas criações não rigorosas foram chamadas empíricas, e seus métodos não foram muito aceitos. No entanto, é possível identificar uma ideia que mostra o ponto de vista oficial sobre a matemática: a criação de uma espécie de jogo mecânico por Hilbert que, a partir da concepção de que a matemática nos dá a certeza absoluta, pensou sua construção por métodos mecânicos.

Hilbert pretendia encontrar um sistema axiomático para toda a matemática, uma teoria formal feita em lógica simbólica, livre da linguagem humana subjetiva e com regras como de um jogo. Se alguém constrói uma prova por essa teoria, uma máquina é capaz de prová-la e verificar erros. As regras do jogo devem ser tão claras que podem ser operadas por uma máquina. Esse exemplo nos mostra como existe na matemática uma criatividade ilimitada.

Acontece que, mesmo diante de tamanha criatividade do homem, toda teoria matemática tem uma complexidade limitada. Se não, os seres humanos não construiriam esse sistema. Segundo Chaitin[125] (2017), só no mundo platônico a matemática tem uma complexidade infinita e uma quantidade infinita de informações. Nenhuma teoria humana contém todas as informações, e quem nos mostra isso é Gödel. Suas ideias sobre a matemática são as mais revolucionárias do século XX, pois introduzem conceitos totalmente novos. São trabalhos voltados para a metamatemática (uma espécie de autocrítica da matemática), que foi proposta por Hilbert como uma maneira de provar, matematicamente e filosoficamente, que a matemática tinha a certeza absoluta.

A partir das colocações acima, podemos citar o percurso histórico conhecido como *crise nos fundamentos da matemática*[126] que, segundo Cafezeiro *et al* (2016, p. 165), configurou-se na expectativa sedimentada ao longo de muitos séculos de que a matemática ocuparia o lugar de um saber totalizador, regulador da certeza e da verdade. Foi um período de controvérsias, que se iniciou em meados do século XIX, e tem nos Teoremas de Gödel, de 1931, um momento de grande visibilidade (CAFEZEIRO *et al,* 2016, p. 163). Gödel com o seu Teorema da Incompletude nos mostra as limitações da matemática enquanto uma produção do intelecto humano, com a explicação de que, num sistema arimetizável, sempre há uma sentença que

---

[125] Comentários do Professor Doutor Gregory Chaitin em sua palestra intitulada “A criatividade na Matemática” na Disciplina “Seminários” (1S2017) em 24/05/2017 no Auditório Maria Irene (UFRJ-CCMN-NCE-HCTE). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=0YsAf9uP8tE>.

[126] As questões que vinham sendo apresentadas por matemáticos aderentes à ordem legitimada e que buscavam o fortalecimento desta mesma ordem despertaram para aquela comunidade a necessidade de uma nova formulação de conceitos que permitissem operar em terrenos que antes não eram considerados pertencentes ao escopo da matemática. De forma bem ampla, eram questões que exibiam grande aderência com leituras subjetivas, proximidade com coisas mundanas, fronteiras percebidas como inexatas, ou necessidades de expressões não capturadas pelo modo dicotômico e totalizador da época, que se expressavam matematicamente em paradoxos e problemas em aberto (CAFEZEIRO *et al*, 2016, p. 164).

escrevemos no próprio sistema, que não conseguimos provar, ou seja, ela não nos dá a certeza. Não existe um conjunto de axiomas que contemple toda a matemática.

Desta forma, Gödel sinaliza que a representação formal nunca é fiel à sua ideia e que a matemática é uma representação da realidade nem tão poderosa a ponto de resolver todas as coisas. Ela não dá conta sozinha de resolver os problemas que consideramos do seu escopo, embora tenha uma configuração de saber diferenciado. Gödel constatou que sempre haverá lacunas nas certezas da matemática, mas que isso não é uma questão da matemática e sim dos processos de representação em qualquer área da vida. Com o intuito de reforçar essas colocações, citamos Goldstein (2008):

> A inevitável incompletude até de nossos sistemas formais de pensamento demonstra que não existe um fundamento sólido que sirva de base a qualquer sistema. Todas as verdades – mesmo aquelas que pareciam tão certas a ponto de serem imunes a toda possibilidade de revisão – são essencialmente manipuladas. De fato, a própria noção da verdade objetiva é um mito socialmente construído (GOLDSTEIN, 2008, p. 58).

O Teorema de Gödel também nos indica que nossas mentes não funcionam como modelos computacionais que reduzem todo o pensamento a seguir comandos, ou seja, nosso pensamento não se resume a seguir regras. As limitações do conhecimento matemático refletem os limites da nossa mente. A construção dos alicerces da matemática como a conhecemos hoje, caracterizada pelo seu processo de formalização, está associada às formas de organização do pensamento humano, assim como qualquer outra forma de conhecimento.

A matemática traz nos seus fundamentos “as sementes de seus limites. Essa é a conclusão do trabalho de Gödel, que certamente feriu o orgulho de muitos que acreditavam que a matemática fosse expressão de verdades absolutas, acessíveis à mente humana” (GLEISER, 2015, p. 301). Então, a matemática também deve ser reconhecida como um processo que demanda a consciência da incompletude como qualquer sistema criado pelo ser humano para interagir com o mundo. Gleiser (2015) complementa que:

> A mecanização do pensamento humano a partir de uma sequência fixa de regras lógicas é mera fantasia. Se essa conclusão é decepcionante para aqueles que nutrem sonhos de um domínio platônico em que residem verdades matemáticas eternas, para outros ela é profundamente inspiradora, revelando a incrível plasticidade da criatividade humana (GLEISER, 2015, p. 303).

Por consequência, Cafezeiro *et al* (2016, p. 173) diz que as verdades não estão espalhadas no mundo aguardando para serem descobertas pelos matemáticos, ou seja, elas são construídas pelos humanos. A autora ainda afirma que essa concepção destitui das provas o papel de garantia da verdade, isto é, as reposiciona como instrumento de comunicação entre os matemáticos de forma a favorecer o convencimento a respeito de uma construção. Por essa perspectiva, a matemática deixa de assumir o papel de reveladora das verdades do mundo e guia da *boa razão* (CAFEZEIRO *et al*, 2016, 173).

Tal concepção reposiciona a matemática como forma de expressão humana, quando descarta sua vinculação com a ideia de verdade absoluta. Assim, argumentamos a favor de uma abordagem que coloca a matemática numa rede de relações, na qual se articulam conhecimento, interesses e efeitos de verdade que, de acordo com Foucault (2013, p. 365), permite compreender a matemática como um campo de saber que se reconhece articulador da verdade.

CAPÍTULO 4

Um objeto cultural e social

Não há como evitar: toda história busca o seu começo, todo começo o seu fim e tudo é sempre esse agora que não faz sentido. É a morte que nos possibilita e é a consciência que dela temos que nos fez humano, quando inventamos o tempo, construímos deuses e pintamos tempo e deuses nas cavernas. Quando cantamos os sons do pensamento e projetamos palavra e matemática. Quando observamos o balé das estrelas, anotamos tudo e éramos deuses; burlando o tempo criamos o eterno e percebemos que ainda não tínhamos chegado lá, que na verdade nem sabíamos aonde queríamos ir; que na verdade não éramos nada, e então, inventamos o nada. Adoramos o nada e em sua homenagem erguemos sonhos e realidades, e tivemos tantas certezas e incertezas que chegamos a pensar que eram dessas essências que eram feitas todas as nossas vontades e todo o pensamento. E eram. Ou não? [...] O homem torna-se ciência, não pela grandeza de igualar-se a um Deus, mas por pura desistência e resignação. É só quando desistimos finalmente do infinito que organizamos o pensamento em explicações convincentes, que visam descrever um entendimento que de fato não possuímos, do qual no máximo nos aproximamos de maneira tênue, num laboratório, onde a vida é a imitação da vida e a natureza entre paredes e entre parêntesis é sempre nunca virgem. É para aplacar a ansiedade insuportável de nunca poder chegar ao cume que se constrói o cenário da ciência.[127]

Ricardo Kubrusly

A matemática é um objeto social e cultural construído pelo homem a partir das inquietudes humanas em relação ao mundo e não por uma espécie de saber divino. Para isso, aproveitamos mais uma vez as palavras de Kubrusly e resgatamos – tal concepção já foi apresentada nos capítulos anteriores – a ideia que compartilhamos sobre as potencialidades dos seres humanos que os tornam capazes de fazer a matemática.

Kubrusly (2013, p. 6) diz que "nós, que morremos e que sabemos disso, vivendo estranhamente misturando natureza e cultura, identificamos, permanentemente, interior-exterior, construindo um universo completo com todos os seus milhões de ingredientes dentro de nós". Esse matemático ainda nos lembra, com base em Lacan (1977), que temos um universo completo dentro de nossas cabeças, ou melhor, do corpo que trazemos, e que gera tudo o que somos ou sentimos[128] (KUBRUSLY, 2013, p. 6) e (por que não?) também o que fazemos...

---

[127] "Matemática para Poetas" em Pensando no Infinito: Pequenas Digressões Matemático Filosóficas e outros Pecados. Departamento de Matemática da UFRJ. Disponível em < www.dmm.im.ufrj.br/~risk/pdf/Finito.pdf >. Acesso em: 06/02/2019.

[128] Lacan (1977) constrói para além de simples analogias, uma nova interpretação do sujeito pela *Fita de Möbius*, objeto com propriedades topológicas bastante peculiares que estabelece uma possibilidade explicação teórica para o arranjo entre as instâncias conscientes e inconscientes do sujeito e suas relações recíprocas. A conhecida (pelos matemáticos) propriedade deste estranho objeto, a de identificar interior e exterior, anulando o sentido dessas qualificações do ponto de vista global, mas permitindo, no entanto, que localmente ainda possamos ter a ilusão de dentro e fora, chama-se Não-Orientabilidade (KUBRUSLY, 2013, p. 6).

A nosso ver, a grande contribuição da citação acima é nos lembrar que *vivemos misturando natureza e cultura*. Portanto, nossas criações, inclusive a matemática, carregam essa herança. Então, se quisermos entender o que é a matemática, suas origens, seu desenvolvimento, sua capacidade descritiva, explicativa e criadora, devemos seguir a sugestão de Almeida (2011, p. 19) de que "somente um tratamento holístico, sistêmico, histórico, que abrange não somente a disciplina em si, mas também seu artífice, nos proporcionará os meios para tal".

Olhando melhor para essa perspectiva, podemos acreditar que os objetos matemáticos são construções sociais, históricas e culturais, desenvolvidas para o progresso da humanidade. Como todo conhecimento, a matemática tem um processo histórico e é fruto da criação humana, sendo gerada para atender às demandas da humanidade. Essa concepção contribui para uma melhor compreensão da posição da matemática na cultura humana.

Todas as pessoas percebem a realidade e a representam através das artes, das crenças, das teorias, e essas representações são socialmente compartilhadas e codificadas pelos grupos de indivíduos. Jesus (2002, p. 15) destaca que isso é feito de diferentes maneiras dependendo do ambiente natural e cultural desses sujeitos: "percebemos isso na linguagem, nas práticas de alimentação, de vestimenta, de habitação. Por que não nas práticas de comparação, classificação, ordenação, medição, contagem, inferência e nos esquemas gerais de abstração?"

A matemática foi sendo desenvolvida e espalhada de uma cultura para outra de acordo com as necessidades de adaptação e convivência humana ao longo do tempo, evoluindo com a construção de estruturas, padrões e formas. Nessa perspectiva, defendemos que usar a noção de cultura nos ajuda a entender o processo de desenvolvimento das ideias matemáticas sob uma ótica histórica, com suas respectivas motivações. Stewart (2014) ressalta como a cultura humana estabelece o ritmo de evolução das produções matemáticas:

> E assim, ao longo de quatro milênios, a estrutura elaborada e elegante que chamamos de matemática veio a existir. Ela surgiu aos solavancos, com acessos de atividade febril seguidos por períodos de estagnação; o centro de atividade moveu-se ao redor do globo acompanhando a ascensão e queda da cultura humana. Às vezes cresceu de acordo com as necessidades práticas daquela cultura; outras vezes o tema assumiu sua própria direção, e os praticantes brincavam com aquilo que para todas as outras pessoas não passavam de jogos intelectuais. E, com surpreendente frequência, esses jogos acabam dando retorno no mundo real, estimulando o desenvolvimento de novas técnicas, novos pontos de vista e nova compreensão (STEWART, 2014, p. 372).

Acompanhando sua história, é possível perceber que cada povo deu à matemática o rumo que atendia às suas necessidades e aos seus interesses. Os modos de pensamento e de linguagem se configuram de acordo com determinado lugar, época e cultura. Por exemplo, a matemática procedimental (resolver problemas), quando chegou à Grécia, se modificou pelo estilo de sociedade (mais argumentativa) e assumiu um caráter formal. Bishop (1988, p. 182) ressalta que as ideias matemáticas são geradas pelos diversos grupos culturais, desenvolvidas como resultados das suas diversas atividades.

Outro aspecto importante de ser abordado é que vivemos numa cultura e num ambiente permeado de relações sociais, por isso, não podemos negar ou menosprezar o componente social da nossa ação, seja na confecção de artefatos, seja na elaboração de mentefatos, como diz D'Ambrósio (2005, p. 101). Isso significa que somos frutos da nossa época, assim como nossas produções. Sendo assim, a matemática não se manteve "alheia" às convulsões sociais, pois propiciou experiências sociais e culturais amplamente variadas em que civilizações aprenderam umas com as outras.

Silva & Mendes (2013, p. 52) resumem que "concomitante com o progresso da matemática, diversos povos e culturas emergiram e submergiram e que, no seu desenvolvimento, a matemática requereu governantes com visão superior e sensibilidade para as questões intelectuais e culturais". Enfim, não dá para dissociar o desenvolvimento da matemática das raízes culturais e sociais de cada época e cada grupo humano.

Diante desse cenário, chamamos a atenção para o fato de que as diferentes filosofias sociais da matemática permitem constituí-la a partir de muitas estruturas sobrepostas. Jesus (2002, p. 187) reforça essa teoria explicando que "tais estruturas são como uma floresta, se dissolvem e se refazem. E uma vez que o conhecimento matemático está sempre aberto à revisão, o processo de criação ganha em significação filosófica, pois não há o produto último sobre o qual exclusivamente focar". Ernest (1994 *apud* JESUS, 2002, p. 187) ainda destaca que, deste modo, a história e a prática dos matemáticos adquirem uma maior significação epistemológica. Isso torna a matemática quase-empírica, ou seja, não completamente disjunta da ciência empírica, como era o desejo das filosofias tradicionais da matemática.

4.1 A natureza do caráter da matemática

A existência da consciência e, consequentemente, da atividade criadora – uma especificidade humana – depende da linguagem, que é a forma de materializar toda forma de conhecimento. Em sentido amplo, podemos entender por linguagem qualquer processo de comunicação. Mais tecnicamente, Bicudo (1992, p. 3) diz que linguagem é "um conjunto complexo de processos – resultado de uma certa atividade psíquica profundamente determinada pela vida social - que torna possível a aquisição e o emprego concreto de uma língua[129] qualquer". À essa colocação, Candiotto (2016, p. 91) acrescenta um ponto importante dizendo que a linguagem é “um elemento fundamental no traço distintivo da consciência: constituir-se como reflexo consciente, superior às outras formas de reflexo da matéria”. E, complementando, Rubinstein (1963, p. 254, *tradução nossa*) afirma que a linguagem é “uma condição necessária para a existência da consciência. Adquirir consciência de uma coisa significa refletir a realidade através de significados generalizados através das palavras socialmente elaboradas”.

A linguagem, mediadora do conhecimento que estrutura a realidade, é eminentemente social, e sua possibilidade de construção, que favorece o desenvolvimento da consciência, se efetiva apenas nas relações sociais estabelecidas, além de estar diretamente ligada à forma de vida e ao nível de evolução de cada civilização em determinada época.

Nesse contexto, o intercâmbio entre os homens foi criando na espécie, como afirma Ventura (2000, p. 3), uma forma de linguagem cada vez mais apurada, condicionando ao longo do tempo, ao desenvolvimento biológico. Enquanto isso, Santos (2009, p. 117) diz que a linguagem pode ser entendida como “uma criação social que utiliza símbolos também criados socialmente”. Diante desse cenário, a linguagem faz parte de um processo histórico e cultural que conjectura a possibilidade de comunicar pensamentos e promover conhecimento.

Então, nossa intenção aqui é mostrar a contribuição da linguagem – faculdade humana mutável – para a construção e o desenvolvimento da matemática enquanto ciência e para o processo de constituição de suas entidades. Isso significa que não definimos a matemática como uma linguagem mesmo sendo uma concepção bastante aceita quando a questão “a matemática é uma linguagem ou uma ciência?” é colocada em discussão. Por exemplo, defendendo a concepção de que a própria matemática é uma linguagem, Corrêa (2009, p. 49) diz: “a matemática é uma linguagem que cria seus próprios signos, além de uma gramática que rege a ordem concebível no interior de um sistema coerente, em que conhecimento e linguagem possuem o mesmo princípio de funcionamento na representação”.

Pensar a matemática por essa perspectiva, num primeiro momento, parece ser suficiente, principalmente, porque as construções matemáticas das sociedades foram evoluindo e ajudando ao homem a organizar a realidade e a vida em comunidade. Essa linguagem escrita surgiu a partir do momento em que registros foram feitos, decorrentes da necessidade de se armazenar

[129] A Língua é um sistema gramatical: um conjunto organizado e opositivo de relações, adotado por determinada sociedade para permitir o exercício da linguagem entre os homens. Utilização social da faculdade da linguagem, não pode ser imutável, tem de viver em perpétua evolução, paralela à do organismo social que a criou (BICUDO, 1992, p. 3).

quantidades. Todavia, segundo Silva (1993, p. 134), é a linguagem que fornece o que Husserl chama de *o corpo* dos objetos abstratos. Silva (1993, p. 129) coloca que, para Husserl, "os objetos matemáticos são possessões culturais constituídas primeiro no interior da consciência individual e, então, tornada possessão comum por meio da cultura, em particular através da linguagem".

Defendemos a ideia de que a linguagem é um saber primeiro, no qual todas as formas de conhecimento, todas as ciências, estão incluídas nela, inclusive a matemática, obviamente. Sua criação foi um dos grandes feitos da espécie humana, pois com ela o homem foi capaz de descrever e representar seus pensamentos, entre eles, os da ciência matemática, como os quantitativos, de ordenação e regularidade.

