A AXIOMATIZAÇÃO DE TARSKI PARA A GEOMETRIA

Rafael Tavares Juliani - Aluno de mestrado
rafaeljuliani@gmail.com

A geometria foi o primeiro ramo do saber a ser axiomatizado e tal axiomatização pode ser encontrada nos *Elementos* de Euclides de Alexandria, o qual foi adotado como padrão de axiomatização para muitos ramos do saber. Em uma axiomatização, as demonstrações dos teoremas são decorrentes de um conjunto finito de definições e primeiros princípios, embora, hoje em dia, existam axiomatizações com um número infinito de primeiros princípios, como é o caso da geometria elementar de Tarski. A obra euclidiana, porém, não explicita claramente a natureza dos objetos matemáticos, nem o caráter de seus enunciados. Os termos "postulados" e "noções comuns" não são, em momento algum, esclarecidos. Tal falta de clareza levou ao surgimento de diferentes versões dos *Elementos* de Euclides, cada uma segundo a filosofia de seu editor. No entanto, os objetos geométricos eram concebidos da mesma forma. Durante muitos séculos, acreditava-se que a geometria havia alcançado a episteme do espaço (CAVEING, 1990).

A grande mudança foi o surgimento das geometrias não euclidianas, pois objetos geométricos como a reta e o plano, por exemplo, passavam a ser concebidos de formas diferentes. Essa mudança foi causada pelas descobertas desencadeadas pela tentativa de mostrar que o quinto postulado de Euclides não era um postulado. As novas geometrias eram tidas como um conjunto de enunciados falsos sobre o espaço por muitos, pois tais geometrias alteravam as características dos objetos matemáticos classicamente concebidos. O mapeamento de tais geometrias dentro da geometria euclidiana, porém, mostrou que se os enunciados das novas geometrias fossem falsos, também seriam os enunciados da geometria euclidiana, motivando assim, uma revisão na própria geometria euclidiana, antes nunca questionada e, com isso, encontram-se algumas falhas lógicas (BARKER, 1969).

A partir de diferentes concepções de objetos geométricos clássicos, surgem muitas axiomatizações para a geometria. Quando os objetos geométricos de uma axiomatização são compreendidos da mesma forma que os da geometria euclidiana, ou seja, os objetos possuem as mesmas características, essa geometria é dita euclidiana. Em geral, a diferença entre as axiomatizações da geometria euclidiana é com relação a quais objetos seriam os mais básicos do espaço, isto é, quais seriam os objetos primitivos (objetos sem definição).

Hilbert busca os fundamentos da geometria e apresenta uma axiomatização para a versão geométrica na qual os objetos geométricos têm as mesmas características que os objetos euclidianos (HILBERT, 2005). Hilbert escolhe três objetos geométricos como primitivos: ponto, reta e plano. Além disso, ele escolhe três relações primitivas que vão agir sobre os objetos, são elas: incidência, ordem e congruência. Nas axiomatizações, os axiomas fixam o significado dos objetos primitivos e das relações primitivas, assim, vemos na axiomatização de Hilbert que a reta é uma coleção infinita de pontos. Tal forma de conceber a reta é clássica, mas faz com que se use a lógica de segunda ordem, pois se usa um conjunto como variável. Com essa estrutura de Hilbert, também se torna inevitável o uso da lógica de segunda ordem na formulação do axioma arquimediano da continuidade, o último a ser apresentado em sua axiomatização.

O objetivo de Hilbert era provar a consistência da geometria, ou seja, provar que da geometria não é possível obter dois enunciados contraditórios. Para provar essa consistência, Hilbert mapeia a geometria na aritmética, assim, sendo a aritmética consistente, também será a geometria. A redução de teorias matemáticas à aritmética faz parte da filosofia de Hilbert, que tem semelhanças com o positivismo lógico, o qual afirmava que devemos distinguir entre os termos observacionais e os termos teóricos na ciência. Enquanto os termos observacionais estão ligados diretamente à experiência sensível, os teóricos são postulados para explicar fenômenos da natureza. Segundo Carnap, os termos observacionais não precisavam de justificação, enquanto os teóricos sim. Fazendo um paralelo, pode-se equiparar os termos observacionais e os termos teóricos, respectivamente, ao que Hilbert chama de parte real e ideal (MOLINA, 2001, p. 131 e 132). A parte real seria aritmética, da qual ninguém duvida, embora Hilbert mencione partes ideias na aritmética também. Assim, a aritmética deveria ser usada para verificar a consistência de outras teorias e, também, somente os métodos dedutivos da aritmética deveriam ser usados na demonstração das demais teoria, esse é o programa dos métodos finitários de Hilbert. (HILBERT, 1964, p. 191).

A axiomatização de Tarski segue o mesmo caminho da realizada por Hilbert, no entanto, só apresenta duas relações como primitivas e apenas um objeto geométrico primitivo. As relações são de ordem e de congruência (equidistância) e o objeto geométrico, o ponto.

Tarski começa sua axiomatização no final da década de vinte do século vinte, mas seu trabalho só foi submetido a publicação em 1940, sendo publicado somente em 1967. Ao longo dos anos, esse trabalho de Tarski foi estudado e aprimorado, alguns axiomas que se mostraram dependentes dos demais foram eliminados e outros tiveram sua redação melhorada. Assim, por volta de 1965, com os estudos de Gupta, Szmielew, Schwabhäuser e Tarski, chega-se a uma concisa axiomatização da geometria euclidiana (TARSKI-GIVANT, 1999, p. 188 a 190), a qual mostrarei abaixo, através dos escritos de Tarski e Givant publicado em "The Bulletin of Symbolic Logic".

