SOBRE O INFINITO EM HILBERT E A QUESTÃO DOS ELEMENTOS IDEAIS NO PROGRAMA DE FUNDAMENTAÇÃO DA MATEMÁTICA

Msc. Maria de Lourdes Rocha de Assis Jeanrenaud
Professora Colégio Pedro II
loujeanreaud@yahoo.com.br

PhD. Ricardo Silva Kubrusly
Professor HCTE/UFRJ
risk@ufrj.br

Dr. Daniel Felipe Neves Martins
Professor Colégio Pedro II
dfnmartins@gmail.com

Os resultados incongruentes acerca da existência e uso do infinito tanto na Análise Matemática quanto em outras áreas do conhecimento, impulsionaram diversos matemáticos do final do século XIX e início do século XX a questionar a legitimidade do uso de coleções infinitas em Matemática. A evidência do infinito *potencial* em contraste com a admissão do infinito *atual* na maioria dos resultados teóricos que envolviam a Análise Matemática e a Geometria conduziu ao que alguns historiadores denominam como "a crise nos fundamentos da Matemática".

Em 1925, no Congresso da Sociedade Matemática da Westfália, David Hilbert (1862 – 1943) proferiu a palestra *"Sobre o Infinito"* onde lançou as bases do que hoje conhecemos por "*Programa de Hilbert*". Sua intenção professada de elucidar a natureza do infinito e evitar os paradoxos subseqüentes de seu uso era de apresentar uma teoria capaz de substituir os métodos dedutivos baseados no infinito por procedimentos finitos que produzissem exatamente os mesmos resultados matemáticos, sem perda das generalidades já demonstradas. Neste trabalho, iremos caracterizar a natureza dos diferentes tipos de infinito, desenvolver uma breve descrição das discussões e resultados acerca do infinito através do tempo e apresentar a proposta de Hilbert ao considerar em seu método, elementos concretos extra lógicos - *os elementos ideais*.

O infinito *Potencial* - Nesta concepção o infinito corresponde a um processo indefinido, algo que pode ser aumentado, continuado ou estendido, tanto quanto se queira. Trata-se da forma mais natural e intuitiva de se conceber o infinito A sequência dos números naturais é o seu melhor exemplo: 0, 1, 2, 3, 4,..., onde sempre será possível somar mais um, estendendo-a indefinidamente.

O infinito *Atual ou "em ato"* - O primeiro matemático a fundamentar a noção de infinito *atual* foi Bernard Bolzano (1781 – 1848), em sua obra "Paradoxos do infinito" (1851). Porém, apenas no séc. XIX, esta conceituação de infinito foi apresentada de forma convincente por Georg Cantor (1845 – 1918):

(...) a primeira sendo uma quantidade finita variável e aproximando-se à medida que se fazem aproximações, todas elas finitas, enquanto que o segundo é uma quantidade fixa, constante, para além de todas as quantidades finitas.[1]

Trata-se do infinito enquanto totalidade. O infinito *potencial* consiste num processo através do qual um número cresce para além dos limites finitos; o infinito *atual* não é um processo, é ele o resultado final desse processo. A circunferência, por exemplo, pode ser pensada como um polígono com infinitos lados, cada um deles infinitamente pequeno. Os resultados e demonstrações obtidos ao recorrer-se ao uso do infinito *atual* possuem um caráter apenas existencial, sem que se possa construir explicitamente o objeto ao qual elas se referem.

O INFINITO SEMPRE PRESENTE

A noção de infinito impulsionou durante muito tempo o desenvolvimento da Matemática. Já na Grécia antiga, o atomismo se caracterizava pela infinidade: a matéria seria composta de uma quantidade infinita de átomos, indivisíveis. Eudoxo (séc. IV - a.C.) e Demócrito (séc. V – a.C.) são considerados os fundadores do atomismo, e estabeleceram uma técnica prática, o *Método da Exaustão*, que recorria ao infinito *potencial*. Zenão de Eléia (séc. V – a.C.) discordava das teses atomistas e sua argumentação consistia na criação de paradoxos para concluir que a subdivisão infinita levava a uma contradição. Aristóteles (séc. IV – a.C.), crítico dos paradoxos de Zenão, já distingue dois tipos de infinitos: o infinito como processo de crescimento sem final ou de subdivisão sem final e o infinito como totalidade completa. Para este, o infinito seria sempre *potencial*, nunca *atual*, na certeza de que tudo que está para além da compreensão, só poderia existir potencialmente por estar além da realidade. Arquimedes (séc. III a.C.) não nega a existência do infinito *atual* porém, o ignora, utilizando métodos mecânicos de aproximação para o cálculo de áreas como a do círculo, sustentados pelo *Método da Exaustão*.