A linguagem possibilitou a criação de significativos sistemas de comunicação e representação da realidade que foram extremamente importantes para facilitar a vida dos homens. A origem do número, por exemplo, é vinculada ao dia a dia das civilizações antigas de tal forma que está presente de maneira marcante nas línguas – conjunto organizado e opositivo de relações adotado para permitir o exercício da linguagem –, indicando, assim, até o tipo de sistema de numeração usado por determinados povos, conforme Boyer (2003, p. 55).

Outra consideração importante ao pensar na matemática como uma linguagem é defini-la apenas como um conjunto de símbolos e regras e reduzi-la a uma representação gráfica. O que, sem dúvida, é uma ideia que está bem distante do corpo de conhecimentos que a define, formulado de maneira racional e ordenada, e da série de requisitos que ela atende através da observação, identificação, pesquisa e explicação de vários fenômenos, fatos e categorias. Assim, respondendo à questão colocada anteriormente, acatamos a matemática como ciência – um corpo de conhecimentos sistematizado que busca explicar de forma racional e objetiva a realidade, formulando relações que conseguem prever e controlar os fenômenos reais.

Mesmo a partir das considerações feitas no capítulo anterior – os objetos da matemática não são a realidade, mas, possivelmente, abstrações elaboradas a partir dela –, as quais nos levariam a concluir que a matemática é uma linguagem, sendo, praticamente, apenas uma ferramenta para as outras ciências, podemos pensar em alguns fatores que podem modificar esse olhar: as outras ciências também não explicam a realidade em si mesma, elas apresentam modelos que a mente constrói sobre as coisas do mundo. Assim como Rückert[130] (2006),

---

[130] Ernesto Von Rückert é Matemático (UNIPAC/UFV), Físico e Cosmologista (CBPF) fez considerações sobre a questão "a matemática é uma linguagem ou uma ciência?" em seu Blog, disponível em: <http://www.ruckert.pro.br/blog/wp-trackback.php?p=403>. Acesso em: 24/07/2019.

aceitamos a realidade do universo das abstrações (modelos) da matemática. Isso nos leva a enxergar a matemática, mais uma vez, como uma forma de ciência – um corpo de conhecimentos sobre quantidades, formas e estruturas através de uma simbologia caracterizada por números, figuras, operadores lógicos etc.

A matemática que conhecemos descende de várias civilizações, mas, principalmente, da tradição deixada a partir do século VI a.C. pela civilização grega embora, antes disso, a matemática na Grécia não tivesse nenhuma história diferenciada, sendo baseada também em técnicas de contagem e medição. Só a partir desse período, tal civilização estabeleceu um novo tipo de relação entre a matemática e a realidade. Os gregos passaram a acreditar que o universo era matematicamente ordenado. Então, eles definiram a matemática como um modelo explicativo e inteligível do mundo, associando-a ao ideal de conhecimento verdadeiro. Nesse contexto, passaram a pensá-la e a utilizá-la como a linguagem da ciência[131] e, nessa condição, a matemática desenvolvida pelos gregos assumiu características de um conhecimento rigoroso e exato. Assim, iniciou-se a real abstração.

O povo grego deu à matemática uma estrutura axiomática e fundamentos lógicos firmes. Pela imponente estrutura lógica que recebeu, ela passou a ser considerada o nosso saber mais técnico, fortemente estruturado e infalível, e convencionou-se que ela seria o melhor conhecimento para tratar a realidade e conhecer as coisas do mundo de maneira clara e objetiva. Daí ela foi envolvida numa aura de autoridade como nenhum outro conhecimento. Essa concepção ganhou força ao longo do tempo e se consolidou, dando à matemática a condição de um saber pronto, puro, sólido e inquestionável.

Cafezeiro *et al* (2016, p. 175) nos diz que "a partir da influência dos gregos, a matemática assumiu uma forma que foi legitimada e que teve o percurso fortalecido pelos sujeitos matemáticos e entidades que aderiram à matemática". Ventura (2000, p. 4) apoia as palavras de Cafezeiro *et al* (2016) dizendo que "a priorização da linguagem a ser utilizada pelos homens depende das suas relações sociais e aquela que melhor exprime o seu momento de produção é a que vai ser hegemônica".

---

[131] Antes de criar sistemas tecnológicos e impérios econômicos, e de integrar as teorias mais modernas e gerais, a ciência criou as concepções de espaço, tempo e de universo. Hoje, especialmente, pensamos, falamos e vivemos o conceito de "infinito" e o temos ao alcance de nossa lógica. No entanto, o infinito foi impensável durante séculos, ou seja, somente os místicos eram capazes de conceituar esse grande mistério. Grandes sábios, como Copérnico, acreditavam num mundo finito, e nele encontravam a prova da existência de Deus. Com o passar do tempo, a humanidade substituiu esse Deus por uma extensão e regularidade matemática do universo (REDONDI, 1987, p. 99).

Os matemáticos sabem que a matemática é uma construção e que é legitimada pelo coletivo de matemáticos, que a vincula a um conhecimento supostamente universal e neutro, atribuindo-lhe um caráter inquestionável a qualquer argumento construído em bases ditas matemáticas (CAFEZEIRO *et al*, 2016, p. 175). Contudo, não devemos esquecer que a matemática sempre se desenvolveu a partir de necessidades e interesses culturais e sociais, pois processos que parecem puramente lógicos carregam em si, interesses, convenções e acordos. Conceitos que parecem extremamente abstratos têm raízes na realidade, pois, antes de se tornarem estruturas formais, passam por processos de tentativa e erro, por exemplo.

Precisamos mudar esse olhar sobre a matemática que a coloca numa posição de conhecimento absoluto, relacionando-a a uma perfeição *divina*, na qual suas características não são vinculadas às potencialidades humanas. Pelo contrário, devemos lembrar que, como afirma Cifuentes (2002, p. 2), a racionalidade que costuma estar relacionada à matemática, também está vinculada aos fenômenos da emoção, o que chamamos de uma racionalidade estética.

Cifuentes (2002, p. 2) também chama a atenção para o fato de que, embora do ponto de vista racional, a matemática tenha como objeto o necessário e o universal e que, demonstrar do ponto de vista dedutivo, é fazer necessário, Gödel e seus teoremas mostram que a *verdade matemática* não requer dessa necessidade lógica, pois existem verdades não demonstráveis. Assim, esse autor contribui ainda mais quando afirma que esses teoremas mostram que a razão não pode ser considerada puramente formal.

4.1.1 A construção da matemática como ciência

No que diz respeito aos discursos da sociedade moderna em relação ao *status* da ciência, Foucault (2008) diz que a matemática é a única prática discursiva que transpôs de uma só vez todos os limiares de emergência: “a própria possibilidade de sua existência implicava que fosse considerado, logo de início, aquilo que, em todos os outros casos, permanece disperso na história – sua positividade primeira devia constituir uma prática discursiva já formalizada”. (FOUCAULT, 2008, p. 211).

Carneiro (2000) explica que o limiar de positividade refere o momento em que uma prática discursiva se individualiza e assume sua autonomia. A autora esclarece ainda os demais limiares de emergência: o de epistemologização, que é alcançado quando um conjunto de enunciados assume função dominante em relação ao saber; o de cientificidade, que se refere à existência de critérios formais e de leis de construção que regulam a figura epistemológica recém delineada; e o de formalização, que é ultrapassado quando o discurso, agora científico, consegue definir, a partir de si mesmo, o edifício formal que constitui (CARNEIRO, 2000, p. 128).

Foucault (2008, p. 211) afirma que esse fato justifica a instauração enigmática e valorizada da matemática, que propiciou o estabelecimento do discurso matemático como protótipo do nascimento e do devir de todas as ciências, servindo de modelo para todos os discursos científicos em seu esforço de alcançar o rigor formal: por um lado, o fato de ser tão pouco acessível à análise, tão fechada na forma do começo absoluto e, por outro, o valor de ser, ao mesmo tempo, origem e fundamento de si mesma.

No entanto, o episódio aqui narrado nos conduz a uma abordagem da matemática imersa na compreensão de uma configuração de poder. Foucault (2008) admite que esse comportamento é um erro:

> Mas ao tomar o estabelecimento do discurso matemático como protótipo do nascimento e do devir de todas as outras ciências, corre-se o risco de homogeneizar todas as formas singulares de historicidade, reconduzir à instância de um único corte todos os limiares diferentes que uma prática discursiva pode transpor, e reproduzir, indefinidamente, em todos os momentos, a problemática da origem: assim se achariam renovados os direitos da análise histórico-transcendental. A matemática foi seguramente modelo para a maioria dos discursos científicos em seu esforço de alcançar o rigor formal e a demonstratividade; mas, para o historiador que interroga o devir efetivo das ciências, ela é um mau exemplo - um exemplo que não se poderia, de forma alguma, generalizar (FOUCAULT, 2008, p. 211).

Um aspecto que devemos entender no percurso da construção da matemática e que a coloca, definitivamente, num lugar comum às demais ciências é a questão da *crise*. Segundo Foucault (2013, p. 365), uma crise precisa ser entendida como “um dispositivo, uma rede heterogênea e instável de relações onde se articulam poder, saber e efeitos de verdade, e que permite compreender a matemática como um campo de saber que se reconhece como articulador da verdade”.

A partir das colocações de Foucault (2013), Cafezeiro *et al* (2016, p. 174) esclarece que não há *crise nos fundamentos da matemática*, nem *crise da matemática pitagórica*, nem *crise da geometria*, nem *crise na compreensão do infinito*: “a crise está no encontro da matemática com as demandas da vida de cada momento, e não se compreende como uma questão localizada em uma disciplina particular”. Em outras palavras, as questões de cada época demandam a construção de novos conceitos, pois as formas de pensar mudam de acordo com novas situações.

Então, Cafezeiro *et al* (2016, p. 175) nos ajuda a perceber as *crises* na matemática como intrincadas redes das quais fazem parte, além das construções matemáticas, coisas diversas de um certo tempo e lugar; e também, a reconhecer que a *crise* é fértil, ou seja, ela abre um espaço para a produção do novo. Daí é possível considerar outras possibilidades de produção da matemática que se distanciam da prática hegemônica[132]: a matemática é uma construção das pessoas em seus mundos, como decorrência das demandas do viver e da necessidade de compreender o tempo e o lugar, bem como da necessidade de conformação da própria identidade e da percepção do coletivo (CAFEZEIRO *et al*, 2016, p. 175).

A partir das ideias de Rosebery *et al* (1992, p. 3) e conforme Latour (2011), podemos compreender a capacidade de criação científica como um produto sociocultural, com suas formas próprias de expressão, normas, crenças e valores. Nesse cenário, contamos com o apoio de Peters (2002, p. 4) que aborda a proposta do construtivismo social de Paul Ernest, baseada em Wittgenstein, segundo a qual "a matemática é uma construção social, um produto cultural, falível como qualquer outro ramo do conhecimento".

Carvalho (2009, p. 29) sugere que a epistemologia construtivista de Paul Ernest possa ser desenvolvida a partir dos princípios que tem as seguintes concepções:

> a) "Conhecimento não é passivamente recebido, mas ativamente construído pelo sujeito do processo (cognitivo)". b) "A função da cognição é adaptativa, e serve à organização do mundo da experiência (experiencial, ou experimental), não à descoberta da realidade ontológica". c) "As teorias pessoais que resultam da organização e do mundo experiencial, devem ajustar-se às exigências impostas pela realidade física e social". d) "Essas (teorias) são aplicadas por meio de um ciclo de "teoria-predição-teste-falha-acomodação-nova teoria". e) "Isso gera teorias do mundo socialmente aceitas, e padrões sociais e regras para o uso da linguagem". f) "A matemática é a teoria da forma e da estrutura, que ocorre no interior da linguagem" (CARVALHO, 2009, p. 29).

Ao longo da história e em todos os locais do planeta, indivíduos, comunidades e povos aprenderam a lidar com seu ambiente natural e social, entenderam e explicaram fatos e fenômenos, desenvolveram comportamentos e conhecimentos, criaram meios de sobrevivência e deram sentido aos modos de saber e de fazer suas práticas. A história retrata a dinâmica do desenvolvimento das ciências através de uma dinâmica cultural, seja temporal, isto é, no encontro de gerações; seja espacial, quer dizer, resultado do deslocamento de indivíduos ou grupos. A matemática, como qualquer outra ciência, é resultado de múltiplas e complexas determinações que ocorrem nas sociedades humanas e na sua história. Como diz Tenório (2009,

[132] A matemática legitimada é reconhecida como uma forma de saber distinta das demais, um conhecimento supostamente universal e neutro. Isto atribui um carácter inquestionável a qualquer argumento construído em bases ditas matemáticas e privilegia os sujeitos matemáticos, bem como as entidades que aderem à matemática, através de estatísticas, indicadores etc. (CAFEZEIRO *et al*, 2016, p. 175).

p. 15), a matemática vai sendo construída de forma intimamente articulada com a produção das condições materiais e culturais da existência do homem:

> É assim que as necessidades da existência do homem levam-no a criar determinados conhecimentos matemáticos, os quais, uma vez criados e incorporados ao seu acervo de conhecimentos, juntamente com outros fatores, determinarão as novas condições de produção do conhecimento, em geral, e do conhecimento matemático, em particular. Dessa forma, a matemática contém não só as dimensões formal, lógica e racional, usualmente destacadas e percebidas, mas também as dimensões material, intuitiva e social, já que é produzida na história. Portanto, a Matemática é histórica (TENÓRIO, 2009, p. 15).

O conhecimento matemático é socialmente produzido pela humanidade, coletiva e historicamente, mas, em geral, é relacionada a um certo rigor que, como colocado por Del Vecchio Junior (2010, p. 98-99), está relacionado, exclusivamente, à obediência de determinado raciocínio ou prova ao que se considera uma demonstração perfeita: "dada uma notação preestabelecida e as regras válidas a serem empregadas, processa-se o desenrolar dos raciocínios através de um procedimento próprio, que garante a possibilidade de exatidão e de sua ampla aplicabilidade".

No entanto, Thom (1985, p. 71) defende que não há nenhuma definição exata de rigor. Por exemplo, uma prova seria tida como rigorosa se obtivesse aprovação dos especialistas da época, admitindo, portanto, um rigor local. Sobre esse aspecto, ele alerta que aquilo que as teses fundamentalistas prometem, mas não cumprem, é um rigor global fornecido definitivamente. Entretanto, tudo o que nossa experiência real revela é um rigor local. Almeida (2011) cita que, em 1944, Wilder[133] reduziu o status da prova, dizendo que a demonstração nada mais é do que:

> Teste do produto de nossa intuição... Obviamente nós não possuímos, e provavelmente nunca possuiremos, qualquer padrão de prova que é independente do tempo, da coisa a ser provada, ou da pessoa ou escola de pensamento que a emprega. E sob essas condições, a coisa sensível a ser feita é admitir que não exista tal coisa, geralmente [dita], como verdade absoluta [prova] em matemática, apesar do que o público possa pensar (WILDER, 1965, p. 314 *apud* ALMEIDA, 2011, p. 43).

De tudo que foi exposto anteriormente, a matemática faz parte dessa ciência que é uma construção humana e que carrega seus aspectos históricos, sociais, culturais, num fluxo

---

[133] No Congresso Internacional de Matemática em Cambridge, Massachusetts, em 1950, Wilder apresentou uma palestra sobre *A base cultural da matemática* e perguntou "*Como a cultura (em seu sentido amplo) determina uma estrutura matemática, como uma lógica? Como a cultura influencia as sucessivas etapas da descoberta de uma estrutura matemática?"*. Wilder tentou responder essas questões em seu livro *Introdução aos Fundamentos da Matemática (1952)*, dando uma atenção especial ao tema do ponto de vista da pesquisa sobre os fundamentos com exemplos voltados para o intuicionismo e o simbolismo, tais como as relações entre as diversas definições do infinito, entre outros.

interligado. Esse olhar desmistifica a concepção da matemática vinculada a uma racionalidade científica que é estabelecida por um conjunto de regras predeterminadas. Isso significa que ela não é um conhecimento objetivo no sentido de ser detentora de verdades fixas e imutáveis gradualmente descobertas a partir de axiomas e postulados que levariam a teoremas inexoravelmente demonstrados.

4.1.2 O rigor matemático

O substantivo *rigor* significa "rigidez, dureza", e seu sentido figurado é "inflexibilidade, severidade". Em relação à linguagem comum ou à linguagem na matemática, é possível reconhecer dois tipos de rigor[134]: o sintático – seguir de forma rígida as regras da gramática – e o semântico – atender às exigências dos fatos, ou seja, da realidade. A partir dessas considerações, Bicudo (1992) coloca que, quando os matemáticos tratam do rigor em sua ciência, eles pensam no tipo sintético: "desse ponto de vista, ser rigoroso em matemática significa proceder de acordo com as regras de sua gramática, a Lógica" (BICUDO, 1992, p. 3).

Vamos resgatar a definição de linguagem dada por Bicudo (1992) no item anterior *A construção da matemática como ciência* – conjunto complexo de processos que torna possível a aquisição e o emprego concreto de uma Língua qualquer – e de Língua – sistema gramatical adotado por determinada sociedade para permitir o exercício da faculdade da linguagem que tem de viver em perpétua evolução, sendo paralela ao organismo social que a criou – para entendermos melhor a relação do rigor com a matemática.

Bicudo (1992, p. 3) conta que Aristóteles, o criador da Lógica (a língua da linguagem da matemática), observou os princípios do raciocínio usado pelos matemáticos, abstraiu a partir deles e os reconheceu como princípios aplicáveis a todos os raciocínios. O autor destaca um ponto chave de acordo com definição de Lógica (língua) enquanto sistema gramatical: "a Lógica evoluiu, ou seja, já não é mais aquela que bastou aos gregos. Mas daí surge uma questão: e a evolução do rigor sintático vinculado à lógica aristotélica?". Bicudo (1992) esclarece:

> O que queremos afirmar, com tais considerações, é que NÃO houve, ao longo dos tempos, uma modificação do conceito de rigor em Matemática, o que significa sempre seguir inflexivelmente os cânones da Lógica, a sua

[134] Tanto na linguagem comum, como na linguagem matemática, o sintático e o semântico não se acham incisivamente separados. Quando nos servimos de MODO INDICATIVO, consideramos o fato expresso pelo verbo como CERTO, REAL, seja no presente, seja no passado, seja no futuro. Ao empregarmos o MODO SUBJUNTIVO, é completamente diversa a nossa atitude. Encaramos, então, a existência ou não existência do fato como uma coisa INCERTA, DUVIDOSA, EVENTUAL ou, mesmo, IRREAL (BICUDO, 1992, p. 2).