O sistema de Tarski é mais simbólico que o de Hilbert, ao invés de palavras como "existe", "para todo", usa-se símbolos lógicos como " □ " e " □ " respectivamente, entre outros. Tarski procura organizar sua geometria somente com o uso da lógica de primeira ordem (LPO), deixando claro uma diferença entre lógica e matemática. A idéia de Tarski é fazer com que nenhuma teoria se sobreponha a outra, por isso, ele busca só usar a lógica de primeira ordem como base para seu sistema. No entanto, ele só consegue isso para uma parte da geometria, a qual chamará de "geometria elementar", pois o uso de uma lógica de segunda ordem (LSO)[1] se mostra necessário. Um outro motivo para uma separação entre o uso das LPO e LSO, em sua geometria, pode ser a vantagem da LPO ser completa, ou seja, para qualquer forma válida da LPO, pode-se verificar se ela é falsa ou verdadeira. Tal resultado foi obtido em 1930 por Gödel em sua tese de doutorado (NAGEL-NEWMAN, 2003). Embora essa descoberta tenha sido feita alguns anos depois de Tarski iniciar sua axiomatização da geometria, ele já tinha alguma intuição sobre o assunto, pois vinha trabalhando sobre isso e seu aluno, Presburguer, axiomatizou uma aritmética sem a multiplicação e só com uma lógica de primeira ordem, conseguindo assim, mostrar a completude dessa aritmética.

Os axiomas de Tarski para a geometria são:

1. Axioma de reflexividade para a relação de equidistância.
2. Axioma de transitividade para a relação de equidistância.
3. Axioma de identidade para a relação de equidistância.
4. Axioma de construção de segmento.
5. Axioma dos cinco-segmentos (congruência de triângulo).
6. Axioma de identidade para a relação de ordem.
7. Axioma de Pasch.
8. Axioma dimensional, garantindo aos menos uma dimensão mínima.
9. Axioma dimensional, garantindo uma dimensão máxima.
10. Axioma de Euclides.
11. Axioma da continuidade ou esquema de axioma da continuidade.

Os axiomas de número oito e nove garantem uma dimensão finita e permitem a introdução de uma dimensão n, onde n é um número natural. Dessa forma, o sistema de Tarski, diferente do de Hilbert, introduz a dimensão da geometria com axiomas próprios, facilitando assim, o uso de dimensões diferentes apenas substituindo dois axiomas. Apenas alterando o valor de n, gera-se novos axiomas. O décimo axioma é uma versão equivalente ao famoso quinto postulado de Euclides. Já o axioma de número onze, da continuidade, necessita de uma formulação com uso da lógica de segunda ordem, por isso, Tarski apresenta um esquema de axioma para usar somente a lógica de primeira ordem. Os dez axiomas mais o esquema de axioma da continuidade é o que o Tarski chama de geometria elementar. Esse esquema de axioma da continuidade torna o conjunto de axiomas da geometria elementar um conjunto infinito.

Uma das vantagens dessa axiomatização tarskiana é que a complexidade do sistema é mais facilmente verificada que a de Hilbert, pois Tarski só usa em seus axiomas objetos primitivos (não definidos), enquanto que Hilbert, não. A outra vantagem, que sem dúvida é a principal delas, é o fato de Tarski conseguir provar a consistência, a completude e a decidibilidade da geometria elementar através da eliminação de quantificadores, mostrando assim, partes da geometria que não são passíveis dos teoremas da incompletude de Gödel.

As vantagens citadas são todos resultados metamatemático, o que mostra que os resultados de Tarski são mais vantajosos para um filósofo da matemática. No entanto, axiomatização hilbertiana parece mais fácil de ser manejada, sendo mais vantajosa no campo da prática matemática.

Notas

[1]Enquanto a LPO quantifica apenas sobre elementos individuais de um conjunto, a LSO quantifica também conjunto de elementos, os conjuntos são tratados como variáveis. Exemplo, “todo número inteiro possui divisores nos racionais” é um enunciado da LPO, pois trata de elementos de conjuntos. Já o enunciado: “todo país possui uma bandeira”, entendendo-se país como um conjunto de cidades, é um enunciado da LSO. Uma Lógica de segunda ordem mais geral ainda pode quantificar funções.

Referências Bibliográficas

BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969. p. 47-67.

CAVEING, M. La Tradition euclidienne dans la Grèce ancienne, In: Vitrac, B. **Les Éléments.** Presses Universitaires de France: Paris, 1990. p. 13-148.

HILBERT, D. On The Infinite, In: Benacerraf, P., Putnam, H. **Philosophy of Mathematics.** Cambridge University Press: Cambridge, 1964.

HILBERT, D. **The Foundations of Geometry.** Projeto Gutenberg. 2005.

MOLINA, J. A. Lakatos como Filósofo da Matemática. **Episteme**, Porto Alegre, n. 13, p. 129-153, jul/dez, 2001.

NAGEL E., NEWMAN J. R. **A Prova de Gödel.** São Paulo: Editora Perspectiva, 2003,

TARSKI, A., GIVANT, S. Tarski'System of Geometry. **The Bulletin of Symbolic Logic**, vl. 5, n. 2, p. 175-214.