Euclides (360 – 295 a.C.) incorpora este método nos seus *Elementos* (livros V e XII). Incapaz de lidar com a idéia de um infinito *atual*, Euclides estabelece seus argumentos na forma de infinito *potencial*. Por exemplo, ele não afirma que existe uma infinidade de números primos mas sim que "*os números primos existem em quantidade maior que qualquer quantidade de números primos que seja proposta*".

Ainda na antiguidade, Plotino (205 - 270 d.C.) foi o primeiro a conceber um infinito completo e absoluto, porém ainda para além do racional: um infinito que existiria como um todo, mas seria transcendental, uma característica do divino. Neste período podemos encontrar uma exceção na figura de Santo Agostinho (séc. IV), que aceitava o infinito *atual* na mente divina.

No século XIII, São Tomás de Aquino, também admitia a infinidade absoluta como uma característica divina, mas fora deste domínio considerava o infinito *atual* um desafio à natureza única, infinita e absoluta de Deus. Esta concepção do infinito manteve-se dominante até o Renascimento.

Em meados do séc. XVI, Giordano Bruno (1548 - 1600), defende a existência do infinito não transcendental e discute a argumentação finitista de Aristóteles e São Tomás de Aquino.

No séc. XVII, Cavalieri (1598-1647), Torricelli (1608-1647) e Galileu (1564-1642) retomaram a idéia da possibilidade de divisão de um contínuo num conjunto infinito de partes indivisíveis. Cavalieri fundou e Torricelli desenvolveu a *"geometria dos indivisíveis"*. Galileu, porém, foi o primeiro a perceber que este fato colocaria em evidencia certos paradoxos, ocupando-se da comparação de dimensões de conjuntos infinitos. Defendia assim que não se poderia dizer que um conjunto infinito era maior, menor ou igual a outro conjunto infinito.

Após a descoberta do cálculo infinitesimal por Leibniz (1646 – 1716) e Newton (1642 – 1727) ao final do no séc. XVII, a problemática do infinito conheceu novo impulso. Seus métodos inovadores, porém, geraram mais controvérsias sobre a natureza dos infinitesimais. No séc. XVIII, Euler (1707 – 1783) desenvolveu o moderno Cálculo Diferencial, contribuindo para o esclarecimento de questões metafísicas dos infinitamente pequenos e do infinito atual, formalizando o conceito de limite. No primeiro volume de sua obra *Introdutio in analysin infinitorium* aborda essencialmente processos infinitos. No mesmo período, o matemático francês D'Alembert (1717 – 1783) também acreditava que o Cálculo deveria ser fundamentado na idéia de limite porém aborda esta questão por meio de grandezas geométricas, rejeitando a existência de um infinito *atual*. Já Lagrange (1736 – 1813) pensava que podia eliminar a necessidade do uso dos limites ou infinitésimos, rejeitando completamente a teoria dos limites de Newton e D'Alembert, dedicando-se à fundamentação do Cálculo pela Álgebra.

A discussão sobre o infinito *atual* retorna no séc. XIX na preocupação de fundamentar a Matemática. Cauchy (1789 – 1857), Bolzano e Weierstrass (1815 – 1897) fundamentam rigorosamente os métodos do cálculo infinitesimal obtendo assim uma formalização rigorosa com base na noção de limite e permitindo assim um novo tratamento matemático do infinito. Cauchy tentou dar resposta a uma serie de paradoxos existentes desde o tempo de Zenão e tornou fundamental o conceito de integral como limite de uma soma.

Bolzano foi o primeiro matemático a fundamentar a noção de infinito *atual* em sua obra "*Paradoxos do infinito*" (1851). Para isso introduziu o conceito de conjunto como um todo, sem ser necessário pensar isoladamente em cada um dos seus elementos e definiu critérios de comparação entre cardinais infinitos.