> gramática. O que tem mudado, como não podia deixar de ser, é esse sistema gramatical da Matemática (BICUDO, 1992, p. 4).

Hilbert analisou as teorias matemáticas e afirmou que os estágios de seu desenvolvimento são facilmente distinguidos: o ingênuo, o formal e o crítico. Bicudo (1992, p. 4-5) explica que na classificação de Hilbert, os dois períodos iniciais de uma teoria matemática se distinguem pela obtenção de muitos resultados e por um progresso febril obtido usando-se técnicas intuitivas em que os fins justificam os meios. Já o terceiro caracteriza-se por uma tomada de consciência com aplicação de princípios lógicos aos resultados obtidos, retomado de rigor, para sancionar ou corrigir o que veio antes. Após essas considerações, Bicudo (1992) faz uma significativa observação:

> Assim, se o rigor não traz, comumente, resultados novos, mas apenas põe em bases seguras resultados já obtidos, o que significaria que a Matemática não repousa sobre a Lógica, mas sobre a intuição (correta); para que vale o rigor no desenvolvimento da Matemática? A que se presta? Qual a sua função? (BICUDO, 1992, p. 5).

A resposta dada por Bicudo (1992) é a de que a função do rigor é sancionar a intuição e possibilitar a sua construção. Do equilíbrio de duas tendências, é que se sobe na espiral do conhecimento matemático: de um lado, a intuição, força natural, espontânea; e de outro, o rigor, força coercitiva, disciplinante. O autor explica que, nesse processo, a intuição construída no tratamento das questões tem a sua *segurança* baseada na familiaridade com as questões tratadas, mas se esboroa de encontro a situações novas que ultrapassem os limites daquelas que a ajudaram a se construir. Então, o rigor libera tais situações de tudo o que seja essencial, preparando o terceiro terreno em que vicejará uma nova intuição (BICUDO, 1992, p. 5).

O exemplo apresentado por Bicudo (1992) que atende a tal classificação de Hilbert é a história do Cálculo[135], que talvez possa ser resumida na aceitação ou rejeição do infinito atual

---

[135] O cuidado dos matemáticos gregos, Eudoxo, Euclides e Arquimedes, ao tratarem os problemas de quadratura e outras questões correlatas apenas reflete a desconfiança profunda e permanente em relação ao infinito. [...] Aristóteles rejeitava o infinito atual (real), mas admitia o infinito potencial e a autoridade de Aristóteles, também nesse ponto, ajudou a moldar a história da ciência. [...] Parece que, nos estágios ingênuo e formal do desenvolvimento do Cálculo, era conhecimento comum serem os números infinitamente pequenos e os infinitamente grandes, formas do infinito atual. Leibniz não rejeitava o infinito atual; mas, pelo menos em seus últimos anos, considerava-o sem lugar no Cálculo. Assim também podemos entender as explanações curiosamente ambivalentes e evasivas de Newton e seus seguidores, pelo menos em parte, por sua relutância em admitir a existência de tais entidades. [...] Enquanto o Cálculo continuou a se desenvolver e a ter êxito (estágio formal), as fraquezas lógicas e filosóficas foram negligenciadas por um período (uma vez que, nesse estágio, são os resultados que interessam, o FIM JUSTIFICANDO OS MEIOS). [...] Cantor e seus seguidores, tendo produzido uma teoria dos conjuntos infinitos de extraordinária coerência e beleza, creram ter finalmente conquistado o infinito atual. [...] Neste contexto histórico, a Análise Não-Standard recupera uma tradição, que alguns consideram ter sido interrompida com a chamada aritmetização da Análise, i.e., com os trabalhos de Weierstrass, Dedekind e Cantor. É uma nova visão de uma retomada do rigor (estágio crítico) (BICUDO, 1992, p. 6-7).

(não parece ter havido, ao longo do tempo, nessa história, qualquer dúvida quanto ao infinito potencial). Bicudo (1992, p. 6) comenta que Leibniz e Newton devem ser conjuntamente considerados os representantes do período ingênuo; Euler, com seus importantes resultados, é o matemático por excelência do período formal; o período crítico é representado por Cauchy, Bolzano, Weierstrass, Dedekind e Cantor. Nessa explicação, ele acrescenta que:

> A história do Cálculo, como apresentada no contexto da matemática contemporânea, parece afirmar a existência de todos os tipos de entidades infinitas. Assim, do ponto de vista do rigor semântico, o mesmo parece ter sido obtido pela aceitação de uma "nova realidade" onde encontram lugar novas "entidades" infinitas; enquanto, do ponto de vista do rigor sintático (o ponto de vista formalista), este foi alcançado pela introdução de "novos procedimentos dedutivos" (mudança gramatical) (BICUDO, 1992, p. 8).

Essas colocações nos apresentam um pouco mais sobre como o rigor é estabelecido no domínio da matemática. A partir daí, é possível identificar que os fatores que relacionam matemática e rigor são puramente humanos, inclusive a respeito do processo de criação de um sistema gramatical – a lógica – que não é a linguagem da natureza. O estabelecimento de critérios para essa língua e, respectivamente, para o rigor na linguagem da matemática são os mesmos da linguagem comum (sintático e semântico). Isso quer dizer que o fato da matemática ser tão rigorosa está relacionado à sua construção enquanto ciência e tudo o que acarreta tal condição, inclusive o desejo humano de uma linguagem *rigorosa* e não uma condição dada *a priori*.

Mesmo a matemática sendo considerada, em certo sentido, o conhecimento mais rigoroso, que se auto fundamenta e empresta seus princípios para outros saberes, aqui se insistirá, pois, na necessidade de se dar maior atenção ao seu caráter rigoroso no sentido de mostrar que essa característica não vem de algum tipo de vínculo com a realidade. Isso quer dizer que esse traço essencial tem a ver com atributos humanos e não com questões naturais. Desta forma, o presente subitem destina-se à discussão da natureza da matemática em relação à noção de rigor a ela associada.

A matemática adquiriu essa propriedade ao longo de sua história, principalmente, devido ao processo de formalização realizado pelos gregos, a partir da busca da verdade vinculada ao desenvolvimento da atividade científica. Segundo Domingues (2002, p. 56), "o caminho que levou ao método axiomático em matemática não é bem conhecido, mas certamente é longo e está intimamente ligado ao desenvolvimento matemático da Grécia". Nessa civilização, iniciou-se a busca da verdade como fundamento da atividade matemática. Deste modo, a Grécia antiga foi o berço do método axiomático e das demonstrações na matemática em busca de verdades e seu correspondente formalismo – na matemática grega, a busca da verdade está associada à construção de critérios para que se estabeleçam a veracidade ou a falsidade de proposições. A partir desse momento, tal conhecimento foi tendo sua estrutura enrijecida para se tornar uma *ciência exata*.

Tales de Mileto[136] (sec. VII a.C.) é considerado o primeiro matemático da história a enunciar um teorema e prová-lo. No entanto, a história nos mostra que se passaram milênios sem o uso desse método na matemática. Domingues (2002) nos conta um pouco dessa história:

> No caso da matemática babilônica e egípcia, por exemplo, os historiadores são concordes em que nenhuma delas se baseou em qualquer estrutura axiomática que pudesse servir de garantia para a validade dos procedimentos práticos de que essencialmente se compunham. O critério de confiabilidade das regras e procedimentos usados era simplesmente a concordância com a realidade a que se destinavam. O que também pode ser tomado como uma idéia de verdade matemática (DOMINGUES, 2002, p. 56).

Esse autor destaca que, das obras que chegaram até os dias de hoje, a mais antiga a apresentar essa proposta são *Os Elementos* de Euclides (300 a.C.), um compêndio da matemática grega de treze livros com quatrocentas e sessenta e cinco proposições demonstradas. No modelo dedutivo utilizado por Euclides, possivelmente inspirado em Aristóteles, não havia conceitos primitivos[137]. Os postulados que se seguiam tinham um caráter de auto evidência (salvo o postulado V[138]).

Por essas razões, as axiomáticas, como a usada por Euclides nos *Elementos*, calcadas de alguma maneira na evidência e na experiência, vieram a ser conhecida como axiomáticas materiais[139] (DOMINGUES, 2002, p. 58) que prevaleceram até perto do final do século XIX.

---

[136] Segundo Proclo (séc. V), em seu Comentário ao Livro Primeiro dos Elementos de Euclides, baseado numa história da geometria grega escrita por Eudemo de Rodes (séc. II a.C.), obra essa que não chegou até nossos tempos, Tales foi o primeiro a ir para o Egito e a levar para a Grécia, na volta, o saber [geometria] que encontrou. Ele descobriu muitas proposições e revelou para seus sucessores os princípios subjacentes a muitas outras, valendo-se de métodos gerais em alguns casos e em outros de métodos empíricos. Vale ressaltar que possivelmente as propriedades formuladas por Tales (por exemplo "os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais") já eram conhecidos pelos egípcios. Na abordagem destes, porém, não se encontra o embrião de uma ciência teórica, como talvez em Tales, mas apenas fatos matemáticos isolados e em nível de elaboração intelectual muito difícil de precisar (DOMINGUES, 2002, p. 57).

[137] Todos os objetos geométricos a serem estudados, mesmo os mais intuitivos, são explicitamente definidos. Numa proposta dessa natureza, obviamente as primeiras definições têm de ser dadas em termos de conceitos não apresentados antes. Por exemplo, Euclides definia ponto como "aquilo que não tem partes". Efetivamente, o objetivo de Euclides não era apenas apresentar formalmente os objetos iniciais de seu discurso, mas também garantir que eles correspondiam a uma realidade ligada à experiência e expectativa do leitor (DOMINGUES, 2002, p. 58).

[138] Se uma reta corta duas outras de um plano formando em um dos lados ângulos interiores cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas duas retas, se prolongadas indefinidamente, cortar-se-ão no lado em que isso acontece (DOMINGUES, 2002, p. 58).

[139] A demonstração de uma proposição era uma atividade intelectual que visava a nos convencer e a convencer os outros, racional, mas também psicologicamente, da veracidade dessa proposição (DOMINGUES, 2002, p. 61).

Apesar de falhas identificadas, como o uso de postulados que não foram definidos anteriormente, violando os princípios do método axiomático, *Os Elementos* constituem o primeiro material que mostra o poder do método dedutivo na matemática.

A historiografia costuma mostrar essa coleção como o modelo de excelência para se fazer matemática pelo menos até o final do século XIX. Todavia, temos exemplos de obras de vários séculos depois dos *Elementos* que são consideradas criações matemáticas bem-feitas mesmo sem definições, postulados e proposições, portanto, sem demonstrações. A *Aritmética* de Diofanto (séc. III d.C.) é um exemplo que, segundo Domingues (2002, p. 59), com justa razão, é considerada uma das grandes realizações da matemática grega, especialmente, pelo seu caráter inovador tanto no conteúdo como na abordagem.

Na Idade Média, houve um declínio cultural no Ocidente que afetou, primordialmente, a matemática, tornando *Os Elementos* uma obra de um nível muito acima das possibilidades da época, só usada muito restrita e superficialmente. Nesse meio tempo, o epicentro da matemática mudou-se para os mundos árabe e hindu, mas esses povos, em que pese sua importância para o desenvolvimento da matemática, não priorizavam a demonstração como os gregos do período clássico – explica Domingues (2002, p. 60).

Do Renascimento até o início do século XIX, a geometria de Euclides foi retomada no Ocidente devido à sua estrutura lógica; no entanto, uma outra matemática se desenvolvia de forma *ilógica* e independente da euclidiana. Como exemplos, podemos citar as áreas da geometria analítica e do cálculo. Sobre essas novas produções, Domingues (2002, p. 60) chama a atenção para o fato de que muito possivelmente elas não chegaram a satisfazer, sob o ponto de vista do rigor, nem mesmo aos seus criadores:

> R. Descartes (1596-1650), um cientista que valorizava sobremodo o método axiomático-dedutivo, em particular o método matemático, ao escrever sua única obra matemática, *A geometria,* não utilizou nem postulados e nem demonstrações, marginalizando assim sua própria epistemologia. Quanto ao cálculo, basta citar que um de seus criadores, I. Newton (1643-1727), fez três tentativas para passar a limpo suas idéias, nenhuma delas convincente, rigorosamente falando. Ademais, ao usar uma das versões na sua obra prima *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, optou pela linguagem da geometria euclidiana (DOMINGUES, 2002, p. 60).

Obviamente não faltava capacidade a esses matemáticos (muito pelo contrário). Só que os fundamentos da matemática ainda estavam se estruturando, e isso só seria alcançado na segunda metade do século XIX. Apesar disso, esse desenvolvimento *ilógico* teve o seu lado positivo. Domingues (2002, p. 60) diz que “graças à intuição e ao trabalho ingente de grandes matemáticos, a matemática evoluiu muito nesse período, senão com consciência plena, pelo menos a passos confiantes que levaram ao caminho certo".

A partir do final do século XIX, a noção de demonstração passou por uma análise mais profunda com a intenção de reduzir o recurso ao uso da evidência intuitiva. Assuntos importantes da matemática, como o cálculo, por exemplo, tinham sido tão explorados que a intuição apenas já não era suficiente para explicar alguns resultados aparentemente paradoxais.

Daí Domingues (2002, p. 61) pergunta: "como entender, por exemplo, que uma curva pudesse recobrir uma parte do plano ou que o todo pudesse não ser maior que uma parte sem remeter essas questões pura e simplesmente para o plano da coerência lógica?". Em função dessa realidade, o conceito clássico de demonstração não resistiu e, então, houve uma reformulação da sua ideia com a contribuição notável de G. Frege (1848-1925). Com ele, tomou forma o conceito de *demonstração formal*, que Tarski sintetiza como a construção de uma sequência de proposições tal que: (i) a primeira proposição é um axioma; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que a precedem na sequência; (iii) a última proposição é aquilo que se pretende demonstrar. Isso pressupõe a formulação de algumas poucas regras de inferência[140] de conteúdo simples (DOMINGUES, 2002, p. 61-62).

No final do mesmo século, a axiomatização de sistemas matemáticos diversos já era uma realidade substancial, e o processo de aritmetização da análise, com a axiomatização dos sistemas numéricos, esteve vinculado a esse movimento. Domingues (2002, p. 62) ressalta que, das tentativas de uma nova axiomatização para a geometria euclidiana, a mais bem-sucedida foi a de D. Hilbert (1852-1943) em sua obra *Fundamentos da Geometria* de 1899. Essa publicação consistia em aceitar três conceitos primitivos (ponto, reta e plano) e definia as relações mútuas entre esses objetos única e exclusivamente por meio de axiomas. Nenhuma intuição deveria ser usada nessa etapa nem nas demonstrações. Isso representava um afastamento da tradição aristotélica grega na qual os axiomas exprimiam fatos *óbvios* acerca de conceitos já *conhecidos* intuitivamente (DOMINGUES, 2002, p. 63).

A axiomatização da geometria euclidiana motivou Hilbert a pensar nos fundamentos da matemática e o incentivou a buscar uma abordagem semelhante para outras partes da matemática. Domingues (2002, p. 63) nos conta que, nos anos 1920, Hilbert criou a *teoria da demonstração*, um método que objetivava estabelecer a consistência de qualquer sistema

[140] Intuitivamente, todas as regras de inferência parecem ser infalíveis no sentido de que as proposições que delas derivam consistentemente devam constituir verdades da teoria em questão. Apesar de um grande avanço em relação aos procedimentos psicológicos precedentes, a noção de demonstração formal carregava consigo o gérmen de alguns revezes futuros para os especialistas nos fundamentos da matemática (DOMINGUES, 2002, p. 62).

formal. No entanto, em 1931, K. Gödel (1906-1978) provou que é impossível estabelecer a consistência de qualquer sistema matemático amplo o possível para abarcar a aritmética dos números inteiros.

Assim, a partir das considerações acima, este ensaio procura problematizar o rigor da matemática como conhecemos hoje e que se originou na época citada anteriormente. Desejamos refletir sobre sua vinculação a processos de objetivação do mundo e desestabilizar a concepção preconcebida que fixa uma maneira equivocada de lidar com esse perfil. O rigor pode ser compreendido como uma das principais características que marcam a natureza do pensamento matemático.

Segundo Del Vecchio Junior (2010, p. 98), em geral, "o *rigor matemático*[141] está relacionado à obediência de determinado raciocínio ou prova ao que se considera uma demonstração perfeita". O presente autor relata as peculiaridades desse rigor:

> Essa concepção de rigor relacionada à demonstração lógica trata da filiação estrita da demonstração à teoria do silogismo ou à lógica matemática... a preocupação quanto à sistematização dos argumentos, que propicia uma base efetiva de um encadeamento racional fundado em causas e consequências, bem como a precisão com a qual os temas são tratados, são dados que corroboram o compromisso desses autores com a inspiração original do conhecimento racional, a saber, a correção do discurso argumentativo e a preocupação em veicular, através desse mesmo discurso, a verdade (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 99-100).

Outro aspecto destacado por Del Vecchio Junior (2010) é o esquecimento da relação entre a intuição humana e o desenvolvimento do rigor matemático. Ele diz que, desde a Antiguidade até o nascimento da ciência moderna, a intuição intelectual desempenhou um papel fundamental no conhecimento matemático. Depois disso, os caminhos percorridos pela matemática, nos séculos XVIII e XIX, consideraram essa intuição como insuficiente para as novas demandas da disciplina, criando a necessidade de delinear um novo critério de rigor baseado na demonstração formal (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 99).

O autor ainda diz que "o padrão de rigor enquanto evidência intuitiva ressurge apenas sob a pena de Brouwer, movimento este impulsionado, em grande parte, pelas próprias dificuldades nascidas no seio de uma perspectiva estritamente demonstrativa" (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 99).

