GEOMETROGRAFIA: REVISITANDO A DISCIPLINA CRIADA POR LEMOINE

Marcelo da Silva Bueno
Mestrando HCTE/ UFRJ
mbueno.cap@gmail.com

Teresa Cristina de Carvalho Piva
Professora HCTE/UFRJ
teresa.piva@yahoo.com.br

Concebida por Émile Lemoine(1840-1912) ao longo do quartel final do século XIX, a Geometrografia – literalmente, escrita da geometria – constitui um método que permite a representação de entes geométricos e a solução gráfica de problemas geométricos por meio da execução do menor número possível de operações preparatórias e construções (traçados). Definida por seu criador, como a "arte das construções geométricas", a Geometrografia, envolve ainda, como aspecto básico em sua concepção original, a produção de um algoritmo que descreve os procedimentos necessários para a solução de cada problema proposto, atribuindo-lhes um índice de simplicidade e um índice de exatidão.

Lemoine foi aluno de duas prestigiadíssimas instituições de ensino, o *Prytanee de* La Flèche e a *École Polytechnique* de Paris. Apesar de ter ocupado alguns dos cargos disponibilizados pelo Estado francês aos egressos da *Polytechnique*, era um indivíduo inquieto e com interesses diversificados, desfrutando de todas as possibilidades que a cidade-luz oferecia, na segunda metade do século XIX, nas artes, na política e nas ciências:

> Podia ser encontrado frequentando aulas na *École des Mines*, trabalhando como *preparateur* de M. Jansen na *École d'Architecture*, ocupando o lugar de seu antigo professor, M. Kioes no curso preparatório da *École des Beaux Arts*, aperfeiçoando seus conhecimentos de química no laboratório de Wurtz, por quem sempre teve a maior admiração e com quem manteve uma afeição recíproca. Frequentando os cursos da École de Médicine, os hospitais e as clínicas, palpitando em filologia e terminando por experimentar o Direito por um ano.(...) Durante esses anos, Lemoine viajava na medida em que suas rendas o permitissem e quando estas lhe faltavam, não era incomum que viajasse como tutor de alguma família bem aquinhoada. (SMITH, 1896, p. 31. Tradução nossa).

A despeito de ter se notabilizado por seus estudos sobre os triângulos – que lhe renderam a descoberta do ponto simediano – Lemoine considerou a *Géométrographie* seu trabalho mais importante, por julgá-lo original e dotado de um genuíno interesse do ponto de vista filosófico. Não se considerava um matemático e o fato de ter seu tratado publicado em uma coleção – *Scientia* – que se propunha a apresentar e discutir "*des questions scientifiques a l'ordre du jour"*, e tinha Henri

Poincaré (1854-1912) como um dos membros do comitê editorial responsável pela seção de física e matemática, deve ter reforçado essa percepção. Ele vinha trabalhando na formulação de sua “arte das construções geométricas” desde 1888, quando apresentou uma memória no Congresso da Associação Francesa para o Avanço das Ciências (*Association française pour l’Avancement des Sciences*) realizado em Oran (Argélia) e, onde, segundo palavras do próprio se produziu “*l’idée nouvelle d’où est sortie la Géométrographie*” . Na apresentação de seu livro, Lemoine relata que contou com o auxílio de Gaston Terry e Evariste Bernès para analisar as soluções clássicas para problemas fundamentais da geometria e tentar obter suas construções geometrográficas.

A análise do método utilizado pela “arte das construções geométricas” deve considerar inicialmente alguns aspectos importantes, a começar pelo emprego do termo “arte”. Mesmo desconsiderando as qualidades subjetivas que envolvem o fazer artístico e a apreciação estética, a definição de arte a que Lémoine parece aproximar-se mais do sentido de técnica do que propriamente da composição artística, mesmo porque ainda no início do século XX era comum o uso do termo “arte” em substituição a técnicas que requeressem uma certa *expertise*.

A abordagem feita à geometria pela geometrografia, no entanto, difere significativamente daquela que lhe é destinada, em um sentido mais amplo, pela matemática. Em primeiro lugar, por atuar exclusivamente na geometria euclidiana, abstendo-se, por suas próprias restrições, de imiscuir-se nos domínios de outras geometrias. Além disso, a busca pela solução geometrográfica para um problema geométrico pode prescindir da ordenação lógica, em nome da economia de procedimentos – isto é, admite a utilização multifuncional de um mesmo traçado a título de reduzir o índice de simplicidade da solução, mesmo que isso implique subverter relações hierárquicas existentes entre os entes geométricos envolvidos.

Isso colocava o trabalho de Lemoine em desacordo com o trabalho de David Hilbert, que, em fins do século XIX propôs uma série de axiomas a partir dos quais a geometria e as relações entre seus entes poderiam ser estruturadas em termos lógicos. Embora a representação gráfica constituísse um recurso didático eficaz para ilustrar essas relações, seus limites de funcionamento com base nas construções de régua e compasso restringiam-se aos domínios da geometria plana. Em relação aos corpos sólidos, a aproximação entre as representações e os entes propriamente ditos é absolutamente inconsistente; por mais que um desenho em perspectiva forneça uma ilusão de profundidade capaz de facilitar a visualização dos aspectos formais de um corpo tridimensional, é inegável que o fato de suprimir uma das dimensões do mesmo ao construir sua imagem projetada descarta qualquer possibilidade de identidade entre a forma geométrica e sua representação.