Weierstrass por sua vez eliminou o infinitamente grande e o infinitamente pequeno reduzindo as proposições correspondentes às relações entre magnitudes finitas, considerando os infinitos apenas *potenciais*. Porém, para o desenvolvimento de seus trabalhos em Análise foi necessário fazer uma construção rigorosa dos números reais já que, até aquele momento, os matemáticos aproximavam certos números reais submetidos a certas restrições por meio de sequências de racionais. Como exemplo, π pode ser aproximado o quanto se queira por meio do limite da sequência $x_n = \sum_n \frac{(-1)^n}{n+1}$. Aproveitando-se desta idéia em particular, Weierstrass definiu número real por meio de conjuntos de sequências de racionais. Esta utilização de métodos de aproximação por infinitésimos traz de volta o problema da obtenção desses infinitésimos por meio de um processo interativo infinito, estabelecendo de imediato o tipo de infinito considerado - infinito *potencial*. Porém esse infinito é de fato concebido e trabalhado como uma totalidade completa – infinito *atual*.

Foi Cantor, na década de 1870 a 1880, quem fez com que os conjuntos infinitos passassem a ser considerados como entidades passíveis de estudo na Matemática, desenvolvendo a teoria dos números cardinais transfinitos, sustentada por um tratamento matemático do infinito *atual*. Suas descobertas no entanto, deram origem a novos paradoxos como a não possibilidade de existência do conjunto de todos os conjuntos.

Em 1872, Dedekind (1831 – 1916) considera uma nova definição de número real numa perspectiva *genética*. O progresso da Matemática consistiria em extensões sucessivas a partir do domínio dos números naturais. Cada nova extensão criaria um novo domínio a partir da introdução de novos objetos – *elementos ideais* – e a generalização das operações para que as propriedades do domínio ampliado se mantivessem. Estas extensões conduziriam ao estudo das propriedades que regem as operações e que permitem a definição de estruturas. Uma estrutura não dependeria dos objetos que fazem parte do domínio mas das regras que definem as operações. Deste modo, todo o raciocínio matemático se voltaria para a estrutura muito mais que para os números envolvidos, e os resultados obtidos poderiam ser aplicados em outros domínios como os de funções, por exemplo. A natureza dos objetos matemáticos envolvidos nas operações ficaria assim relegada a um segundo plano.

No início do séc. XX, este método abstrato oriundo da Álgebra seria adotado por Hilbert que o radicaliza e complementa por meio do uso da Lógica.

A QUESTÃO DO INFINITO EM HILBERT

Em seu discurso sobre o infinito, Hilbert reconheceu a importância do trabalho de Weierstrass na fundamentação da Análise criticando a presença de procedimentos em que transpareciam o conceito de número real definido por séries infinitas e o conceito de sistema de números reais concebido como uma totalidade. Rejeitava ainda as formas de argumentação que se referiam a uma propriedade pertencente a todos os números reais, ou à existência de um número real com certa propriedade, pois entendia que essas argumentações pressupunham o conceito de infinito. O infinito, assim manipulado, surgiria da necessidade dos matemáticos de dar sentido às suas explicações. Este infinito como totalidade, ainda cultivado nos métodos dedutivos, deveria ser compreendido como uma figura de linguagem, uma ilusão. Para isso, propunha que os métodos dedutivos baseados no infinito deveriam ser substituídos por procedimentos finitos que produzissem os mesmos resultados.

Hilbert distingue dois tipos de Matemática: uma *contextual*, na qual todos os raciocínios envolvidos dependem do sentido dos enunciados e tratam de objetos concretos e, outra *formal*, onde os raciocínios envolvidos não passam de encadeamentos de fórmulas e enunciados a partir de premissas previamente fixadas e segundo regras determinadas. Sua proposta se caracterizava na expansão da Matemática para além da contextual, garantindo a validade das leis da Lógica nesse domínio ampliado. Para isso, aplica o *método genético* às proposições matemáticas. A Matemática formal obtida por essa expansão conteria as proposições da Matemática contextual que são demonstráveis nos sistemas formais - as proposições *reais* - e além destas, outras proposições exteriores - as proposições *ideais* que serviriam para a dedução das primeiras, não possuindo realidade além desta função instrumental.

O infinito, assim considerado como um *elemento ideal* desta extensão, não passaria de algo fictício, um fenômeno bem fundamentado, que poderíamos utilizar na Matemática sem lhe atribuir significado real.

A "solução" formalista que Hilbert encontra é independente da realidade ontológica que se atribua ao infinito, já que as teorias matemáticas que supõem um infinito atual são representadas por sistemas formais. A experiência não conteria totalidades infinitas, bastando representar as proposições que lhe fazem referência, por fórmulas vazias de sentido e encadeadas por regras explícitas.