---

[141] Dada uma notação preestabelecida e as regras válidas a serem empregadas, processa-se o desenrolar dos raciocínios através de um procedimento próprio, que garante a possibilidade de exatidão e de sua ampla aplicabilidade (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 99).

Essa imposição normativa se deu em busca de atingir um grau de perfeição superior para que, segundo Del Vecchio Junior (2010), se pudesse, definitivamente, banir paradoxos, contradições e dubiedades, como os envolvidos na noção de infinitesimal. Impõem-se, assim, novos critérios para a aceitabilidade das proposições matemáticas, e seus pressupostos passam a ser compreendidos como necessariamente obedecendo a um novo nível de elaboração, propiciado pelo rigor demonstrativo (DEL VECCHIO JUNIOR, 2010, p. 100-101).

Paty (2005, p. 110), que trata dos fundamentos racionais da matemática, abordando seus aspectos conceituais, sua natureza evolutiva e sua dimensão histórica, procura identificar, em sua análise sobre essa área do conhecimento, as diversas formas de racionalidade que se impõem no seu processo de desenvolvimento. Levando isso em consideração, além das colocações de Del Vecchio Junior (2010), nosso estudo adota um procedimento análogo, concebendo os aspectos da racionalidade em sentido amplo de modo a procurar compreender o rigor matemático sob uma perspectiva mais abrangente que a do mero silogismo.

A lógica formal tem um papel relevante na construção da matemática como uma ciência *exata*. Segundo Trotsky (2013, p. 67), "a dialética e a lógica formal guardam uma relação similar àquela existente entre a matemática complexa e a matemática elementar". O autor ainda ressalta que "quando se diz que 'A' é igual a 'A', seu campo de aplicações e generalizações são elementares, na realidade 'A' não é igual a 'A'" (TROTSKY, 2013, p. 68)[142].

Então, Trotsky (2013) explica que:

> O axioma "A é igual a A" parece ser, por um lado, a base de todo o nosso conhecimento e, por outro lado, a fonte de todos os erros do nosso conhecimento. Usar o axioma "A é igual a A" impunemente é possível apenas dentro de certos limites. Quando as mudanças quantitativas em A podem ser desprezadas em vista das tarefas à mão, podemos então presumir que "A é igual a A" (TROTSKY, 2013, p. 68).

Enquanto isso, para Candiotto (2016, p. 121), o limite dos silogismos lógico-formais está em seus resultados. Isso significa que eles possuem uma aproximação bastante restrita na interpretação da realidade, e a base dessa identidade é a abstração do conhecimento, que não possui uma rigorosa igualdade em seus elementos. Por isso, as interpretações podem perder-se em ilusões.

Uma compreensão dialético-materialista é necessária para que "tal silogismo estabeleça significados e contribua para a ação do homem ao se movimentar na construção de seu mundo" (CANDIOTTO, 2016, p. 121). Desta forma, a matemática tem um papel importante na

---

[142] Os silogismos da lógica aristotélica são superados pela lógica dialética, porém, não por exclusão e sim por incorporação, uma vez que a dialética não exclui o silogismo, mas nos ensina a combiná-lo de modo a aproximá-lo da compreensão de uma realidade eternamente mutável (TROTSKY, 2013, p. 68).

compreensão da realidade, mas seu objeto não pode se confundir com a própria realidade representada. A sistematização lógica que costuma carregar um caráter idealista, sem dúvida, dá força para a absolutização da matemática. Um exemplo é a supremacia da escrita de *Os Elementos* de Euclides (século III a.C.) por mais de dois mil anos. Smogorzhevski (1978) corrobora essa ideia fazendo a seguinte afirmação:

> Antes de Lobachevsky, durante o curso de muitos séculos, reinou na geometria o ponto de vista idealista que remontava a Platão, o filósofo da Grécia antiga, atribuindo aos axiomas do sistema euclidiano uma natureza absoluta e negando sua proveniência experimental. Lobachevsky quebrou categoricamente com este ponto de vista e devolveu a geometria às posições do materialismo (SMOGORZHEVSKI, 1978, p. 23, *tradução nossa*).

Aleksandrov (1991a) compartilha o mesmo pensamento ao afirmar que:

> Euclides e todos os matemáticos que viveram nos dois mil anos seguintes, sem dúvida, consideraram seus "Elementos" como o limite prático do rigor lógico. Mas do ponto de vista contemporâneo, os fundamentos euclidianos da geometria parecem bastante superficiais. Este exemplo histórico nos mostra que não devemos nos deixar seduzir pela idéia de que a matemática contemporânea tem um rigor "absoluto" (ALEKSANDROV, 1991a, p. 78, *tradução nossa*).

Aleksandrov (1991a) também afirma que o rigor matemático se desenvolve no movimento da própria realidade:

> Mas o rigor da matemática não é absoluto; está em processo de desenvolvimento contínuo [...]. Em última análise, a vitalidade da matemática se deve ao fato de que, apesar de sua abstração, seus conceitos e resultados têm sua origem, [...] no mundo real; Reconhecer isso é o pré-requisito mais importante para entender a matemática (ALEKSANDROV, 1991a, p. 20, *tradução nossa*).

A postura desses autores nos serve de base para a defesa de uma posição que enxerga a matemática como uma criação humana na medida em que é possível constatar a impossibilidade de qualquer tipo de absolutização mesmo em relação ao seu traço fundamental, que é o rigor lógico. A matemática é uma atividade que nasce de ideias que, por serem humanas, nunca são absolutas.

4.2 A formação sócio-histórico-cultural da matemática

No âmbito da natureza do conhecimento matemático, as concepções platônicas e empiristas desprezam questões históricas uma vez que os aspectos dessas perspectivas não carregam consigo suas características. Já concepções quase empiristas e fenomenológicas trazem em seu cerne elementos sociais, históricos, culturais e da linguagem. Como admitimos uma influência cultural no desenvolvimento da matemática, que se dá pelo ambiente em que os grupos sociais estão inseridos e pela própria herança cultural de cada indivíduo que constitui os grupos, as questões históricas que explicitam os elementos socioculturais são fundamentais no nosso estudo. A respeito desses fatores, Ifrah (1997) relata que:

> Ora, do zero à unidade há apenas um passo que transpomos hoje alegremente. [...] Não se sonha, contudo, um só instante que se trata aí na realidade do passo de um hiper-gigante temporal separando a invenção do número "um", primeiro de todos os números mesmo no plano cronológico, da do zero, última invenção maior desta história. É a história da humanidade inteira que separa, de trás para frente, o tempo em que o homem percebeu que o vazio era sinônimo de "nada" do tempo em que descobriu o significado da unidade, tomando consciência de sua própria solidão face à vida e à morte [...]. Mas essa história não é uma história abstrata e linear como por vezes se imagina, bem incorretamente, a da matemática; a saber: uma sucessão impecável de conceitos encadeados uns aos outros. É, ao contrário, a história das necessidades e preocupações das culturas e dos grupos sociais os mais diversos (IFRAH, 1997, p. 16-17).

Davis & Hersh (1996, p. 43) nos lembram que a matemática não pode ser concebida como um conhecimento apoiado em verdades absolutas, pois nossa experiência real com esse saber apresenta inúmeras incertezas. Então, é necessário resgatar a perspectiva de uma matemática de bases empíricas, admitindo um caráter *a posteriori*, falível, corrigível e experimental, como qualquer outro conhecimento humano. Todo conhecimento é sempre parcial, incompleto e está sujeito a correções. E a possibilidade de corrigir erros é, exatamente, dada em confronto com a experiência.

A partir de Meneghetti & Trevisani (2013, p. 154), "as provas não são universais, diferindo-se de um ramo para outro da matemática e de uma época histórica para outra". Assim, faz-se importante considerar também os aspectos históricos da matemática que nos mostram como ela é de fato. Não devemos considerá-la a partir de fundamentações vãs ou nos sentirmos desorientados e não legitimados por certa fundamentação.

Na dimensão histórica da criação dos conceitos matemáticos, reencontramos os elos perdidos da cadeia criadora. Tais elos nos permitem uma recomposição do contexto, possibilitando-nos percorrer os vínculos do conceito criado com os demais componentes da cultura. Isso nos esclarece que os construtos de uma cultura são decorrentes da dinâmica das relações nas várias dimensões da vida em grupo e no interior das formas de vida das civilizações.

As diferentes formas do homem de expressar a matemática assumem suas características, isto é, são impregnadas de necessidades e intencionalidades, resultado da busca de soluções das premências cotidianas. Conforme Berlinghoff & Gouvea (2010, p. 15), a matemática é um produto cultural, criada por pessoas em momentos e lugares distintos, afetadas por diferentes contextos. É preciso reconhecer que as criações matemáticas são motivadas pela busca de respostas por determinados grupos em seus cenários históricos. Entender como a matemática se desenvolve, sem investigar o ambiente ou a problemática motivadora, pode provocar dificuldades de compreensão. A respeito dessas considerações, D'Ambrosio (2011) faz uma colocação interessante:

> Contextualizar a Matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? Ou a adoção da numeração indo-arábica na Europa como florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV? E não se pode entender Newton descontextualizado (D'AMBROSIO, 2011, p. 115).

Desejamos tratar de forma razoável acerca da dimensão sociocultural do conhecimento matemático. Compreendemos que, do ponto de vista da sociologia, as atividades econômicas e sociais dos núcleos urbanos desde sempre se destinaram a formatar vários tipos de manifestação matemática. Desta maneira, a organização geográfica, agrícola, arquitetônica e econômica dos primeiros núcleos urbanos organizados favoreceram a construção de conhecimentos matemáticos como contar, calcular e medir. Então, como afirmam Silva & Mendes (2013, p. 35), "a história da matemática no seu princípio esteve ligada a própria história social. Portanto, não podemos separar a história da matemática da própria história da civilização humana. Nem tampouco considerar a matemática ou a sua história dissociada das demais construções sociais".

Finalizando esse pensamento, ressaltamos a necessidade de se acabar com o platonismo vinculado à matemática, embora tenhamos a sensação de brigar contra algo invencível. Reiteramos que nossa tese é mais um esforço diante dessa empreitada, ainda que pareça uma tarefa ingênua depois da sua grande contribuição na formação da civilização ocidental. Resgatando a história da matemática desde seus primórdios e construindo um diálogo com Wittgenstein, Serres, Lakatos, Putnam, Ernest, e com os demais interlocutores que permeiam esse trabalho, tentamos contribuir de alguma forma para a construção de um novo olhar sobre a matemática que a distancie da visão platônica.

4.2.1 O fator sociológico da matemática

Nessa pesquisa, o aporte da sociologia se faz primoroso. Seu papel aqui é esclarecer o que ocorre e o que não ocorre na comunidade matemática para melhor compreensão, caracterização e crítica da construção da matemática como ciência, e como a sua prática e seus resultados se afastam dos cânones da epistemologia racionalista. Nesse estudo, a sociologia vem somar como caminho para a compreensão de que a matemática é fruto de uma razão humana que, a partir de Chaitin (2009), é capaz de:

> Engendrar diferentes formas de entender e de saber; de imaginar diferentes tipos e estilos de relações causais, pautadas por diferentes regras e justificativas associadas a diferentes práticas que legitimam os diferentes saberes que, por sua vez, se referem a diferentes mundos percebidos que abrigam diferentes formas de vida, cada uma com sua forma de racionalidade (CHAITIN, 2009, p. 22).

Entre as várias possibilidades de conceber a matemática como uma construção social, podemos destacar que a matemática é produzida, revisada e avaliada por uma comunidade de sujeitos e, mesmo quando ela é uma produção individual, nunca é um trabalho isolado, pois todo sujeito vive em sociedade. Jesus (2002, p. 192) explica que “aqui o social é concebido como não transcendental, dado que o conhecimento é visto como produção humana e não como algo que preexiste à história humana”. Nesse sentido, a ênfase é posta no papel de interações interpessoais diretas e indiretas na constituição de um corpo científico e objetivo de conhecimentos. E ainda, segundo Jesus (2002), por ser uma atividade humana condicionada durante todo o seu processo de circulação:

> Pelas formas como os homens, em cada época e em cada cultura, organizam as suas instituições, organizam-se em instituições, organizam a produção de sua subsistência material e espiritual e pelas formas de poder que permeiam essas relações. Aqui, o social é concebido não apenas como não-transcendentalidade ou como interação humana apenas subjetivamente condicionada, mas sobretudo como interação humana política, institucional, temporal, cultural e materialmente condicionada (JESUS, 2002, p. 192).

Existe uma “construção social em volta de todo conhecimento, ou seja, há uma relação entre conhecimento e fatores sociais. Este é um entendimento naturalista do conhecimento no qual a sociologia cumpre seu papel central” (BLOOR, 2009, p. 9). A sociologia da matemática nos permite compreender a relação entre desenvolvimento matemático e social uma vez que ela explica de que forma a organização social, desde sua origem, influenciou a matemática. De acordo com Silva & Mendes (2013, p. 34), ela também analisa tanto a posição da matemática na estrutura social e econômica como o processo de conquista de um *status* próprio, que a levou a ser considerada como uma construção sobre-humana, alheia aos outros aspectos da sociedade.

Nas palavras de Struik (1998), temos mais uma vez a consideração do fator sociológico no desenvolvimento da matemática, que corrobora a perspectiva comentada acima: “as formas primitivas de sociedade, a oriental, a grego-romana, a medieval feudal, a capitalista antiga e a moderna (...) influenciaram todas, nas suas várias maneiras, a aquisição do conhecimento matemático e foram por sua vez influenciadas por ele” (STRUIK, 1998, p. 21). E mais: “o fator sociológico pode fornecer a pista mais importante para a compreensão das mudanças no conhecimento matemático. Isso fica evidente quando olhamos os deslocamentos dos centros culturais e políticos em cada período da história" (STRUIK, 1998, p. 24).

Em toda sociedade, é possível identificar como a forma de conceber a matemática foi condizente com os interesses e o pensamento vigentes. Abordamos, nas seções seguintes, com base em Silva & Mendes (2013), a relação entre o desenvolvimento da matemática e o desenvolvimento social (processo sócio-epistemológico) em algumas civilizações, como a egípcia e a babilônica, a grega antiga e a greco-romana.

Na Babilônia e no Egito (3000 a.C. – 260 d.C.), os primeiros vestígios matemáticos apareceram associados às necessidades práticas. O conhecimento matemático oriundo dessas civilizações envolvia o uso de cálculos elementares na realização de tarefas simples relacionadas à agricultura e ao pastoreio, como a contagem e a medida. Assim, as primeiras manifestações matemáticas se destinaram a formatar as atividades econômicas e sociais dos primeiros núcleos urbanos. Silva & Mendes (2013, p. 35) destacam que "nesse período da história da civilização humana não é possível separar a produção do conhecimento matemático das condições sociais, culturais, políticas, econômicas e religiosas em que foi gerado".

A Grécia Antiga, por volta do século VII a.C., desponta como principal polo científico do mundo e marca o início da matemática como um corpo de conhecimento formal quando surgem as primeiras tentativas de estabelecer leis que podem ser provadas por meio de argumentos lógicos. No entanto, a matemática continuou tendo um forte componente prático através dos cálculos que os gregos antigos faziam para prever a ocorrência de fenômenos naturais. A respeito dessa época, Silva & Mendes (2013) explicam que:

> Os gregos criaram um ambiente social baseado no regime escravocrata e de classes sociais que pode ter favorecido o desenvolvimento das ciências, pois liberava os cidadãos para se dedicarem aos estudos sem se preocuparem com trabalhos pesados ou questões financeiras. Daí, os gregos praticavam, assim, como egípcios e babilônios uma matemática utilitária, mas já demonstravam interesse pela filosofia e por uma matemática mais abstrata (SILVA & MENDES, 2013, p. 36-37).

A escola pitagórica, um marco no período da história grega antiga, provavelmente, fundada por Pitágoras de Samos (aproximadamente 570-550 a.C.), foi o lugar onde a matemática ganhou *status* de rainha das ciências. No entanto, além de matemáticos, a escola de Pitágoras também era lugar de filósofos e astrônomos, admitindo ritos religiosos, atividades políticas, musicais e artísticas. Silva & Mendes (2013, p. 37) concluem que, deste modo, tal escola era impregnada de valores sociais e um ambiente fértil ao desenvolvimento da matemática e da ciência em geral.

Outra escola de estudos matemáticos da Antiguidade foi a escola de Platão (429-348 a.C.). Fundada em Atenas em 389 a.C., ela viveu seu apogeu como principal centro intelectual e cultural do mundo graças ao talento do Imperador Péricles (495-429 a.C.) que, durante seu reinado, levou para essa cidade os maiores intelectuais do mundo, tornando-a um ambiente fértil para o desenvolvimento das ciências. Silva & Mendes (2013, p. 38) destacam que, nesse cenário, "os platônicos desenvolveram uma matemática utilitária a partir das necessidades de comerciantes e artesãos, e uma abstrata, voltada para a classe intelectual".

De forma resumida, apresentamos as colocações de Herrera (2003) sobre a volta do desenvolvimento matemático à sua origem, o Egito, com a escola de Alexandria. Com a chegada de Alexandre Magno (século IV a.C.) ao trono grego em 338 a.C., a vida dos gregos foi fortemente alterada, pois Alexandre empreendeu seus maiores esforços para a conquista de novos territórios e passou o desenvolvimento científico para segundo plano. Ele transferiu a capital do império grego para a cidade de Alexandria, que passou a ser o novo polo comercial e financeiro do mundo antigo. Após a sua morte, Ptolomeu I se instalou como novo imperador e Alexandria ganhou o *status* de principal cidade (HERRERA, 2003, p. 46-47).

Novamente, há na história uma grande corrida de intelectuais que vão para a cidade em busca de um ambiente fértil ao desenvolvimento da ciência, principalmente, devido ao Museu de Alexandria. Este espaço não era apenas um museu, mas um centro de estudos que hoje é considerada a primeira universidade do mundo (SILVA & MENDES, 2013, p. 39). No grupo de matemáticos gregos que foram para Alexandria, estava Euclides (325-265 a.C.), entre outros nomes marcantes. Destacamos Euclides, pois, sem dúvida, é dado a ele o mérito de estabelecer as bases firmes sobre as quais se construiu grande parte do edifício matemático. Segundo Herrera (2003, p. 48), Euclides conseguiu recompilar e organizar todo o conhecimento matemático existente até aquele momento na sua obra *Os Elementos*, um tratado matemático em treze volumes.