Em sua essência, o método geometrográfico é bastante simples; Lemoine identificou 4 operações preparatórias e 3 operações executivas – todas realizadas apenas com o uso da régua e do compasso – identificado cada uma delas com um símbolo próprio:

Operações preparatórias

- Conduzir a borda da régua por um ponto dado – op. $\mathbf{R_1}$
- Fixar a ponta seca do compasso em um ponto dado – op. $\mathbf{C_1}$
- Fixar a ponta seca do compasso em um ponto qualquer de uma reta dada – op. $\mathbf{C_2}$
- Deslizar o esquadro sobre a borda da reta – E

Operações executivas

- Traçar uma reta – op. $\mathbf{R_2}$
- Traçar uma circunferência – $\mathbf{C_3}$

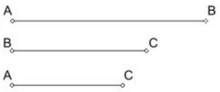
Tomando essas operações como ferramentas, Lemoine reuniu vários problemas clássicos e passou a buscar a solução geometrográfica de cada um deles, isto é, aquele que pudesse ser obtida a partir do menor número possível de operações, tanto preparatórias quanto executivas. Para quantificar o número de procedimentos empregado em cada solução, a título de comparar seus graus de eficiência, estabeleceu dois coeficientes – de simplicidade e de exatidão - que serviriam de parâmetro não só para avaliar os aperfeiçoamentos conseguidos por ele próprio, mas para cotejá-los com os resultados obtidos por seus colaboradores. O coeficiente de simplicidade corresponde ao total de operações realizadas, isto é, a soma de todos os procedimentos realizados. As operações são contabilizadas pelo número de vezes que ocorrem na solução. Assim, por exemplo, a construção de uma reta a partir de dois pontos dados, A e B, exigiria que a operação $\mathbf{R_1}$ fosse contada duas vezes – uma quando a reta passa por A e a outra quando passa por B; o procedimento seguinte, executar o traçado da reta (op. $\mathbf{R_2}$), seria contado uma única vez. Desse modo, a expressão que descreveria todo o processo de construção da reta seria expresso na forma $2\ \mathbf{R_1} + \mathbf{R_2}$ e possuiria um coeficiente de simplicidade igual a 3.

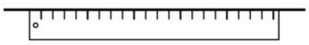
O coeficiente de exatidão, por sua vez, diz respeito ao número de operações executivas realizadas, isto é, o total de retas e circunferências traçadas na resolução do problema. No exemplo mencionado anteriormente, a única construção reta AB foi o único traçado produzido, o que atribuiria ao processo todo um coeficiente de exatidão igual a 1. No sentido de explorar melhor esses conceitos, seria conveniente analisar um outro exemplo, no qual todos os aspectos mencionados acima se fazem presentes e os procedimentos do método ficam bastante evidentes.

Solução geometrográfica do problema clássico XXXII - Construir um triângulo conhecendo seus três lados:

1) As medidas dos três lados são dadas graficamente;

A solução é iniciada com o traçado de uma reta **r** qualquer (op.R_2).

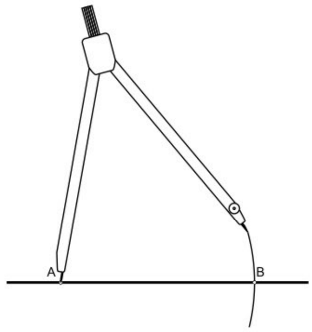




2) A ponta seca do compasso é colocada sobre A e o instrumento é aberto até cobrir a medida AB - (2 x op.C_1);

A ponta seca do compasso é colocada sobre um ponto qualquer da reta (op.C_2);

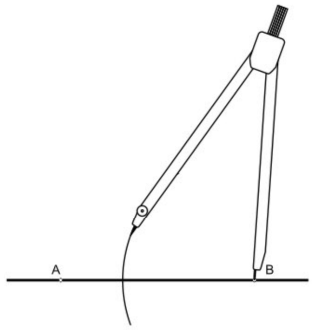
Traça-se a circunferência de centro A e raio AB (op.C_3), determinando B em **r** .



3) A ponta seca do compasso é colocada sobre B e o instrumento é aberto até cobrir a medida BC - (2 x op.C_1);

A ponta seca do compasso é colocada sobre o ponto B (op.C_1);

Traça-se a circunferência de centro A e raio AB - (op.C_3).

