CAMINHOS PARA COMPREENDER A NATUREZA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Rafael Tavares Juliani
Doutorando HCTE/UFRJ
Bolsista Capes
rafaeljuliani@gmail.com

Francisco Caruso
Professor CBPF, UERJ e HCTE/UFRJ
francisco.caruso@gmail.com

A natureza da Matemática, por mais antigo que seja este importante ramo do conhecimento, ainda é objeto de questionamento e investigação. Nas tentativas de explicar sua epistemologia, muitos filósofos tentam acomodá-la em seu sistema filosófico. Nessa linha, por exemplo, encontra-se o intuicionismo de Brouwer (1881-1966), o qual impõe várias restrições à Matemática; ou ainda, o programa finitário de Hilbert (1862-1943), que também impõe restrições à Matemática, embora um de seus objetivos fosse uma forma de resposta ao intuicionismo.

Uma explicação para as atitudes de Brouwer e de Hilbert seria o surgimento dos paradoxos na Matemática na virada do para o século XX. Com isso, alguns matemáticos acabavam tolindo certas práticas Matemáticas para evitar o surgimento de paradoxos. Essas atitudes, que ficaram conhecidas como justificacionistas, procuravam fundamentar a Matemática como conhecimento *a priori* e, assim, livrá-la de qualquer paradoxo. No entanto, ao invés de se condenar certas práticas da Matemática, se deveria tentar compreender o conhecimento matemático por meio de uma análise do seu desenvolvimento através da história, fazendo a devida distinção entre os contextos da descoberta e da justificação.

Analisando a História da Matemática, pode-se perceber claramente o quanto ela e a Física estão imbricadas. Não são poucos os casos nos quais a Matemática se desenvolveu a partir de problemas físicos e vice-versa. Mesmo antes de Galileu (1564-1642) defender que a linguagem da natureza é a Matemática, Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.) em seu tratado "Sobre o Equilíbrio dos Planos" (*Apud* BOYER, 1989) aborda questões de Estática de forma semelhante à Geometria de Euclides; a partir de um pequeno conjunto de postulados, deriva-se conclusões, teoremas. Além disso, Arquimedes se apóia em considerações de Estática, como equilíbrio de alavancas, para obter resultados sobre áreas de segmento de cônicas e outras figuras geométricas. Obviamente, esse processo faz parte do contexto da descoberta e Arquimedes apresenta justificativas "puramente" matemáticas; no entanto, o contexto da descoberta e o da justificação parecem estar mais entrelaçados do que se possa imaginar.

Em "Two Dogmas of Empiricism", Quine (1908-2000) critica a distinção entre enunciados analíticos e empíricos (QUINE, 1961). Ele defende que se uma afirmação admitida como empírica for questionada, sendo passível de revisão por causa de uma nova experiência, as afirmações ora chamadas de analíticas também podem ser revisadas; para ele, nenhuma afirmação é imune à revisão. Assim, a distinção entre analítico e empírico só faz sentido dentro de um sistema, onde as afirmações analíticas são verdadeiras em função da organização do sistema e as empíricas (sintéticas), verdadeiras a partir dos postulados, das afirmações analíticas e da experiência; mas, de uma forma geral, as afirmações analíticas em algum momento da formulação – ou melhor, da reformulação do sistema – também passaram pelo crivo de alguma experiência.

Em consonância com Quine encontra-se Lakatos, cujos trabalhos em Filosofia da Matemática nos ajudam a perceber o caráter dinâmico dos conceitos matemáticos. A postura de Lakatos não é aquela justificacionista de Hilbert e Brouwer, pois ele não enxerga a Matemática como um conjunto de verdades irrevisáveis. Em "Provas e Refutações: A Lógica da Descoberta Matemática" e em "Um Renascimento do Empiricismo na Filosofia da Matemática Recente" (*Apud* MOLINA, 2001), Lakatos torna quase invisível a linha que separa a Matemática das Ciências Naturais, mostrando que a possibilidade de se encontrar contraexemplos, falseadores, não é exclusividade dessa última. Basicamente o que ele procura mostrar é que inicialmente se tem uma conjectura da qual se obtém uma prova através de outros teoremas e lemas ou outras subconjecturas; depois, aparecem contraexemplos à conjectura; a partir disso, começa-se uma análise da prova até se perceber que havia algum lema oculto; a solução é obtida incorporando o tal lema à conjectura inicial, alterando, e enriquecendo, os conceitos envolvidos na conjectura.

Um dos exemplos que Lakatos mostra é sobre a história da conjectura de Euler (1707-1783): Em qualquer poliedro, vale a relação $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértice; A, o de aresta e F, o de faces. Ele analisa a prova de Cauchy (1789-1857) para a conjectura e as críticas a ela. Um contraexemplo para a prova de Cauchy seria um sólido oco da seguinte forma: imagine um cubo maciço e que retiramos uma parte em forma de cubo do seu interior (Figura 1).

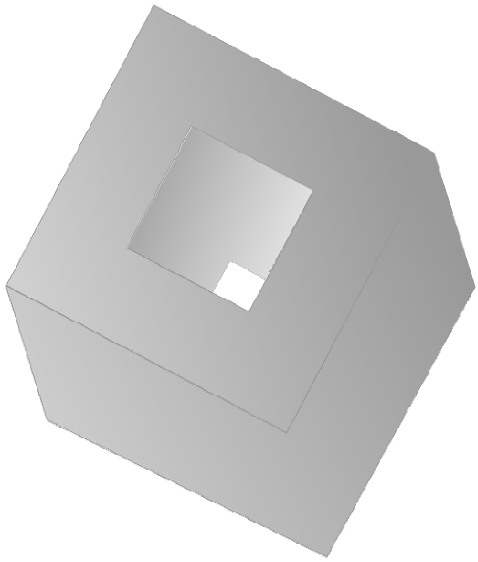

Figura 1 - Sólido oco.