O domínio grego teve fim por volta do século II, dando início a um período de domínio do Império Romano que afetou a matemática tanto em seu conteúdo como na forma de concebê-la. Silva & Mendes (2013) afirmam que mudanças na matemática estiveram atreladas às novas condições econômicas, sociais, políticas e culturais impostas pelo modo romano de governar[143]: "o imperador Diocleciano (245-313) diferenciava geometria de matemática e a importância dada à geometria foi grande a ponto de ser ensinada nas escolas públicas, enquanto o ensino da

[143] Os romanos destinaram seus esforços na construção de palácios, templos, casas de banho, urbanização das cidades e construção de arenas para as práticas esportivas da época etc. (SILVA & MENDES, 2013, p. 41).

matemática foi proibido, situação que perdurou até a Idade Média" (SILVA & MENDES, 2013, p. 41).

Com base na breve narrativa sobre a contribuição de algumas civilizações para o desenvolvimento da matemática, entre tantas outras surgidas em diferentes épocas, como chineses, hindus e árabes, podemos perceber que a existência e o progresso da matemática sempre estiveram ligados ao contexto sociocultural. Então, ela é uma construção realizada a partir de necessidades econômicas, políticas e intelectuais e da existência de um ambiente propício para o desenvolvimento científico. Como colocado por Silva & Mendes (2013, p. 40), "para que o conhecimento cresça e se difunda, o fator sociológico é fundamental".

Nesse sentido, o conhecimento matemático pode ser visto como uma construção social e, diante dessa condição, ela não é una, isto é, existe a possibilidade de que admita mais de uma verdade, considerando diferentes realidades sociais. Sem dúvida, essa ideia é radicalmente diferente da visão de uma verdade elementar contida nos símbolos matemáticos, que torna a matemática extremamente persuasiva, além de imutável e única.

Esse olhar diferenciado tem como pano de fundo o Programa Forte da sociologia do conhecimento científico, idealizado por David Bloor[144] (2009), na década de 1970, cujo objetivo é investigar o desenvolvimento do campo científico e identificar pontos de contingência e flexibilidade interpretativa, ligados a fatores políticos, históricos, culturais e econômicos. Um dos aspectos mais relevantes desse Programa é mostrar que a *racionalidade* pode ser usada de várias formas, dependendo do contexto, ou seja, fatores sociais podem ajudar a entender, por exemplo, porque uma prova é considerada verdadeira ou falsa.

Nesse contexto, Bloor não mede esforços para enfrentar um dos principais obstáculos da sociologia da ciência que diz respeito ao *status* da lógica e da matemática. Ele investiga e argumenta sobre o reino da objetividade, da universalidade e da impessoalidade da matemática, que é considerada o mais puro, abstrato e inquestionável dos conhecimentos. Bloor busca sua causalidade social e afirma que "a objetividade matemática pode ser entendida como uma convenção social, traçando uma semelhança entre autoridade lógica e autoridade moral" (GOMES, 2008, p. 78).

Embora uma reflexão sobre os fundamentos da matemática transcenda o domínio da sociologia do conhecimento, as concepções apresentadas no Programa Forte podem nos levar a pensar sobre a fundamentação ontológica desses conhecimentos. A partir dessas considerações, também encontramos meios para questionar a perspectiva realista associada à

[144] Não existem limitações que repousem sobre o caráter absoluto ou transcendente do próprio conhecimento, ou sobre a natureza especial da racionalidade, da validade, da verdade ou da objetividade (BLOOR, 2009, p. 15).

prática das ciências matemáticas. Bloor assume a tarefa de mostrar, contra o tipo de fundamentação defendida pelo realismo, que existem matemáticas alternativas que se utilizam de um mecanismo essencialmente sociológico – a negociação – e que a objetividade é perfeitamente compatível com um fundamento social (GOMES, 2008, p. 81). A sociologia da ciência de Bloor nos mostra que é possível conceber a matemática de maneira naturalista, isto é, os conhecimentos matemáticos são originados e desenvolvidos a partir de fatores ligados à prática social dos homens.

O construtivismo social de Ernest (1991, 1994) nos apresenta outros elementos para a consideração de uma natureza social da matemática. As regras da linguagem natural é que dão os elementos para a construção do conhecimento matemático, que é falível e que tem sua objetividade dependente de aceitação. Assim, um conhecimento só é considerado objetivo após a sua socialização e aceitação pública. Os conhecimentos objetivo e subjetivo estão interligados e este último sempre dando origem ao primeiro. Sendo assim, o saber que um indivíduo adquire é conhecimento subjetivo, que, passando a ser transformado e publicado, pode vir a ser considerado conhecimento objetivo a depender da sua aceitação pública.

Elias (2008, p. 543) chama a atenção para o fato de que *subjetivo* conserva a conotação de que o que está *na mente* de uma pessoa não é *objetivo*, ou seja, ele é *apenas aparência* ou *opinião*, que não são fatos, o que os *objetos de pensamento* realmente são. Entretanto, a epistemologia filosófica se espanta com o quebra-cabeça criado por ela própria – habilmente omitido pelo uso vernacular dos termos *objetivo* e *subjetivo*: de que mesmo uma declaração científica que pareça ser *objetiva* ou *verdadeira* é também *subjetiva*, isto é, uma declaração de como objetos se manifestam para um sujeito[145].

O construtivismo social trata separadamente do conhecimento objetivo e do conhecimento subjetivo e até desenvolve uma teoria da construção social de cada um (JESUS, 2002, p. 6). Quando dizemos que o conhecimento matemático é uma produção social, estamos falando que ele faz parte das culturas humanas e, nesse sentido, não é algo que transcende o domínio das sociedades. Seus objetos são produzidos ou construídos em resposta aos problemas humanos.

No âmbito dessas discussões, a matemática seria um tipo singular de *construção jurídica*, como parecia sustentar Wittgenstein, pelo fato de normatizar o modo dos humanos

---

[145] Dificilmente podemos ter a esperança de superar esse impasse, devido ao dualismo estático, sem uma observação mais atenta da concepção básica que, com poucas exceções, subjaz às teorias filosóficas tradicionais do conhecimento e que é perpetuada por termos como "subjetivo" e "objetivo" no sentido um tanto confuso em que eles são comumente usados (ELIAS, 2008, p. 543-544).

estabelecerem relações com o mundo material, conceitual e simbólico e, portanto, com o mundo material, linguístico e ficcional a fim de lidar com problemas humanos (JESUS, 2002, p. 16). Esse autor ainda sinaliza que:

> Os objetos a que se refere o discurso matemático não são nem transcendentais, nem preexistentes e nem empíricos; ao contrário, são construtos sociais, e a objetividade, a suposta necessidade, o suposto êxito *a priori* da aplicabilidade do conhecimento matemático ao mundo físico e a norma de verdade do mesmo não são explicáveis em termos exclusivamente empíricos, biológicos, linguísticos ou transcendentais, mas devem ser encarados, eles próprios, como construções sociais negociadas (JESUS, 2002, p. 16).

O conhecimento matemático é fruto das relações estabelecidas entre os sujeitos cognoscentes e o seu entorno, que é permeado por um coletivo configurado chamado cultura. Uma coisa é certa: nosso conhecimento é mediado pelos jogos linguísticos que buscaram dar conta do que é o conhecimento humano no curso da história, imersa em um tempo imemorial.

Isso significa que "em cada um deles, a pluralidade dos sujeitos é para nós patente, seja no sentido biológico, ou filosófico. Por isso, o social é tudo, e até a singularidade do sujeito é uma construção social" (JESUS, 2002, p. 193). Essas considerações nos levam na direção daquilo que queremos alcançar: uma concepção social de conhecimento em relação à matemática, que implica numa compreensão desse conhecimento, que não a enxerga mais como infalível e que admite suas teorias e o valor de verdade atribuído a elas como construções de sujeitos sociais.

4.2.2 A objetividade cultural da matemática

Voltando à citação de Bertrand Russell, apresentada na introdução desse estudo, que diz "na matemática não se sabe do que se está falando, nem se o que se fala é verdadeiro", Silva (1991, p. 155) interpreta essa afirmação como o relato fiel de uma matemática formalista levada às últimas consequências. A matemática entendida como um jogo de símbolos sem significado, segundo regras explicitamente estabelecidas, que é, a rigor, um discurso sobre nada em particular. Entretanto, essa não é a única teoria sobre o que é a matemática: também vimos aqui que, para os realistas, a matemática admite enunciados verdadeiros, porque se referem a certos estados de coisas reais, isto é, ela descreve uma realidade independentemente existente.

Essa visão nos dá certa garantia de verdade, mas nos apresenta uma difícil questão: *Onde* exatamente estão os entes matemáticos, sabendo que eles não são entidades acessíveis aos sentidos, nem objetos mentais, nem elementos empiricamente existentes? Já os intuicionistas lidam com a matemática de outra forma: os objetos matemáticos são construções mentais. A consequência imediata dessa consideração é o abandono da noção clássica de verdade dada pela lógica clássica.

No entendimento de Silva (1991, p. 156), o qual compartilhamos, uma filosofia da matemática pode preservar certos aspectos do realismo, como a equiparação da matemática às ciências naturais e à norma da objetividade, mas anulando o seu pressuposto metafísico. Também é possível considerar elementos dos intuicionistas e outros construtivistas, como considerar o subjetivismo e que os objetos matemáticos são indissociáveis da consciência embora sendo contra remetê-los à interioridade psíquica, descartando o psicologismo. Defende-se aqui que a objetividade matemática é essencialmente constituída pela intersubjetividade cultural. Nesse contexto, Silva (1991) explica que:

> Os objetos e as situações da matemática não são, como querem os realistas, independentes. Sua própria natureza é de objetos dependentes da consciência que os constitui intencionalmente. Nem são por isso, como querem os intuicionistas, objetos mentais. A matemática é um fazer comunalizado, cujo objeto é, tipicamente, um objeto cultural, e não um dossiê de vivências mentais de uma consciência ideal, mais ou menos realizada nos matemáticos reais (SILVA, 1991, p. 156).

O teórico que nos apresenta a visão acima ainda contribui com a concepção que traz de Trasseger de que todo objeto e todo estado de coisas são sempre intencionais. Conforme Silva (1991, p. 163), os objetos e situações objetivas são intencionais, pois são "focos referenciais do discurso no qual a comunidade se engaja, denotados pelos nomes e relações da linguagem na qual se dá o discurso e cuja *existência objetiva*[146] para esta comunidade está garantida, a menos que haja evidente inconsistência do discurso". O que Silva quer dizer é que, se a objetividade for entendida como estando aí identicamente para todos, então, a tese do realismo ontológico (platonismo) é irrelevante para garantir a objetividade do discurso matemático. Resumindo, ele coloca a seguinte questão: "para que estes objetos deveriam existir se eu já ajo *como se* existissem?".

Daí "a existência objetiva é assim constituída na intersubjetividade, e a objetividade que justificadamente podemos afirmar como existente é uma objetividade *cultural*, da qual todos podem falar coerente e consistentemente, *como estando aí*, para todos" (SILVA, 1991, p. 162). Assim, a matemática é entendida como um projeto coletivo, no qual os sujeitos trabalham uns com os outros na tarefa de explicitar seu sentido e determinar o corpo de seus enunciados.

[146] Creio que algumas palavras são necessárias para justificar-se tomar o critério de existência *objetiva*, não apenas de existência *para mim*, mas de existência *para todos* que compartilhem comigo a tarefa de pensar as objetividades postas (SILVA, 1991, p. 162).

Os sujeitos, que são seres separados, passam a trabalhar numa única direção que leva a um projeto integrado. Para a busca de entendimento desse projeto, é de fundamental importância o estudo das estruturas e dos paradigmas que envolvem a produção de conhecimentos desses indivíduos, pois a epistemologia necessita da sociologia. Jesus (2002, p. 187) nos ajuda a evidenciar essa perspectiva ao afirmar que "a matemática é limitada pelo contexto e carregada de valor, e não é pura, afastada e intocada de questões sociais tais como gênero, raça e cultura".

Sendo uma criação humana, D'Ambrosio (2012, p. 168) vê a matemática como uma manifestação cultural de todos os povos, em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos e, como tal, diversificada nas suas origens e na sua evolução. Esse autor destaca que, a partir dessa concepção, devemos enxergar os objetos matemáticos como construções sócio-histórico-culturais desenvolvidas por métodos específicos de pensamento. Tais colocações nos fazem acreditar que a matemática é um sistema cultural que pode ser melhor entendido pelo estudo de suas mudanças ao longo do tempo.

Jesus (2002, p. 189) destaca que a dimensão histórica pode mostrar porque conceitos e resultados foram desenvolvidos em matemática baseados em problemas particulares e dificuldades historicamente encontradas. Esse pesquisador afirma que Lakatos (1978) deu conta de mostrar, de uma maneira mais completa, a base de mudança histórica de conceitos, termos, simbolismo, teoremas, provas e teorias da matemática. A leitura das publicações desse autor nos dá uma outra perspectiva acerca do desenvolvimento e das práticas discursivas da matemática.

Assumindo a visão de Lakatos (1978) a respeito da matemática, conseguimos dar uma virada na forma de enxergá-la. Passamos de uma busca pela essência de objetos e encadeamentos lógicos, para uma procura sobre o modo como as pessoas fazem matemática. Com a noção de quase empirismo, Lakatos (1978) coloca, no mesmo status epistemológico, as ciências naturais e a matemática. O quase empirismo está apoiado na tese falibilista, que afirma que a matemática é falível, no sentido de ter falseadores potenciais. Cardoso (1997, p. 83) esclarece como se dá o desenvolvimento dessa teoria:

> O desenvolvimento de uma teoria quasi-empírica[147] se dá a partir de problemas. As soluções (provisórias) para os problemas passam por testes

[147] A bibliografia que tomamos por referência, bem como os textos de Lakatos traduzidos para o português, trazem a grafia "Quasi-empírica". "Quasi" é um prefixo latino, também adotado no inglês, mas, em português, usa-se o "quase" e, na ortografia mais recente, sem o hífen.

> (refutações) e reformulações. O veículo para o crescimento é a crítica, concorrência entre teorias, troca de problemas. Não há acumulação de verdades eternas. Para Lakatos, a Ciência Natural e a Matemática são quasi-empíricas. A diferença entre ambas está na natureza dos seus falseadores potenciais (CARDOSO, 1997, p. 83).

Outro pensamento que se mostra relevante, conforme nosso entendimento, é o de Husserl que, segundo Bicudo (2013, p. 8), assume a idealidade dos objetos matemáticos, em cuja constituição encontram-se experiências dos indivíduos e processos de teorização sustentados na comunicação, primordialmente, registrada pela linguagem escrita:

> Husserl trabalha a criação/construção da matemática em um nível social, cultural e histórico de complexidade, a qual envolve a linguagem. Sua preocupação é compreender como uma idéia matemática nasce na subjetividade de um sujeito, mediante um ato original de evidência, transcende essa esfera, passando ao conhecimento intersubjetivo veiculado na cultura e mantém-se na objetividade que persiste de maneira a estender-se por diferentes culturas e épocas (BICUDO, 2013, p. 8).

A ênfase na obra de Husserl é dada pela forma como a objetividade matemática é encarada, que não despreza as experiências vividas, os aspectos psicológicos presentes na constituição do conhecimento matemático, a intersubjetividade e os elementos culturais, sociais e linguísticos que veiculam e estruturam sentidos e percepções. Segundo Bicudo (2013, p. 9), essas percepções são desdobradas pelos atos intencionais em atos que vão se enredando em outros atos. Isso ocorre de maneira que aqueles atos concernentes à abstração refletida conduzem à constituição de idealidades concebidas no âmbito da fenomenologia, que são constituídas na intencionalidade da subjetividade transcendental. Desta forma:

> No solo em que as experiências ocorrem e fazem sentido, tanto para o sujeito como para a comunidade de co-sujeitos, os outros com quem está no mundo-vida e com quem o sujeito dialoga. A subjetividade transcendental, como o nome indica, transcende as próprias experiências perceptivas desdobradas nos atos da consciência quando o sujeito se dá conta do que está processando e pelo movimento de reflexão e de atos de abstração, reúne de forma articulada compreensões e interpretações já efetuadas sobre o objeto focado, dando origem a outros objetos. Estes, ao serem expressos e comunicados a co-sujeitos, ganham vida na dimensão histórico-cultural, porém com características agora diversas, daquelas concernentes às vivências de individuais (BICUDO, 2013, p. 9).

Refletindo sobre essa concepção de subjetividade transcendental, compreendemos que ela caminha por trajetos em consonância com a visão de realidade matemática que temos, construída a partir de uma objetividade cultural que, certamente, não traduz uma concepção de idealidade como concebida pela filosofia platônica – uma realidade existente de modo perfeito num mundo *superior* de ideias. Pelo contrário, as idealidades fenomenológicas são livres, como afirma Bicudo (2013, p. 9), pois “transcendem a subjetividade, mantêm-se na temporalidade sustentada pela linguagem e abrem possibilidades de complementaridade, aplicabilidade e de mobilidade na cadeia de suas articulações".

A respeito da relação entre racionalidade científica e cultura, Chaitin (2009, p. 16) afirma que "a modernidade jamais conseguiu alcançar seus cânones de objetividade e neutralidade da razão científica em relação à cultura. Não há como distinguir a objetividade, universalidade e neutralidade da ciência e a subjetividade, localidade da cultura". Chaitin (2009, p. 16) também explica que "a ciência cria, ela própria, uma nova cultura na qual não é capaz de se ver imersa". Para concluir esta seção, ratificamos as palavras de Chaitin (2009) quando a pesquisadora apresenta uma visualização metafórica desse caminho paradoxal:

> Pode-se imaginar a ciência seguindo um caminho metodológico criado e prescrito pela razão para composição da racionalidade científica, buscando afastar-se dos enganos e arraigados preconceitos da cultura, como quem caminha sobre o que parece ser o lado externo (metaforicamente não cultural) de uma faixa de Möbius. Imaginando estar segura nessa superfície externa da faixa, apartada da cultura, neutra, objetiva e independente, a ciência segue adiante. Contudo, esta superfície inicialmente externa da faixa, aqui simbolizando o caminho de objetividade ditado pela metodologia, vai-se curvando e, um pouco mais adiante, de forma contínua e quase imperceptível, a faixa de Möbius completa o seu giro e a superfície externa em que a ciência caminhava torna-se superfície interna, aqui simbolizando a "passagem" paradoxal da ciência orientada por regras de objetividade e universalidade para um conjunto de práticas que a transformam em uma cultura também dotada de subjetividade, localidade e tendência. Esta é uma passagem quase imperceptível da tentativa de estar "fora" da cultura existente, gerando uma nova cultura (CHAITIN, 2009, p. 16).