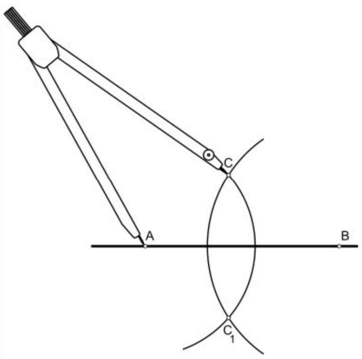


4) A ponta seca do compasso é colocada sobre A e o instrumento é aberto até cobrir a medida AC - (2 x op.C_1);

A ponta seca do compasso é colocada sobre o ponto A (op.C_1);

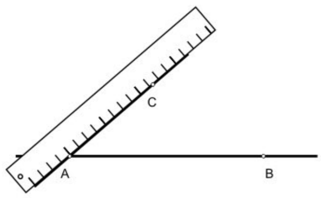
Traça-se a circunferência de centro A e raio AC - (op.C_3).

Na interseção entre os arcos ficam determinadas as possíveis posições do ponto C.



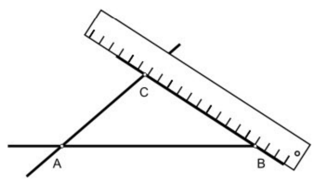
5) A borda da régua é colocada sore os pontos A e C - (2 x op.R_1);

Traça-se a reta AC (op.R_2), determinando o lado AC



6) A borda da régua é colocada sore os pontos B e C - (2 x op.R_1);

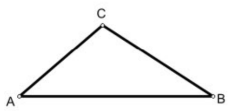
Traça-se a reta BC (op.R_2), determinando o lado BC



7) A solução está concluída após a construção de 3 retas e 3 circunferências.

Foram realizadas, ao todo 13 operações preparatórias (R_1,C_1 e C_2) e 6 operações executivas (R_2 e C_3)

Assim, a solução encontrada possui coeficiente de simplicidade **19** e coeficiente de exatidão **13**



Determinação do algoritmo que descreve a solução geometrográfica do problema:

	Operações/nº de ocorrências				
Etapas	R_1	R_2	C_1	C_2	C_3
1		1			
2			2	1	1
3			3		1
4			3		1
5	2	1			
6	2	1			
	$4R_1$	$3R_2$	$8C_1$	$1C_2$	$3C_3$

Desse modo, a solução do problema proposto seria expressa na seguinte forma:

$$\text{Op.: } 4\,\mathbf{R_1} + 3\,\mathbf{R_2} + 8\,\mathbf{C_1} + \mathbf{C_2} + 3\,\mathbf{C_3}$$

Talvez se possa compreender o algoritmo proposto por Lemoine como uma tentativa de criar uma lei geral capaz de expressar o processo mais eficaz de solucionar graficamente os problemas clássicos da geometria euclidiana. A questão é que enquanto trabalhava em sua *arte* das construções geométricas a validade deste recurso começa a ser cada vez mais questionada do ponto de vista epistemológico. A rigor, a inferência de relações entre objetos geométricos a partir de suas representações gráficas pode resultar em inconsistências lógicas, uma vez que o desenho de um ente geométrico não possui os mesmos atributos que este, por mais precisa que seja a execução de seu traçado.

Embora os princípios geometrográficos tenham permeado o trabalho de vários autores voltados para o estudo de soluções gráficas para problemas geométricos, o olhar analítico sobre o método propriamente dito – isto é, a problematização de cada solução existente e a pesquisa exaustiva para encontrar a solução tecnicamente perfeita para cada problema específico – deixou de ser objeto de atenção, levando os coeficientes de simplicidade e exatidão das construções a serem abandonados ou encarados apenas como curiosidades.

Desse modo, a Geometrografia foi reduzida, ao longo do século XX, a um mero conjunto de procedimentos sequenciados, memorizados e sem qualquer reflexão teórica ou crítica sobre os aspectos da geometria neles empregado, contribuindo para o desinteresse pelas disciplinas de representação gráfica e sua consequente desvalorização.

No Brasil, a disciplina concebida por Lemoine foi revista e ampliada por Virgilio Athayde Pinheiro, autor de uma bem-sucedida obra sobre geometria descritiva. Associando os princípios geometrográficos a aspectos estruturais da geometria euclidiana e utilizando-se da linguagem matemática, Pinheiro buscou analisar as relações entre os entes geométricos e suas representações gráficas, identificando as limitações destas últimas, mas ressaltando seu potencial para ilustrar objetivamente ideias, conceitos e relações. Propôs, ainda, um método para obter a solução geometrográfica de um problema a partir da análise das relações entre os objetos geométricos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LEMOINE, Émile. *Géométrographie ou Art des Constructions Géometriques*. C.Naud Éditeur. Paris, 1902. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k68143p.r=geometrographie.langPT>. Acesso em 25 out. 2011

PINHEIRO, Virgilio Athayde. *Geometrografia*, volume I. Gráfica Editora Bahiense. Rio de Janeiro, 1974.

SMITH, David Eugene. *Biography.Emile-Michel-Hyacinthe Lemoine*. In:_ The American Mathematical Monthly, Vol. III, nº2. Springfield, 1896. Disponível em: <http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk5/js/history/lemoine.pdf >.Acesso em 20 set. 2011.