Porém, segundo Hilbert, estas proposições, introduzidas com o intuito de que as leis da Lógica possam valer universalmente, não poderiam expressar proposições finitárias e, consequentemente, as operações lógicas não poderiam lhes ser materialmente aplicadas do mesmo modo como o são para as proposições finitárias. Para levar a cabo seu intuito, seria necessário formalizar as próprias operações lógicas e demonstrações matemáticas. Esta formalização vai transformar relações lógicas em fórmulas e é o esboço de sua *teoria da prova*:

"Como isso pode ser feito? (...) Os símbolos do cálculo lógico foram originalmente introduzidos para comunicar. Contudo, é consistente com nossa perspectiva finitária negar qualquer significado aos símbolos lógicos, como negamos significado aos símbolos matemáticos e declarar que as fórmulas do cálculo lógico são proposições ideais sem qualquer significado próprio. Possuímos, no cálculo lógico, uma linguagem simbólica capaz de transformar asserções matemáticas em fórmulas e capaz de expressar a dedução lógica por meio de procedimentos formais. Em exata analogia com a transição da teoria material dos números à álgebra formal, tratamos agora os sinais e símbolos de operação do cálculo lógico abstraindo do seu significado. Desta forma, finalmente, obtemos, ao invés do conhecimento matemático material que é comunicado através da linguagem comum, somente uma coleção de fórmulas envolvendo símbolos lógicos e matemáticos que são gerados sucessivamente, de acordo com regras determinadas. Algumas dessas fórmulas correspondem a axiomas matemáticos e as regras segundo as quais fórmulas são derivadas umas das outras

correspondem à dedução material. A dedução material é então substituída por um procedimento formal governado por regras. A passagem rigorosa do tratamento ingênuo para o formal, portanto, é levada a efeito tanto pelos axiomas (...). como pelo cálculo lógico (originalmente considerado como não mais que uma linguagem diferente).”[2]

Restaria ainda verificar a *consistência* desta extensão do domínio da Matemática contextual já que a extensão através da adição de *elementos ideais* só é legitimada se não causa o aparecimento de contradições no domínio inicial, ou seja, somente se as relações válidas nas novas estruturas continuarem a ser válidas no domínio anterior, quando os *elementos ideais* são cancelados. Suponha que se trata de uma teoria X. Para atingir seus objetivos, Hilbert identifica duas etapas para justificar a introdução de *proposições ideais*. Na primeira etapa, se construiria um sistema formal completo da teoria X. O sentido de completo aqui significa que para cada prova intuitiva dentro de X, da qual pode ou não fazer parte o infinito, devemos ter uma prova correspondente no sistema formal construído. Esta prova seria uma coleção finita de símbolos e poderia ser estudada numa perspectiva finitista. Pode acontecer que a prova de uma fórmula finitista dentro do sistema formal tenha se servido de *fórmulas ideais*. Numa segunda etapa, seria necessário mostrar que tais provas poderiam ser substituídas pelas provas originais da teoria X. Ou seja, o sistema formal seria uma extensão conservativa de seu fragmento finitista, a teoria X.

Foi portanto desta forma lançado o “*Programa de Hilbert*”: identificar todo o conhecimento matemático por um conjunto de fórmulas demonstráveis por meio de métodos finitários, valendo-se do *método genético* e garantindo a *consistência* da teoria estabelecida neste processo.A *Metamatemática* ou *Teoria da Prova* tomará por objeto os sistemas formais e fará uso apenas de métodos finitários.

E eis que surgem os trabalhos de Kurt Gödel (1906 – 1978)!

Mas isso já é outra história...

---

[1] Citado em MUIR, Jane. *Of Men and Numbers: The Story of the Great Mathematicians*. New York: Dover Publications, 1996. p. 237

[2] Em CARNIELLI, W.; EPSTEIN, R. L. *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática* – 2.ed revista. São Paulo: Editora UNESP, 2009. p. 76 - “Sobre o Infinito em Hilbert”, traduzido por W. A. Carnielli a partir do original alemão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARNIELLI, W.; EPSTEIN, R. L. *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática* – 2.ed revista. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

CASSOU-NOGUÈS, Pierre. *Hilbert*. 2e tirage. Paris: Les Belles Lettres, 2004.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática.* 2a edição.Campinas: Unicamp,1997.

MUIR, Jane. *Of Men and Numbers: The Story of the Great Mathematicians*. New York: Dover Publications, 1996.

REID, C. *Hilbert*. Berlin: Springer Verlag, 1970.