Assim como Kubrusly (2013, p. 5) fala de nós, seres humanos, definidos por Lacan como "eternamente conectados por uma construção topológica que identifica interior e exterior, tornando-nos um complexo de possibilidades, em cada verso de que somos feitos", Chaitin (2009) compara a ciência à *Fita de Möbius* ao identificar que não há como separar seu lado interno, simbolizado pela objetividade e universalidade, do seu externo, caracterizado pela subjetividade e a localidade.

A história do pensamento ocidental favoreceu à crença de que a matemática é algo que transcende suas aplicações práticas. Essa imagem muito veiculada sobre a matemática é bastante injusta. Por isso, procuramos dissolvê-la recorrendo a momentos da sua história e apresentando mecanismos do fazer matemático que apontam para uma proximidade entre os valores subjacentes a essa atividade e os defendidos pelos representantes das ciências humanas: a criatividade, a existência de diferentes estilos, a convivência com paradoxos e contradições e a autonomia propiciada pela multiplicidade de perspectivas.

No nosso entendimento, todas as abstrações matemáticas são construtos humanos que adquirem objetividade por um consenso intersubjetivo. Se esse consenso se perder, elas deixarão de existir. A partir daí, as propriedades de racional e objetiva ganham um novo sentido, e a matemática passa a ser vista como uma criação humana. E, assim como poetas e artistas nos oferecem muitas maneiras de expressão da beleza e da harmonia através de suas representações das coisas do mundo e das experiências humanas, também os teoremas, fórmulas e “formas” de calcular podem ser consideradas *obras* que fazem parte do patrimônio cultural da humanidade.

CAPÍTULO 5

Considerações Finais

"Por onde caminham os não ditos?" Tudo o que não pode ser codificado, os inexistentes, os desistidos, almas, riscos de nada, matéria onírica e desvalida, unicórnios, principalmente os azuis; por onde lançamos e recebemos o muito que escapa à lógica e a palavras? Quando dançamos e em transe ou desarmados, quando atônitos diante do mundo e de nós, o que nos diz a dor e a felicidade, por onde caminham as emoções desconhecidas, a soma que não zera o amor vazado que os encontros não devoram, os números sem números, por onde caminham? Como entender o que não faz sentido quando só o que faz sentido nos interessa? Como perdoar o tempo que nem em mim nem em nós existe para além dos meus relógios que de mim e de nós outros não se compadecem? O que se sente quando se sente e o que se sofre quando se sofre, como entender a mente que em nós nos patrocina? Dentro da cabeça? É lá que ela se encontra? No corpo? Esse eterno companheiro que se contenta com tão pouco em ser tudo de nós em todos nossos momentos, fora de nós? No espaço-tempo que sobre nós se dobra em gargalhadas? Por onde caminhamos quando fora de nós?[148]

Ricardo Kubrusly

Nesta tese, iniciamos todos os capítulos com trechos de produções do matemático e poeta Ricardo Kubrusly, que contribuíram para nossas reflexões e o desenvolvimento de nossas ideias acerca do fazer matemático pelos seres humanos. Esses escritos falam de uma busca incansável pelo infinito, pela eternidade, por uma ligação com Deus, apontando a matemática, com sua lógica, como uma tentativa do homem de se articular com o mundo e fazer uma leitura mais *fiel* da realidade.

A citação que abre nossas considerações finais fala de assuntos fundamentais para o ser humano – mente, corpo, emoções, tempo, sentido da vida – e se destaca por apresentar questionamentos sobre a tentativa da humanidade de se aproximar do mundo. São discussões que permanecem sem respostas definitivas, mas que apresentam muitos pontos de vista de como o mundo é percebido. Seguindo esse caminho, acreditamos que a matemática é uma dessas visões, porque ela é uma descrição do mundo através de seus modelos.

E, diante de palavras poéticas, nosso pensamento vai ao encontro da ideia de que, além da realidade do mundo em que vivemos e que nos esforçamos em entender, o próprio ser humano é um universo desconhecido que ainda não conseguimos desvendar. Sem dúvida, é um texto que nos faz refletir sobre nossa existência e nosso lugar no mundo, inspirando-nos na

[148] "O túnel de palavras: A Pergunta". KUBRUSLY, R. S. **Um Percurso Lógico para o Unitrino Cristão:** AVE PESSOA. Anais Eletrônicos do 14º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia – 14º SNHCT. Belo Horizonte, Campus Pampulha da Universidade Federal de Minas Gerais. UFMG, 2014. ISBN: 978-85-62707-62-9.

escrita das conclusões desse estudo, que trata da natureza da matemática, defendendo sua condição de invenção humana.

Para nós, o homem extrai da sua experiência corpórea com as coisas do mundo, os princípios desta criação. Por isso, nosso interesse nas questões que envolvem as preocupações e as potencialidades humanas. Com certeza, os processos de controle e regulação da realidade e, consequentemente, as formas de conhecimento humano, inclusive a matemática, incidem sobre esses elementos, pois suas raízes estão na realidade percebida e imaginada.

Embora não tenhamos respostas definitivas para a infinidade de questão sobre esse tema, podemos afirmar que, depois desse estudo, saímos fortalecidos em relação à nossa maior inquietação, a saber, o quanto é fundamental refletir e discutir sobre a relação do ser humano com a produção do conhecimento matemático. Além disso, uma coisa é certa: acreditamos na existência da matemática a partir de um processo simbólico de representação da realidade com uma marca histórica e do potencial do ser humano de criar e transformar com a percepção e a interpretação do seu corpo e do seu pensamento.

5.1 Conclusões

Diante da questão “que ideias sobre a matemática precisam circular entre nós?”, que nos motivou a realizar essa pesquisa, e da pergunta “como a matemática é concebida pelos seres humanos?”, que direcionou nossas reflexões sobre os fundamentos da matemática, mostramos, nos capítulos anteriores, os argumentos que sustentam nossa concepção de que a matemática é uma criação humana. Deste modo, essa tese pretende se colocar ao lado de tantos outros trabalhos sobre a natureza da matemática, mas fazendo uma abordagem que desconsidera as fronteiras entre a matemática e as outras áreas do conhecimento e evidenciando os processos humanos que permitem sua existência e desenvolvimento, rompendo as barreiras entre os indivíduos e a matemática.

Nesse sentido, nos enveredamos pelo fascinante caminho da filosofia da matemática, no qual é possível observar que respostas às mesmas perguntas de ordem filosófica se adaptaram às respectivas concepções de cada época e de cada cultura e que diversas abordagens para certas questões pouco ou nada mudaram desde a sua primeira elaboração. Para nós, isso é um estímulo para pensarmos sobre questões, sem dúvida, iluminadoras. Um estudo que proporciona um encontro entre matemática e filosofia é um exercício no qual podemos ampliar as nossas próprias fronteiras, reagindo a respostas interessantes e construindo nossas próprias teorias ainda que não a rigor “verdadeiras”.

Os aspectos ontológicos da matemática – concepções da realidade do objeto matemático – e os epistemológicos – modos de conhecer consonantes com as concepções da realidade – demandam estudos não só no campo da filosofia, mas também na área da história da matemática, visando a compreensão das diferentes teorias sobre esses temas que coexistem ao longo da história dessa ciência. Esses aspectos direcionaram a reflexão sobre como os seres humanos são capazes de fazer matemática, além da especulação sobre os elementos relevantes na produção de conhecimento e na relação do homem com a realidade.

Nosso estudo se caracterizou por uma pesquisa de caráter teórico-bibliográfico e, por meio desse ensaio, esperamos ampliar o espaço reflexivo-interpretativo sobre o tema abordado. A metodologia aqui delineada dá um tratamento aos dados que permite uma interpretação que apresenta o homem em seu processo evolutivo por intermédio das construções matemáticas e através de registros textuais referentes aos contextos culturais, comportamentos individuais e coletivos, e valores e saberes impregnados nas diferentes realidades ao longo do tempo.

Retomamos o objetivo geral que direcionou o trabalho e que teve seu desdobramento a partir da elaboração de cinco objetivos específicos descritos e listados na Introdução, e fazemos, a seguir, os apontamentos que resumem os argumentos expostos no cumprimento do papel de responder às questões propostas.

O objetivo geral *apresentar a matemática como uma forma de conhecimento concebida e desenvolvida pelos seres humanos a partir de suas atividades conscientes, intencionais e inventivas* foi cumprido uma vez que foi realizada a exposição de vários fatores que associam a ação do ser humano à existência e ao desenvolvimento da matemática. No entanto, por termos trabalhado com um tema tão abrangente, acreditamos que esse objetivo ainda possa contemplar uma série de outras possibilidades com desdobramentos significativos em relação às discussões sobre a natureza da matemática num fluxo interligado às colocações feitas nesse trabalho.

Nosso pensamento foi ao encontro da ideia de que o caráter rigoroso da matemática é fortemente marcado pelas peculiaridades e intenções humanas e não por um tipo de pensamento puro dado *a priori*. Desta forma, aspectos ditos metafísicos relacionados aos objetos e à lógica da matemática nada mais são do que convenções humanas. É, nesse contexto, que a matemática vai tendo seus traços delimitados e sua estrutura desenhada.

Considerando a ordem estética e o rigor lógico como características fundamentais da matemática, ressaltamos que tais propriedades são fruto da criatividade e do dinamismo humano em criar estruturas e padrões que nos permitem representar o mundo que nos rodeia, lembrando que tais atributos não são exclusivos da matemática. Por exemplo, a arte também é identificada, de maneira geral, pela estética.

Além disso, tratamos dos processos cognitivos da matemática e das forças que moldaram sua trajetória histórica visando explorar tanto o arcabouço mental que a suporta como o seu desenvolvimento sociocultural. Nessas circunstâncias, procuramos sustentar nossa posição diante da proposta do realismo, que acredita que as verdades da matemática já estão todas determinadas independentes da atividade humana, mas que, para nós, não se presta a servir como critério último de verdade da ciência.

Na exploração da principal questão sobre a natureza da matemática, a saber, a origem dos seus objetos de estudo, defendemos que tais objetos admitem uma base empírica que fornece todos os ingredientes e experiências para suas criações; não reconhecemos sua existência num mundo exterior, que não é influenciado por nossas sensações e que é acessível somente pela atividade do pensamento.

A matemática não é um conhecimento absoluto, seus objetos de estudo surgem das necessidades humanas, que estabelecem relações multifacetadas com a cultura, e do trabalho dentro da própria matemática, no qual as verdades dependem dos princípios estabelecidos pelos matemáticos. Assim, de forma resumida, colocamos mais uma vez a justificativa deste trabalho, que é a ressignificação de termos associados à matemática, como impessoalidade, neutralidade, objetividade, racionalidade, universalidade, mas numa perspectiva humanista.

No primeiro capítulo desse trabalho, podemos constatar, através de um panorama geral sobre as filosofias da matemática, que há tanto correntes que consideram a existência de noções matemáticas abstratas apriorísticas como outras, em contrapartida, que admitem que o conteúdo da mente lhe é depositado pelas sensações sobre as quais o raciocínio elabora conceitos. A partir do estudo de tais filosofias, propomos uma historiografia que busca analisar, de modo mais abrangente, os fundamentos sobre os quais se procura explicar a natureza do conhecimento matemático.

As teorias que definimos como fatores propulsores na defesa da hipótese de que a matemática é uma criação humana estão resumidas a seguir com o intuito de verificar o alcance dos objetivos específicos que foram propostos. Cada uma delas fornece uma justificativa para nossa maneira de olhar a origem e a evolução da matemática, que admite esse conhecimento como um saber mutável, dependente do mundo sensível e dos desejos humanos. E mais, por essa visão, a matemática se manifesta como um modo de relação do ser humano com o mundo, assumindo várias condições de acordo com o contexto em que os indivíduos estão inseridos, ou seja, o pensamento matemático e suas construções nos revelam uma epistemologia que se configura como aspecto constitutivo da história do ser humano.

Partimos dos pressupostos da *dialética materialista*, colocada por Candiotto (2016) no capítulo 2, nos quais o objeto da matemática é um reflexo da realidade física e não uma parte constitutiva dessa realidade, nem uma forma *a priori* da sensibilidade humana. Portanto, o objeto da matemática se encontra entre a realidade física e as formas de reflexo, constituído num aspecto abstrato que não se encontra na consciência, mas no agir humano ao conhecer e sistematizar essa realidade em forma de conhecimento. Isso significa que o conteúdo objetivo do objeto da matemática está na realidade física, e nossa discussão localiza tal objeto nas relações de abstrações produzidas pela consciência com sua base na materialidade.

Daí avançamos no segundo capítulo com a *epistemologia pluralista* proposta por Chaitin (2009), que caracteriza todos os saberes a partir de suas racionalidades. Essa teoria permite enxergar a matemática como um saber fruto da racionalidade científica, que busca estabelecer uma regra sobre o “real” e não uma lei universal com uma racionalidade predeterminada. Deste modo, não há regras fora do ambiente comum a todos os saberes capaz de fazer um julgamento sobre eles e definir qual deles é o mais racional de todos.

Ainda no capítulo 2, Cifuentes (2002, 2003, 2005) nos apresenta a *racionalidade estética*, uma concepção de que a matemática comporta também características emocionais que juntas com a razão são responsáveis pela existência desse conhecimento. Existe um conteúdo estético na matemática ligado a valores, como perfeição, simetria, forma, contexto, argumentos narrativos e indutivos, que nasce com o ato da criação. Esses elementos contribuem para caracterizar a natureza do conhecimento matemático a partir de uma racionalidade ligada aos fenômenos da emoção. Nessa forma alargada de compreensão, a construção da matemática admite as dimensões do racional e do emocional, refletindo um desejo de perfeição estética.

Ao abordarmos a questão da *generalização empírica* no terceiro capítulo, outra teoria apresentada por Candiotto (2016), podemos clarificar a relação entre os conceitos matemáticos e a realidade. Todo o conhecimento humano é produzido e é fruto de um processo que deriva das interações do homem com o meio. Nesse contexto, a matemática é uma atividade humana em que conceitos são construídos nas tentativas de solução das circunstâncias oriundas do mundo perceptível aos sentidos ou de reflexões teóricas relativas a modelos obtidos por meio de generalizações das observações e hipóteses.

Admitimos ainda, no capítulo 3, segundo Gusmão (2013, 2016), uma *epistemologia da imaginação e da intuição* no campo da matemática, alargando as formas de pensar o conhecimento matemático e científico. Tal epistemologia envolve uma racionalidade nos processos de criação que pode permitir uma melhor compreensão de que eles não se restringem somente à arte. A imaginação e a intuição são motores do pensamento matemático que, por meio de sua dinamicidade, favorece a criatividade na própria matemática, além de sua aplicação nas outras ciências, ou seja, elas são ferramentas que orientam nossas escolhas no desenvolvimento de qualquer ideia.

Seguimos, no terceiro capítulo, com o *realismo interno* de Putnam (1988) para mostrar que os padrões de racionalidade podem mudar com o tempo, preservando a objetividade humana. Nesse cenário, a verdade é, ao mesmo tempo, adequação – entre o entendimento e a realidade constituída por fatos e objetos que dependem dos esquemas conceituais – e aceitabilidade – precisamente porque a realidade é constituída deste modo. Assim, podemos ter várias visões do mundo, e a matemática é uma das possíveis maneiras, independente dele, que propõe verdades sobre esse mundo. A história da matemática se constrói por feitos humanos, previsões, aproximações de pessoas reais que refletem, razoavelmente, suas descrições e teorias.

As concepções apresentadas no capítulo 4 com o *Programa Forte* de Bloor (2009) nos levam a pensar sobre a fundamentação ontológica do conhecimento matemático e a questionar a perspectiva realista associada à prática da matemática. Nesse sentido, o conhecimento matemático pode ser visto como uma construção social, na qual a "racionalidade" pode ser usada de várias formas dependendo do contexto. Esse Programa nos mostra que os conhecimentos matemáticos são originados e desenvolvidos a partir de fatores ligados à prática social dos homens.

O *construtivismo social* de Ernest (1991, 1994), compartilhado por Jesus (2002) nos mostra outros elementos para a consideração de uma natureza social da matemática. Segundo essa perspectiva, as regras da linguagem natural dão os elementos para a construção do conhecimento matemático, que só é considerado objetivo após a sua socialização e aceitação pública. Essa teoria defende que a matemática faz parte da cultura humana e seus objetos são produzidos ou construídos em resposta aos problemas humanos. Tais colocações levam na direção daquilo que queremos alcançar: uma compreensão da matemática que não a enxerga mais como infalível e que admite suas teorias como construções de sujeitos sociais.

A *objetividade cultural*, defendida por Silva (1991) nos ajuda a entender que a existência objetiva da matemática é constituída na intersubjetividade cultural. Os objetos e situações objetivas são intencionais, pois são referências do discurso no qual a comunidade se engaja, denotados pelos nomes e relações da linguagem na qual se dá o discurso daquela cultura. Eles estão garantidos, a menos que haja evidente inconsistência do discurso, e são sempre coerentes e consistentemente aceitos por todos.

A última teoria que apresentamos no capítulo 4 é o *quase empirismo* de Lakatos (1978) defendida por Jesus (2002), que define a matemática como aquilo que os matemáticos fazem, com todas as imperfeições inerentes à criação humana. Com essa visão, passamos de uma busca pela essência de objetos para uma procura sobre o modo como as pessoas fazem matemática, colocando-a no mesmo status epistemológico das ciências naturais.