A figura resultante será um sólido oco formado por dois cubos: um maior e outro menor para os quais vale a relação de Euler. Seja V', A' e F' os números de vértices, arestas e faces do cubo maior respectivamente; e V'', A'' e F'', os do cubo menor. Então, para cada cubo, temos V' - A' + F' = 2 e V'' - A'' + F'' = 2. Como o sólido oco é a soma dos vértice, arestas e faces de cada cubo, temos que V' + V'' = V, A' + A'' = A e F' + F'' = F, onde V, A e F são os números de vértices, arestas e faces do sólido oco respectivamente. Mas V' + V'' - A' - A'' + F' + F'' = 4, logo, V - A + F = 4.

Ainda no século XIX, argumentava-se que esse sólido oco não era um poliedro, pois esse sólido possui duas superfícies, uma determinada pelo cubo maior e a outra determinada pelo cubo menor; sendo, na verdade, dois poliedros em vez de um. Lakatos mostra que os conceitos da Matemática são dinâmicos, pois o objeto matemático conhecido como poliedro se alterava a cada vez que tentavam submeter a prova de Cauchy à críticas ou a cada vez que tentavam rebater essas críticas.

Outro exemplo que Lakatos oferece nos mostra não só como os conceitos da Matemática se alteram, mas também, como já foi mencionado anteriormente, indica um caso em que a Matemática se desenvolve a partir da Física. A teoria das séries trigonométricas é introduzida por Fourier (1768-1830) nas tentativas de resolução dos problemas sobre a propagação do calor. Uma dessas séries de Fourier, $\cos(x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - \frac{1}{7}\cos(7x) + \cdots$, que converge para uma função descontínua, é um contraexemplo a uma prova de Cauchy que afirma que o limite de uma série convergente de funções contínuas é uma função contínua. Na época em que Cauchy fez a prova, essa série de Fourier já era conhecida; no entanto, a compreensão do que era uma função contínua e uma série não era igual a dos dias de hoje. O próprio Fourier considerou a função limite dessa série como sendo contínua. Abel (1802-1829) considerava as séries trigonométricas como anomalias e, portanto, só as séries de potências deveriam ser consideradas na Matemática. Com as concepções atuais, é necessário um ajuste na proposição, assegurando que ela é válida só para o caso em que a convergência da série é uniforme.

As análises da História da Matemática e das Ciências de Lakatos e Quine nos mostram que o contexto usado para fazer uma descoberta, como o uso da Mecânica por Arquimedes em problemas matemáticos, influencia na construção do sistema, ou seja, influencia no contexto da justificação, ou melhor, a própria distinção entre contexto da descoberta e da justificação se torna muito fraca. Mas a concepção da Matemática como dependente da experiência é questionada por tradicionalistas, pois, segundo eles, na matemática não aparecem falseadores da teoria. Além de Lakatos ter mostrado alguns falseadores, os próprios paradoxos que surgiram na Matemática não seriam falseadores?

Os argumentos de Lakatos e Quine e os métodos de Arquimedes nos levam para uma posição mais empírica da Matemática, mas, se assim for, é preciso obter algum tipo de conciliação com o fato de que toda experiência pressupõem teoria e esse é um dos objetivos da nossa pesquisa.

Um estudo sobre os Espaços de Hilbert também é um dos objetivos da nossa pesquisa que busca compreender o papel da experiência na formação dos objetos matemáticos, pois tal estudo pode apontar para uma compreensão melhor sobre a relação entre esses dois saberes: Física e Matemática, porque os Espaços de Hilbert têm um papel fundamental na Mecânica Quântica e sua origem relaciona-se aos estudos de equações integrais, uma questão intrínseca à Matemática, embora a axiomatização dos Espaços de Hilbert tenha passada por uma adequação à Mecânica Quântica, feita principalmente por Von Neumann (BLANCHARD e BRÜNING, 2003). Tal adequação nos traz muitas indagações sobre os objetos matemáticos.

Uma questão central da Filosofia da Matemática é saber qual é o *status* dos objetos matemáticos: se eles são reais (platonismo); ou se eles existem apenas como um nome (nominalismo). Mesmo que os trabalhos de Quine e Lakatos mostrem que a Matemática também está sob uma constante revisão, essa questão entre o platonismo e o nominalismo ainda não estariam respondidas.

Estas são algumas das ideias ainda embrionárias que nortearão o início de um novo projeto de investigação sobre a epistemologia da Matemática, e suas relações com a epistemologia da

Física, voltado para a compreensão do papel da experiência na formação dos objetos matemáticos, no qual não se pretende adaptar a Matemática a um determinado sistema filosófico, mas sim o inverso, ou seja, buscar, através da História e Filosofia da Matemática e da Física, uma compreensão melhor do conhecimento matemático e, a partir de então, verificar como se pode conciliá-lo com um determinado sistema filosófico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BLANCHARD, P.; BÜRNING, E. **Mathematical methods in physics: distributions, Hilbert space operators, and variational methods**, Basileia: Birkhäuser, 2003.

BOYER, C.B. **A History of Mathematics**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons , 1989.

MOLINA, J.A. Lakatos como filósofo da Matemática. **Episteme**, Porto Alegre, n. 13, p. 129-153, jul./dez. 2001.

QUINE, W.V.O. **Two Dogmas of Empiricism**, Cambridge, 1961. Disponível em: <http://www.ditext.com/quine/quine.html>. Acesso em: 22 set. 2011.