Com base nas teorias descritas acima, indicamos os argumentos construídos para sustentar a ideia de que a matemática é um dos domínios cognitivos da experiência humana, entre tantos outros que o homem é capaz de manifestar a partir de sua racionalidade e poder de criação:

▪ A matemática é um sistema de ideias sobre a realidade, sendo dependente da consciência e da realidade física;

▪ A matemática é mais um critério de justificação das visões de mundo;

▪ A matemática tem um conteúdo estético ligado aos seus métodos;

▪ A matemática tem seu universo construído sobre o mundo vivido;

▪ A matemática é direcionada pela imaginação e pela intuição a partir de hipóteses que são aproximações idealizadas do real;

▪ A matemática é uma das possíveis maneiras que propõe verdades sobre o mundo, mas que é independente dele;

▪ A matemática é socialmente produzida pela humanidade, coletiva e historicamente;

▪ A matemática é uma forma de normatizar o modo dos humanos estabelecerem relações com o mundo material, conceitual e simbólico;

▪ A matemática é limitada pelo contexto e tem sua existência objetiva constituída na intersubjetividade dos sujeitos;

▪ A matemática é falível e não tem acumulação de verdades eternas.

A partir destes argumentos, a matemática pode ser reconhecida como uma forma de expressão humana desenvolvida pelas sociedades ao longo do tempo em relações multifacetadas a partir de valores e crenças. Isto significa tirar a matemática da posição soberana que ela ocupa em relação às demais áreas do conhecimento e aproximá-la mais das pessoas, convencendo-as de que são elas que têm o domínio da matemática e não o contrário. Ela versa sobre a realidade e apresenta uma característica que é comum a toda forma de manifestação intelectual, isto é, a matemática é basicamente um sistema de representação.

Longe de reduzir a matemática a um procedimento lógico-demonstrativo que apresenta soluções completas e objetivas ao desprender suas provas da intuição para assegurá-la em bases demonstráveis, nossa tese pensa numa matemática que organiza os fenômenos testemunhados na experiência, ou seja, um conhecimento que não pode estar dissociado de uma espécie de abstração oriunda da experiência sensível.

Concluindo nosso pensamento, reforçamos a concepção que a objetividade da matemática se revela por critérios estabelecidos pelas práticas humanas e não em termos de fundamentos *a priori*. Todo conhecimento, inclusive o matemático, está enraizado no comportamento e nos acordos humanos, e isso nos faz perceber o quanto é plausível considerar que a matemática esteja imersa no espaço das experiências, das relações e das práticas humanas no seu exercício de idealização da realidade.

5.2 Trabalhos futuros

Nosso trabalho tentou resgatar o pensamento sobre a matemática de uma forma ampla, como outras pesquisas a respeito de sua natureza, sendo algumas contribuições aqui apresentadas. Cada teoria que discutimos mostra que há maneiras próprias de se fazer matemática em consonância ao tempo e ao espaço, fazendo com que ela seja colocada no mesmo patamar dos outros saberes e com as mesmas condições. Embora a matemática admita traços como abstração, precisão e rigor lógico, tais características não violam seu atributo histórico e sua relação com o processo de desenvolvimento da humanidade.

A configuração de poder em torno da matemática, que nos dá impressão de verdade absoluta, marcada pela precisão e pela clareza que só nos cabe descobrir, é assegurada a partir do momento que se fazem imperceptíveis os vínculos com aspectos do tempo-espaço e com a ligação a problemas que motivaram as construções matemáticas.

Essa forma de pensar até hoje influencia as considerações sobre a natureza da matemática e distancia sua produção de questões socioculturais. Tal configuração se dá quando a matemática é reconhecida apenas do ponto de vista formal, no qual ela fica orientada por uma sistematização que, em grande parte, tem os conhecimentos antecessores a essa formalização desprezados. Isso a deixa desconexa aos fatos do processo histórico. No entanto, os teóricos analisados nesse estudo nos mostram que a primazia da matemática deve ser atribuída à atividade do ser humano enquanto inventor, ou seja, o homem não é um descobridor de uma essência matemática.

Para nós, este aspecto deve ser trabalhado desde o início do ensino da matemática, juntamente com os conteúdos considerados específicos, pois só assim será possível reposicioná-la como uma criação humana. Acreditamos que esta ação é capaz de proporcionar uma nova relação dos indivíduos com a matemática, de modo que eles possam colocá-la no mesmo patamar dos outros saberes e reconhecer as potencialidades e as limitações do ser humano envolvidas nesta criação. Esta compreensão também pode contribuir para reflexões sobre questões existenciais e inquietações sobre a realidade. É nessa direção que desejamos realizar novos trabalhos.

Integrando a história e filosofia da matemática ao seu ensino podemos contribuir para uma educação científica de qualidade, pois elas favorecem o aprendizado do exercício de fazer perguntas, criando um ambiente de discussões e reflexões e permitindo o entendimento de que a ciência não é algo pronto nem acabado, inclusive a matemática. Então, temos a certeza de que, se a matemática for trabalhada com o apoio desses aspectos, ela será reconhecida como um saber vivo, dinâmico e historicamente construído pelos homens.

Como colocamos na apresentação da tese, nossa pesquisa pretende estabelecer uma versão sobre a matemática que possa contribuir para a realização de projetos que envolvam suas demandas educacionais. Daí a proposta de estudos que unem os campos do conhecimento citados anteriormente. Para finalizar, ressaltamos o nosso desejo de que esse trabalho, embora não esteja diretamente ligado ao cenário educacional, seja útil a estudos dessa área com a obtenção de resultados significativos, sobretudo, no que diz respeito ao ensino da matemática.

Referências Bibliográficas

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. Trad. de Alfredo Bosi. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

ABELARDO, P. Lógica para principiantes. In: ABELARDO, P. **Santo Anselmo de Cantuária. Os Pensadores**. São Paulo: Abril Cultural, v. 7, p. 209-249, 1973.

AFANASIEV, V. G. **Fundamentos de los conocimientos filosóficos**. La Havana: Política, 1963.

ALEKSANDROV, A. D. Visión general de la matemática. In: ALEKSANDROV, A. D. et al. **La matemática**: su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza, 1991a. p. 17-89.

ALEKSANDROV, A. D. Geometrias no euclidianas. In: ALEKSANDROV, A. D. et al. **La matemática:** su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza, 1991b. p. 123-227.

ALMEIDA, M. C. **Origens da matemática**: a pré-história da matemática - o neolítico e o alvorecer da história. Curitiba: Progressiva, 2011. 366 p.

ALVES, E. D. S. O Realismo interno confrontado com "seus inimigos". **Trans/Form/Ação**. São Paulo, v. 30, n. 2, p. 75-91, 2007.

ANCELMO, O. **O terceiro corpo:** um diálogo entre a vestimenta e o corpo. 2002. 101p. Dissertação (Mestrado em Artes) – Instituto de Artes, Universidade de Campinas, São Paulo, 2007.

BACHELARD, G. **A psicanálise do fogo**. Trad. Paulo Neves. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

BACHELARD, G. **A terra e os devaneios do repouso**: ensaio sobre as imagens da intimidade. Trad. Paulo Neves. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BACHELARD, G. **A terra e os devaneios da vontade**: ensaio sobre a imaginação das forças. Trad. Maria Ermantina de A. P. Galvão. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2013.

BADIOU, A. **Parar uma nova teoria do sujeito**. Rio de Janeiro: Relume-Dumará, 2002.

BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. Family resemblance. In: BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. (Ed.). **Wittgenstein**: understanding and meaning. 2nd ed. Oxford: Blackwell, 2005. part I, p. 201-226.

BARALDI, I. M. **Matemática na escola:** que ciência é esta? Bauru: Edusc, 1999a.
BARALDI, I. M. Refletindo sobre as concepções matemáticas e suas implicações para o ensino diante do ponto de vista dos alunos. **Mimesis**, Bauru, v. 20, n. 1, p. 07-18, 1999.

BARBOSA, G. **Platão e Aristóteles na filosofia da matemática**. 2009. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, *Campus* de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2009.

BARTH, G. M. P. **Arte e matemática, subsídios para uma discussão interdisciplinar por meio das obras de M. C. Escher**. 2006. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2006.

BELOV, P. T. O caráter primário da matéria e secundário da consciência. In: TCHERTKOV, V. P. et al. **Materialismo dialético**. Rio de Janeiro: Vitória, 1955. p. 269-336.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVEA, F. Q. **A matemática através dos tempos**. Trad. de Elza F. Gomide e Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 296 p.

BICUDO, I. **Análise Não-Standard**. Bolema, Rio Claro, São Paulo, v. 7, n. 8, 1992.

BICUDO, I. Platão e a matemática. **Revista Letras Clássicas 2**. p. 301-315, 1998.

BICUDO, M. A. V. Um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento da Educação Matemática. In: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (Org.). **Um ensaio sobre concepções a sustentarem sua (da educação matemática) prática pedagógica e produção de conhecimento**. 1. ed. v. 1. Campinas: Mercado das Letras, 2013. p. 17-40.

BISHOP, A. J. Mathematics education in its culture context. **Educational Studies in Mathematics**, 19, n. 2, p. 179-191, 1988.

BLACK, M. **Models and Metaphors**: studies in Language and Philosophy. Ithaca, N.Y., Cornell University Press, 1962.

BLOOR, D. **Conhecimento e imaginário social**. Trad. de Marcelo do Amaral Penna-Forte. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.

BRUNSCHVICG, L. **Las etapas de la filosofía matemática**. Buenos Aires: Lautaro, 1945.

CAFEZEIRO, I.; KUBRUSLY, R. S.; MARQUES I. C.; SOUZA, N. L.; BRITTO, S. V. S. Crises e Incompletudes, Multi-histórias Matemáticas. **REVEMAT**, Ed. Filosofia da Educ. Matemática: Florianópolis, 2016. p. 162-177.

CAFEZEIRO, I.; KUBRUSLY, R. S.; MARQUES, I. D. C. Paulo Freire, mathematics and policies that shape mathematics. **Journal of Indian Council of Philosophical Research**, v. 34, n. 2, p. 227–246, May, 2017.

CAFEZEIRO, I.; HAEUSLER, E. H.; CUKIERMAN, H. L.; MARQUES, I. C. Recontando a computabilidade. **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v.3, n. 2, p. 231-251, jul./dez. 2010.

CANDIOTTO, W. C. **Crítica da razão matemática:** uma análise do objeto da Geometria. 2016. 194f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2016.

CARDOSO, C. F. Crítica de duas questões relativas ao anti-realismo epistemológico contemporâneo. **Diálogos**, Maringá, v. 2, n 2, p. 47-64, 1998.

CARDOSO, V. C. **As Teses Falibilista e Racionalista de Lakatos e a Educação Matemática**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Geociências, UNESP, Rio Claro, 1997.

CARNEIRO, V. C. G. Educação Matemática no Brasil: uma meta-investigação. **Quadrante-Revista Teórica e de Investigação**, Lisboa, v. 9, n. 1, p. 117-140, 2000.

CARVALHO, T. F. D. Sobre linguagens, conceitos matemáticos e o discurso científico. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 26-38, 2009.

CHAITIN, V. M. F. G. **Redes conceituais em mímesis na história das idéias:** uma proposta de epistemologia pluralista. 2009. 179f. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

CHAUÍ, M. **Convite à Filosofia**. São Paulo: Ática, 2000.

CHEPTULIN, A. **A dialética materialista**: categorias e leis da dialética. São Paulo: Alfa-Omega, 1982.

CHIBENI, S. S. Descartes, Locke, Berkeley, Hume e o realismo científico. **Primeira Versão**, IFCH-Unicamp, n. 25, 1990, 40 p.

CIFUENTES, J. C. Conhecimento Matemático e Racionalidade Estética. In: VII Encontro Paranaense de Educação Matemática. Foz do Iguaçu. **Anais do VII EPREM**, v. 1, 2002.

CIFUENTES. J. C. Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. **Boletim GEPEM** (USU). Rio de Janeiro, v. 46, p. 55-72, 2005.

CIFUENTES. J. C. Fundamentos estéticos da Matemática: da Habilidade à Sensibilidade. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo (Org.). **Filosofia da Educação Matemática:** Concepções e Movimento. 1 ed. Brasília: Plano Editora Ltda, v. 1, p. 59-79, 2003.

CORRÊA, R. A. Linguagem matemática, meios de comunicação e Educação Matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

COSTA, C. F. D. **Por que Resolver Problemas na Educação Matemática? Uma Contribuição da Escola da Gestalt**. 2008. 220f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

COUTINHO, Lázaro. **Convite às Geometrias Não-Euclidianas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

DAMÁSIO, A. R. **O erro de Descartes**. São Paulo: Cia das Letras, 1996.

DANTZIG, T. **Número**: A linguagem da Ciência. 4. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970. 284 p.

D'AMBROSIO, U. Educação Matemática: uma visão do Estado da Arte. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, março, 1993.

D'AMBROSIO, U. A História da Matemática e Educação. In: FERREIRA, E. S. **Cadernos Cedes 40. História e Educação Matemática**. Campinas: Papirus, p. 7-17, 1996.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade. **Coleção Tendências em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

D’AMBROSIO, U. Priorizar História e Filosofia da Matemática na Educação. **Tópicos Educacionais**, Universidade Bandeirante de São Paulo, Recife, v. 18, n.1-2, jun./dez. 2012.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

D'AMORE, B. **Matemática, estupefação e poesia.** Trad. de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Trad. de João Bosco Pitombeira. 2. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1996.

DEL VECCHIO JUNIOR, J. **Metafísica e racionalidade científica:** um ensaio sobre os fundamentos da matemática. 2010. 248f. Tese (Doutorado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

DETONI, A. R. Matematizar é humano. In: CLARETO, S. M; DETONI, A. R.; PAULO, R. M. (orgs.). **Filosofia, Matemática e Educação Matemática**: Compreensões dialogadas. Juiz de Fora: Ed. UFJF, 2010.

DOMINGUES, H.H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **Bolema**, ano 15, n. 18, p. 55-67, 2002.

DOXSEY, J. R.; DE RIZ, J. **Metodologia da pesquisa científica**. [S.l.]: ESAB – Escola Superior Aberta do Brasil, 2002.

DUARTE JUNIOR, J. F. **Fundamentos estéticos da educação**. 8. ed. Campinas: Papirus, 2005.

DUARTE JÚNIOR, J. F. **O sentido dos sentidos**: A educação (do) sensível. 2000. 234f. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2000.

DUARTE JÚNIOR, J. F. **Por que arte-educação?** 6. ed. Campinas: Papirus, 1991.

DUAYER, M. Antirrealismo e absolutas crenças relativas. **Verinotio**, Belo Horizonte, n. 14, p. 16-27, 2012.

DUMMETT, M. **Truth and Other Enigmas**. London, Duckworth, l978.

EINSTEIN, A.; INFELD, L. **A evolução da física**. Rio de Janeiro: Zahar, 2008.

ELEUTÉRIO, L. F. Aulas de matemática: que filosofia? **VIII Epbem**, v. 1, n. 2, UEPB. Campina Grande, Paraíba, 2014.

ELIAS, N. Sociologia do Conhecimento: Novas perspectivas. **Sociedade e Estado**, Brasília, v.23, n. 3, p. 515-554, set./dez. 2008..

EMMER, M. Interview with Ennio De Giorgi. **Notices of the MAS**. v. 44, n. 9, p.1097-1101, Oct. 1997.

ENGELS, F. **Anti-Dühring**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

ERNEST, P. **The philosophy of mathematics education**. Bristol: Farmer, 1991.

ERNEST, P. (ed.) **Mathematics, education and philosophy**: an international perspective. London, 1994.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FERRARA, L. D. Design em espaços. **Coleção Textos Design**. São Paulo: Edições Rosari, 2002.

FERREIRA, A. B. H. **Novo Aurélio Século XXI:** O dicionário da língua portuguesa. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

FOLINA, J. **Poincaré and the philosophy of mathematics**. London: Macmillan Press, 1992.

FOLSCHEID, D.; WUNENBURGER, J. **Metodologia filosófica**. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

FOUCAULT, M. **Arqueologia do Saber**. 7. ed. Rio de Janeiro: Forense, 2008, 239 p.

FOUCAULT, M. **Microfísica do Poder**, São Paulo: Editora Graal, 2013.

FREIRE, P.; D'AMBROSIO, U.; MENDONÇA, M.C. A conversation with Paulo Freire For the Learning of Mathematics. **Fredericton**, v. 17, n. 3, p.7-10, nov. 1997.

FURTADO, M. F. Algumas realizações de Charles Hermite. 1996. 45f. Monografia (Graduação). Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 1996.

GAIDUKOV, I. G. A cognoscibilidade do mundo e suas leis. In: TCHERTKOV, V. P. et al. **Materialismo dialético**. Rio de Janeiro: Vitoria, 1955. p. 337-390.

GERDES, P. **Os manuscritos filosófico-matemáticos de Karl Marx sobre o cálculo diferencial**: uma introdução. Maputo: TLANU, 2008.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GLEISER, M. **A ilha do conhecimento:** os limites da ciência e a busca por sentido. 3. ed. Rio de Janeiro: Record , 2015.
GLOCK, H. J. **Dicionário Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GOLDSTEIN, R. **Incompletude:** a prova e o paradoxo de Kurt Gödel. Trad. de Ivo Korytowski. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

GOMES, V. P. **Causalidade e hermenêutica em sociologia da ciência:** uma crítica ao "Programa Forte" de David Bloor. 2008. 283f. Tese (Doutorado em Filosofia) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2008.

GOTTSCHALK, C. M. C. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. In: **Caderno de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, Série 3, v. 14, n. 2, p. 305-334, 2004.

GOTTSCHALK, C. M. C. **O sentido formativo da matemática:** uma perspectiva humanista. São Paulo, 2008. Disponível em: <www.iea.usp.br/textos>. Acesso em: 17 ago. 2017.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-euclidean Geometries**. EUA: W. H. Freeman and Company, 1997. 637 p.

GUSMÃO, L. D. **Educação matemática pela arte:** uma defesa da educação da sensibilidade no campo da matemática. 2013. 153f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2013.

GUSMÃO, L. D. Subsídios para uma "Epistemologia da Imaginação e da Intuição" no Campo da Matemática a partir do Diálogo entre as Ideias de Poincaré e Bachelard. **XX EBRAPEM**: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Curitiba, Paraná, 2016.

GUSMÃO, L. D; FRANCO, V. S; CIFUENTES, J. C. A imaginação e a intuição na dinâmica do conhecimento matemático: subsídios para uma pesquisa epistemológica e pedagógica. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 10. p. 266-387, 2017.

HEINZMANN, G. L'intuition épistémique. **Une approche pragmatique du contexte de justification en mathématiques et en philosophie**. Paris: Vrin, collection Mathesis, 2013.

HEINZMANN, G. **Quelques aspects de l'histoire du concept d'intuition**: 'Aristote à Kant. 2002. Disponível em: http:/poincare.univ-nancy2.fr/digitalassets/74753_histoire_intuition.pdf. Acesso em 08 jul. 2019.

HERRERA, R. T. Arquímedes alredor del círculo. **La matemática em sus personajes**, 2. ed., v.1. Madri: Nivola, 2003.

HERSH, R. Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. In: TYMOCZKO, T. **New directions in the philosophy of mathematics**. Boston: Birkhäuser, 1986. p. 9-28.

HOLANDA, J; VERAS, I. A. A criatividade como condição de ser humano. **Revista Filosofia Capital**. 8. ed., v. 4, Porto Alegre, 2009.

HUME, D. **Investigação acerca do Entendimento Humano**. Trad. José de Oscar de Almeida Marques. São Paulo: Editora Unesp, 2004.

HUME, D. **Tratado da Natureza Humana:** uma tentativa de introduzir o método experimental de raciocínio nos assuntos morais. Trad. D. Danowski. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

HUNTLEY, H. E. **A divina proporção:** um ensaio sobre a beleza na Matemática. Tradução de Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1985.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos:** a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

IFRAH, G. **Os números:** história de uma grande invenção. 3. ed. Tradução de Stella M. Freitas Senra. São Paulo: Editora Globo, 2005.

JESUS, W. P. **Educação matemática e filosofias sociais da matemática: Um exame das perspectivas de Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest**. 2002. 212f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2002.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KUBRUSLY, R. S. Costurando uma fita na cabeça. Um ensaio sobre a invenção da Pessoa. In: FRADE, C.; PAPE, C.; MANHÃS, R. (orgs). **Ética, Ciência e Filosofia**. Rio de Janeiro: DECULT, 2013, p. 75-88.

KUBRUSLY, R. S. Do Tempo o que se diz? **Revista Carbono**, 2012. Disponível em: http://www.revistacarbono.com/artigos/01do-tempo-oque-sediz/. Acesso em: 09 jan. 2018.

KUBRUSLY, R. S. O Zero como Espelho do Mundo: a matemática como ordenadora de todas as coisas. In: **13º Seminário Nacional de História das Ciências e da Tecnologia**, Anais Eletrônicos, São Paulo, 2012.

KUBRUSLY, R. S. Um Percurso Lógico para o Unitrino Cristão: AVE PESSOA. **Anais Eletrônicos do 14º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia** – 14º SNHCT. Belo Horizonte, Campus Pampulha da Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, 2014.

KUJAWSKI, G. M. **A crise do século XX**. São Paulo: Ed. Ática, 1988.

LACAN, Jacques. On a question preliminary to any possible treatment of psychosis. In: **Écrits a selection**. New York: W.W. NORTON & COMPANY INC, 1977.

LAKATOS, Imre. **A lógica do Descobrimento Matemático:** provas e refutações. Organizado por John Worrall e Elie Zahar. Tradutor Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 1978.

LAKOFF, G. **Women, Fire and Dangerous Things**. Chicago, University of Chicago Press, 1987.

LAKOFF, G.; NUÑEZ, R. E. **Where Mathematics Comes From**: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being, Nova York: Basic Books, 2000.

LATOUR, B. **Ciência em Ação:** como seguir cientistas e engenheiros sociedade afora. Tradução de Ivone C. Benedetti. Revisão de tradução de Jesus de Paula Assis. 2. ed. São Paulo: Editora UNESP, 2011.

LAUDAN, L. **Beyond Positivism and Relativism**: Theory, method and evidence. Boulder. Colorado: Westview Press, 1996.

LEAKEY, Richard. **The origin of humankind**. New York: Basic Books, 1994.

LUKÁCS, G. **Para uma ontologia do ser social I**. São Paulo: Boitempo, 2012.

LENIN, V. I. **Materialismo y empiriocriticismo**: notas críticas sobre una filosofía reaccionaria. Moscú: Progreso, 1979.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MACHADO, N. J. **Matemática e realidade:** análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. 7. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

MACHADO, C. T. O.; MENEZES, J. E. **Concepções de professores que ensinam matemática sobre números racionais, suas experiências e as implicações em suas práticas na 5a série do Ensino Fundamental**. Educação Matemática em Revista. n. 25, ano 13, p. 5-21, 2008.

MAKOWIECKY, S. Representação - a palavra, a idéia, a coisa. **Cadernos de Pesquisa Interdisciplinar em Ciências Humanas**, n. 57, PPGICH. Dez. 2003.

MAYOS, Gonçal. In: AAVV. **Filosofía**; Curso de preparación para laprueba de acceso a launiversidad para mayores de 25 años. Trad. Ricardo Henrique Carvalho Salgado e João Paulo Medeiros Araújo. Barcelona: EducaciOnline, 2008, p. 1-35.

MARX, K. **O capital:** crítica da economia política. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, v. 1, 2011.

MENEGHETTI, R. C. G. O realismo e o idealismo: focalizando o conhecimento matemático. In: MARTINS, R. A. et al. **Filosofia e história da ciência no Cone Sul.** 3º Encontro. Campinas: IFHIC: [s.n.], 2004, p. 371-377.

MENEGHETTI, R. C. G.; TREVISANI, F. D. M. Futuros matemáticos e suas concepções sobre o conhecimento matemático e seu ensino e aprendizagem. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 15, n. 1, p. 147-178, 2013.

MERLEAU-PONTY, M. **Fenomenologia da percepção**. Rio de Janeiro: Livraria Freitas Bastos, 1971.

MONALISA, M.; LAURO, C. B. **Lógica Moderna e Ciências Cognitivas**. Disponivel em: http://www.ufjf.br/virtu/files/2010/05/artigo4a7.pdf. Acesso em: 12 jan. 2018.

MONTEIRO, A. C. L. **As tramas da realidade:** considerações sobre o corpo em Michel Serres. 2009. 186p. Tese (Doutorado em Filosofia) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

NASCIMENTO JÚNIOR, W. G. D. **O infinito contado por Deus:** uma interpretação dedekindiana do conceito de número ordinal transfinito de Cantor. Rio de Janeiro: PUC, 2006.

NASCIMENTO, G. **Estudo da evolução da teoria dos números transfinitos de Cantor**. 2009. 241f. Tese (Doutorado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

NAVIA, R. **Verdade, racionalidade e relativismo em H. Putman**. Coleção Filosofia 103. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1999. 134 p.

NEGRELLI, L. G. **Uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem matemática para a educação (em) matemática**. 2008. 94 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

NEHRGIN, C.; POZZOBON, M. A Formação do Professor de Matemática na Perspectiva de Gestor de Currículo. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2006, Recife. **Anais**... Recife: Programa de Pós-Graduação em Educação - Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, 2006. 11p.

NICOLAU, M. **Introdução à criatividade**. 2 ed. João Pessoa: Ideia, 2018. 65p.

NÓBREGA, T. P. Corpo, percepção e conhecimento em Merleau-Ponty. **Estudos de Psicologia**, 2008, v. 13, n. 2, p. 141-148. Disponível em: https://www.scielo.br/epsic. Acesso em: 19 jul. 2019.

NOGUEIRA, C. M. I. A Definição de número: uma hipótese sobre a hipótese de Piaget. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 87, n. 216, p. 135-144, maio/ago. 2006.

OSTROWER, F. **Criatividade e processos de criação**. 25. ed. Petrópolis: Vozes, 2010.

OVTCHINNIKOV, N. F. A materialidade do mundo e as leis de seu desenvolvimento. In: TCHERTKOV, V. P. et al. **Materialismo dialético**. Rio de Janeiro: Vitória, 1955. p. 215-267.

PAIVA, Rita. **Gaston Bachelard**: a imaginação na ciência, na poética e na sociologia. São Paulo: FAPESP, 2005.

PASSES, A. Do um à metáfora. Para um entendimento da matemática pa'ikwené (palikur). **Revista de Antropologia**. Universidade de São Paulo, São Paulo, v. 49, n. 1, 2006.

PATY, M. Des fondements vers l'avant, Sur la rationalité des mathématiques et des sciences formalisées. In: **Philosophia Scientiae**. Paris: Kimé, n. 9, 2005. p. 109-30.

PETERS, M. A. Wittgenstein, education and the philosophy of mathematics. **Theory and Science**, v. 3, n. 2, 2002.

PIETROCOLA, M. A matemática como estruturante do conhecimento físico. **Caderno Catarinense de ensino de Física**, Florianópolis, v. 19, n. 1, ago. 2002. p. 88-108.

PINTO, A. **O infinito:** ideias, transformações e as considerações de Giordano Bruno. 2012. 159p. Tese de Doutorado em História da Ciência. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de História da Ciência, São Paulo, 2012.

PLATÃO. **The dialogues of Plato**. 2 ed. Chicago: Encyclopedia Britannica. Great Books of Western World, v. 6, 1994.

POINCARÉ, H. **Science et méthode**. Paris: Ernest Flammarion, 1920.

POINCARÉ, H. **La valeur de la science**. Paris: Ernest Flammarion, 1923.

PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M., & ABRANTES, P. A natureza da Matemática. In. **Didáctica da matemática**. Lisboa: DES do ME, 1997. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~mat0840/Textos/ponte-etc(2NaturezaMat)%2097.htm. Acesso em: 20 jan. 2017.

PRADO L. L. J. S. Mill: Lógica, linguagem e empirismo. **Revista Eletrônica Informação e Cognição**, v. 5, n. 2, p.4-19, 2006.

PUTNAM, H. **Razon, verdad e historia**. Madrid: Tecnos, 1988.

QUINE, W. V. O. **Theoriesandthings**. Cambridge: Harvard University Press, 1981.

READ, H. **Educação pela arte**. Trad. Valter Lellis Siqueira. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

REDONDI, P. El oficio del historiador de las ciências e de las técnicas. In: LAFUENTE, A.; SALDAÑA, J. J. **Historia de las Ciencias:** Nuevas Tendencias. Madrid: Consejo Superior de Investigationes Científicas, 1987. p. 94-103.

RESTIVO, S. The Social Life of Mathematics. In: RESTIVO, S.; BENDEGEM, J.; FISCHER, R. **Math Words. Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education**. Albany: State University of New York Press, 1993. p. 247-278.

RIBEIRO, C. N. M. Q. **A presença da metafísica na ciência.** 2013. 349p. Tese de Doutorado. História e Filosofia das Ciências, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

RÍBNIKOV, K. **História de las matemáticas**. Moscú: Mir, 1987.

RODRIGUES, C. T. Matemática como ciência mais geral: forma de experiência e categorias, cognitio-estudos. **Revista Eletrônica de Filosofia**. São Paulo. v. 4, n. 1, jan/jun. 2007, p. 37-59. Disponível em: https://www.pucsp.br/pos-graduacao/mestrado-e-doutorado/filosofia. Acesso em: 19 jul. 2019.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, M.; OREY, D. C. Humanizing Mathematics through Ethnomodelling. **Journal of Humanistic Mathematics**, v. 6, Issue 2, p. 3-22, 2016. Disponível em: http://scholarship.claremont.edu/jhm/vol6/iss2/3. Acesso em: 28 jan. 2018.

ROSEBERY, A. N.; WARREN, B.; CONANT, F. R. Appropriating Scientific Discourse: Findings from Language Minority Classrooms. **Office of Bilingual Education and Minority Languages Affairs**, Washington, 1992.

ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. **Categorías del materialismo dialéctico**. Distrito Federal do México: Grijalbo, 1958.

RUBINSTEIN, S. L. **El ser y la conciencia**: y el pensamiento y los caminos de su investigación. Distrito Federal do México: Grijalbo, 1963.

RUSSEL, B. Le réalisme analytique. In: Heinzmann, G. (Ed.). **Poincaré, Russell, Zermelo et Peano**. Paris: Blanchard, 1986. p. 296-304.

RUSSEL, B. Mathematicians and metaphysicians. In: SULLIVAN, A. (Ed.). **Logicism and the philosophy of language – selections from Frege and Russell**. Toronto: Broadview Press, 2003. p. 221-234.

SANTANA, D. P. F. **É a matemática relativa?** A relação entre conhecimento, matemática e as questões socioculturais a partir de uma leitura das ideias de David Bloor. 2007. 106p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

SANTOS, V. M. Linguagens e comunicação na aula de Matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SERRES, M. Ciência, Direito. In: **O Contrato Natural**. Lisboa: Instituto Piaget, 1990.

SERRES, M. **O Incandescente**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2005.

SERRES, M. **Variações sobre o corpo**. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2004.

SHAPIRO, S. **Filosofia da Matemática**. Trad. de Augusto Franco de Oliveira. Lisboa: Edições 70, 2015. 440 p.

SILVA, J. J. Husserl's philosophy of mathematics. **Manuscrito XVI,** n. 2, p. 121-148, out. 1993.

SILVA, J. J. Objetos intencionais e existência objetiva. **Trans/Form/Ação**, São Paulo, v. 14, p. 155-164, 1991.

SILVA, J. J. Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

SILVA, J. J. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SILVA, M. Resenhas: filosofias da matemática. **Princípios**. Natal, v. 16, n. 26, p. 285-297, jul./dez. 2009.

SILVA, M. A. B.; NETO, J. S.; COSTA, C. E. C. A matemática e seus objetos de estudo. In: Encontro Paraibano de Educação Matemática. 2016, Campina Grande. **Anais**... Campina Grande: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraíba, 2016.

SILVA, M. D. F. D.; MENDES, I. A. A intencionalidade no fazer matemática: um paralelo entre os "discursos" da história e a sociologia da matemática. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 13, n. 27, p. 33-53, 2013.

SILVA, P. V. D.; SILVEIRA, M. R. A. D. Matemáticas ou diferentes usos da matemática? Reflexões a partir da filosofia de Wittgenstein. **Acta Scientiarum. Education Maringá**, v. 35, n. 1, p. 125-132, Jan./Jun. 2013.

SIQUEIRA, J. R. O argumento da indispensabilidade e a existência dos objetos matemáticos. **Revista GuaiRacá**, v. 29, n. 2, p. 125-143, 2013.

SMOGORZHEVSKI, A. S. **Acerca de la geometría de Lobachevski**. Moscú: Mir, 1978.
SPADE, P. **Thoughts, words and things:** an introduction to late medieval logic and semantic theory. 2002. Disponível em: http://www.pvspade.com/Logic/docs/thoughts1_1ª.pdf. Acesso em: 10 ago. 2018.

SPADE, P. **Thoughts, words and things: an introduction to late medieval logic and semantic theory**. 2002. Disponível em: http://www.pvspade.com/Logic/docs/thoughts1_1a.pdf. Acesso em: 10 ago. 2018.

STEINER, H. G. Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. **For the Learning of Mathematics 7**. p. 7-13, February. 1987.

STENGERS, I. **A Invenção das ciências modernas**. São Paulo: Editora 34, 2002.

STEWART, I. **Em busca do infinito:** uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Tradução de George Schlesinger. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

STRUIK, J. D. Sobre a Sociologia da Matemática. In: **Sociologia da Matemática**. Lisboa: Cadernos de Educação e Matemática (Org. Grupo TEM), 1998.

TENÓRIO, R. M. **A razão e o tempo**: trilhas da matemática na teia da história. Salvador: EDUFBA, 2009. 210 p.

THOM, R. Modern mathematics: an education al and philosophic error? In: TYMOCZKO, T. (Ed.). **New directions in the philosophy of mathematics**: an anthology. Boston: Birkhäuser, p. 67-78, 1985.

TOURAINE, A. **Crítica da modernidade**. Rio de Janeiro: Ed. Vozes, 1994.

TROTSKY, L. **ABC da dialética materialista**. Traduzido por Iuri Tonelo e André Augusto. Revista Iskra, 2013. Disponível em: https://revistaiskra.wordpress.com/especiais-iskra-trotsky-eengels/especial-iskra-abc-da-dialetica-materialista/. Acesso em: 20 ago. 2018.

VAN FRAASSEN, B.C. **The ScientificImage**. Oxford: Clarendon Press, 1980.

VARELA, F., THOMPSON, E., & ROSCH, E. **Embodied mind:** cognitive science and human experience. Londres: The MIT Press, 1996.

VENTURA, L. A Linguagem Numérica e a Matemática na Modernidade. **Revista Linhas**. v.1, n.1, 2000. Disponível em: www.revistas.udesc.br/index.php/linhas/article/view/1317/1128. Acesso em: 24 jul. 2019.

VILLELA, D. S. Matemáticas nos usos e jogos de linguagem: ampliando concepções na educação matemática. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. 2008, Rio Claro. **Anais**... Rio Claro: Universidade Estadual Paulista ‘Júlio de mesquita Filho’, 2008.

WILDER, R. L. **Introduction to the Foundations of Mathematics**. New York: John Wiley & Sons, 1965, 327 p.

WILDER, R. L. The evolution of mathematical practice: The cultural basis of mathematics. In: TYMOCZKO, T. **New directions in the philosophy of mathematics:** an anthology. Boston: Birkhäuser, 1985, p. 185-200.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas (IF)**. São Paulo: Nova Cultural, 1999.

WITTGENSTEIN, L. **Remarks on the Foundations of Mathematics (RFM)**. Oxford: Blackwell, 1980a.

WITTGENSTEIN, L. **Remarks on the philosophy of psychology (RPP, 1)**. Oxford: Blackwell, 1980.

YALMAN, N. “The Raw: The Cooked Nature Culture”. In LEACH, E. (org.). **The Structural Study of Myth and Totemism**. Londres: Tavistock, 1968. p. 71-89.

Nunca me conformei com um conceito puramente científico da existência, ou aritmético-geométrico. A existência não cabe numa balança ou entre os ponteiros dum compasso. Pesar e medir é muito pouco; e esse pouco ainda é uma ilusão. O pesado é feito de imponderáveis, e a extensão de pontos inextensos, como a vida é feita de mortes. A realidade não está nas aparências transitórias, reflexos palpitantes, simulacros luminosos, um aflorar de quimeras materiais. Nem é sólida, nem líquida, nem gasosa, nem electromagnética, palavras com o mesmo significado nulo. Foge a todos os cálculos e a todos os olhos de vidro, por mais longe que eles vejam.

Teixeira de Pascoaes, in "O Homem Universal"